Annales scientifiques de l'É.N.S.

Georges Giraud

Sur le problème de Dirichlet généralisé. Équations non linéaires à *m* variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 43 (1926), p. 1-128

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1926_3_43__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

SUR

LE PROBLÈME DE DIRICHLET GÉNÉRALISÉ

ÉQUATIONS NON LINÉAIRES A m VARIABLES

PAR M. GEORGES GIRAUD

Introduction.

Le principe qui a dirigé ce travail est de considérer les solutions qu'on possède du problème de Dirichlet généralisé pour les équations linéaires, comme permettant de former des approximations successives, dans le but de résoudre le même problème pour les équations non linéaires.

Rappelons d'abord ce qu'on entend par *problème de Dirichlet généralisé*. Soit

$$\mathfrak{F}(u) = F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}; u; x_1, \ldots, x_m\right) = 0$$

une équation aux dérivées partielles du second ordre, avec m variables indépendantes. Soient

$$a_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}} \quad (\alpha \neq \beta), \qquad a_{\alpha,\alpha} = \frac{\partial F}{\partial \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}}.$$

On dit que l'équation est de type *elliptique*, relativement à une solution u de cette équation, si, les coefficients $a_{\alpha,\beta}$ étant calculés relativement à cette solution, la forme quadratique en $X_1, X_2, \ldots, X_m$

$$\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} a_{\alpha,\beta} X_\alpha X_\beta$$

est *définie*. Cette condition peut n'être satisfaite que dans une région D de l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, alors c'est dans cette région que l'équation est de type elliptique.

Nous supposerons toujours (cela ne diminue pas la généralité) que la forme quadratique définie est *positive*.

Soit maintenant S une multiplicité fermée, limitant un domaine D de l'espace à m dimensions, où l'équation soit de type elliptique. Le problème de Dirichlet généralisé consiste à chercher une solution de l'équation aux dérivées partielles, qui soit définie dans D, et qui, continue même sur S, prenne sur cette multiplicité une suite de valeurs donnée à l'avance.

C'est M. Picard qui, en 1890, à propos d'équations à deux variables, les unes linéaires, et d'autres plus générales, a abordé le premier ces généralisations du problème de Dirichlet (1).

Parfois la suite des valeurs données sur S n'est pas continue; alors u ne peut être continue, et l'on sait, par le cas des fonctions harmoniques, qu'il faut remplacer la condition de continuité par quelque autre.

Voici comment sont formées les approximations successives qui sont employées ici. Supposons que l'on connaisse une fonction v, qu'on puisse regarder comme une valeur approchée de u : on remplace, dans l'équation, u par $v+h$, et l'on développe le premier membre en série de puissances de h et de ses dérivées (en série limitée, si l'équation n'est pas analytique; mais ce travail se borne aux équations analytiques). Dans le résultat, on ne conserve que la partie linéaire

(1) *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des affirmations successives* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VI, 1890).

M. Picard est revenu à plusieurs reprises sur ces questions. L'indication de plusieurs de ses travaux se trouve dans son article : *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la généralisation du problème de Dirichlet* (*Acta mathematica*, t. 25, 1902, p. 121-137).

(y compris la partie indépendante de h); en l'égalant à zéro, on obtient une équation linéaire en h, dont on cherche une solution, définie et continue dans D et sur S, et prenant sur S les valeurs $u - v$: si l'on sait trouver h, on regardera $v + h$ comme l'approximation de u qui doit succéder à v.

Pour limiter h, on rencontre des difficultés. L'équation qui donne h contient $\mathcal{F}(v)$ comme terme indépendant de h, et $\mathcal{F}(v)$ dépend des dérivées *secondes* de v. En vue de l'approximation suivante, il faut donc limiter les dérivées *secondes* de h. Mais il est classique que le calcul des dérivées secondes de h fait intervenir les dérivées de $\mathcal{F}(v)$, donc les dérivées *troisièmes* de v. On est donc entraîné à s'occuper aussi des dérivées troisièmes de h, mais celles-ci font intervenir les dérivées quatrièmes de v, et ainsi de suite. Dans ce travail, on procède autrement : la fonction h est, on le sait, holomorphe dans D et sur S (pourvu que v le soit, ainsi que la suite de valeurs données). On profite de cette propriété pour limiter h dans un domaine *complexe*, à $2m$ dimensions, comprenant S et D à son intérieur : alors les propriétés connues des fonctions analytiques donnent des limitations de toutes les dérivées de h dans un domaine fermé, intérieur au premier.

Les approximations successives sont ainsi limitées dans une suite de domaines fermés, chacun étant intérieur au précédent. Mais une objection se présente : ces domaines ayant un domaine limite (D leur est intérieur à tous), la plus courte distance des points de l'un d'entre eux à la frontière du précédent tend vers zéro ; le facteur par lequel il faut multiplier la limitation de h pour avoir celle d'une dérivée seconde augmente donc indéfiniment, au fur et à mesure que les approximations se suivent. Cette circonstance ne détruit-elle pas tout espoir de convergence? Non, et voici pourquoi : $\mathcal{F}(v + h)$, développé par rapport à h et à ses dérivées par la formule de Taylor limitée au second ordre, se réduit à ses termes du second ordre, d'après l'équation qui donne h. Dans l'approximation suivante, on a donc une équation où $\mathcal{F}(v)$ est remplacé par une fonction ayant une *limitation du second degré* par rapport à h et à ses dérivées. Or soit, par exemple, une suite de nombres réels x_n liés par les inégalités

$$|x_{n+1}| < \frac{a x_n^2}{q^{n+1}} \qquad (a > 0, \ 0 < q < 1);$$

je dis que la série Σx_n converge si $|x_0|$ est assez petit. En effet, d l'identité facile à vérifier

$$\sum_{p=1}^{n} p\,2^{n-p} = 2^{n+1} - n - 2,$$

on déduit

$$|x_n| < \frac{q^{n+2}}{a}\left(\frac{a x_0}{q^2}\right)^{2^n};$$

il y a donc convergence si

$$|x_0| < \frac{q^2}{a},$$

et cela, malgré la présence du facteur q^{-n-1} (qui augmente indéfiniment) dans la limitation de x_{n+1}. Si le facteur q^{-n-1} avait été remplacé par $q^{-\alpha^n}$, avec $1 < \alpha < 2$, il y aurait encore eu convergence pour $|x_0|$ assez petit. Effectivement, la convergence de nos approximations résultera d'inégalités analogues.

Pour former effectivement la fonction h, on recourt dans ce travail à la remarquable méthode de M. E.-E. Levi (¹), qui est affranchie des inconvénients des méthodes employant les séries entières, au point de s'appliquer même à des équations linéaires non analytiques. Pour avoir h dans un domaine de l'espace complexe, il suffit d'appliquer la méthode de M. Levi dans l'espace complexe. Une multiplicité à m dimensions de cet espace, telle que le conoïde caractéristique (²) de l'équation aux dérivées partielles, relatif à un point A de cette multiplicité, n'ait en commun avec cette dernière que ce point A, paraît bien, *a priori*, devoir jouer pour cette équation un rôle analogue à celui de l'espace réel. Tout un chapitre de ce travail (le second) est consacré principalement à cette extension de la méthode de M. Levi à l'espace complexe; les multiplicités à m dimensions que l'on y considère sont soumises à des conditions un peu plus restrictives qu'il

---

(¹) Eugenio-Elia Levi, *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. **24**, 1907, p. 275-317).

(²) Introduit par M. Hadamard, *Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. **21**, 1904, p. 535-556).

n'est indiqué ici, sans que la nécessité de ces restrictions soit prouvée.

Le domaine complexe où h se trouve ainsi formé admet les points réels de S, et les points imaginaires suffisamment voisins du domaine réel, comme points-frontière. Mais on étend ce domaine en calculant, sur S, une dérivée de h suivant une direction non tangente à S, et en employant le théorème de Cauchy-Kowalewski.

Ces considérations sur l'espace complexe nécessitent des intégrations par parties, et des dérivations de fonctions représentées par des intégrales étendues à des multiplicités dépendant d'un paramètre. Il m'a semblé indispensable de préparer ces calculs en revenant, dans le premier Chapitre de ce travail, sur l'extension à l'espace complexe de la notion d'intégrale multiple, extension qui est due à Poincaré (1), suivi par M. Picard (2).

C'est seulement dans le troisième et dernier Chapitre de ce travail que sont abordées les équations non linéaires. Le problème de Dirichlet proprement dit n'y est résolu que pour un domaine suffisamment petit dans toutes ses dimensions, et pour des valeurs données sur S suffisamment voisines de valeurs pour lesquelles on connaît déjà une solution. En outre, S doit être régulièrement analytique, mais peut se composer de plusieurs contours sans points communs. La suite des valeurs données sur S doit être holomorphe.

Enfin on démontre que toute solution d'une équation non linéaire, qui est continue ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres, est holomorphe. Pour certaines équations, telles que l'équation des surfaces minima, il suffit de supposer la continuité des dérivées secondes (3) pour arriver à la même conclusion.

---

(1) H. Poincaré, *Sur les résidus des intégrales doubles* (*Acta matematica*, t. 9, 1887, p. 321-380).

(2) Émile Picard et Georges Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, Chap. I et III.

(3) Dans le cas de deux variables, ce résultat (moins la simplification relative aux types tels que l'équation des surfaces minima) a été démontré par M. Serge Bernstein, *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Thèse de l'Université de Paris, 1903. M. Bernstein a en outre traité le problème de Dirichlet généralisé dans le cas de deux variables (*Mathematische Annalen*, t. 62, 1906, p. 253-271, et t. 69, 1910, p. 82-136, et *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. 27, 1910, p. 233-256).

Dans deux Notes antérieures [1], j'ai annoncé des résultats plus étendus. Mais certaines lacunes rendent mes raisonnements non rigoureux, et, pour le moment tout au moins, je me borne à ce qui précède.

Les intégrales multiples qui se rencontrent dans ce travail sont écrites avec une notation due à Méray, et qui consiste à écrire $d(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, ce qu'on écrit ordinairement $dx_1\, dx_2 \ldots dx_m$. Comme on rencontre souvent des notations tout à fait conventionnelles, telles que $d\omega$, dv, etc., je pense que la notation ci-dessus ne causera de gène à personne. En outre, je n'écris qu'un signe $\int$ pour chaque intégrale, en précisant en haut de ce signe l'ordre de multiplicité à l'aide d'accents ou de chiffres romains.

J'exprime à M. Picard toute ma reconnaissance pour les encouragements qu'il m'a donnés au cours de ce travail.

CHAPITRE I.

INTÉGRALES MULTIPLES. FORMULES DE STOKES. DÉRIVATION. DOMAINE RÉEL. DOMAINE COMPLEXE [2].

I. — Domaine réel.

1. *Sens d'une multiplicité à p paramètres dans un espace à m dimensions.* — Soit

$$x_\alpha = f_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_p) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{1,1}$$

[1] *Comptes rendus*, t. 180, 1925, p. 413-415 et 562-563.

[2] Ce travail était entièrement terminé quand j'ai eu connaissance d'un article de M. Philip Franklin (*Multiple integrals in n-space* paru dans *Annals of Mathematics*, 2e série, vol. 24, 1922-1923, p. 213-226). Cet auteur, dont le point de départ est le même que le mien, a traité dans cet article l'extension des formules de Green et de Stokes à l'espace réel à n dimensions; une erreur paraît cependant s'être glissée dans la formule (29), p. 220, qui serait l'extension de la formule de Stokes. L'article se termine par l'application des résultats obtenus aux intégrales complexes, au point de vue de la généralisation du théorème de Cauchy.

une multiplicité à p paramètres dans un espace réel à m dimensions. On dit que les paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_p$, rangés dans cet ordre, définissent un *sens* sur cette multiplicité.

Deux représentations paramétriques, la première à l'aide de $t_1, t_2, \ldots, t_p$, la seconde à l'aide de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont dites définir *le même* sens (ou *correspondre* au même sens) si

$$\frac{d(t_1, t_2, \ldots, t_p)}{d(u_1, u_2, \ldots, u_p)} > 0; \tag{1,2}$$

elles correspondent à des sens *différents*, ou *opposés*, dans le cas où ce déterminant fonctionnel serait négatif.

Il peut arriver, par exemple si les f_α sont des fonctions périodiques, que deux ou plusieurs systèmes de valeurs de $t_1, t_2, \ldots, t_p$ correspondent au même point de la multiplicité. Soient $t'_1, t'_2, \ldots, t'_p$ ce que sont devenus $t_1, t_2, \ldots, t_p$ après un circuit fermé décrit sur la multiplicité. Si, pour certains circuits fermés,

$$\frac{d(t'_1, t'_2, \ldots, t'_p)}{d(t_1, t_2, \ldots, t_p)} < 0,$$

on dit que la multiplicité n'a pas deux sens distincts. De telles multiplicités seront exclues de ce qui va suivre, à moins qu'on n'y trace des coupures telles que les deux sens redeviennent distincts.

La notion de *sens* correspond à celle de *côté* d'une surface de l'espace ordinaire : si une telle surface est définie paramétriquement à l'aide de t_1 et de t_2, et si l'on mène en un point les tangentes aux courbes t_1 variable et t_2 variable, dirigées dans les sens des paramètres croissants, on peut considérer l'une des deux demi-normales comme la troisième arête d'un trièdre de sens positif, les deux premières arêtes étant ces tangentes : cette demi-normale définit le *côté* de la surface correspondant aux paramètres t_1, t_2, pris dans cet ordre.

Dans le cas général, on peut dire aussi que le sens choisi est défini par les demi-tangentes aux p courbes t_β variables ($\beta = 1, 2, \ldots, p$), tracées chacune dans le sens des t_β croissants, et rangées dans l'ordre des valeurs de β.

2. *Intégrale étendue à une multiplicité prise dans un certain sens.* —

Soit à définir l'intégrale

$$(2,1) \qquad \mathrm{I}=\int^{(p)} \Sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} \mathrm{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}(\mathrm{X})\, d(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_p}),$$

étendue à notre multiplicité prise dans le sens choisi. Les A affectés d'indices sont des fonctions du *point* X, de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$, qui changent de signe quand on permute deux indices. La sommation est supposée étendue à toutes les *combinaisons* des entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, pris parmi les nombres $1, 2, \ldots, m$: c'est-à-dire qu'on ne considère pas comme distincts deux systèmes d'entiers ne différant que par l'ordre de ces entiers.

Le sens choisi étant celui auquel correspondent $t_1, t_2, \ldots, t_p$, notre intégrale est, par définition, l'intégrale ordinaire

$$(2,2) \quad \mathrm{I}=\int^{(p)} \Sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} \mathrm{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}(\mathrm{X}) \frac{d(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_p})}{d(t_1, t_2, \ldots, t_p)} d(t_1, t_2, \ldots, t_p).$$

Cette valeur ne dépend pas de l'ordre dans lequel on range les entiers de chaque combinaison, ni de la représentation paramétrique choisie, pourvu qu'elle corresponde au sens considéré.

Si l'on change ce sens, l'intégrale est multipliée par -1.

3. *Changement de variables.* — Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(n \geqq p)$ de nouvelles variables liées aux x_α par les relations

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

On suppose que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont fonctions de $t_1, t_2, \ldots, t_p$, et que c'est par leur intermédiaire que $x_1, x_2, \ldots, x_m$ dépendent des mêmes paramètres. Alors il est évident que

$$\mathrm{I}=\int^{(p)} \Sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} \Sigma_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p} \mathrm{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}(\mathrm{X}) \frac{\partial(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_p})}{\partial(y_{\beta_1}, y_{\beta_2}, \ldots, y_{\beta_p})} d(y_{\beta_1}, y_{\beta_2}, \ldots, y_{\beta_p}),$$

cette intégrale étant étendue à la multiplicité correspondante de l'espace $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, prise dans le sens $(t_1, t_2, \ldots, t_p)$. Il est presque superflu de dire que les $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ sont des combinaisons des entiers $1, 2, \ldots, n$.

4. *Sens associés sur une multiplicité et sur sa frontière.* — Le champ dans lequel il faut faire varier $t_1, t_2, \ldots, t_p$ pour obtenir la multiplicité considérée peut être défini par des inégalités. Si l'une de ces inégalités vient à se transformer en égalité, on est sur la *frontière* de la multiplicité.

Sur cette frontière, en écartant, comme dans tout ce Chapitre, toutes les singularités, $t_1, t_2, \ldots, t_p$ peuvent être considérés comme des fonctions de $p-1$ paramètres, $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$.

Choisissons un paramètre u_0 tel que l'on *sorte* de la multiplicité [1] en faisant *croître* u_0 à partir de la valeur qu'il a en un point de la frontière. La tangente à la courbe u_0 variable ne doit pas être tangente à la frontière.

Cela posé, le sens défini sur la frontière par les paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ est dit le sens *associé* au sens défini sur la multiplicité par les paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_p$ si

$$\frac{d(t_1, t_2, \ldots, t_p)}{d(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})} > 0. \tag{4,1}$$

Cette définition ne dépend pas du paramètre u_0 choisi. Soit en effet

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_p) < 0 \tag{4,2}$$

l'inégalité qui définit la multiplicité au voisinage du point considéré de la frontière. Soient $u'_0, u'_1, \ldots, u'_{p-1}$ les paramètres u d'un point de cette frontière. La condition (4, 2) peut s'écrire

$$u_0 < u'_0 = \psi(u'_1, u'_2, \ldots, u'_{p-1}).$$

Si l'on remplace u_0 par un autre paramètre v_0, défini par l'égalité

$$v_0 = \lambda(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}),$$

la frontière est donnée par

$$v'_0 = \lambda[\psi(u'_1, \ldots, u'_{p-1}), u'_1, \ldots, u'_{p-1}],$$

---

[1] Dans certains cas, il peut être préférable de dire que l'on passe *à l'intérieur* de la multiplicité en faisant *décroître* u_0.

et il faut que $u_0 < u'_0$ entraîne $v_0 < v'_0$, ce qui équivaut à

$$\frac{\partial v_0}{\partial u_0} > 0;$$

alors comme

$$\frac{\partial v_0}{\partial u_0} \frac{d(t_1, t_2, \ldots, t_p)}{d(v_0, u_1, \ldots, u_{p-1})} = \frac{d(t_1, t_2, \ldots, t_p)}{d(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})},$$

on voit que le remplacement de u_0 par v_0 ne change rien à la définition du *sens associé*.

5. *Formules de Green et de Stokes.* — Considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{C}}^{(p-1)} \Sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} \mathrm{B}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} d(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{p-1}}),$$

étendue à la frontière C d'une multiplicité S, le sens choisi sur C étant le sens associé au sens défini sur S par les paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_p$.

On peut écrire aussi

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{C}'}^{(p-1)} \Sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} \Sigma_\beta \mathrm{B}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} \frac{\partial(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{p-1}})}{\partial(t_{\beta+1}, t_{\beta+2}, \ldots, t_{\beta-1})} d(t_{\beta+1}, \ldots, t_{\beta-1}),$$

où la notation $(t_{\beta+1}, \ldots, t_{\beta-1})$ signifie qu'on a permuté circulairement $t_1, t_2, \ldots, t_p$ de façon à amener t_β en tête, et qu'ensuite on a supprimé t_β de la permutation obtenue. Nous avons ainsi une intégrale dans l'espace $(t_1, t_2, \ldots, t_p)$, et il est à peu près évident que la multiplicité C′ de cet espace, qui correspond à C, doit être prise dans le sens associé au sens $(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ de la région S′ de cet espace correspondant à S.

Ceci nous ramène donc au cas particulier où $p = m$. Dans ce dernier cas, je dis que

$$(5,1) \qquad \int_{\mathrm{C}}^{(m-1)} \mathrm{B}_{\beta+1, \beta+2, \ldots, \beta-1} d(x_{\beta+1}, \ldots, x_{\beta-1}) = (-1)^{(m-1)(\beta-1)} \int_{\mathrm{S}}^{(m)} \frac{\partial \mathrm{B}_{\beta+1, \ldots, \beta-1}}{\partial x_\beta} d(x_1, \ldots, x_m),$$

S et C étant pris dans des sens associés. En effet, choisissons sur S le sens $(x_1, \ldots, x_m)$, c'est-à-dire que nous avons au second membre une intégrale ordinaire. Si nous remarquons que

$$\frac{d(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{d(x_\beta, x_{\beta+1}, \ldots, x_{\beta-1})} = (-1)^{(m-1)(\beta-1)},$$

nous en concluons que le sens dans lequel est prise la frontière C est le sens défini par $x_{\beta+1}, \ldots, x_{\beta-1}$ ou le sens opposé selon le signe de $(-1)^{(m-1)(\beta-1)}$: ce qui justifie la formule (5, 1), en effectuant au second membre l'intégration par rapport à x_β.

C'est la généralisation de la formule de Green.

Revenons maintenant au cas général, et appliquons la formule de Green dans l'espace $(t_1, t_2, \ldots, t_p)$. En supposant que les x_α aient, par rapport à $t_1, \ldots, t_m$ des dérivées secondes continues, on trouve

$$\mathrm{I} = \int^{(p)} \Sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} \Sigma_\beta (-1)^{(p-1)(\beta-1)} \frac{\partial}{\partial t_\beta} \left[\mathrm{B}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}} \frac{\partial(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{p-1}})}{\partial(t_{\beta+1}, \ldots, t_{\beta-1})} \right] d(t_1, \ldots, t_p).$$

Mais

$$\frac{\partial \mathrm{B}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}}}{\partial t_\beta} = \sum_\lambda \frac{\partial \mathrm{B}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\lambda}{\partial t_\beta}.$$

Le coefficient de $\dfrac{\partial \mathrm{B}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}}}{\partial x_\lambda}$ sous le signe $\int$ sera donc

$$\Sigma_\beta (-1)^{(p-1)(\beta-1)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial t_\beta} \frac{\partial(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{p-1}})}{\partial(t_{\beta+1}, \ldots, t_{\beta-1})} = \frac{d(x_\lambda, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{p-1}})}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_p)}.$$

Ensuite nous avons sous le signe $\int$ le produit de $\mathrm{B}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}}$ par

$$\Sigma_\beta (-1)^{(p-1)(\beta-1)} \frac{\partial}{\partial t_\beta} \frac{\partial(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{p-1}})}{\partial(t_{\beta+1}, t_{\beta+2}, \ldots, t_{\beta-1})}.$$

Ceci est une somme de termes dont chacun est le produit de $p-1$ dérivées premières des variables x_α par une dérivée seconde d'une autre de ces variables. Nous allons montrer que cette somme est nulle; il suffit pour cela de montrer que les dérivées secondes disparaissent. Cherchons donc le coefficient de $\dfrac{\partial^2 x_{\alpha_1}}{\partial t_\beta \, \partial t_\gamma}$; la question ne se pose que si β et γ sont différents; soit donc

$$\gamma > \beta.$$

Alors, dans

$$\frac{\partial}{\partial t_\beta}\frac{\partial(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{p-1}})}{\partial(t_{\beta+1}, \ldots, t_{\beta-1})},$$

ce coefficient est

$$(-1)^{\gamma-\beta+1}\frac{\partial(x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{p-1}})}{\partial(t_{\beta+1}, \ldots, t_{\gamma-1}, t_{\gamma+1}, \ldots, t_{\beta-1})};$$

et dans

$$\frac{\partial}{\partial t_\gamma}\frac{\partial(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{p-1}})}{\partial(t_{\gamma+1}, \ldots, t_{\gamma-1})},$$

on trouve

$$(-1)^{\beta-\gamma+p+(\gamma-\beta-1)(p-\gamma+\beta-1)+1}\frac{\partial(x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{p-1}})}{\partial(t_{\beta+1}, \ldots, t_{\gamma-1}, t_{\gamma+1}, \ldots, t_{\beta-1})}.$$

En combinant linéairement ces coefficients, à l'aide des facteurs

$$(-1)^{(p-1)(\beta-1)} \quad \text{et} \quad (-1)^{(p-1)(\gamma-1)}$$

on trouve zéro.

Nous avons donc

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{S}}^{(p)} \Sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}} \Sigma_\lambda \frac{\partial \mathrm{B}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}}}{\partial x_\lambda} d(x_\lambda, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{p-1}}),$$

ou, en changeant la notation,

$$(5,2) \qquad \int_{\mathrm{C}}^{(p-1)} \Sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}} \mathrm{B}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}} d(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{p-1}})$$
$$= \int_{\mathrm{S}}^{(p)} \Sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \Sigma_h (-1)^{(p-1)(h-1)} \frac{\partial \mathrm{B}_{\alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_{h-1}}}{\partial x_{\alpha_h}} d(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_p});$$

le second membre contient une sommation par rapport aux combinaisons $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda)$ p à p des entiers $1, 2, \ldots, m$.

C'est la généralisation de la formule de Stokes [1].

6. *Dérivation d'une intégrale d'ordre m.* — Soit l'intégrale ordinaire

$$(6,1) \qquad \mathrm{F}(\alpha) = \int_{\mathrm{D}}^{(m)} \mathrm{P}(x_1, x_2, \ldots, x_m; \alpha)\, d(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

étendue à un domaine D, dépendant, ainsi que sa frontière S, de α. On

---

[1] Nous avons supposé que $x_1, \ldots, x_m$ admettaient, par rapport à $t_1, \ldots, t_p$, des dérivées secondes continues; on peut se débarrasser de cette hypothèse par un artifice de M. Goursat (*Cours d'Analyse*, t. I, 3e édition, p. 355, exercice 13).

suppose P continu, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre. On suppose en outre que l'on sache exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en fonctions continues, ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'au second ordre, de α et de m paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_m$, de façon qu'à D corresponde un domaine D' de variation de $t_1, t_2, \ldots, t_m$, indépendant de α; soit S' la frontière de D'. On admet que S' se compose d'un nombre fini de portions où l'une des variables est fonction continue, et à dérivées premières continues, des $m-1$ autres. Faisons le changement de variables, en supposant le jacobien positif :

$$F(\alpha)=\int_{D'}^{(m)} P(x_1, \ldots, x_m; \alpha)\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_m)}d(t_1, t_2, \ldots, t_m).$$

En désignant par $F'(\alpha)$ la dérivée de $F(\alpha)$, nous tirons de là

$$(6,2)\quad F'(\alpha)=\int_{D}^{(m)}\frac{\partial P}{\partial\alpha}d(x_1, x_2, \ldots, x_m)+\int_{D}^{(m)}\sum_{n=1}^{m}\frac{\partial P}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}d(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$
$$+\int_{D'}^{(m)} P\sum_{n=1}^{m}\frac{\partial\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, \dfrac{\partial x_n}{\partial\alpha}, x_{n+1}, \ldots, x_m\right)}{\partial(t_1, \ldots, t_m)}d(t_1, t_2, \ldots, t_m).$$

La formule (5, 1) nous permet de transformer, par intégration par parties, la dernière intégrale en

$$(6,3)\quad \int_{S'}^{(m-1)} P\sum_{n=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}(-1)^{(m-1)(n+p)+(m-1)(p-1)}\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\frac{\partial(x_{n+1}, \ldots, x_{n-1})}{\partial(t_{p+1}, \ldots, t_{p-1})}d(t_{p+1}, \ldots, t_{p-1})$$
$$-\int_{D'}^{(m)}\sum_{n=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}(-1)^{(m-1)(n+p)}\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial t_p}\left[P\frac{\partial(x_{n+1}, \ldots, x_{n-1})}{\partial(t_{p+1}, \ldots, t_{p-1})}d(t_1, \ldots, t_m)\right].$$

Développons la dérivation dans la seconde intégrale, et faisons la sommation par rapport à p dans la première; ceci devient

$$(6,4)\quad \int_{S}^{(m-1)} P\sum_{n=1}^{m}(-1)^{(m-1)(n-1)}\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}d(x_{n+1}, \ldots, x_{n-1})$$
$$-\int_{D'}^{(m)}\sum_{n=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m}(-1)^{(m-1)(n+p)}\frac{\partial P}{\partial x_q}\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\frac{\partial x_q}{\partial t_p}\frac{\partial(x_{n+1}, \ldots, x_{n-1})}{\partial(t_{p+1}, \ldots, t_{p-1})}d(t_1, \ldots, t_m)$$
$$-\int_{D'}^{(m)} P\sum_{n=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}(-1)^{(m-1)(n+p)}\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial t_p}\frac{\partial(x_{n+1}, \ldots, x_{n-1})}{\partial(t_{p+1}, \ldots, t_{p-1})}d(t_1, \ldots, t_m).$$

Or la dernière intégrale est nulle, car nous avons déjà, dans la démonstration de la formule (5,2), prouvé [1] l'identité

$$\sum_{p=1}^{m}(-1)^{(m-1)(p-1)}\frac{\partial}{\partial t_p}\frac{\partial(x_{n+1},\ldots,x_{n-1})}{\partial(t_{p+1},\ldots,t_{p-1})}=0.$$

Quant à l'avant-dernière intégrale (6,4), en sommant par rapport à p, on trouve zéro si $q\neq n$, et

$$-\int_{D}^{(m)}\sum_{n=1}^{m}\frac{\partial P}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}d(x_1,\ldots,x_m)$$

si $q=n$, ce qui détruit la seconde intégrale (6,2).

Nous avons donc finalement

$$\text{(6,5)}\qquad F(\alpha)=\int_{D}^{(m)}\frac{\partial P}{\partial\alpha}d(x_1,x_2,\ldots,x_m)$$
$$+\int_{S}^{(m-1)}P\sum_{n=1}^{m}(-1)^{(m-1)(n-1)}\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}d(x_{n+1},\ldots,x_{n-1}),$$

le sens d'intégration sur S étant le sens associé au sens $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de D.

7. *Dérivation d'une intégrale quelconque.* — Passons au cas général, où l'ordre de l'intégrale est quelconque. Soit

$$\text{(7,1)}\quad F(\alpha)=\int_{S}^{(p)}\Sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}A_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}(x_1,x_2,\ldots,x_m;\alpha)\,d(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_p}),$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ des entiers 1, 2, ..., m. La multiplicité S d'intégration et sa frontière C dépendent de α. Les fonctions $A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ et leurs dérivées premières sont continues.

Supposons qu'il soit possible d'exprimer les coordonnées x_1, x_2, ..., x_m d'un point de S en fonctions continues, ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'au second ordre, de p paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_p$ et de α, de façon qu'après le changement de variables il soit possible d'appliquer la formule (6,5); le sens choisi sur S est supposé être le

[1] Avec une autre notation.

sens $(t_1, t_2, \ldots, t_p)$. Soient S′ le domaine de variation de $(t_1, t_2, \ldots, t_p)$, C′ sa frontière.

Pour abréger, nous désignerons par Σ_1 une sommation étendue à toutes les combinaisons $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ des entiers 1, 2, …, m pris p à p.

Faisons le changement de variables :

$$F(\alpha) = \Sigma_1 \int_{S'}^{(p)} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \frac{\partial(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_p})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)} d(t_1, \ldots, t_p).$$

Appliquons la formule (6, 5) :

$$(7,2) \quad F'(\alpha) = \sum_1 \left\{ \int_S^{(p)} \frac{\partial A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial \alpha} d(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_p}) \right.$$
$$+ \int_S^{(p)} \sum_{n=1}^{m} \frac{\partial A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha} d(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_p})$$
$$+ \int_{S'}^{(p)} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \sum_{n=1}^{m} \frac{\partial\left(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}, \dfrac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial \alpha}, x_{\alpha_{n+1}}, \ldots, a_{\alpha_p}\right)}{\partial(t_1, \ldots, t_p)} d(t_1, \ldots, t_p)$$
$$\left. + \int_{C'}^{(p-1)} A_{\alpha_1\ldots\alpha_p} \frac{\partial(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_p})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)} \sum_{n=1}^{m} (-1)^{(p-1)(n-1)} \frac{\eth t_n}{\eth \alpha} d(t_{n+1}, \ldots, t_{n-1}) \right\}.$$

$\dfrac{\eth t_n}{\eth \alpha}$ désigne la dérivée de t_n par rapport à α, en supposant $t_1, \ldots, t_p$ exprimées sur C_1 en fonctions de $p-1$ paramètres à domaine de variation fixe, et de α. De même nous poserons, sur C,

$$(7,21) \qquad \frac{\eth x_n}{\eth \alpha} = \sum_{q=1}^{p} \frac{\partial x_n}{\partial t_q} \frac{\eth t_q}{\eth \alpha} + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha} \qquad (n = 1, 2, \ldots m).$$

La troisième intégrale de (7, 2), intégrée par parties, devient

$$(7,22) \quad \sum_1 \left\{ \int_{C'}^{(p-1)} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \sum_{n=1}^{p} \sum_{q=1}^{p} (-1)^{(p-1)(n+q)+(p-1)(q-1)} \frac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial \alpha} \frac{\partial(x_{\alpha_{n+1}}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}})}{\partial(t_{q+1}, \ldots, t_{q-1})} d(t_{q+1}, \ldots, t_{q-1}) \right.$$
$$\left. - \int_{S'}^{(p)} \sum_{n=1}^{p} \sum_{q=1}^{p} (-1)^{(p-1)(n-q)} \frac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial t_q} \left[A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \frac{\partial(x_{\alpha_{n+1}}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}})}{\partial(t_{q+1}, \ldots, t_{q+1})} \right] d(t_1, \ldots, t_p) \right\}.$$

Dans la première intégrale, effectuons la sommation par rapport à q; dans la seconde, développons la dérivation; l'expression devient

$$(7,23)\quad \sum_1 \left\{ \begin{aligned} & \int_{\mathrm{C}}^{(p-1)} \mathrm{A}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \sum_{n=1}^{p} (-1)^{(p-1)(n-1)} \frac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial \alpha} d(x_{\alpha_{n+1}}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}) \\ & - \int_{\mathrm{S}'}^{(p)} \sum_{n=1}^{p} \sum_{q=1}^{p} \sum_{r=1}^{p} (-1)^{(p-1)(n+q)} \frac{\partial \mathrm{A}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial x_r} \frac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial \alpha} \frac{\partial x_r}{\partial t_q} \frac{\partial(x_{\alpha_{n+1}}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}})}{\partial(t_{q+1}, \ldots, t_{q-1}} d(t_1, \ldots, t_p) \\ & - \int_{\mathrm{S}'}^{(p)} \sum_{n=1}^{p} \sum_{q=1}^{p} (-1)^{(p-1)(n+q)} \mathrm{A}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \frac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial t_q} \frac{\partial(x_{\alpha_{n+1}}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}})}{\partial(t_{q+1}, \ldots, t_{q-1})} d(t_1, \ldots, t_p) \end{aligned} \right\}.$$

La troisième intégrale est nulle, comme la troisième intégrale (6,4). Dans la seconde, effectuons la sommation par rapport à q : nous trouvons zéro si r est l'un des nombres $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n-1}$, et, dans le cas où r n'est aucun de ces nombres,

$$(7,24)\quad -\int_{\mathrm{S}}^{(p)} \sum_{n=1}^{p} \Sigma' (-1)^{(p-1)(n-1)+p-n} \frac{\partial \mathrm{A}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} \frac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial \alpha} d(x_{\alpha_{n+1}}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}),$$

où l'on a appelé α_{p+1} ce qui était nommé r, de sorte que $(x_{\alpha_{n+1}}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}})$ désigne maintenant ce qu'on obtient en permutant circulairement les $p+1$ variables $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{p+1}}$, de façon à amener x_{α_n} au premier rang, et en supprimant x_{α_n} de l'arrangement obtenu : on est averti de cette nouvelle signification par l'ordre de l'intégrale, qui est p. Σ' est une sommation par rapport à l'entier α_{p+1}, qui ne peut recevoir aucune des valeurs $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n-1}$. Si l'on donne à α_{p+1} la valeur α_n, on remarquera que

$$d(x_{\alpha_{n+1}}, \ldots, _{\alpha_{n-1}}) = (-1)^{p-n+(p-1)(n-1)} d(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_p}),$$

et que, par suite, les termes obtenus détruisent les termes de la seconde intégrale (7,2) où n aurait l'une des valeurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Ainsi nous supposerons $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$ distincts. Pour éviter l'ambiguïté, nous désignerons par $\beta_1, \ldots, \beta_{p+1}$ une combinaison quelconque des entiers $1, 2, \ldots, m$, pris $p+1$ à $p+1$, et par Σ_2 une somme étendue à ces combinaisons. Nous trouvons ainsi

$$(7,3)\quad \begin{aligned} F'(\alpha) = & \sum_1 \int_S^{(p)} \frac{\partial A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial \alpha} d(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_p}) \\ & + \sum_2 \int_S^{(p} \sum_{n=1}^{p+1} (-1)^{pn} \frac{\partial A_{\beta_{n+1},\ldots,\beta_{n-1}}}{\partial x_{\beta_n}} \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{pq} \frac{\partial x_{\beta_q}}{\partial \alpha} d(x_{\beta_{q+1}}, \ldots, x_{\beta_{q-1}}) \\ & + \sum_1 \int_C^{(p-1)} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \sum_{n=1}^{p} (-1)^{(p-1)(n-1)} \frac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial \alpha} d(x_{\alpha_{n+1}}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}) \\ & + \sum_1 \int_{C'}^{(p-1)} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \frac{\partial(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_p})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)} \sum_{n=1}^{p} (-1)^{(p-1)(n-1)} \frac{\partial t_n}{\partial \alpha} d(t_{n+1}, \ldots, t_{n-1}); \end{aligned}$$

dans la seconde intégrale, les termes où $q = n$ proviennent de la seconde intégrale (7, 2).

Nous allons maintenant transformer la dernière intégrale de cette formule. En changeant n en q, et en mettant en évidence les dérivées par rapport à t_q, elle devient

$$(7,31)\quad \sum_1 \int_{C'}^{(p-1)} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \sum_{n=1}^{p} \sum_{q=1}^{p} (-1)^{(p-1)(n-1)} \frac{\partial t_q}{\partial \alpha} \frac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial t_q} \frac{\partial(x_{\alpha_{n+1}}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}})}{\partial(t_{q+1}, \ldots, t_{q-1})} d(t_{q+1}, \ldots, t_{q-1}),$$

ou bien

$$(7,32)\quad \sum_1 \int_{C'}^{(p-1)} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \sum_{n=1}^{p} \sum_{q=1}^{p} \sum_{r=1}^{p} (-1)^{(p-1)(n-1)} \frac{\partial t_r}{\partial \alpha} \frac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial t_r} \frac{\partial(x_{\alpha_{n+1}}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}})}{\partial(t_{q+1}, \ldots, t_{q-1})} d(t_{q+1}, \ldots, t_{q-1}),$$

car si, dans cette dernière expression, on effectue la sommation par rapport à n, on trouve zéro si $r \neq q$; et, pour $r = q$, on retrouve l'expression (7,31). Dans (7,32), effectuons la sommation par rapport à q; cela devient

$$(7,33)\quad \sum_1 \int_C^{(p-1)} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \sum_{n=1}^{p} \sum_{r=1}^{p} (-1)^{(p-1)(n-1)} \frac{\partial t_r}{\partial \alpha} \frac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial t_r} d(x_{\alpha_{n+1}}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}).$$

En groupant cette valeur de la dernière intégrale (7,3) avec la troisième intégrale de la même formule, nous obtenons le résultat définitif

$$
\begin{aligned}
(7,4)\quad \mathrm{F}'(\alpha) = {} & \sum_1 \int_{\mathrm{S}}^{(p)} \frac{\partial \mathrm{A}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial \alpha}\, d(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_p}) \\
& + \sum_2 \int_{\mathrm{S}}^{(p)} \sum_{n=1}^{p+1} (-1)^{pn} \frac{\partial \mathrm{A}_{\beta_{n+1},\ldots,\beta_{n-1}}}{\partial x_{\beta_n}} \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{pq} \frac{\partial x_{\beta_q}}{\partial \alpha}\, d(x_{\beta_{q+1}}, \ldots, x_{\beta_{q-1}}) \\
& + \sum_1 \int_{\mathrm{C}}^{(p-1)} \mathrm{A}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \sum_{n=1}^{p} (-1)^{(p-1)(n-1)} \frac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial \alpha}\, d(x_{\alpha_{n+1}}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}).
\end{aligned}
$$

Si l'on était parti d'une intégrale simple

$$
(7,5)\qquad \mathrm{F}(\alpha) = \sum_{\lambda=1}^{m} \int_{\mathrm{L}} \mathrm{A}_\lambda(x_1, \ldots, x_m;\, \alpha)\, dx_\lambda,
$$

L étant une courbe dépendant de α, ainsi que ses extrémités M et N, les mêmes calculs auraient donné [1]

$$
\begin{aligned}
(7,6)\qquad \mathrm{F}'(\alpha) = {} & \sum_{\lambda=1}^{m} \int_{\mathrm{L}} \frac{\partial \mathrm{A}_\lambda}{\partial \alpha}\, dx_\lambda \\
& + \sum_{\lambda,\mu} \int_{\mathrm{L}} \left(\frac{\partial \mathrm{A}_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \mathrm{A}_\mu}{\partial x_\lambda} \right) \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha}\, dx_\lambda - \frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha}\, dx_\mu \right) \\
& + \left[\sum_\lambda \mathrm{A}_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha} \right]_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}},
\end{aligned}
$$

la seconde sommation étant étendue aux combinaisons λ, μ, des entiers $1, 2, \ldots, m$, pris deux à deux.

La formule (7,4) suppose en réalité, à cause de l'hypothèse faite dans la démonstration de la formule (6,5), que $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont exprimables en fonctions continues, de α et de p paramètres t_1, $t_2, \ldots, t_p$, *dont le domaine de variation soit indépendant de* α. Mais le mode de démonstration adopté nous permet d'élargir cette hypothèse, en l'élargissant seulement pour (6,5).

Remarquons d'abord que, pour la formule (7,6), c'est-à-dire pour $p = 1$, il n'y a pas de difficulté. Nous allons donc supposer la formule (7,4) vraie pour les intégrales d'ordre $p - 1$; nous allons

---

[1] *Voir* GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. I, 3e édition, p. 644 et suiv.

voir qu'elle le sera pour celles d'ordre p, indépendamment de l'hypothèse précédente. Il suffit, pour cela, d'établir la formule (6,5).

Or soit $Q(x_1, \ldots, x_p; \alpha)$ une fonction telle que

$$\frac{\partial Q(x_1, \ldots, x_p; \alpha)}{\partial x_1} = P(x_1, \ldots, x_p; \alpha);$$

Q s'obtient par une intégration. Alors la fonction $F(\alpha)$ de (6,1), où nous changeons m en p, devient

$$F(\alpha) = \int_S^{(p-1)} Q(x_1, \ldots, x_m; \alpha)\, d(x_2, \ldots, x_p).$$

Mais la formule (7,4) est, par hypothèse, applicable à cette dernière intégrale, d'où

$$\begin{aligned} F'(\alpha) = & \int_S^{(p-1)} \frac{\partial Q}{\partial \alpha}\, d(x_2, \ldots, x_m) \\ & + \int_S^{(p-1)} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \sum_{n=1}^{p} (-1)^{(p-1)(n-1)} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\, d(x_{n-1}, \ldots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

car la frontière S de D n'a pas de frontière; cela équivaut à la formule (6,5), comme on le voit en appliquant la formule de Green à la première intégrale.

II. — Domaine complexe.

8. *Multiplicité à p paramètres.* — Les équations

$$(8,1) \qquad z_\alpha = f_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_p) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

où les f_α sont des fonctions *complexes* des variables *réelles* $t_1, t_2, \ldots, t_p$ définissent une multiplicité à p dimensions dans l'espace complexe $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$.

Les *sens* sur cette multiplicité se définissent comme dans le domaine réel.

Les *sens associés* sur une multiplicité et sur sa frontière se définissent également comme dans le domaine réel; il suffit de décomposer $z_1, \ldots, z_m$ en leurs parties réelles et imaginaires pour voir que ce sont les mêmes notions.

9. *Intégrale.* — Par définition

$$\int_S^{(p)} \Sigma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(z_1, z_2, \ldots, z_m)\, d(z_{\alpha_1}, \ldots, z_{\alpha_p})$$
$$= \int_{S'}^{(p)} \Sigma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \frac{d(z_{\alpha_1}, \ldots, z_{\alpha_p})}{d(t_1, \ldots, t_p)} d(t_1, \ldots, t_p),$$

toujours comme dans le domaine réel, et avec les mêmes conventions.

10. *Formules de Green et de Stokes.* — Pour établir que ces formules s'étendent au domaine complexe, il suffit d'établir le cas particulier suivant :

$$\text{(10,1)} \qquad \int_C^{(p-1)} A(z_1, \ldots, z_m)\, d(z_1, \ldots, z_{p-1})$$
$$= (-1)^{p-1} \int_S^{(p)} \sum_{n=p}^{m} \frac{\partial A}{\partial z_n} d(z_1, \ldots, z_{p-1}, z_n),$$

$A(z_1, \ldots, z_m)$ étant une fonction holomorphe.

Or soient

$$z_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, m),$$
$$A = B(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m) + iC(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m),$$

x_α, y_α, B, C étant réels. On a

$$\text{(10,2)} \quad \int_C^{(p-1)} A d(z_1, \ldots, z_{p-1})$$
$$= \Sigma_1 (-1)^{h_1+\ldots+h_r - \frac{r(r+1)}{2}} i^{p-r-1} \int_C^{(p-1)} A d(x_{h_1}, \ldots, x_{h_n}; y_{k_1}, \ldots, y_{k_{p-r-1}}),$$

la sommation Σ_1 étant étendue à toutes les combinaisons $h_1, h_2, \ldots, h_r$ des entiers $1, 2, \ldots, p-1$ de façon que

$$h_1 < h_2 < \ldots < h_r;$$

r peut varier de zéro à $p-1$. Les entiers

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_{p-r-1}$$

sont les autres entiers de la suite $1, 2, \ldots, p-1$. Appliquons la formule de Stokes au second membre de la relation (10,2); cette application est légitime, car, en décomposant A en $B + iC$, nous avons au second membre une combinaison linéaire d'intégrales réelles; nous obtenons

$$(10,3) \quad \Sigma_1 (-1)^{h_1+\ldots+h_r-\frac{r(r+1)}{2}+p-1}\, i^{p-r-1}$$
$$\times \left[\int_S^{(p)} \sum_{n=1}^{m} \frac{\partial(B+iC)}{\partial x_n} d(x_{h_1}, \ldots, x_{h_r}; y_{k_1}, \ldots, y_{k_{p-r-1}}; x_n)\right.$$
$$\left.+\int_S^{(p)} \sum_{n=1}^{m} \frac{\partial(B+iC)}{\partial y_n} d(x_{h_1}, \ldots, x_{h_r}; y_{k_1}, \ldots, y_{k_{p-r-1}}; y_n)\right].$$

Si nous effectuons d'abord la sommation Σ_1, en laissant n fixe, et en tenant compte de l'identité d'analyticité

$$\frac{\partial(B+iC)}{\partial x_n} = -i\frac{\partial(B+iC)}{\partial y_n} = \frac{\partial A}{\partial z_n},$$

nous constatons que l'expression (10,3) n'est autre que

$$(-1)^{p-1}\sum_{n=1}^{m}\int_S^{(p)} \frac{\partial A}{\partial z_n} d(z_1, \ldots, z_{p-1}; z_n).$$

Les termes correspondant aux valeurs $1, 2, \ldots, p-1$ de n sont donc nuls; et nous avons l'identité annoncée (10,1).

Il suit de là que la formule de Stokes (5,2) peut se transporter sans modification au domaine complexe :

$$(10,4) \quad \int_C^{(p-1)} \Sigma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}} B_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}}(z_1, z_2, \ldots, z_m)\, d(z_{\alpha_1}, \ldots, z_{\alpha_{p-1}})$$
$$= \int_S^{(p)} \Sigma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \Sigma_h (-1)^{(p-1)(h-1)} \frac{\partial B_{\alpha_{h+1},\ldots,\alpha_{h-1}}}{\partial z_{\alpha_h}} d(z_{\alpha_{h+1}}, \ldots, z_{\alpha_{h-1}}),$$

les multiplicités S et C étant prises dans des sens associés, et les fonctions $B_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}}$ étant holomorphes.

11. *Dérivation.* — Considérons tout d'abord la fonction

$$(11,1) \qquad F(\alpha) = \int_S^{(m)} P(z_1, \ldots, z_m; \alpha)\, d(z_1, \ldots, z_m),$$

où P est une fonction holomorphe de $z_1, \ldots, z_m$, ainsi que sa dérivée par rapport au paramètre réel α; P est en outre fonction continue de $z_1, \ldots, z_m, \alpha$. La multiplicité S d'intégration et sa frontière C dépendent de α : $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sont, sur S, des fonctions continues, et à dérivées continues jusqu'au second ordre, de α et de m paramètres réels, $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Soient S' le domaine de variation de $t_1, t_2, \ldots, t_m$, et C' sa frontière. Sur C', on admet que $t_1, t_2, \ldots, t_m$ peuvent être exprimés en fonctions de α et de $m-1$ paramètres réels à domaine de variation indépendant de α; $\frac{\delta t_n}{\delta \alpha}$ désignera la dérivée partielle prise dans ces conditions; de plus

$$\frac{\delta z_n}{\delta \alpha} = \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial z_n}{\partial t_p} \frac{\delta t_p}{\delta \alpha} + \frac{\partial z_n}{\partial \alpha}.$$

Si

$$z_n = x_n + i y_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, m),$$

x_n et y_n étant réels, on posera

$$P = Q(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m; \alpha) + iR(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m; \alpha).$$

Soit $(h_1, \ldots, h_r)$ une combinaison quelconque des entiers $1, 2, \ldots, m$, rangés par ordre de grandeurs croissantes

$$h_1 < h_2 < \ldots < h_r \qquad (0 \leqq r \leqq m),$$

et soient $k_1, k_2, \ldots, k_{m-r}$ les autres entiers $1, 2, \ldots, m$,

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_{m-r}.$$

Alors

$$(11,2) \qquad F(\alpha) = \Sigma_1 (-1)^{h_1 + \ldots + h_r - \frac{r(r+1)}{2}} i^{m-r} \times \int_S^{(m)} (Q + iR)\, d(x_{h_1}, \ldots, x_{h_r}; y_{k_1}, \ldots, y_{k_{m-r}}),$$

la sommation Σ_1 étant étendue à toutes les combinaisons $(h_1, \ldots, h_r)$. Le second membre étant une combinaison linéaire d'intégrales réelles, nous pouvons appliquer la formule (7,4), en y remplaçant m et p respectivement par $2m$ et m.

Tout d'abord, la quantité sous le second signe $\int$ est nulle. En effet, il y figure une combinaison $p+1$ à $p+1$ (ici $m+1$ à $m+1$) des entiers 1, 2, ..., m (ici 1, 2, ..., $2m$). Comme $z_1, z_2, \ldots, z_m$ doivent tous figurer, soit par leur partie réelle, soit par leur partie imaginaire, dans la combinaison de variables obtenue, il en résulte qu'une et une seule de ces variables complexes figure à la fois par sa partie réelle et par sa partie imaginaire. Il suffit de voir ce qui se passe si cette variable est z_1 : le terme correspondant est nul. En effet, soit

$$(x_1, x_{h_2}, \ldots, x_{h_r}; y_1, y_{k_1}, \ldots, y_{k_{m-r}})$$

notre combinaison de $m+1$ variables réelles. La fonction

$$\sum_{n=1}^{p+1} (-1)^{pn} \frac{\partial A_{\beta_{n+1}, \ldots, \beta_{n-1}}}{\partial x_{\beta_n}},$$

de la formule (7,4), devient ici

$$(-1)^{m+h_2+\ldots+h_r-\frac{r(r-1)}{2}} i^{m-r+1} \frac{\partial(Q+iR)}{\partial x_1}$$
$$+(-1)^{m(r+1)+r(m-r)+1+h_2+\ldots+h_r-\frac{r(r+1)}{2}} i^{m-r} \frac{\partial(Q+iR)}{\partial y_1},$$

ce qui n'est autre, à un facteur près, que

$$i\frac{\partial(Q+iR)}{\partial x_1} - \frac{\partial(Q+iR)}{\partial y_1},$$

qui est nul.

La formule (7,4) donne donc

$$\begin{aligned}
F'(\alpha) = & \int_S^{(m)} \frac{\partial P}{\partial \alpha} d(z_1, \ldots, z_m) \\
& + \Sigma_1 (-1)^{h_1+\ldots+h_r-\frac{r(r+1)}{2}} i^{m-r} \int_C^{(m-1)} P(z_1, \ldots, z_m; \alpha) \\
& \times \Bigg[\sum_{n=1}^{r} (-1)^{(m-1)(n-1)+(m-n)(n-1)} \\
& \qquad \times \frac{\partial x_{h_n}}{\partial \alpha} d(x_{h_1}, \ldots, x_{h_{n-1}}, x_{h_{n+1}}, \ldots, x_{h_r}; y_{k_1}, \ldots, y_{k_{m-r}}) \\
& \qquad + \sum_{n=1}^{m-r} (-1)^{(m-1)(n+r-1)+(m-n-r)(n+r-1)} \\
& \qquad \times \frac{\partial y_{k_n}}{\partial \alpha} d(x_{h_1}, \ldots, x_{h_r}; y_{k_1}, \ldots, y_{k_{n-1}}, y_{k_{n+1}}, \ldots, y_{k_{m-r}}) \Bigg]
\end{aligned}$$

ou bien

$$(11,3)\quad \mathrm{F}'(\alpha)=\int_{\mathrm{S}}^{(m)} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \alpha}\, d(z_1, \ldots, z_m)$$
$$+\Sigma_1 (-1)^{h_1+\ldots+h_r-\frac{r(r+1)}{2}}\, i^{m-r} \int_{\mathrm{C}}^{(m-1)} \mathrm{P}(z_1, \ldots, z_m; \alpha)$$
$$\times\left[\sum_{n=1}^{r} (-1)^{n-1} \frac{\partial x_{h_n}}{\partial \alpha}\, d(x_{h_1}, \ldots, x_{h_{n-1}}, x_{h_{n+1}}, \ldots, x_{h_r}; y_{k_1}, \ldots, y_{k_{m-r}})\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{m-r} (-1)^{n+r-1} \frac{\partial y_{k_n}}{\partial \alpha}\, d(x_{h_1}, \ldots, x_{h_r}; y_{k_1}, \ldots, y_{k_{n-1}}, y_{k_{n+1}}, \ldots, y_{k_{m-r}})\right].$$

Or, on peut vérifier que ceci se réduit à

$$(11,4)\quad \mathrm{F}'(\alpha)= \int_{\mathrm{S}}^{(m)} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \alpha}\, d(z_1, \ldots, z_m)$$
$$+\int_{\mathrm{C}}^{(m-1)} \mathrm{P} \sum_{n=1}^{m} (-1)^{(m-1)(n-1)} \frac{\partial z_n}{\partial \alpha}\, d(z_{n+1}, \ldots, z_{n-1}).$$

C'est la formule (6,5), qui se trouve ainsi transportée dans le domaine complexe.

D'après le mode de démonstration de la formule (7,4), nous pouvons affirmer immédiatement que si, dans

$$(11,5)\quad \mathrm{F}(\alpha)=\Sigma_1 \int_{\mathrm{S}}^{(p)} \mathrm{A}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}(z_1, z_2, \ldots, z_m; \alpha)\, d(z_{\alpha_1}, \ldots, z_{\alpha_p}),$$

$z_1, z_2, \ldots, z_m$ sont fonctions de α et fonctions holomorphes de p paramètres complexes $u_1, u_2, \ldots, u_p$, qui sont eux-mêmes fonctions de α et de p paramètres réels $t_1, t_2, \ldots, t_p$, on aura

$$(11,6)\quad \mathrm{F}'(\alpha)= \Sigma_1 \int_{\mathrm{S}}^{(p)} \frac{\partial \mathrm{A}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}}{\partial \alpha}\, d(z_{\alpha_1}, \ldots, z_{\alpha_p})$$
$$+\Sigma_2 \int_{\mathrm{S}}^{(p)} \sum_{n=1}^{p+1} (-1)^{pn} \frac{\partial \mathrm{A}_{\beta_{n+1}, \ldots, \beta_{n-1}}}{\partial z_{\beta_n}} \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{pq} \frac{\partial z_{\beta_q}}{\partial \alpha}\, d(z_{\beta_{q+1}}, \ldots, z_{\beta_{q-1}})$$
$$+\Sigma_1 \int_{\mathrm{C}}^{(p-1)} \mathrm{A}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p} \sum_{n=1}^{p} (-1)^{(p-1)(n-1)} \frac{\partial z_{\alpha_n}}{\partial \alpha}\, d(z_{\alpha_{n+1}}, \ldots, z_{\alpha_{n-1}}),$$

ou, autrement dit, la formule (7,4) est applicable.

Mais si l'on introduit les variables réelles $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$, on voit que les coefficients de

$$\frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial y_\lambda}{\partial \alpha}, \quad \frac{\delta x_\lambda}{\delta \alpha}, \quad \frac{\delta y_\lambda}{\delta \alpha},$$

sous les deux dernières intégrales, ne dépendent pas du fait que $z_1, \ldots, z_m$ sont ou non des fonctions de $t_1, \ldots, t_p$ de la nature indiquée. La formule (11,6) est donc vraie quelle que soit la façon dont $z_1, \ldots, z_m$ dépendent de α et de $t_1, \ldots, t_p$ (pourvu qu'il y ait des dérivées continues jusqu'au second ordre).

Le cas où la multiplicité S est tracée sur une multiplicité analytique indépendante de α, c'est-à-dire le cas où

$$(11,7) \qquad z_n = z_n(u_1, u_2, \ldots, u_p) \qquad (n = 1, 2, \ldots, m),$$

les z_n étant holomorphes, et $u_1, u_2, \ldots, u_p$ étant des variables complexes, offre un intérêt particulier : *la seconde intégrale de la formule* (11,6) *est identiquement nulle.*

Si c'est la frontière C qui est tracée sur une multiplicité analytique à $p-1$ paramètres indépendante de α,

$$(11,8) \qquad z_n = z_n(u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots, m),$$

les z_n étant des fonctions holomorphes des variables complexes $u_1, \ldots, u_{p-1}$, *la troisième intégrale de la formule* (11,6) *est identiquement nulle.*

Si donc les $A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}$ ne dépendent pas de α et si la multiplicité d'intégration se déforme en restant sur une même multiplicité analytique (11,7), pendant que sa frontière reste sur une même multiplicité analytique (11,8), *l'intégrale* (11,4) *ne change pas*, à moins que des singularités n'interviennent [1].

---

[1] Ceci peut permettre de définir des fonctions à l'aide d'intégrales multiples. Soient par exemple $f(x, y, z) = 0$ une surface algébrique, et $\int^{\prime\prime} F(x, y, z)\, d(x, y)$ une intégrale attachée à la surface. Soit une famille de courbes algébriques C tracées sur la surface, et dépendant d'un ou de plusieurs paramètres $\alpha, \beta, \ldots$. Si l'on étend l'intégrale à une multiplicité ayant pour frontière, d'une part un circuit fermé tracé sur une courbe fixe C_0, d'autre part un circuit fermé tracé sur la courbe mobile C, l'intégrale sera fonction des paramètres de C. Cette fonction est définie à des *périodes* près, dépendant du *genre* des courbes C, des propriétés d'*analysis situs* de la surface et des singularités de F.

III. — Quelques intégrales étendues à une hypersphère ou à son contour (¹).

12. Soit tout d'abord à calculer

$$(12,1)\qquad \mathrm{I}_m = \int^{(m)} x_1^{2p}\, d(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

étendue à l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \leqq r^2,$$

p étant entier, positif ou nul. Le résultat, pour $p = 0$ tout au moins, est connu (²); dans la suite nous aurons aussi besoin du résultat pour $p = 1$.

Tout d'abord une homothétie prouve que

$$(12,2)\qquad \mathrm{I}_m = \mathrm{A}_m\, r^{m+2p},$$

A_m étant indépendant de r. D'autre part, on peut écrire

$$(12,21)\qquad \mathrm{I}_m = \int^{''} \left[\int^{(m-2)} x_1^{2p}\, d(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}) \right] d(x_{m-1}, x_m),$$

l'intégration d'ordre $m-2$ étant étendue au domaine

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{m-2}^2 \leqq r^2 - x_{m-1}^2 - x_m^2,$$

et l'intégration double, au domaine

$$x_{m-1}^2 + x_m^2 \leqq r^2.$$

Ceci donne

$$(12,22)\qquad \mathrm{I}_m = \mathrm{A}_{m-2} \int^{''} (r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{m+2p-2}{2}}\, d(x, y),$$

l'intégrale étant étendue au cercle de centre O et de rayon r. Posons

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta \qquad (\rho \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi);$$

(¹) Nous rassemblons ici quelques résultats dont les démonstrations interrompraient trop ce qui suivra.

(²) *Voir* Goursat, *Cours d'Analyse*, t. I, 3ᵉ édition, p. 392, exercice 5. Ces intégrales peuvent aussi se ramener aux intégrales de Dirichlet, en prenant comme variables $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2$.

il vient

$$\mathrm{I}_m = 2\pi \mathrm{A}_{m-2} \int_0^r (r^2 - \rho^2)^{\frac{m+2p-2}{2}} \rho\, d\rho,$$

d'où

$$\mathrm{A}_m = \frac{2\pi}{m+2p} \mathrm{A}_{m-2}.$$

Donc

$$(12,23) \qquad \mathrm{I}_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+p+1\right)} \mathrm{C}\, r^{m+2p},$$

C ayant au plus deux valeurs distinctes, l'une pour m impair, l'autre pour m pair. Mais, en prenant successivement $m = 1$ et $m = 2$, on trouve la même valeur pour C,

$$(12,24) \qquad \mathrm{C} = \frac{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{2p+1} = \frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2^p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}.$$

Ainsi

$$(12,3) \qquad \mathrm{I}_m = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+p+1\right)} r^{m+2p}.$$

C'est le résultat cherché.

On peut en déduire, à l'aide d'une substitution orthogonale sur les variables d'intégration, que

$$\int^{(m)} (a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m)^{2p}\, d(x_1, \ldots, x_m) = (a_1^2 + \ldots + a_m^2)^p \mathrm{I}_m,$$

l'intégrale étant étendue au même domaine, et $a_1, \ldots, a_m$ étant des constantes. Une identification immédiate conduit alors au résultat suivant :

$$(12,4) \qquad \int^{(m)} x_1^{2\alpha} x_2^{2\beta} \ldots x_m^{2\lambda}\, d(x_1, \ldots, x_m)$$
$$= \frac{(2\alpha)!\,(2\beta)!\ldots(2\lambda)!}{2^{2p}\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+p+1\right)} r^{m+2p},$$

l'intégrale étant toujours étendue au même domaine, et $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant des entiers positifs ou nuls, de somme $2p$.

13. *Mesure du contour.* — Soit à calculer l'intégrale

$$(13,1) \qquad S_m r^{m-1} = \int^{(m-1)} \sqrt{\Sigma_p\, d(x_{p+1}, \ldots, x_{p-1})^2} \qquad (p = 1, 2, \ldots, m),$$

étendue à

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 = r^2,$$

la notation $(x_{p+1}, \ldots, x_{p-1})$ ayant le même sens que la notation analogue au n° 5: Il est évident que S_m est indépendant de r.

Partons de

$$\int_{\Sigma x_\lambda^2 \leq r^2}^{(m)} d(x_1, \ldots, x_m) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} r^m,$$

et transformons le premier membre. Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ m fonctions de $m-1$ paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, liées par la relation

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2 = 1.$$

Posons

$$x_p = \rho \xi_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, m);$$

les x_p sont ainsi fonctions de ρ et des $m-1$ paramètres λ_α. On a la relation symbolique

$$d(x_1, \ldots, x_m) = \rho^m d(\xi_1, \ldots, \xi_m) + \rho^{m-1} \Sigma_\alpha (-1)^{\alpha-1} \xi_\alpha\, d(\rho, \xi_1, \ldots, \xi_{\alpha-1}, \xi_{\alpha+1}, \ldots, \xi_m).$$

Mais il est évident que

$$d(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0.$$

D'autre part

$$\frac{\Sigma_\alpha (-1)^{\alpha-1} \xi_\alpha\, d(\rho, \xi_1, \ldots, \xi_{\alpha-1}, \xi_{\alpha+1}, \ldots, \xi_m)}{d(\rho, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1})} = -\begin{vmatrix} 0 & \xi_1 & \ldots & \xi_m \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \lambda_1} & \ldots & \dfrac{\partial \xi_m}{\partial \lambda_1} \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \lambda_{m-1}} & \ldots & \dfrac{\partial \xi_m}{\partial \lambda_{m-1}} \end{vmatrix} = \pm \sqrt{\Sigma_\alpha \left[\frac{d(\xi_{\alpha+1}, \ldots, \xi_{\alpha-1})}{d(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1})}\right]^2},$$

comme on le voit immédiatement en élevant le déterminant au carré par le procédé ordinaire, et en transformant le résultat par une formule connue. Ceci permet d'écrire

$$\int^{(m)} d(x_1, \ldots, x_m) = \int_0^r \rho^{m-1} \int^{(m-1)} \sqrt{\Sigma_\alpha d(\xi_{\alpha+1}, \ldots, \xi_{\alpha-1})^2}\, d\rho = \frac{S_m r^m}{m},$$

d'où

$$(13,2) \qquad S_m = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Tel est le résultat cherché.

14. *Autres intégrales.* — Considérons l'intégrale

$$(14,1) \qquad I = \int^{(m-1)} f(x_m) \sqrt{\Sigma_p d(x_{p+1}, \ldots, x_{p-1})^2},$$

étendue à

$$\Sigma_p x_p^2 = 1 \qquad (p = 1, 2, \ldots, m).$$

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ $m-1$ fonctions de $m-2$ paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-2}$, telles que

$$\sum_{p=1}^{m-1} \xi_p^2 = 1.$$

Posons

$$x_p = \xi_p \sin\theta \qquad (p = 1, 2, \ldots, m-1),$$
$$x_m = \cos\theta,$$

où

$$0 \leqq \theta \leqq \pi.$$

Les coordonnées d'un point de l'hypersphère sont ainsi fonctions des $m-2$ paramètres λ_α, et de θ. On aura d'abord

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_{m-1}) = {} & \sin^{m-1}\theta\, d(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}) \\ & + \sin^{m-2}\theta \cos\theta\, \Sigma_p (-1)^{p-1} d(\theta, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_{m-1}) \\ = {} & \pm \sin^{m-2}\theta \cos\theta \sqrt{\Sigma_p \left[\frac{d(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p-1})}{d(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-2})}\right]^2}\, d(\theta, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-2}) \end{aligned}$$

(*voir* le numéro précédent). Puis

$$d(x_{p+1}, \ldots, x_{p-1}) = (-1)^{mp-1} \sin^{m-1}\theta\, d(\theta, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p-1})$$
$$(p = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Ceci permet d'écrire

$$I=\int_0^{\pi}\sin^{m-2}\theta\, f(\cos\theta)\int^{(m-1)}\sqrt{\Sigma_p\, d(\xi_{p+1},\,\ldots,\,\xi_{p-1})^2}\, d\theta,$$

ou

$$(14,2)\qquad I=\frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\sin^{m-2}\theta\, f(\cos\theta)\, d\theta.$$

15. *Application.* — Proposons-nous de trouver une limite supérieure de

$$(15,1)\qquad I=\int^{(m-1)} r^{-m-h}\sqrt{\Sigma_p\, d(x_{p+1},\,\ldots,\,x_{p-1})^2},$$

étendue à

$$\Sigma_p\, x_p^2=R^2,$$

r étant la distance point $(x_1,\,\ldots,\,x_m)$ à un point A intérieur à l'hypersphère; h est une constante.

Par une substitution orthogonale, nous amenons A à la position

$$\left(0,\,0,\,\ldots,\,0,\,\frac{a}{R}\right)\qquad (0\leqq a<1).$$

L'homogénéité montre que l'intégrale est le produit de R^{-h-1} par une fonction de a; ceci nous permet de faire $R=1$. Nous sommes ramenés au calcul précédent, avec

$$f(x_m)=(1-2a\,x_m+a^2)^{-\frac{m+h}{2}},$$

de sorte que

$$I=\frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{m-2}\theta\, d\theta}{(1-2a\cos\theta+a^2)^{\frac{m+h}{2}}}.$$

Posons

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}=t;$$

nous obtenons

$$I=\frac{2^m\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\,t^{m-2}\,|\, dt}{(1+t^2)^{\frac{m-h-2}{2}}\,[(1-a)^2+(1+a)^2t^2]^{\frac{m+h}{2}}},$$

d'où, si $-1 < h \leqq m-2$,

$$I \leqq \frac{2^{m+1}\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{t^{m-2}\,dt}{[(1-a)^2+(1+a)^2 t^2]^{\frac{m+h}{2}}}.$$

Soit

$$t = \frac{1-a}{1+a}u;$$

nous obtenons

$$I \leqq \frac{2^{m+1}\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)(1+a)^{m-1}(1-a)^{h+1}} \int_0^\infty \frac{u^{m-2}\,du}{(1+u^2)^{\frac{m+h}{2}}}$$

$$\leqq \frac{2^{m+1}\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)(1-a)^{h+1}} \int_0^\infty \frac{u^{m-2}\,du}{(1+u^2)^{\frac{m+h}{2}}},$$

ou

(15,2) $$I \leqq \frac{\lambda}{(1-a)^{h+1}},$$

λ ne dépendant que de m et de h.

Si $h > m-2$, on remarque que

$$\frac{1+t^2}{(1-a)^2+(1+a)^2 t^2} \leqq \frac{1}{(1-a)^2},$$

ce qui conduit à

$$I \leqq \frac{2^{m+1}\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)(1-a)^{h+2-m}} \int_0^\infty \frac{t^{m-2}\,dt}{[(1-a)^2+(1+a)^2 t^2]^{m-1}},$$

et, en passant à la variable d'intégration u, on obtient un résultat de même forme que le précédent (15,2), λ ne dépendant plus que de m (et non de h).

Enfin examinons le cas où $h = -1$. Nous avons alors

$$I = \frac{2^{m+1}\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{t^{m-2}\,dt}{(1+t^2)^{\frac{m-1}{2}}[(1-a)^2+(1+a)^2 t^2]^{\frac{m-1}{2}}},$$

ou

$$\mathrm{I} < \frac{2^{m+1}\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{1}{(1+a)^{\frac{m-2}{2}}} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{(1-a)^2+(1+a)^2 t^2}},$$

ou

$$\mathrm{I} < \frac{2^{m+1}\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{1}{(1+a)^{\frac{m-2}{2}}} \left[\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-a)^2+(1+a)^2 t^2}} + \int_1^\infty \frac{dt}{(1+a)\, t(1+t^2)^{\frac{m-1}{2}}}\right].$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{I} < \frac{2^{m+1}\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \log\frac{4}{1-a} + \frac{2^{n+1}\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_1^\infty \frac{dt}{t(1+t^2)^{\frac{m-1}{2}}},$$

ou enfin

$$(15,3) \qquad \mathrm{I} < \lambda \log\frac{\mu}{1-a},$$

μ étant un nombre quelconque supérieur à *un*, et λ dépendant de m et de μ.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS LINÉAIRES.

I. — Recherche d'une solution particulière dans le domaine réel.

1. Soit l'équation

$$(1,1) \qquad \mathcal{F}(u) = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = f \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m),$$

la sommation $\Sigma_{\alpha,\beta}$ étant étendue à tous les arrangements avec répétition des entiers $1, 2, \ldots, m$; cette sommation comprend donc m^2 termes. Les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c, f sont des fonctions continues données de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et

$$a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha}.$$

Nous supposons d'abord que ces fonctions sont réelles, et que l'équation est de type *elliptique* dans un domaine D réel, limité par une surface S, c'est-à-dire que, dans D, la forme quadratique en X_1, $X_2, \ldots, X_m$

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} X_\alpha X_\beta \tag{1,2}$$

est *définie*. Nous ferons en sorte que cette forme soit définie *positive*, et que son discriminant soit *un*; s'il n'en est pas ainsi, il suffit de multiplier les deux membres de l'équation par une fonction convenable pour être ramené à ce cas.

2. Cela étant, nous cherchons d'abord une solution particulière de l'équation (1,1). Soit

$$H(x_1, \ldots, x_m; a_1, \ldots, a_m) = \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(a_1, \ldots, a_m)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta), \tag{2,1}$$

les $A_{\alpha,\beta}$ étant les coefficients de la forme adjointe à (1,2); si nous n'avions pas pris le discriminant de cette dernière égal à *un*, nous aurions dû, dans (2,1), diviser les $A_{\alpha,\beta}$ par ce discriminant.

Nous désignerons par X le point $(x_1, \ldots, x_m)$, par A le point $(a_1, \ldots, a_m)$, et nous écrirons souvent H(X, A) le premier membre de (2,1); et nous ferons de même pour les autres fonctions des mêmes variables.

La solution que nous cherchons sera de la forme (¹)

$$u(X) = \int_D^{(m)} \frac{\varphi(A)\, d(a_1, \ldots, a_m)}{H^{\frac{m-2}{2}}(X, A)}, \tag{2,2}$$

où $\varphi(A)$ est une fonction à déterminer. On suppose ici

$$m > 2.$$

Formons $\mathcal{F}(u)$. L'intégrale du second membre de (2,2) est convergente si φ est une fonction bornée. Dans la même hypothèse, ses dérivées partielles du premier ordre s'obtiennent en dérivant sous le

(¹) Cet artifice est puisé dans le travail cité de M. E.-E. Levi.

signe $\int$

$$(2,3)\qquad \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = -(m-2)\int_{D}^{(m)} \frac{\varphi(A)\Sigma_\gamma A_{\alpha,\gamma}(A)(x_\gamma - a_\gamma)}{H^{\frac{m}{2}}(X, A)} d(a_1, \ldots, a_m),$$

car il y a convergence uniforme.

Passons aux dérivées secondes. Partageons D en deux régions D′ et D″, séparées par une surface S′; on suppose que D″ contient le point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. On aura

$$(2,31)\qquad \frac{d^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \int_{D'}^{(m)} \varphi(A)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\right] d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$- (m-2)\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{D''}^{(m)} \varphi(A)\frac{\Sigma_\gamma A_{\alpha,\gamma}(A)(x_\gamma - a_\gamma)}{H^{\frac{m}{2}}(X, A)} d(a_1, \ldots, a_m).$$

Pour transformer le second terme, et pour montrer même que la dérivation indiquée est possible, nous supposons d'abord que *les* $a_{\alpha,\beta}$ *ont des dérivées partielles du premier ordre continues;* en outre, que $\varphi(A)$ *est continu,* et *a ses dérivées partielles du premier ordre continues.* Alors nous pourrons écrire

$$(2,32)\qquad \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\right] = -\frac{\partial}{\partial a_\alpha}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\right]$$
$$- \frac{m-2}{2}\Sigma_{\gamma,\delta}\frac{\partial A_{\gamma,\delta}}{\partial a_\alpha}\frac{(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)}{H^{\frac{m}{2}}(X, A)}.$$

Donc

$$(2,33)\qquad \int_{D''}^{(m)} \varphi(A)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\right] d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$= -\int_{D''}^{(m)} \varphi(A)\frac{\partial}{\partial a_\alpha}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\right] d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$- \frac{m-2}{2}\int_{D''}^{(m)} \varphi(A)\Sigma_{\gamma,\delta}\frac{\partial A_{\gamma,\delta}}{\partial a_\alpha}\frac{(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)}{H^{\frac{m}{2}}(X, A)} d(a_1, \ldots, a_m).$$

La seconde intégrale du second membre se dérive immédiatement sous le signe $\int$. La première intégrale devient, par intégration par parties,

$$-(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}\int_{S'}^{(m-1)} \varphi(A)\, H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\, d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$$

$$+\int_{D''}^{(m)} \frac{\partial \varphi(A)}{\partial a_\alpha} H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\, d(a_1, \ldots, a_m),$$

l'intégrale sur S′ étant prise dans le sens associé au sens $(a_1, \ldots, a_m)$ de D″. Or ces deux intégrales se dérivent sous le signe $\int$. Nous trouvons ainsi

$$(2,4)\quad \mathcal{F}(u) = \int_{D'}^{(m)} \varphi(A)\, \mathcal{F}\Big[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\Big] d(a_1, \ldots, a_m)$$

$$-\int_{S'}^{(m-1)} \varphi(A)\, \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(X) \frac{\partial}{\partial x_\beta}\Big[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\Big] d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$$

$$-\int_{D''}^{(m)} [\ldots]\, d(a_1, \ldots, a_m);$$

l'expression de la fonction qui est intégrée dans D″ n'importe pas pour la suite.

Faisons tendre D″ vers zéro dans toutes ses dimensions, le point X restant à son intérieur. Il est évident que la troisième intégrale tend vers zéro. Nous allons montrer que la première intégrale tend vers une limite, c'est-à-dire que

$$\int_{D}^{(m)} \varphi(A)\, \mathcal{F}\Big[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\Big] d(a_1, \ldots, a_m)$$

est convergente. En effet

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} H^{\frac{2-m}{2}}(X, A) = -(m-2) A_{\alpha,\beta}(A) H^{-\frac{m}{2}}(X, A)$$
$$+ m(m-2)\, \Sigma_{\gamma,\delta} A_{\alpha,\gamma}(A)$$
$$\times A_{\beta,\delta}(A)(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta) H^{-\frac{m+2}{2}}(X, A);$$

donc

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(X) \frac{\partial^2 H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -(m-2) H^{-\frac{m}{2}}(X, A)\, \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(X) A_{\alpha,\beta}(A)$$
$$+ m(m-2) H^{-\frac{m+2}{2}}(X, A)\, \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\, a_{\alpha,\beta}(X)$$
$$\times A_{\alpha,\gamma}(A) A_{\beta,\delta}(A)(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta).$$

Or

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}(X)\, A_{\alpha,\beta}(A) = m + \ldots,$$

les points tenant la place d'une fonction ayant une limitation du premier ordre par rapport à la distance r des points A et X, quand on connaît des limites supérieures des valeurs absolues des $a_{\alpha,\beta}$ et de leurs dérivées premières. De même

$$\begin{aligned}\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\, a_{\alpha,\beta}(X)\, A_{\alpha,\gamma}(A)\, A_{\beta,\delta}(A)\,(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)\\ = \Sigma_{\alpha,\gamma} A_{\alpha,\gamma}(A)(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta) + \ldots = H(X, A) + \ldots,\end{aligned}$$

les points tenant la place d'une fonction ayant une limitation du troisième ordre par rapport à r. Donc

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}(X) \frac{\partial^2 H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} = H^{-\frac{m+2}{2}}(X, A)[\ldots],$$

le crochet ayant une limitation du troisième ordre par rapport à r.

Soit maintenant σ le minimum dans D des racines s du discriminant de la forme quadratique en $X_1, X_2, \ldots, X_m$

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, A_{\alpha,\beta}(X)\, X_\alpha X_\beta - s \Sigma_\gamma X_\gamma^2;$$

σ est un nombre positif, et

$$\text{(2,41)} \qquad H(X, A) \geqq \sigma r^2.$$

Il résulte de là que

$$\text{(2,42)} \qquad \left| \mathcal{F}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A) \right] \right| < k r^{-m+1},$$

k dépendant des limites supérieures des valeurs absolues des $a_{\alpha,\beta}$ et de leurs dérivées premières, et d'une limite inférieure de σ.

Donc la première intégrale du second membre de (2,4) est convergente, et même uniformément convergente dans D, ce qui prouve qu'elle représente une fonction continue de X.

Il résulte de là que, D'' tendant vers zéro dans toutes ses dimensions, la seconde intégrale du second membre de (2,4) tend aussi vers une limite, dont nous allons chercher une expression. Cette limite étant bien déterminée, nous pouvons particulariser les surfaces S'; nous allons supposer qu'elles sont homothétiques les unes des autres par rapport à X. Or, en développant la dérivation, cette intégrale s'écrit

$$(m-2)\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}$$
$$\times\int_{S'}^{(m-1)}\varphi(A)a_{\alpha,\beta}(X)A_{\beta,\gamma}(A)(x_\gamma-a_\gamma)H^{-\frac{m}{2}}(X, A)\,d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1});$$

sans changer la limite, nous pouvons remplacer la fonction sous le signe $\int$ par

$$\varphi(X)a_{\alpha,\beta}(X)A_{\beta,\gamma}(X)H^{-\frac{m}{2}}(A, X)(x_\gamma-a_\gamma),$$

car une homothétie de rapport λ multiplie la différence entre cette fonction et l'ancienne par un facteur d'ordre $2-m$ par rapport à λ, pendant que l'élément de domaine d'intégration est multiplié par λ^{m-1}; l'intégrale de la différence tend donc vers zéro. En effectuant la sommation par rapport à β, nous sommes ramenés à trouver la limite de

$$(m-2)\Sigma_\alpha(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}\varphi(X)\int_{S'}^{(m-1)}H^{-\frac{m}{2}}(A, X)(x_\alpha-a_\alpha)\,d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}).$$

Prenons pour S' la multiplicité

$$H(A, X)=\rho^2.$$

Faisons sur les $a_\alpha-x_\alpha$ un changement linéaire, à coefficients indépendants de A, tels que

$$H(A, X)=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_m^2,$$

les b_α étant de nouvelles variables; alors

$$\left|\frac{d(a_1, \ldots, a_m)}{d(b_1, \ldots, b_m)}\right|=1.$$

Nous sommes ramenés à trouver la limite de

$$(2,43)\quad \frac{(m-2)\varphi(X)}{\rho^m}\int_{S'}^{(m-1)}\Sigma_\alpha(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}(x_\alpha-a_\alpha)\,d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$$
$$=-\frac{m(m-2)\varphi(X)}{\rho^m}\int_{D''}^{(m)}d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$=-\frac{m(m-2)\varphi(X)}{\rho^m}\int^{(m)}d(b_1, \ldots, b_m),$$

la dernière intégrale étant étendue à une hypersphère de rayon ρ; or ce résultat est indépendant de ρ; il est égal (Chap. I, n° 12) à

$$-\frac{4\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}\varphi(X).$$

Ainsi [1]

$$(2,5)\qquad \mathcal{F}(u)=\int_{D}^{(m)}\varphi(A)\,\mathcal{F}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X,A)\right]d(a_1,\ldots,a_m)-\frac{4\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}\varphi(X).$$

Si l'on veut que $\mathcal{F}(u)=f(X)$, on a donc une équation de Fredholm pour calculer $\varphi(X)$. Nous verrons plus loin des conditions suffisantes pour que cette équation admette une solution et une seule.

Nous allons maintenant étudier les propriétés de la fonction $u(X)$ définie par la relation (2,2), quand on ne suppose pas que $\varphi(A)$ a des dérivées premières continues [2].

3. Théorème. — *Si* $\varphi(A)$ *est seulement supposé continu, et si* X *reçoit un déplacement l'amenant en* X_1, *de façon que la distance* ρ *des points* X *et* X_1 *soit inférieure à un nombre fixe* ρ_1 *plus petit que* un, *on aura*

$$(3,1)\qquad \left|\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)_{X_1}-\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)_{X}\right|<k\,M\rho\log\frac{1}{\rho},$$

M *étant une limite supérieure de* $|\varphi(A)|$ *dans* D, *et* k *étant un nombre fixe* [3].

---

(1) Nous avons supposé seulement l'existence et la continuité des dérivées premières des coefficients $a_{\alpha,\beta}$, au lieu que la marche originale de M. E.-E. Levi suppose l'existence et la continuité des dérivées *troisièmes* des $a_{\alpha,\beta}$ et des dérivées premières des b_α et de c; de plus cet auteur remplace (*loc. cit.*, p. 314) le coefficient de $\varphi(X)$ dans la formule (2,5) par la valeur erronée $+2^{m-1}\pi$.

(2) Cette étude nous servira plus loin à prouver l'analyticité des solutions des équations non linéaires.

(3) Dans le cas de deux variables, ce résultat et celui du numéro suivant ont été donnés par M. Dini, *Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre* (*Acta mathematica*, t. 25, 1902, p. 185-230); *voir* particulièrement p. 195 et 197. M. Henrik Petrini (*Journal de Math. pures et appliquées*, 6e série, t. 5, 1909, p. 127-223) a donné les conditions *nécessaires et suffisantes* pour que le potentiel logarithmique ait des dérivées secondes.

Soit S′ une hypersphère de centre X et de rayon 2ρ; soit D″ la partie du domaine D intérieure à S′, et soit D′ la partie restante de D. On aura, d'après (2,3),

$$(3,2)\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)_{X_1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)_X$$
$$= \int_{D'}^{(m)} v(A) \left\{ \left[\frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha}\right]_{X_1} - \left[\frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha}\right]_X \right\} d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$+ \int_{D''}^{(m)} v(A) \left\{ \left[\frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha}\right]_{X_1} - \left[\frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha}\right]_X \right\} d(a_1, \ldots, a_m).$$

Or

$$(3,21)\qquad \left| \int_{D''}^{(m)} v(A) \frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha} d(a_1, \ldots, a_m) \right| < k_1 M \rho,$$

que H soit pris en X ou en X_1. En effet, r désignant la distance AX ou AX_1,

$$\left| \frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha} \right| < N_1 r^{1-m},$$

N_1 dépendant des limites supérieures des $|a_{\alpha\beta}|$, $|b_\alpha|$, $|c|$, et du nombre σ de la formule (2,41). Soit C une hypersphère de centre X (ou X_1) et de rayon R. Notre intégrale sera en valeur absolue moindre que

$$MN_1 \int_C^{(m)} r^{1-m} d(a_1, \ldots, a_m) + MN_1 R^{1-m} \int_{D''}^{(m)} d(a_1, \ldots, a_m).$$

Si μ est la mesure de D″, cela fait (calcul analogue à celui du Chapitre I, n° 13)

$$MN_1 \left[\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} R + \mu R^{1-m} \right].$$

Comme

$$\mu \leq \frac{(2\sqrt{\pi}\rho)^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)},$$

la valeur de R qui nous donne la meilleure limitation est donnée par

$$R^m = \frac{m-1}{m}(2\rho)^m,$$

et elle nous conduit à l'expression (3,21), où k_1 est le produit de N_1 par une fonction de m qu'il est inutile d'écrire.

Ainsi la seconde intégrale de la formule (3,2) est moindre en valeur absolue que $2k_1 M\rho$. Passons à la première intégrale. On a

$$\left[\frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha}\right]_{X_1} - \left[\frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha}\right]_X = \Sigma_\beta(\xi_\beta - x_\beta)\left[\frac{\partial^2 H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right]_{X'},$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ étant les coordonnées de X_1, et X' étant un point de la droite XX_1, situé entre X et X_1. Si r' est la distance AX'_1 et r la distance AX,

$$\left[\frac{\partial^2 H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right]_{X'} < N_2 r'^{-m}.$$

N_2 dépendant des mêmes quantités que N_1. Mais, A étant dans D',

$$r' > AX - XX' > AX - XX_1 = r - \rho > \frac{r}{2};$$

comme, d'autre part,

$$\Sigma_\beta|\xi_\beta - x_\beta|^2 = \rho^2,$$

notre intégrale est moindre que

$$2^m\sqrt{m}\,MN_2\rho\int_{D'}^{(m)} r^{-m}\,d(a_1, \ldots, a_m).$$

Soit L_0 le maximum de la distance de deux points de D; r est toujours compris entre 2ρ et L_0; si $2\rho > L_0$, D' n'existe donc pas; si $2\rho < L_0$, on a pour l'intégrale la limite (*voir* Chap. I, n° 13)

$$2^{m+1}\sqrt{m}\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}MN_2\rho\int_{2\rho}^{L_0}\frac{dr}{r} = 2^{m+1}\sqrt{m}\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}MN_2\rho\log\frac{L_0}{2\rho}.$$

Ainsi

$$(3,3)\qquad \left|\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)_{X_1}-\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)_X\right| < 2k_1 M\rho + 2^{m+1}\sqrt{m}\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\,N_2 M\rho\log\frac{L_0}{2\rho},$$

et il est facile de remplacer le second membre par une quantité plus grande qui soit du type de l'énoncé, ou encore par

$$(3,4)\qquad k_2 M\rho\log\frac{L_0}{\rho},$$

k_2 étant une constante; cette dernière limitation sera valable quel que soit ρ inférieur à un nombre fixe inférieur à L_0.

4. Théorème. — *Si dans* D, $\varphi(A)$ *satisfait à la condition de Lipschitz généralisée*

$$|\varphi(A)-\varphi(X)| < N r^h \qquad (0 < h \leqq 1),$$

où N *est constant dans* D, *et où* r *est la distance* AX, $u(X)$ *a des dérivées secondes continues dans l'intérieur de* D.

Soit S′ une hypersphère de centre X et de rayon ρ; soit D′ la partie de D extérieure à S′. On a

$$(4,1)\qquad \frac{\partial u(X)}{\partial x_\alpha} = \lim_{\rho=0} w(X),$$

avec

$$(4,11)\qquad w(X) = \int_{D'}^{(m)} \varphi(A)\,\frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X,A)}{\partial x_\alpha}\,d(a_1,\,\ldots,\,a_m).$$

Or [Chap. I, (6,5)]

$$(4,2)\qquad \frac{\partial w(X)}{\partial x_\beta} = \int_{D'}^{(m)} \varphi(A)\,\frac{\partial^2 H^{\frac{2-m}{2}}(X,A)}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\,d(a_1,\,\ldots,\,a_m)$$
$$-(-1)^{(m-1)(\beta-1}\int_{S'}^{(m-1)} \varphi(A)\,\frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X,A)}{\partial x_\alpha}\,d(a_{\beta+1},\,\ldots,\,a_{\beta-1}),$$

la dernière intégrale provenant du déplacement de S′; S′ est pris dans le sens associé au sens $(a_1, \ldots, a_m)$ de son *intérieur*. Ceci peut s'écrire

$$(4,21)\quad \frac{\partial w(X)}{\partial x_\beta} = \int_{D'}^{(m)} [\varphi(A) - \varphi(X)] \frac{\partial^2 H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$+ \varphi(X) \int_{D'}^{(m)} \frac{\partial^2 H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$- (-1)^{(m-1)(\beta-1)} \int_{S'}^{(m-1)} \varphi(A) \frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha} d(a_{\beta+1}, \ldots, a_{\beta-1}).$$

Mais

$$\frac{\partial^2 H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -\frac{m-2}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \sum_{\gamma,\delta} \frac{\partial A_{\gamma,\delta}}{\partial a_\beta} \frac{(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)}{H^{\frac{m}{2}}(X, A)} - \frac{\partial^2 H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha \partial a_\beta}.$$

En portant dans (4,21), une intégration par parties donne

$$(4,3)\quad \frac{\partial w(X)}{\partial x_\beta} = \int_{D'}^{(m)} [\varphi(A) - \varphi(X)] \frac{\partial^2 H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$- \frac{m-2}{2} \varphi(X) \int_{D'}^{(m)} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \sum_{\gamma,\delta} \frac{\partial A_{\gamma,\delta}}{\partial a_\beta} \frac{(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)}{H^{\frac{m}{2}}(X, A)} d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$- (-1)^{(m-1)(\beta-1)} \varphi(X) \int_{S}^{(m-1)} \frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha} d(a_{\beta+1}, \ldots, a_{\beta-1})$$
$$+ (-1)^{(m-1)(\beta-1)} \int_{S'}^{(m-1)} [\varphi(X) - \varphi(A)] \frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha} d(a_{\beta+1}, \ldots, a_{\beta-1}).$$

Si nous faisons tendre ρ vers zéro, les deux premières intégrales tendent *uniformément* vers les intégrales étendues à D, la troisième intégrale ne change pas, et la dernière tend *uniformément* vers zéro. $\frac{\partial w(X)}{\partial x_\beta}$ tendant *uniformément* vers sa limite, celle-ci est la dérivée de la limite de $w(X)$, c'est-à-dire que

$$(4,4)\quad \frac{\partial^2 u(X)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \int_{D}^{(m)} [\varphi(A) - \varphi(X)] \frac{\partial^2 H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$- \frac{m-2}{2} \varphi(X) \int_{D}^{(m)} \frac{\partial}{dx_\alpha} \sum_{\gamma,\delta} \frac{\partial A_{\gamma,\delta}}{\partial a_\beta} \frac{(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)}{H^{\frac{m}{2}}(X, A)} d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$- (-1)^{(m-1)(\beta-1)} \varphi(X) \int_{S}^{(m-1)} \frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha} d(a_{\beta+1}, \ldots, a_{\beta-1}).$$

Nous voyons de plus sur cette expression que les dérivées secondes de $u(X)$ sont continues, toujours à cause de l'uniformité de la convergence. Le théorème est démontré.

5. *Calcul de $\mathcal{F}(u)$ dans l'hypothèse où $\varphi(A)$ satisfait à la condition de Lipschitz.* — Dans les expressions de $\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ et de u, on peut remplacer $\varphi(A)$ par

$$[\varphi(A)-\varphi(X)]+\varphi(X).$$

La partie de $\mathcal{F}(u)$ provenant des parties de $\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ [formule (4,4)], $\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$, u, où figure $\varphi(A)-\varphi(X)$ est évidemment

$$\int_D^{(m)} [\varphi(A)-\varphi(X)]\,\mathcal{F}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\right] d(a_1, \ldots, a_m).$$

La partie restante de $\mathcal{F}(u)$ est la même que si $\varphi(X)$ était constant, donc dérivable; c'est donc (n° 2)

$$-\frac{4\pi^{\frac{m}{2}}\varphi(X)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}+\varphi(X)\int_D^{(m)} \mathcal{F}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\right] d(a_1, \ldots, a_m).$$

En ajoutant, on retrouve la formule (2,5).

6. *Cas où $m=2$.* — Dans le cas où $m=2$, on a à poser

$$u(X)=-\int_D^{''} \varphi(A)\log H(X, A)\, d(a_1, a_2), \tag{6,1}$$

et l'on obtient

$$\mathcal{F}(u)=-\int_D^{''} \varphi(A)\,\mathcal{F}[\log H(X, A)]\, d(a_1, a_2)-4\pi\,\varphi(x_1, x_2), \tag{6,2}$$

pourvu que $\varphi(A)$ ait des dérivées premières continues, ou au moins satisfasse à une condition de Lipschitz.

Le cas où $m=2$ peut du reste se ramener au cas où $m=3$. Soit h un nombre plus petit que les abscisses x_1 de tous les points de D et de sa frontière. En faisant tourner D autour de la droite $x_1=h$, on obtient un domaine à trois dimensions, sorte de tore si D n'a qu'un seul contour. Soit φ l'angle d'un demi-plan méridien quelconque avec un demi-plan méridien fixe. Nous pouvons ajouter à l'équation un terme

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

où λ est une fonction *positive* quelconque (à dérivées premières continues) de x_1, x_2. Nous avons ainsi une équation de type elliptique, écrite en coordonnées semi-polaires; mais on peut revenir aux coordonnées cartésiennes. Si les valeurs données sur la frontière sont indépendantes de φ, la solution sera aussi indépendante de φ, sauf peut-être dans les cas où il y aurait une solution indéterminée : mais on verra que ces cas seront exclus de nos considérations. On aura ainsi résolu le problème de Dirichlet pour l'équation à deux variables donnée d'abord.

En conséquence, dans la suite, sauf avis contraire, nous ne traiterons pas à part le cas où $m = 2$. Nous supposerons donc

$$m \geqq 3.$$

Quel que soit m, du reste, on peut l'augmenter par ce procédé. En particulier, on peut aussi ramener le cas où $m = 1$, c'est-à-dire le cas des équations différentielles, au cas où $m = 3$.

II. — Extension au domaine complexe.

7. *Nature des domaines complexes considérés.* — Les considérations précédentes peuvent s'étendre à certains cas où D est une multiplicité complexe à m paramètres réels; nous désignerons encore par S la frontière de D. Nous supposerons que les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c, f sont des fonctions holomorphes.

Nous imposerons à D la restriction suivante : si X et A sont deux points de D, on a

$$H(X, A) \neq 0,$$

sauf si X et A sont confondus. Nous imposerons en outre à D la condition que, si X et A sont deux points de D, *la partie réelle de* H(X,A) *est positive ou nulle;* alors l'argument de $H(X, A)$ sera évidemment une fonction uniforme de X et de A.

Mais comment pourra-t-on satisfaire aux conditions imposées à D? Soient x'_α, a'_α, $A'_{\alpha,\beta}$ les parties réelles de x_α, a_α, $A_{\alpha,\beta}$; soient x''_α, a''_α, $A''_{\alpha,\beta}$ les coefficients de i dans les mêmes quantités. On a

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta)\\
&\quad = \Sigma_{\alpha,\beta} A'_{\alpha,\beta}(x'_\alpha - a'_\alpha)(x'_\beta - a'_\beta) - \Sigma_{\alpha,\beta} A'_{\alpha,\beta}(x''_\alpha - a''_\alpha)(x''_\beta - a''_\beta)\\
&\qquad - 2\Sigma_{\alpha,\beta} A''_{\alpha,\beta}(x'_\alpha - a'_\alpha)(x''_\beta - a''_\beta)\\
&\qquad + i[2\Sigma_{\alpha,\beta} A'_{\alpha,\beta}(x'_\alpha - a'_\alpha)(x''_\beta - a''_\beta)\\
&\qquad\qquad + \Sigma_{\alpha,\beta} A''_{\alpha,\beta}(x'_\alpha - a'_\alpha)(x'_\beta - a'_\beta) - \Sigma_{\alpha,\beta} A''_{\alpha,\beta}(x''_\alpha - a''_\alpha)(x''_\beta - a''_\beta)].
\end{aligned}$$

Nous pourrons d'abord nous arranger de façon que, dans D, la forme quadratique

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A'_{\alpha,\beta}(x'_\alpha - a'_\alpha)(x'_\beta - a'_\beta),$$

où les variables sont les $x'_\alpha - a'_\alpha$, soit définie positive. A cause de l'hypothèse faite sur la forme (1,2), dans une certaine région réelle, l'hypothèse actuelle sera satisfaite pourvu que l'on ne s'éloigne pas trop de cette région réelle.

Soient L′ et L″ des nombres positifs ou nuls tels que

$$\begin{aligned}
L'^2 &= \Sigma_\alpha (x'_\alpha - a'_\alpha)^2,\\
L''^2 &= \Sigma_\alpha (x''_\alpha - a''_\alpha)^2.
\end{aligned}$$

Soient σ' et σ'' des nombres positifs tels que

$$\sigma'' L'^2 > \Sigma_{\alpha,\beta} A'_{\alpha,\beta}(x'_\alpha - a'_\alpha)(x'_\beta - a'_\beta) > \sigma' L'^2,$$

et soit T une limite supérieure des $|A''_{\alpha,\beta}|$. On aura

$$|\Sigma_{\alpha,\beta} A''_{\alpha,\beta}(x'_\alpha - a'_\alpha)(x''_\beta - a''_\beta)| < m^2 T L' L''.$$

Par suite, en désignant par $\mathcal{R}\lambda$ la partie réelle de λ,

$$\mathcal{R} H(X, A) > \sigma' L'^2 - 2m^2 T L' L'' - \sigma'' L''^2.$$

Or nous pourrons faire en sorte que, sur D, le rapport $L'' : L'$ reste inférieur à une limite g fixe; le nombre positif g sera pris de façon que

$$\sigma = \sigma' - 2m^2 T g - \sigma'' g^2 > 0,$$

cette relation définissant σ; cette inégalité aura lieu pourvu que g soit assez petit. On voit qu'alors

$$\mathcal{R}\,\mathrm{H}(\mathrm{X},\,\mathrm{A}) > \sigma \mathrm{L}'^2; \tag{7,2}$$

cette partie réelle est donc toujours positive ou nulle; elle ne peut s'annuler que si X et A sont confondus, puisque

$$\mathrm{L}'' < g\mathrm{L}'. \tag{7,21}$$

L'argument de H(X, A) pourra toujours être pris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Mais nous aurons besoin de supposer que

$$|\arg \mathrm{H}(\mathrm{X},\,\mathrm{A})| < \text{angle fixe inférieur à } \frac{\pi}{m}. \tag{7,3}$$

Pour cela remarquons que $\mathfrak{I}\mathrm{H}$, coefficient de i dans H, est tel que, en appelant U une limite supérieure des $|\mathrm{A}'_{\alpha,\beta}|$,

$$|\mathfrak{I}\mathrm{H}(\mathrm{X},\,\mathrm{A})| < m^2(2\mathrm{U}\mathrm{L}'\mathrm{L}'' + \mathrm{T}\mathrm{L}'^2 + \mathrm{T}\mathrm{L}''^2);$$

donc

$$\frac{|\mathfrak{I}\mathrm{H}(\mathrm{X},\,\mathrm{A})|}{\mathcal{R}\,\mathrm{H}(\mathrm{X},\,\mathrm{A})} < \frac{m^2}{\sigma}(\mathrm{T} + 2\mathrm{U}g + \mathrm{T}g^2);$$

si g est assez petit, et si en outre on reste assez près du domaine réel, le second membre est aussi petit que l'on veut, car T est aussi petit que l'on veut. On aura donc bien l'inégalité (7,3).

D'après (7,21), nous avons déjà vu que deux points distincts de D ont des projections distinctes sur l'espace réel : nous entendons par projections de A sur l'espace réel le point A' de coordonnées a'_1, a'_2, ..., a'_m. On pourra donc prendre a'_1, a'_2, ..., a'_m comme paramètres pour exprimer les coordonnées d'un point quelconque de D. La condition (7,21) entraîne alors que, quels que soient les nombres réels h_α,

$$\sum\nolimits_\alpha \left(\sum\nolimits_\beta \frac{\partial a''_\alpha}{\partial a'_\beta} h_\beta\right)^2 < g^2 \Sigma_\alpha h_\alpha^2. \tag{7,31}$$

Réciproquement, si cette inégalité a lieu quels que soient les h_α et le point A de D, la condition (7,21) est remplie. En effet, pour deux points X et A fixes, on peut écrire

$$\mathrm{L}'' = \Sigma_\alpha \lambda_\alpha (x''_\alpha - a''_\alpha),$$

les λ_α étant des nombres réels tels que $\Sigma_\alpha \lambda_\alpha^2 = 1$. Or, d'après la formule des accroissements finis,

$$\Sigma_\alpha \lambda_\alpha (x''_\alpha - a''_\alpha) = \Sigma_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \left(\frac{\partial a''_\alpha}{\partial a'_\beta}\right)(x'_\beta - a'_\beta), \tag{7,32}$$

la dérivée étant prise en un point de la droite $X'A'$, situé entre X' et A'. En rapprochant (7,32) de (7,31), on obtient immédiatement (7,21). Ainsi cette dernière condition a lieu pourvu seulement que les parties imaginaires des dérivées $\frac{\partial a_\alpha}{\partial a'_\beta}$ soient assez petites.

Que pouvons-nous dire de

$$\frac{d(a_1, \ldots, a_m)}{d(a'_1, \ldots, a'_m)}?$$

Remarquons que

$$\sum_\alpha \left(\frac{\partial a''_\alpha}{\partial a'_\beta}\right)^2 < g^2;$$

dès lors, un théorème connu de M. Hadamard entraîne

$$\left|\frac{d(a_1, \ldots, a_m)}{d(a'_1, \ldots, a'_m)}\right| < (1+g^2)^{\frac{m}{2}}. \tag{7,4}$$

En réalité nous ne considérerons pas isolément ces domaines complexes à m dimensions : nous en considérerons toute une famille, balayant une région à $2m$ dimensions de l'espace complexe. Suivant les cas, ou bien tous ces domaines complexes auront une même frontière réelle, ou bien leurs frontières varieront en restant tracées sur une même multiplicité analytique à $m-1$ paramètres complexes.

Par exemple, considérons l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 = a^2. \tag{7,5}$$

La partie réelle de cette hypersphère est la frontière des domaines D complexes définis de la façon suivante : étant donnés m nombres réels quelconques $b_1, b_2, \ldots, b_m$, nous posons

$$x''_\alpha = -\lambda b_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m), \tag{7,51}$$

et nous déterminons λ par l'équation

$$\Sigma_\alpha [x'^2_\alpha + (1+\lambda)^2 b_\alpha^2] = a^2 + \Sigma_\alpha b_\alpha^2, \tag{7,52}$$

dont nous choisissons, pour

$$(7,53) \qquad \Sigma_\alpha x'^2_\alpha < a^2,$$

la racine positive. Nous avons ainsi une famille à m paramètres de domaines D; les paramètres sont $b_1, b_2, \ldots, b_m$. La condition relative à g sera remplie si

$$(7,54) \qquad \Sigma_\alpha b^2_\alpha > \frac{a^2}{g^2}.$$

La région balayée, dans l'espace complexe, est définie par

$$(7,55) \qquad \frac{[a^2 - \Sigma_\alpha(x'^2_\alpha + x''^2_\alpha)]^2}{\Sigma_\alpha x''^2_\alpha} > \frac{a^2}{g^2}, \qquad \Sigma x'^2_\alpha < a^2.$$

Si l'on veut que la frontière ne reste pas réelle et fixe, il suffit de reprendre les relations (7,51) et (7,52), après avoir fait subir à $x_1, \ldots, x_m$ une transformation orthogonale complexe; cette transformation devra être assujettie à être suffisamment voisine d'une transformation réelle, qui sera par exemple la transformation unité.

On pourra aussi procéder de la façon suivante, si l'on impose aux domaines D une frontière réelle S convexe. Le point A étant choisi tel que sa projection sur l'espace réel soit intérieure à cette frontière, on le joint aux points de cette frontière par des *traits* rectilignes (multiplicités linéaires à un paramètre *réel*); on a ainsi un domaine D. Pour que la condition relative à g soit remplie, il est nécessaire et suffisant que la multiplicité définie par l'équation en $x'_1, \ldots, x'_m$,

$$g^2 \Sigma_\alpha (x'_\alpha - a'_\alpha)^2 = \Sigma_\alpha a''^2_\alpha,$$

ait tous ses points intérieurs à S ou situés sur S.

Si S n'était pas convexe, il faudrait remplacer les traits rectilignes par des traits curvilignes.

Dans ce procédé, plusieurs domaines D de la famille passent par un même point de la région balayée.

8. Nous allons encore chercher une solution de l'équation (1,1) qui soit du type (2,2), D étant l'un quelconque des domaines que nous venons de définir, et qui passent par le point, X et l'intégrale étant prise dans le sens $(a'_1, \ldots, a'_m)$. $\varphi(A)$ devra être holomorphe dans la

région balayée par les domaines D. Nous allons d'abord démontrer que, dans ces conditions, $u(X)$ ne change pas quand on déforme D de façon qu'il continue de passer par X, et de façon que sa frontière ne change pas ou reste sur une même multiplicité analytique à $m-1$ paramètres.

Ce qui nous oblige à une démonstration, c'est la présence de la singularité de la fonction intégrée au point X. En effet, la puissance fractionnaire de H n'empêche pas la fonction intégrée d'être uniforme, puisque l'argument de H satisfait à la condition (7,3) $\left(\right.$ici, il suffirait même que cet argument reste, en valeur absolue, inférieur à $\left.\frac{\pi}{2}\right)$; on prend la détermination de la puissance fractionnaire qui devient positive dans le cas réel : la valeur absolue de son argument est inférieure à $\frac{\pi}{2}$.

Si donc il n'y avait pas cette singularité, il suffirait d'appliquer la remarque finale du n° 11 (Chap. I).

Nous démontrerons alors la proposition suivante :

Si, dans l'intégrale

$$\psi(X)=\int_{D}^{(m)} v(A)\,\varphi(X,A)\,d(a_1,\,\ldots,\,a_m), \tag{8,1}$$

$v(A)$ *et* $\varphi(X, A)$ *sont des fonctions holomorphes de* A, *la dernière seule ayant une singularité au point* X *de* D, *et cela de façon que*

$$|\varphi(X,A)|<k\mathrm{L}'^{h-m}, \tag{8,11}$$

où L′ *est la distance des projections de* X *et de* A *sur l'espace réel, et où* h *et* k *sont des constantes positives, la valeur de l'intégrale ne change pas quand* D *est déformé* sans cesser de satisfaire aux conditions indiquées.

En effet

$$\psi(X)=\lim\int_{D'}^{(m)} v(A)\,\varphi(X,A)\,d(a_1,\,\ldots,\,a_m),$$

D′ étant la partie de D extérieure à un petit contour S′ isolant X. Quand on déformera D, on pourra imaginer, par exemple, que S′ garde toujours la même projection sur l'espace réel.

Or appliquons la formule (11,4) (Chap. I) à l'intégrale prise sur D′;

la dérivée par rapport au paramètre t dont dépend D est

$$(8,12)\qquad -\int_{S'}^{(m-1)} \varphi(A)\,\varphi(X,A)\sum_{n=1}^{m}(-1)^{(m-1)(n-1)}\frac{\partial a_n}{\partial t}\,d(a_{n+1},\ \dots,\ a_{n-1}),$$

S' étant pris dans le sens associé au sens $(a'_1,\ \dots,\ a'_m)$ de son intérieur. Imaginons que S' soit, par exemple,

$$\Sigma_\alpha(a'_\alpha - x'_\alpha)^2 = \rho^2.$$

Alors les $\frac{\partial a_n}{\partial t}$ sont des quantités purement imaginaires, infiniment petites du premier ordre au moins par rapport à ρ, puisque les fonctions

$$a''_\alpha = \omega_\alpha(a'_1,\ a'_2,\ \dots,\ a'_m,\ t)\qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \dots,\ m)$$

se réduisent aux x''_α, quel que soit t, quand A' vient en X', et que les ω_α ont des dérivées secondes continues.

Donc on a sur S'

$$\left|\varphi(A)\,\varphi(X,A)\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-m}\frac{\partial a_n}{\partial t}\,\frac{d(a_{n+1},\ \dots,\ a_{n-1})}{d(a'_{p+1},\ \dots,\ a'_{p-1})}\right| < k'\rho^{h-m+1}$$
$$(p = 1,\ 2,\ \dots,\ m).$$

D'autre part la mesure de la projection de S' sur l'espace réel est

$$\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\rho^{m-1}.$$

Notre intégrale est donc [1] moindre en valeur absolue que

$$\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\sqrt{m}\,k'\rho^h;$$

---

[1] Pour limiter l'intégrale (2,1) du Chapitre I, il suffit d'appliquer à la fonction sous le signe $\int$, dans (2,2), une identité due à Lagrange; on trouve aussitôt

$$|\mathrm{I}| < \lim\sup\sqrt{\Sigma_{\alpha_1,\dots,\alpha_p}A^2_{\alpha_1,\dots,\alpha_p}}\int^{(p)}\sqrt{\Sigma_{\alpha_1,\dots,\alpha_p}d(x_{\alpha_1},\ \dots,\ x_{\alpha_p})^2},$$

la dernière intégrale étant la *mesure* de la multiplicité. Cela s'étend au domaine complexe, en introduisant les carrés des valeurs absolues sous les deux radicaux.

elle tend donc *uniformément* vers zéro avec ρ. Donc la dérivée de $\psi(X)$ par rapport à t est nulle. C. Q. F. D.

Or, d'après (7,2),

$$\left| H^{\frac{2-m}{2}}(X, A) \right| < \sigma^{\frac{2-m}{2}} L'^{2-m};$$

le résultat s'applique donc, avec $h = 2$.

Nous avons maintenant à voir si $u(X)$ est dérivable, donc *holomorphe* [puisque $u(X)$ est continu, et que nous sommes dans l'espace complexe]. Pour cela, revenons à l'intégrale (8,1), en supposant que

$$(8,2) \qquad |\varphi(X, A)| < k L'^{h-m+1}, \qquad \left| \frac{\partial \varphi(X, A)}{\partial x_\alpha} \right| < k L'^{h-m},$$

h et k étant des constantes positives. L'intégrale étendue à D' aura pour dérivée, d'après (11,4) (Chap. I),

$$\int_{D'}^{(m)} v(A) \frac{\partial \varphi(X, A)}{\partial x_\alpha} d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$- \int_{S'}^{(m-1)} v(A) \varphi(X, A) \sum_{n=1}^{m} (-1)^{(m-1)(n-1)} \frac{\partial a_n}{\partial x_\alpha} d(a_{n+1}, \ldots, a_{n-1}).$$

Cette fois, les $\frac{\partial a_n}{\partial x_\alpha}$ ne tendent pas tous vers zéro avec ρ, car $\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha}$ tend vers *un* (quelle que soit la direction dans laquelle on fait varier x_α : les a_n peuvent ne pas en être des fonctions holomorphes). Mais ces coefficients sont bornés, et avec l'hypothèse (8,2), cela suffit à montrer encore que l'intégrale le long de S' tend *uniformément* vers zéro avec ρ. L'intégrale sur D' tend *uniformément* vers l'intégrale sur D, et par suite $\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}$ *se calcule comme dans le cas réel.*

Ceci nous permet de refaire tous les calculs du n° 2, jusqu'à la formule (2,4). On constate encore que, S' tendant vers *zéro* dans toutes ses dimensions, la dernière intégrale de cette formule tend vers *zéro*, tandis que la première tend vers l'intégrale étendue à D. Il reste à trouver la limite de la seconde de ces intégrales, limite que nous pouvons encore remplacer par celle de

$$(m-2) \Sigma_\alpha (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \varphi(X) \int_{S'}^{(m-1)} H^{-\frac{m}{2}}(A, X)(x_\alpha - a_\alpha) d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}).$$

Mais nous ne pouvons plus, sans précaution, supposer que S' soit tracé sur

$$H(A, X) = \rho^2, \tag{8,3}$$

car il n'est pas certain que D rencontre cette multiplicité suivant un continuum à $m - 1$ dimensions.

Remarquons alors que, d'après le début de ce numéro,

$$\int_D^{(m)} v(A)\, \mathfrak{F}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\right] d(a_1, \ldots, a_m)$$

ne dépend pas de D; donc la limite de l'intégrale étendue à S' n'en dépend pas non plus. Nous pouvons donc déformer D de façon à le faire passer par une multiplicité à $m - 1$ dimensions tracée sur (8,3), et choisie de façon qu'on puisse satisfaire aux conditions relatives à g; ce sera possible, du moins, si ρ est assez petit, réel si l'on veut; quant à la portion de D contenant X et limitée par (8,3), nous pourrons la faire coïncider avec le lieu des homothétiques de l'intersection de D avec (8,3), avec des rapports d'homothétie variant de *un* à *zéro*.

Nous parvenons ainsi à la formule (2,43). Pour transformer enfin ce dernier résultat, il suffit de remarquer que nous ne changeons pas l'intégrale

$$\int^{(m)} d(b_1, \ldots, b_m)$$

en l'étendant au domaine réel ayant sa frontière sur la même hypersphère (multiplicité analytique à $m - 1$ paramètres) que le domaine auquel viennent de nous conduire nos calculs.

Ainsi *la formule* (2,5) *est encore vraie dans le domaine complexe.*

Pour $m = 2$, on parviendrait de même à (6,2).

III. — Résolution de l'équation de Fredholm obtenue.

9. Nous allons voir que l'équation obtenue

$$v(X) - \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \int_D^{(m)} K(X, A)\, v(A)\, d(a_1, \ldots, a_m) = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} f(X), \tag{9,1}$$

où

$$K(X, A) = \mathfrak{F}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\right], \tag{9,11}$$

peut, même dans le cas complexe, être traitée par les formules de M. Fredholm : on doit seulement, dans ce dernier cas, supposer que $f(X)$ est holomorphe, et alors $\varphi(X)$ sera aussi holomorphe (dans la région balayée par les domaines D).

La proposition, pour un domaine D quelconque (tel que le second membre puisse être pris arbitrairement), résultera plus loin de l'étude que nous commençons. Nous allons d'abord montrer que, si les mesures

$$\int_D^{(m)} |d(a_1, \ldots, a_m)|$$

des domaines D restent assez petites, l'équation (9,1) admet, *pour chaque domaine* D, une solution; nous aurons ensuite à voir que celle-ci est holomorphe dans le cas complexe.

Or ce premier point ne présente aucune difficulté. Soient

$$K_1(X, A) = K(X, A),$$
$$K_n(X, A) = \int_D^{(m)} K_{n-1}(X, B)\, K(B, A)\, d(b_1, \ldots, b_m);$$

les noyaux itérés $K_n(X, A)$ sont ainsi définis *quand les points* X *et* A *appartiennent à un même domaine* D *satisfaisant aux conditions requises*. Introduisons les constantes

$$h_\nu = \int^{(m)} \frac{d(x_1, \ldots, x_m)}{(x_1^2 + \ldots + x_m^2)^{\frac{m-1}{2}} \left[(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2\right]^{\frac{m-\nu}{2}}}$$
$$(\nu = 1, \ldots, m-2),$$

les intégrales étant étendues à tout l'espace réel. Soit h_{m-1} une limite supérieure de

$$\int^{(m)} \frac{d(x_1, \ldots, x_m)}{(x_1^2 + \ldots + x_m^2)^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{(x_1 - 1)^2 + \ldots + x_m^2}} \, \frac{1}{\log \frac{L_0}{r}},$$

où L_0 est supérieur à la borne supérieure de la distance L′ des projections sur l'espace réel de deux points quelconques de D, et où r varie de *zéro* à la borne supérieure de L', l'intégrale étant étendue à l'intérieur d'une sphère de centre l'origine et de rayon $\frac{L_0}{r}$; h_{m-1} existe, car le produit ci-dessus a une limite quand r tend vers *zéro*. Enfin soit h_m une limite supérieure de

$$r\int^{(m)} \log \frac{L_0+r}{r\sqrt{(x_1-1)^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}} \frac{d(x_1,\ldots,x_m)}{(x_1^2+\ldots+x_m^2)^{\frac{m-1}{2}}},$$

où l'intégrale est étendue à une sphère de centre l'origine et de rayon $\frac{L_0}{r}$; r varie de *zéro* à la borne supérieure de L'; h_m existe, car le produit tend vers *zéro* avec r. L'imitation de raisonnements connus [1] va nous fournir une borne supérieure de $|K_{m+1}|$. En effet, opérons sur $b_1, \ldots, b_m$ une substitution linéaire, non homogène, à coefficients réels, de déterminant L'^m, telle que les parties réelles des nouvelles variables $c_1, \ldots, c_m$ deviennent toutes égales à *zéro* quand le point $B(b_1, \ldots, b_m)$ vient en A, et toutes nulles encore, excepté celle de c_1 qui deviendra égale à *un*, quand B vient en X; ce changement de variables résultera d'une homothétie suivie d'un déplacement. Nous voyons ainsi, en tenant compte de la relation (7,2), qui entraîne

$$|K(X,A)| < k L'^{-m+1}, \tag{9,2}$$

où h est une constante, et en tenant compte aussi de l'inégalité (7,4), que

$$\left\{\begin{aligned} &|K_{m-1}(X,A)| < h_1 h_2 \ldots h_{m-2}\, k^{m-1}(1+g^2)^{\frac{m(m-2)}{2}} L'^{-1},\\ &|K_m\ \ (X,A)| < h_1 h_2 \ldots h_{m-1}\, k^m\ \ (1+g^2)^{\frac{m(m-1)}{2}} \log\frac{L_0}{L'},\\ &|K_{m+1}(X,A)| < h_1 h_2 \ldots h_m\ \ k^{m+1}(1+g^2)^{\frac{m^2}{2}} = k_1. \end{aligned}\right. \tag{9,3}$$

Ainsi $|K_{m+1}|$ est borné. Sa borne supérieure ne dépend que de k, m, g, L_0.

Nous pouvons aisément déduire de là une limite inférieure du rayon

---

(1) Voir, par exemple, Heywood et Fréchet, *L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique*, Paris 1912, Note de M. Hadamard, p. 141.

de convergence de la série entière en λ

$$\sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p \mathrm{K}_{(m+1)p}(\mathrm{X}, \mathrm{A}).$$

En désignant par ω une limite supérieure de la mesure de la projection de D sur l'espace réel, on aura évidemment

$$|\mathrm{K}_{(m+1)p}(\mathrm{X}, \mathrm{A})| < (1+g^2)^{\frac{m(p-1)}{2}} \omega^{p-1} k_1^p;$$

la série convergera donc uniformément par rapport à λ, X et A tant que l'on aura

$$|\lambda| < (1+g^2)^{-\frac{m}{2}} \omega^{-1} k_1^{-1}.$$

En particulier *l'équation* (9,1) *sera certainement soluble si*

$$(9,4) \qquad \omega < \left[\frac{4\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}\right]^{m+1} (1+g^2)^{-\frac{m}{2}} k_1^{-1}.$$

Elle sera soluble également si le *déterminant* du noyau K_{m+1} n'admet pas la racine

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\right]^{m+1}.$$

Mais, jusqu'à présent, nous n'avons pas démontré que la valeur de $\varphi(\mathrm{X})$ en un point X donné ne dépend pas du domaine D particulier, passant par X, auquel nous avons appliqué cette méthode. Cela peut s'établir comme les propositions correspondantes du n° 8. Introduisons $p-1$ points $\mathrm{B}_q(q=1, 2, \ldots, p-1)$, ayant pour coordonnées respectives $b_{q,1}, b_{q,2}, \ldots, b_{q,m}$. On peut écrire

$$(9,5) \quad \int_{\mathrm{D}}^{[m]} \mathrm{K}_q(\mathrm{X}, \mathrm{A}) f(\mathrm{A})\, d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$= \int_{\mathrm{D}, \mathrm{D}, \ldots, \mathrm{D}}^{(mp)} \mathrm{K}(\mathrm{X}, \mathrm{B}_1)\, \mathrm{K}(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2) \ldots \mathrm{K}(\mathrm{B}_{p-1}, \mathrm{A}) f(\mathrm{A})\, d(b_{1,1}, \ldots, b_{p-1,m}, a_1, \ldots, a_m).$$

Le second membre peut être considéré comme la limite d'une intégrale sans singularité : il suffit de n'intégrer que dans la portion du champ telle que

$$L(X', B'_1) > \rho, \qquad L(B'_{q-1}, B'_q) > \rho \qquad (q = 2, \ldots, p-1),$$
$$L(B'_{p-1}, A') > \rho.$$

On peut, comme au n° 8, dériver cette intégrale par rapport au paramètre dont dépend D, et faire ensuite tendre ρ vers zéro. On trouve ainsi que les deux membres de (9,5) ne changent pas par la déformation de D. Il en résulte que $\varphi(X)$ ne change pas non plus.

On démontre de même que $K_n(X, A)$ est, quel que soit n, indépendant de D, pourvu que ce domaine passe par X et par A, et satisfasse aux conditions requises.

10. *Dérivées de*

$$\int_{D''}^{(m)} K(X, B)\, w(B)\, d(b_1, \ldots, b_m).$$

Nous supposons que D″ est un domaine quelconque, où la fonction $w(B)$ est holomorphe.

Il est évident, sur l'expression de K, que si l'on pose

$$R(X, B) = \frac{\partial K(X, B)}{\partial x_1} + \frac{\partial K(X, B)}{\partial b_1}, \tag{10,1}$$

R sera d'ordre $1 - m$ par rapport à la distance L′ des projections de X et de B sur l'espace réel, L′ étant regardé comme infiniment petit.

Bien que nous ayons surtout en vue le cas complexe, remarquons que le calcul de R(X, B) et sa limitation ne font pas intervenir les dérivées d'ordre supérieur au premier des fonctions $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c.

Dans D″, isolons le point X par une multiplicité C tracée sur

$$\Sigma_\alpha (b'_\alpha - x'_\alpha)^2 = \rho^2,$$

où ρ est un nombre positif suffisamment petit, et où les b'_α et les x'_α sont les parties réelles des b_α et des x_α. Soit D''_ρ ce qui reste de D″. On aura [Chap. I, (11,4)]

$$(10,2)\quad \frac{\partial}{\partial x_1}\int_{D''_\rho}^{(m)} K(X, B)\, w(B)\, d(b_1, \ldots, b_m)$$
$$= \int_{D''_\rho}^{(m)} \frac{\partial K(X, B)}{\partial x_1} w(B)\, d(b_1, \ldots, b_m)$$
$$- \int_{C}^{(m-1)} K(X, B)\, w(B) \sum_{n=1}^{m} (-1)^{(m-1)(n-1)} \frac{\partial b_n}{\partial x_1} d(b_1, \ldots, b_m),$$

où la dernière intégrale n'a de sens que si l'on fixe la *direction* de la dérivation par rapport à la variable complexe x_1. En tenant compte de (10,1), et en intégrant par parties, la première intégrale du second membre de (10,2) devient

$$(10,3)\quad - \int_{S'}^{(m-1)} K(X, B)\, w(B)\, d(b_2, \ldots, b_m)$$
$$+ \int_{C}^{(m-1)} K(X, B)\, w(B)\, d(b_2, \ldots, b_m)$$
$$+ \int_{D''}^{(m)} \left[R(X, B)\, w(B) + K(X, B) \frac{\partial w(B)}{\partial b_1} \right] d(b_1, \ldots, b_m),$$

S' étant la frontière de D'', prise dans le sens associé au sens $(b_1, \ldots, b_m)$ de D'', tandis que C est prise dans le sens opposé au sens associé au sens $(b_1, \ldots, b_m)$ de D''.

Si l'on fait tendre ρ vers *zéro*, la première intégrale (10,3) ne change pas, et la troisième converge uniformément. Réunissons la seconde intégrale (10,3) à la dernière du second membre de (10,2); je dis que

$$\int_{C}^{(m-1)} K(X, B)\, w(B)$$
$$\times \left[d(b_2, \ldots, b_m) - \sum_{n=1}^{m} (-1)^{(m-1)(n-1)} \frac{\partial b_n}{\partial x_1} d(b_{n+1}, \ldots, b_{n-1}) \right]$$

tend *uniformément* vers zéro. En effet les $\frac{\partial b_n}{\partial x_1}$ tendent *uniformément* vers zéro avec ρ, excepté $\frac{\partial b_1}{\partial x_1}$ qui tend vers *un* [voir ce qui est dit à propos de l'intégrale (8,12)]; dans le crochet, les coefficients de chacun des $d(b_{n+1}, \ldots, b_{n-1})$ tendent *uniformément* vers zéro, et, étant donnée la limitation de $K(X, B)$, cela entraîne notre proposition.

Quand ρ tend vers zéro, notre dérivée tend donc *uniformément* vers une limite : celle-ci est donc la dérivée de l'intégrale donnée

$$(10,4)\quad \frac{\partial}{\partial x_1}\int_{D''}^{(m)} K(X,B)\,\varpi(B)\,d(b_1,\ldots,b_m)$$
$$=-\int_{S'}^{(m-1)} K(X,B)\,\varpi(B)\,d(b_2,\ldots,b_m)$$
$$+\int_{D''}^{(m)}\left[R(X,B)\,\varpi(B)+K(X,B)\frac{\partial\varpi(B)}{\partial b_1}\right]d(b_1,\ldots,b_m).$$

Or cette valeur ne dépend pas de la *direction* dans laquelle on a déplacé x_1; d'autre part, elle est évidemment, comme l'intégrale donnée, fonction continue de X. Comme on peut en dire autant des dérivées par rapport à $x_2, \ldots, x_m$, il en résulte, dans le cas complexe, que l'intégrale donnée est fonction *holomorphe* de X.

11. *Corollaire.* — Considérons une fonction $\varpi(B, A)$; soient B' et A' les projections de B et de A sur l'espace réel, et $L(B', A')$ la distance de ces projections. Nous supposons que les valeurs absolues de $\varpi(B, A)$ et de ses dérivées premières admettent des limitations d'ordres respectifs $h-m$ et $h-m-1$ par rapport à $L(B', A')$.

Nous considérons l'intégrale

$$(11,1)\qquad \int_{D''}^{(m)} K(X,B)\,\varpi(B,A)\,d(b_1,\ldots,b_m)$$

étendue à un domaine passant par le point Ξ et se composant des points de D tels que

$$L(B', \Xi') \leqq a,$$

avec

$$a \leqq \frac{1}{2}L(\Xi', A'),$$

a étant au plus égal au minimum de $L(B', \Xi')$ quand B' parcourt S. *Les valeurs absolues des dérivées premières de cette intégrale par rapport* *aux* x_k, *calculées pour la position* Ξ *de* X, *admettent une limitation d'ordre* $h-m$ *par rapport à* $L(\Xi', A')$.

Si en effet nous appliquons la formule (10,4), nous allons voir que chacun des termes du second membre admet une limitation de la nature indiquée.

Pour l'intégrale d'ordre $m-1$, c'est évident : car $K(X, B)$ admet une limitation de l'ordre de $L^{1-m}(\Xi', B')$, si X est en Ξ, ou de l'ordre de a^{1-m} puisque l'on est sur S'; comme, dans D' et sur S',

$$L(B', A') \geqq L(\Xi', A') - L(\Xi', B') \geqq \frac{1}{2} L(\Xi', A'),$$

$w(B, A)$ admet une limitation de l'ordre de $L^{h-m}(\Xi', A')$; enfin la mesure de S' a une limitation de l'ordre de a^{m-1}; l'intégrale admet donc une limitation de l'ordre de $L^{h-m}(\Xi', A)$.

Pour l'intégrale d'ordre m, nous considérerons d'abord

$$\int_{\Delta}^{(m)} \frac{d(x_1, \ldots, x_m)}{r^p} \qquad (p < m),$$

où

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2},$$

Δ ayant une mesure au plus égale à μ. Nous réemployons le procédé du n° 3; R étant un nombre positif quelconque

$$\int_{\Delta}^{(m)} \frac{d(x_1, \ldots, x_m)}{r^p} < \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{R^{m-p}}{m-p} + \frac{\mu}{R^p};$$

si alors on prend

$$R^m = \frac{p\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \mu,$$

on trouve

$$\int_{\Delta}^{(m)} \frac{d(x_1, \ldots, x_m)}{r^p} < \frac{m}{m-p} \left[\frac{2}{p\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\right]^{\frac{p}{m}} \pi^{\frac{p}{2}} \mu^{m-p}.$$

Ici, la mesure μ de D' est de l'ordre de a^m, et il faudra prendre $p = m-1$ (ordre de K et de R); le résultat en découle immédiatement.

12. *Dérivées de* $K_2(X, A)$. Appliquons ce qui vient d'être dit en remplaçant n par $K(B, A)$. Nous pouvons écrire, en désignant par D' la partie de D extérieure à D''.

$$(12,01) \qquad K_2(X, A) = \int_{D'}^{(m)} K(X, B) K(B, A) d(b_1, \ldots, b_m) + \int_{D''}^{(m)} K(X, B) K(B, A) d(b_1, \ldots, b_m).$$

La première intégrale se dérive par rapport à x_α sous le signe $\int$, car il n'y a pas de singularité; la seconde est du type qui vient d'être étudié.

Donc, si l'on est dans le cas complexe, $K_2(X, A)$ *est holomorphe par rapport à* X, *pourvu que* X *et* A *appartiennent à un même domaine* D *et soient distincts.*

Si l'on est dans le cas réel, $K_2(X, A)$ *est dérivable par rapport aux* x_α, *pourvu seulement que les* $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c *aient des dérivées premières continues.*

En ce qui concerne les limitations, il faut observer que le corollaire (n° 11) suppose que D'' est intérieur à D; nous serons donc obligés de supposer que $L(X' A')$ ne tombe pas au-dessous d'un certain minimum a quand A parcourt S. Dans ces conditions, la seconde intégrale admet une limitation de l'ordre de $L^{1-m}(X', A')$; la première intégrale, elle, admet une limitation de l'ordre de

$$L^{1-m}(X', A') \log \frac{1}{a} \qquad (a < 1),$$

comme on le voit en considérant qu'on a à effectuer une intégrale

$$\int^{(m)} \frac{d(b'_1, b'_2, \ldots, b'_m)}{L^m(X', B') L^{m-1}(X', A')}$$

prise dans la partie de D *extérieure* à la région

$$L(X', B') \leqq a \qquad \left[a \leqq \frac{1}{2} L(X', A')\right];$$

en introduisant les coordonnées polaires, et en remplaçant $L(X', B')$ par ρ, on aura une limitation contenant l'intégrale

$$L^{1-m}(X', A') \int_a^{L_0} \frac{d\rho}{\rho} = L^{1-m}(X', A') \log \frac{L_0}{a},$$

où L_0 est une limite supérieure de la distance des projections de deux points de D. En réunissant ces résultats, on a donc

$$(12,1) \qquad \left| \frac{\partial K_2(X, A)}{\partial x_\alpha} \right| < M L^{1-m}(X', A') \log \frac{1}{a},$$

M étant une constante, connue dès qu'on sait borner les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c et leurs dérivées premières.

On peut échanger les rôles des points X et A dans la démonstration; on obtiendra ainsi

$$(12,2) \qquad \left| \frac{\partial K_2(X, A)}{\partial a_\alpha} \right| < M L^{1-m}(X', A') \log \frac{1}{a},$$

le nombre M étant de même nature que celui de (12, 1), avec lequel on peut le confondre; mais cette fois, c'est $L(B'\ A')$ qui ne doit pas tomber au-dessous de a, quand B parcourt S.

Dans le cas complexe, K_2 est holomorphe par rapport à l'ensemble des points X et A, pourvu qu'ils soient sur un même domaine D et distincts, et que ni l'un ni l'autre ne soit sur S.

Enfin isolons sur D les deux points X et A; soit D″ l'ensemble des points B de D tels que

$$L(B', X') \leqq a \qquad \left[a \leqq \frac{1}{2} L(X', A') \right],$$

D‴ sera l'ensemble des points B de D tels que

$$L(B', A') \leqq a;$$

D′ sera l'ensemble des points restants de D, parmi lesquels doit se trouver toute la frontière S de D. On aura

$$(12,21) \quad K_2(X, A) = \int_{D'}^{(m)} K(X, B) K(B, A)\, d(b_1, \ldots, b_m) + \int_{D''}^{(m)} + \int_{D'''}^{(m)},$$

les fonctions intégrées étant toujours les mêmes. Par rapport à a_α, la première et la seconde intégrale peuvent se dériver sous le signe $\int$, et la troisième peut se dériver par le procédé qu'on vient de voir. Dans les expressions obtenues, les dérivées de la première et de la troisième intégrale peuvent se dériver sous le signe $\int$ par rapport à x_β; quant à la dérivée par rapport à a_α de la seconde intégrale, elle se dérive par rapport à x_β en appliquant la proposition du n° 11 à la fonction

$$\varpi(B, A) = \frac{\partial K_2(X, A)}{\partial a_\alpha}.$$

On trouve ainsi que $\frac{\partial^2 K_2(X, A)}{\partial a_\alpha \partial x_\beta}$ existe et est continu (ce dont nous étions déjà certains dans le cas complexe), et en outre que

$$(12,3) \qquad \left| \frac{\partial^2 K_2(X, A)}{\partial a_\alpha \partial x_\beta} \right| < ML^{-m}(X', A') \log \frac{1}{a},$$

le nombre M étant de même nature que ceux des formules (12,1) et (12,2) (il dépend seulement des limitations des $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c et de leurs dérivées premières).

On voit de même que la dérivée

$$\frac{\partial^2 K_2(X, A)}{\partial x_\beta \partial a_\alpha}$$

existe et est continue; elle est par suite égale à la précédente.

13. *Dérivées des autres noyaux itérés.* — Les autres noyaux itérés admettent tous des dérivées par rapport aux a_α ou aux x_α, et ces dérivées sont continues si les deux points sont différents, car

$$K_p(X, A) = \int_D^{(m)} K_2(X, B) K_{p-2}(B, A) \, d(b_1, \ldots, b_m) \qquad (p \geqq 3),$$

et l'on peut dériver sous le signe $\int$ par rapport à x_α. Pour tenir compte de ce que $K_2(X, B)$ et $K_{p-2}(B, A)$ ne sont peut-être pas holomorphes quand B vient sur S, il suffit d'imaginer que D n'est pas déformé au voisinage de S. On peut dériver d'une façon analogue par rapport à a_α, et l'on voit ainsi de proche en proche que tous les noyaux itérés sont fonctions holomorphes de X et de A *à l'intérieur* de D (quand les deux points sont distincts).

Les dérivées

$$(13, 1) \qquad \frac{\partial^2 K_p(X, A)}{\partial a_\alpha \partial x_\beta}$$

existent aussi et sont continues, même dans le cas *réel*, quand on suppose seulement que les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c ont des dérivées premières continues. C'est immédiat pour $p \geqq 4$, car alors

$$K_p(X, A) = \int_{D, D}^{(2m)} K_2(X, B) K_{p-4}(B, C) K_2(C, A) \, d(b_1, \ldots, b_m; c_1, \ldots, c_m),$$

et l'on peut effectuer la double dérivation sous le signe $\int$. Si $p = 3$, nous avons

$$(13, 2) \qquad K_3(X, A) = \int_{D}^{(m)} K_2(X, B) K(B, A) \, d(b_1, \ldots, b_m).$$

Divisons D en deux parties D_1 et D_2 par la surface

$$L(B', X') = L(B', A');$$

D_1 sera la région contenant X. Alors

$$K_3(X, A) = \int_{D_1}^{(m)} + \int_{D_2}^{(m)},$$

la fonction intégrée étant la même que dans (13,2). La première intégrale peut subir sous le signe $\int$ la double dérivation. Pour la seconde, nous l'écrivons

$$(13, 3) \qquad \int_{D_1, D_2}^{(2m)} K(X, B) K(B, C) K(C, A) \, d(b_1, \ldots, b_m; c_1, \ldots, c_m)$$
$$+ \int_{D_2, D_2}^{(2m)} K(X, B) K(B, C) K(C, A) \, d(b_1, \ldots, b_m; c_1, \ldots, c_m).$$

Dans la première intégrale, on peut effectuer d'abord

$$F(B, A) = \int_{D_2}^{(m)} K(B, C) K(C, A) \, d(c_1, \ldots, c_m),$$

qui se dérive par rapport à a_α par le procédé employé pour K_2 ; puis

$$\int_{D_1}^{(m)} K(X, B) \frac{\partial F(B, A)}{\partial a_\alpha} \, d(b_1, \ldots, b_m)$$

peut, par le procédé du corollaire **11**, être dérivée par rapport à x_β.

Pour la seconde intégrale (13,3), sa dérivée par rapport à a_α se calcule comme celle de la première, et ensuite

$$\int_{D_2}^{(m)} K(X, B)\frac{\partial F(B, A)}{\partial a_\alpha} d(b_1, \ldots, b_m)$$

se dérive sous le signe $\int$ par rapport à x_β. Ainsi la dérivée (13, 1) existe et est continue même pour $p = 3$; et l'on peut intervertir l'ordre des dérivations.

14. *Dérivées du noyau résolvant.* — Le noyau résolvant de K_{m+1}, c'est-à-dire, tant que λ reste assez petit,

$$(14, 1) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p K_{(m+1)p}(X, A),$$

est aussi dérivable. En effet nous pouvons l'écrire

$$\int_{D}^{(m)} K_2(X, B) \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p K_{(m+1)p-2}(B, A)\, d(b_1, \ldots, b_m),$$

car la série sous le signe $\int$ est uniformément convergente, et la fonction par laquelle on la multiplie est intégrable dans D. Or il est visible que cette expression peut être dérivée sous le signe $\int$ par rapport à x_α.

On prouve d'une façon analogue que les dérivées $\frac{\partial}{\partial a_\alpha}$, $\frac{\partial^2}{\partial a_\alpha\, \partial x_\beta}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_\beta\, \partial a_\alpha}$ existent et sont continues pour l'expression (14, 1).

On démontre de même que les mêmes dérivées existent et sont continues pour

$$(14, 2) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p K_p(X, A) + \int_{D}^{(m)} \sum_{q=1}^{\infty} \lambda^{(m+1)q} K_{(m+1)q}(X, B) \sum_{p=1}^{m} \lambda^p K_p(B, A)\, d(b_1, \ldots, b_m),$$

qui est le noyau résolvant de K(X, A).

15. *Expressions de* $\varphi(X)$ et de $u(X)$. — Soit $N(X, A)$ l'expression (14,2) où l'on a remplacé λ par $\dfrac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}$. On aura

$$(15,1)\qquad \varphi(X) = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\left[f(X)+\int_D^{(m)} N(X, A)f(A)\,d(a_1, \ldots, a_m)\right];$$

on suppose, bien entendu, que l'on est dans les conditions (9,4). Des raisonnements toujours pareils montrent que $\varphi(X)$ admet, dans D, des dérivées premières continues, et que, dans le cas complexe, $\varphi(X)$ est holomorphe à l'intérieur de D.

Pour $u(X)$, son expression (2,2) et ce qui précède suffisent à prouver qu'elle est holomorphe dans le cas complexe, pourvue de dérivées secondes continues dans le cas réel, et qu'elle satisfait à l'équation (1,1).

Remplaçons, dans (2,2), la fonction φ par son expression (15,1). Nous obtenons

$$(15,2)\qquad u(X) = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\int_D^{(m)} G(X, A)f(A)\,d(a_1, \ldots, a_m),$$

en posant

$$(15,3)\qquad G(X, A) = H^{\frac{2-m}{2}}(X, A) + \int_D^{(m)} H^{\frac{2-m}{2}}(X, B)\,N(B, A)\,d(b_1, \ldots, b_m)$$

ou

$$(15,4)\qquad G(X, A) = H^{\frac{2-m}{2}}(X, A) + G_2(X, A),$$

l'expression de G_2 découlant de la comparaison avec (15,3).

Il est manifeste que, si $m > 3$,

$$(15,5)\qquad |G_2(X, A)| < k_2\, L'^{3-m}(X', A'),$$

k_2 étant une constante; et, si $m = 3$,

$$(15,5_1)\qquad |G_2(X, A)| < k_2 \log\frac{L_0}{L'(X', A')}.$$

En effet, d'après son expression,

$$|N(B, A)| < k_2''\, L'^{1-m}(X', A');$$

on obtient alors les résultats précédents en se reportant au procédé qui a servi à limiter les noyaux itérés.

$G_2(X, A)$, d'après son expression, admet des dérivées secondes continues par rapport aux x_α. La même fonction des dérivées continues du type

$$\frac{\partial^3 G_2(X, A)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial a_\gamma},$$

et l'on peut y intervertir l'ordre des dérivations.

Il résulte également de ce qu'on a dit que

$$(15, 52) \qquad \left| \frac{\partial^2 G_2(X, A)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right| < k_3 L'^{1-m}(X', A'),$$

$$(15, 53) \qquad \left| \frac{\partial^3 G_2(X, A)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial a_\gamma} \right| < k_4 L^{1-m}(X', A'),$$

k_3 et k_4 étant des constantes, connues, ainsi que k_2, quand on connaît le nombre σ de la formule $(7, 2)$, ainsi que des limites supérieures des valeurs absolues des $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c et de leurs dérivées premières.

L'expression $(15, 2)$ représente une solution de $(1, 1)$ même si l'on suppose seulement, dans le cas réel, que $f(X)$ satisfait à une condition de Lipschitz généralisée. En effet, si l'on décompose G selon la formule $(15, 4)$ l'intégrale portant sur G_2 peut être dérivée deux fois sous le signe $\int$; et l'on peut appliquer à l'autre le théorème du n° 4 : donc $u(X)$ admet, même dans ce cas, des dérivées secondes continues.

Pour achever de prouver que u est alors solution de $(1, 1)$, il suffit de remarquer que

$$(15, 6) \qquad \mathfrak{F}[G(X, A)] = 0;$$

cette identité résulte de $(15, 3)$, car

$$N(X, A) - \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \int_D^{(m)} K(X, B)\, N(B, A)\, d(b_1, \ldots, b_m)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} K(X, A) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \mathfrak{F}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\right].$$

ce qui s'écrit aussi

$$\mathfrak{F}[G_2(X, A)] = -\mathfrak{F}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\right];$$

or ceci n'est que la relation (15,6). Elle montre bien que u est solution de (1,1), car le résultat de l'opération $\mathfrak{F}$, appliquée à

$$\int_D^{(m)} G_2(X, A) f(A)\, d(a_1, \ldots, a_m),$$

est évidemment

$$\int_N^{(m)} \mathfrak{F}[G_2(X, A)] f(A)\, d(a_1, \ldots, a_m).$$

Enfin il résulte aisément de ce qui précède que les dérivées suivantes de $G(X, A)$ admettent des limitations du même type que celles de son premier terme $H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)$:

(15,7) $$\left|\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}\right| < k L^{1-m}(X', A'),$$

(15,71) $$\left|\frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}\right| < k L^{-m}(X', A'),$$

(15,72) $$\left|\frac{\partial^3 G}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta\, \partial a_\gamma}\right| < k L^{-m-1}(X', A');$$

ces limitations supposent seulement que X, pour la première, X et A, pour les deux dernières, ne s'approchent pas trop de la frontière S de D : k dépend du minimum δ de $L(X', B')$, ou de $L(X', B')$ et de $L(A', B')$, quand B parcourt S, des maxima des valeurs absolues des $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c et de leurs dérivées premières, enfin du nombre σ de la relation (7, 2).

Si l'on veut pouvoir faire tendre δ vers zéro, il suffit de remplacer, dans ces limitations, k par $k \log \frac{1}{\delta}$; k sera alors indépendant de δ, pourvu que δ reste inférieur à un nombre fixe inférieur à *un*.

IV. — Étude de la fonction G(X, A). Potentiel.

16. *Formule de réciprocité.* — La fonction $G(X, A)$ est ce qu'on a appelé une *solution fondamentale* de l'équation (1,1), expression que

M. Hadamard a proposé (¹) de remplacer par celle de solution *élémentaire*.

Soit

$$(16,1)\quad \mathcal{G}[(v(x)] = \Sigma_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2[a_{\alpha,\beta}(X)\,v(X)]}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} - \Sigma_\alpha\frac{\partial[b_\alpha(X)\,v(X)]}{\partial x_\alpha} + cv = 0,$$

l'équation qu'on nomme *associée* à (1,1). Soit $G^*(X, A)$ une solution fondamentale, ou élémentaire, de cette équation, définie dans le même domaine que G; dans ce numéro nous devons supposer les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ jusqu'au *troisième* ordre existantes et continues, ainsi que celles des b_α jusqu'au *second* ordre

Des intégrations par parties montrent que, si u et v ont des dérivées continues jusqu'au second ordre dans D et sur sa frontière S, on a

$$(16,2)\quad \int_D^{(m)} \{v(X)\,\mathcal{F}[u(X)] - u(X)\,\mathcal{G}[v(X)]\}\,d(x_1,\ \ldots,\ x_m)$$
$$= \int_S^{(m-1)} \Sigma_\alpha(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}$$
$$\times\Big\{v(X)\left[\Sigma_\beta a_{\alpha,\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta} + b_\alpha u(X)\right]$$
$$- u(X)\,\Sigma_\beta\frac{\partial[a_{\alpha,\beta}(X)\,v(X)]}{\partial x_\beta}\Big\}\,d(x_{\alpha+1},\ \ldots,\ x_{\alpha-1}).$$

Nous allons appliquer cette formule à $G(X, A)$ et à $G^*(X, B)$, en prenant pour D un domaine qui soit, ainsi que sa frontière S, *intérieur* à la région où nous venons de définir ces fonctions; A et B sont deux points de D; nous isolons, sur D, ces deux points par des contours S_A et S_B. Nous trouvons ainsi

$$(16,3)\quad \int_S^{(m-1)} \Sigma_\alpha(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}$$
$$\times\Big\{G^*(X,B)\left[\Sigma_\beta a_{\alpha,\beta}\frac{\partial G(X,A)}{\partial x_\beta} + b_\alpha G(X,A)\right]$$
$$- G(X,A)\,\Sigma_\beta\frac{\partial[a_{\alpha,\beta}\,G^*(X,B)]}{\partial x_\beta}\Big\}\,d(x_{\alpha+1},\ \ldots,\ x_{\alpha-1})$$
$$= \int_{S_A}^{(m-1)} + \int_{S_B}^{(m-1)},$$

(¹) Hadamard, *Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 149.

les fonctions intégrées étant les mêmes sous les trois signes $\int$. Or si tous les points de S_A et de S_B tendent uniformément vers A ou vers B, on constate, en remplaçant les dérivées de G par celles de son expression (15, 4), et de même pour les dérivées de G^*, que le second membre tend vers

$$(16, 3_1) \qquad \frac{4\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}[G^*(A, B) - G(B, A)].$$

Ainsi

$$(16, 4) \qquad G(B, A) = G^*(A, B) + I(A, B),$$

$I(A, B)$ étant une fonction égale au produit par $-\dfrac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}$ du premier membre de (16,3); cette fonction est, dans le cas complexe, *holomorphe* dans D, que A et B soient distincts ou non; dans le cas réel, elle est continue et dérivable. La multiplicité S qui intervient ici est *intérieure* au domaine qui a servi à former G et G^*, de sorte qu'on ne peut atteindre la frontière de celui-ci.

17. *Lemme. — Soit $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ une fonction homogène d'ordre $-m$ des variables réelles ou complexes $x_1, x_2, \ldots, x_m$; l'intégrale*

$$\int_S^{(m-1)} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, \Sigma_\alpha (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} x_\alpha\, d(x_{\alpha+1}, \ldots, x_{\alpha-1})$$

reste invariable par toute déformation de la surface fermée S *ne rencontrant pas de singularité de* φ (dans le cas réel, une singularité sera un point où les dérivées premières de φ sont discontinues).

En effet, la dérivée de cette intégrale par rapport au paramètre t de déformation de S est [Chap. I (11, 6)]

$$\int_S^{(m-1)} \Sigma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}[x_\alpha \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)]\, \Sigma_\beta (-1)^{(m-1)(\beta-1)} \frac{\partial x_\beta}{\partial t} d(x_{\beta+1}, \ldots, x_{\beta-1}).$$

Or en développant et en appliquant le théorème des fonctions homogènes, on trouve

$$\Sigma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}[x_\alpha \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)] = m\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) + \Sigma_\alpha x_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Le lemme est démontré.

18. *Sur une intégrale particulière.* — Considérons l'intégrale

$$(18, 1) \quad \int_S^{(m-1)} \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\beta} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}).$$

Nous allons la transformer, en supposant que S soit une surface fermée, *intérieure* au domaine où G(X, A) a été formé par le procédé décrit. On suppose que X est *intérieur* à un domaine D de frontière S.

Cette intégrale peut s'écrire

$$(18, 2) \quad \int_S^{(m-1)} \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial a_\beta} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$$
$$+ \int_S^{(m-1)} \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial G_2(X, A)}{\partial a_\beta} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}).$$

Or la dernière intégrale représente une fonction de X continue même sur S, parce qu'elle porte sur une fonction ayant une limitation d'ordre $2-m$ par rapport à L(X′, A′); cela suffit pour qu'on puisse lui appliquer les raisonnements connus qu'on fait dans la théorie classique du potentiel de simple couche.

Passons à la première intégrale (18,2). On trouve aisément

$$\Sigma_\beta a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial a_\beta} = \frac{(m-2)(x_\alpha - a_\alpha)}{H^{\frac{m}{2}}(A, X)} + \ldots,$$

les points tenant lieu d'une fonction ayant une limitation d'ordre $2-m$ par rapport à L(X′, A′), et dont l'intégrale est, par suite, continue même sur S. Ainsi

$$(18, 3) \quad \int_S^{(m-1)} \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\beta} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}$$
$$= (m-2) \int_S^{(m-1)} \Sigma_\alpha(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \frac{x_\alpha - a_\alpha}{H^{\frac{m}{2}}(A, X)} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) + J(X),$$

J(X) étant une fonction continue même sur S.

Or $H^{-\frac{m}{2}}(A, X)$ est une fonction homogène d'ordre $-m$ de a_1, $a_2, \ldots, a_m$. Nous concluons donc du lemme que l'intégrale (18,1) ne change pas par une déformation de S.

Pour avoir sa valeur, appliquons la formule de Green [Chap. I, (5, 1)] à la partie d'un domaine D de frontière S, passant par X, satisfaisant aux conditions requises (n° 7), qui est extérieure à l'intersection S′ de D avec

$$L(X', A') = \rho;$$

nous trouvons

$$(18, 4) \qquad \int_S^{(m-1)} \Sigma_\alpha (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \frac{x_\alpha - a_\alpha}{H^{\frac{m}{2}}(A, X)} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$$
$$= \int_{S'}^{(m-1)} \Sigma_\alpha (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \frac{x_\alpha - a_\alpha}{H^{\frac{m}{2}}(A, X)} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}),$$

car l'intégrale d'ordre m porte sur une fonction identiquement nulle.

Or la multiplicité S′ peut être déformée, de façon à être tracée sur

$$H(A, X) = r^2,$$

où r est quelconque; le second membre de (18, 4) est donc égal (n° 2) à

$$-\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Par suite

$$(18, 5) \qquad \int_S^{(m-1)} \Sigma_{\alpha,\beta} (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\beta} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$$
$$= -\frac{4\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)} + J(X).$$

19. *Cas où* X *est sur* S. — Si X est sur S, il n'y a, dans le calcul précédent, à refaire que le calcul de

$$(19, 1) \qquad \int_S^{(m-1)} H^{-\frac{m}{2}}(A, X) \, \Sigma_\alpha (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} (x_\alpha - a_\alpha) \, d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1});$$

en lui ajoutant J(X), fonction qui est continue même sur S, on a la valeur de l'intégrale proposée.

On voit comme précédemment que l'on peut remplacer la multiplicité S d'intégration par la multiplicité S′ formée de l'intersection de D avec

$$L(X', A') = \rho,$$

où ρ est assez petit, et de la partie de S située dans

$$L(X', A') < \rho.$$

Si nous déformons cette multiplicité S′ sans qu'elle cesse de rester tangente à S en X, cette intégrale ne change pas. En effet, si nous isolons X par un contour C tracé sur S′, la dérivée par rapport au paramètre t de déformation de S′ de la portion d'intégrale étendue à l'extérieur de C sera [Chap. I (11, 6)]

$$(19, 2)\quad \int_{C}^{(m-2)} H^{-\frac{m}{2}}(A, X)\, \Sigma_{\alpha,n}(-1)^{(m-1)(\alpha+n)-n+1} \times (x_\alpha - a_\alpha)\frac{\partial a_{\alpha+n}}{\partial t}\, d(a_{\alpha+n}, \ldots, a_{\alpha-1}, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+n-1}).$$

Or, si C est l'intersection de S′ avec

$$L(X', A') = r,$$

la fonction sous le signe $\int$ est d'ordre $-m+1+2=3-m$ par rapport à r, car, en X′, les $\frac{\partial a_{\alpha+n}}{\partial t}$, et leurs dérivées par rapport aux paramètres qui servent à exprimer les coordonnées des points de S′, sont nuls. Comme la mesure de C est d'ordre $m-2$, cette intégrale (19, 2) tend *uniformément* vers zéro avec r, ce qui démontre notre proposition (raisonnement analogue à celui du n° 8).

Profitons de cette propriété pour remplacer S′ par une multiplicité tracée d'une part sur la surface

$$\Sigma_\alpha \lambda_\alpha (a_\alpha - x_\alpha) = 0,$$

tangente à S en X, et d'autre part sur l'hypersphère

$$\Sigma_\alpha (a_\alpha - x_\alpha)^2 = r^2.$$

La valeur de l'intégrale est évidemment la même que celle de

$$-r^{-m}\int^{(m-1)} \Sigma_\alpha (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_\alpha d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$$

étendue à une multiplicité tracée d'une part sur l'hypersphère de centre O et de rayon r, et d'autre part sur $a_m = 0$; cette dernière partie de la multiplicité donne *zéro* pour l'intégrale, qui peut ainsi être étendue à une demi-hypersphère. Finalement

$$(19, 3) \quad \int_S^{(m-1)} \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\beta} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) = -\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)} + J(X),$$

X étant sur S.

20. *Cas où* X *est extérieur à* S, *sur un domaine* D *passant par* S. — Dans ce cas, il est immédiat que l'intégrale (19, 1) est nulle. Ainsi, dans ce cas,

$$(20, 1) \quad \int_S^{(m-1)} \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\beta} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) = J(X).$$

Comme J(X) est continu même sur S, les formules (18, 5), (19, 3) et (20, 1) mettent en évidence que l'intégrale du premier membre est discontinue sur S.

21. *Limitation de certaines intégrales.* — Considérons les intégrales

$$(21, 1) \quad \int_{S_1}^{(m-1)} \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\beta} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$$

étendues à une partie quelconque S_1 de S, X étant un point quelconque d'une multiplicité D passant par S : X peut être, sur D, intérieur ou extérieur à S, ou situé sur S. Nous voulons trouver une limite supérieure des valeurs absolues des intégrales (21, 1).

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ des paramètres réels à l'aide desquels s'expriment les coordonnées des points de S. Soit λ_m un autre paramètre réel, tel que les coordonnées des points de D suffisamment voisins de S s'expriment à l'aide de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_m$, de façon que, pour $\lambda_m = 0$, on ait la frontière S elle-même; les points intérieurs à S sur D correspondent, par exemple, à $\lambda_m > 0$.

Il nous suffit de limiter l'intégrale (21, 1) pour les points assez voisins de S : car, si $L(X', A')$ reste supérieur à un nombre positif donné, la valeur absolue du coefficient de $d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$ est bornée; comme la mesure de S_1 est inférieure à celle de S, l'intégrale est bornée aussi. De même, on peut se borner à des parties S_1 de S telles que l'oscillation de chacun des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ dans S_1 soit inférieure à un nombre fixe arbitraire.

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$, o les valeurs des paramètres au point A de S; soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ leurs valeurs au point X. Nous avons, d'après la formule de Taylor, en posant $\mu_m = 0$,

$$(21, 2) \quad x_\alpha - a_\alpha = \Sigma_\beta(\lambda_\beta - \mu_\beta)\frac{\partial a_\alpha}{\partial \mu_\beta} + \Sigma_{\beta,\gamma} h_{\alpha,\beta,\gamma}(\lambda_\beta - \mu_\beta)(\lambda_\gamma - \mu_\gamma),$$

les indices α, β, γ variant de 1 à m, et les $h_{\alpha,\beta,\gamma}$ étant bornés à l'aide des dérivées secondes de $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Si l'on introduit les variables λ_α, l'équation (1, 1) devient

$$(21, 3) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta} a'_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial\lambda_\alpha\, \partial\lambda_\beta} + \Sigma_\alpha b'_\alpha \frac{\partial u}{\partial \lambda_\alpha} + c' u = 0,$$

avec

$$(21, 31) \qquad a_{\alpha,\beta}(x) = \Sigma_{\gamma,\delta}(A)\frac{\partial x_\alpha}{\partial\lambda_\gamma}\frac{\partial x_\beta}{\partial \lambda_\delta},$$

$$(21, 32) \qquad b_\alpha(x) = \Sigma_{\gamma,\delta} a'_{\gamma,\delta}(A)\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial\lambda_\gamma\,\partial\lambda_\delta} + \Sigma_\gamma b'_\gamma(A)\frac{\partial x_\alpha}{\partial\lambda_\gamma},$$

$$(21, 33) \qquad c(x) = c'(A).$$

On constate alors que

$$(21, 4) \qquad H(X, A) = \Sigma_{\alpha,\beta}\frac{A'_{\alpha,\beta}(M)(\lambda_\alpha - \mu_\alpha)(\lambda_\beta - \beta_\beta)}{\Delta'(M)} + \ldots,$$

M étant ce que devient A dans le changement de variables; Δ' et les $A'_{\alpha,\beta}$ sont le déterminant des $a'_{\alpha,\beta}$ et ses mineurs; les points tiennent lieu de termes d'ordre supérieur au second, dont on connaît une limitation. Il en résulte que

$$(21, 41) \quad G(X, A) = \left[\Sigma_{\alpha,\beta}\frac{A'_{\alpha,\beta}(M)}{\Delta'(M)}(\lambda_\alpha - \mu_\alpha)(\lambda_\beta - \mu_\beta)\right]^{\frac{2-m}{2}} + \ldots,$$

les points tenant lieu d'une fonction ayant une limitation d'ordre

$3-m$ par rapport à $\sqrt{\Sigma_\alpha(\lambda_\alpha-\mu_\alpha)^2}$, et dont les dérivées ont une limitation d'ordre $2-m$.

D'autre part,

$$(21,42)\quad \begin{aligned} &\Sigma_\alpha(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}(x_\alpha-a_\alpha)\,d(_{\alpha+1},\,\ldots,\,a_{\alpha-1})\\ &=\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}\left[(\lambda_\beta-\mu_\beta)\frac{\partial a_\alpha}{\partial\mu_\beta}+\ldots\right]\frac{\partial(a_{\alpha+1},\,\ldots,\,a_{\alpha-1})}{\partial(\mu_{\gamma+1},\,\ldots,\,\mu_{\gamma-1})}d(\mu_{\gamma+1},\,\ldots,\,\mu_{\gamma-1})\\ &=\Sigma_\gamma(-1)^{(m-1)(\gamma-1)}\left[(\lambda_\gamma-\mu_\gamma)\frac{d(a_1,\,\ldots,\,a_m)}{d(\mu_1,\,\ldots,\,\mu_m)}+\ldots\right]d(\mu_{\gamma+1},\,\ldots,\,\mu_{\gamma-1}),\end{aligned}$$

les points tenant lieu d'une fonction ayant une limitation du second ordre, et dont, par suite, la part dans l'intégrale (21, 1) est facile à limiter.

Nous sommes donc amenés à limiter seulement l'intégrale

$$(21,5)\qquad \int^{(m-1)} \mathrm{H}'^{-\frac{m}{2}}(\mathrm{A},\,\mathrm{M})\frac{d(a_1,\,\ldots,\,a_m)}{d(\mu_1,\,\ldots,\,\mu_m)}(-1)^{m-1}\lambda_m\,d(\mu_1,\,\ldots,\,\mu_{m-1}),$$

car la surface d'intégration est $\mu_m=0$, et par suite la fonction intégrée ne diffère de celle de l'intégrale (21, 1) que par une quantité d'ordre $2-m$, dont l'influence est aisée à limiter; on a posé

$$(21,51)\qquad \mathrm{H}'(\mathrm{A},\,\mathrm{M})=\Sigma_{\alpha,\beta}\frac{\mathrm{A}'_{\alpha,\beta}(\mathrm{M})}{\Delta'(\mathrm{M})}(\lambda_\alpha-\mu_\alpha)(\lambda_\beta-\mu_\beta).$$

Les coefficients de H' sont des nombres complexes; mais on constate facilement que, sur D,

$$|\,\mathrm{H}'(\mathrm{A},\,\mathrm{M})\,|>\sigma'\Sigma_\alpha(\lambda_\alpha-\mu_\alpha)^2,$$

σ' étant positif. Donc la valeur absolue de la fonction intégrée, dans (21, 5), est moindre que

$$k[\Sigma_\alpha(\lambda_\alpha-\mu_\alpha)]^{-\frac{m}{2}}\lambda_m\qquad(\alpha=1,\,2,\,\ldots,\,m),$$

k étant une constante.

Posons

$$\mu_\alpha=\lambda_\alpha+\rho\xi_\alpha\qquad(\alpha=1,\,2,\,m-1),$$

$\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_{m-1}$ étant des fonctions de $m-2$ paramètres $t_1,\,t_2,\,\ldots,\,t_{m-2}$, telles que

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_{m-1}^2=1.$$

Alors (Chap. I, n° 13)

$$\rho^{2-m}\,d(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}) = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{m-1}\left[\frac{d(\xi_{\alpha+1}, \ldots, \xi_{\alpha-1})}{d(t_1, \ldots, t_{m-2})}\right]^2}\,d(\rho, t_1, \ldots, t_{m-2}).$$

Notre intégrale est donc moindre que

$$\int^{(m-1)} \frac{k\lambda_m \rho^{m-2}}{(\rho^2+\lambda_m^2)^{\frac{m}{2}}}\sqrt{\sum\nolimits_\alpha\left[\frac{d(\xi_{\alpha+1}, \ldots, \xi_{\alpha-1})}{d(t_1, \ldots, t_{m-2})}\right]^2}\,d(\rho, t_1, \ldots, t_{m-2}).$$

Dans cette dernière intégrale, le champ de variation de ρ est limité, et dépend de la direction $t_1, t_2, \ldots, t_{m-2}$. On augmentera l'intégrale en l'étendant à l'espace entier, ce qui donne (Chap. I, n° 13)

$$\frac{2k\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\lambda_m\int_0^\infty \frac{\rho^{m-2}\,d\rho}{(\rho^2+\lambda_m^2)^{\frac{m}{2}}} = \frac{2k\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{u^{m-2}\,du}{(1+u^2)^{\frac{m}{2}}};$$

c'est la limitation cherchée.

22. *Potentiel de double couche.* — Considérons l'intégrale

$$(22, 1) \qquad u(X) = \int_S^{(m-1)} v(A)\,\Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \times a_{\alpha,\beta}(A)\frac{\partial G(X, A)}{\partial \alpha_\beta}\,d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}),$$

où $v(A)$ est une fonction continue donnée sur S; si l'on est dans le cas complexe, et qu'on veuille pouvoir déformer S sur une multiplicité analytique, $v(A)$ devra être fonction holomorphe des $m-1$ paramètres à l'aide desquels sont exprimées analytiquement les coordonnées des points de S. C'est ce que nous appellerons le potentiel de double couche (généralisé). Quel que soit $v(A)$, $u(X)$ satisfait à l'équation (1, 1) homogène ($f = 0$) dans la région balayée par les domaines D, satisfaisant aux conditions requises (n° 7), et ayant S pour frontière.

Nous allons chercher la limite de $u(X)$ quand X tend vers un point de S, en restant sur D.

Soit Y ce point de S. Nous allons d'abord prouver que, si $v(Y) = 0$,

$u(X)$ est continu en Y; c'est-à-dire que, pour X assez voisin de Y,

$$(22, 2) \qquad |u(X) - u(Y)| < \varepsilon \qquad [v(Y) = 0],$$

ε étant donné d'une façon quelconque. Décomposons S en deux parties S′ et S″, la première contenant Y à son intérieur. Il suffit de prouver que, si S′ est assez petit et X assez voisin de Y,

$$(22, 21) \qquad \left| \int_{S'}^{(m-1)} v(A) \Sigma_{\alpha,\beta} (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \times a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial G(X, A)}{\partial \alpha_\beta} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{3};$$

car alors la part de S′ dans le premier membre de (22, 2) sera moindre que $\frac{2\varepsilon}{3}$; et comme d'autre part l'intégrale étendue à S″ représente une fonction continue en Y, sa part dans (22, 2) sera moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$ dès que X sera assez voisin de Y; donc la condition (22, 2) sera satisfaite. Mais la condition (22, 21) peut elle-même être remplacée par

$$(22, 22) \qquad \left| \int_{S'}^{(m-1)} v(A) \Sigma_{\alpha,\beta} (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \times a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial a_\beta} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

car le coefficient de $v(A) d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$ a été modifié d'une fonction ayant une limitation d'ordre $2 - m$. Ceci s'écrit encore

$$(22, 23) \qquad \left| (m-2) \int_{S'}^{(m-1)} v(A) H^{-\frac{m}{2}}(X, A) \Sigma_\alpha (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \times (x_\alpha - a_\alpha)\, d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Or nous avons vu (n° 21) que

$$(22, 24) \quad \left| \int_{S'}^{(m-1)} H^{-\frac{m}{2}}(X, A) \Sigma_\alpha (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} (x_\alpha - a_\alpha)\, d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) \right| < \mathcal{A},$$

$\mathcal{A}$ étant indépendant de X et de la partie considérée de S. D'autre part, sur S, d'après (21,2).

$$(22,3)\quad \Sigma_\alpha(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}(x_\alpha - a_\alpha)\, d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$$
$$= \Bigg\{ \lambda_m \Bigg[(-1)^{m-1} \frac{d(a_1, \ldots, a_m)}{d(\mu_1, \ldots, \mu_m)} + 2\,\Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} h_{\alpha,\beta,m}(\lambda_\beta - \mu_\beta) \frac{d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})}{d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1})} - \Sigma_\alpha(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} h_{\alpha,m,m}\lambda_m \frac{d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})}{d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1})} \Bigg]$$
$$+ \sum_{\alpha} \sum_{\beta=1}^{m-1} \sum_{\gamma=1}^{m-1} (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} h_{\alpha,\beta,\gamma}(\lambda_\beta - \mu_\beta)(\lambda_\gamma - \mu_\gamma) \frac{d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})}{d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1})} \Bigg\} d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}).$$

Or la part dans (22,23) et dans (22,24) de la partie de l'accolade où λ_m n'est pas en facteur est aussi petite que l'on veut, car la fonction intégrée a une limitation

$$k \left[\sum_{\alpha=1}^{m-1} (\lambda_\alpha - \mu_\alpha)^2 \right]^{\frac{2-m}{2}},$$

dans laquelle k est une constante : cette partie d'intégrale est donc aussi petite que l'on veut, si S' est assez petit.

Considérons maintenant le coefficient de λ_m dans l'accolade du second membre de (22,3) : il est aussi voisin que l'on veut de

$$(-1)^{m-1} \frac{d(a_1, \ldots, a_m)}{d(\mu_1, \ldots, \mu_m)},$$

si X est assez voisin de Y; son *argument* varie donc aussi peu que l'on veut dans toute l'étendue de S', si S' est assez petit et Y assez voisin de X. En prenant les variables $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$, la partie correspondante de la fonction intégrée, dans (22,24), a un argument qui oscille entre deux limites θ_1 et θ_2 telles que

$$(22,31)\qquad 0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi,$$

cela à cause de la condition (7,3). Comme d'autre part, si S' est assez petit,

$$|\varphi(A)| < \eta,$$

η étant pris d'une façon quelconque, on en conclut que la partie correspondante de (22,23) est moindre que (¹)

$$(m-2)\frac{\mathcal{A}\eta}{\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}.$$

Donc le premier membre de (22,23) est aussi petit que l'on veut, ce qu'il fallait démontrer.

D'après les résultats déjà obtenus (nᵒˢ 18 à 20), si $\varphi(Y)\neq 0$, en décomposant $\varphi(A)$ en $[\varphi(A)-\varphi(Y)]+\varphi(Y)$, on trouve que

$$(22,4)\qquad \lim u(X)=u(Y)-\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}\varphi(Y).$$

Si X tend vers Y en venant de l'*extérieur* de S sur D, il faut changer le signe du coefficient de $\varphi(Y)$. Mais si D est limité extérieurement

---

(¹) Supposons que

$$\left|\int^{(m)}F(X)\,d(x_1,\ldots,x_m)\right|<\mathcal{A},$$

le domaine d'intégration étant réel, et l'argument de $F(X)$ étant compris entre θ_1 et θ_2, avee la condition (22,31). Soit $\varphi(X)$ une fonction telle que

$$|\varphi(X)|<\eta.$$

Alors

$$F(X)=A(X)e^{i\theta_1}+B(X)e^{i\theta_2},\qquad A(X)\geqq 0,\qquad B(X)\geqq 0.$$

Donc

$$\int^{(m)}F(X)\,d(x_1,\ldots,x_m)=\alpha e^{i\theta_1}+\beta e^{i\theta_2},$$

avec

$$\alpha=\int^{(m)}A(X)\,d(x_1,\ldots,x_m),\qquad \beta=\int^{(m)}B(X)\,d(x_1,\ldots,x_m),\qquad \alpha\geqq 0,\qquad \beta\geqq 0.$$

D'après l'hypothèse

$$\alpha^2+2\alpha\beta\cos(\theta_2-\theta_1)+\beta^2<\mathcal{A}^2,$$

ou

$$(\alpha+\beta)^2\cos^2\frac{\theta_2-\theta_1}{2}+(\alpha-\beta)^2\sin^2\frac{\theta_2-\theta_1}{2}<\mathcal{A}^2.$$

Mais

$$\int^{(m)}F(X)\varphi(X)\,d(x_1,\ldots,x_m)=e^{i\theta_1}\int^{(m)}A(X)\varphi(X)\,d(x_1,\ldots,x_m)$$
$$+e^{i\theta_2}\int^{(m)}B(X)\varphi(X)\,d(x_1,\ldots,x_m),$$

d'où

$$\left|\int^{(m)}F(X)\varphi(X)\,d(x_1,\ldots,x_m)\right|<\eta(\alpha+\beta)<\frac{\mathcal{A}\eta}{\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}.$$

par le contour S_1, et intérieurement par d'autres contours S_2, S_3, ..., la relation (22, 4) convient quel que soit celui des contours partiels auquel appartient Y, pourvu que, dans (22, 1), chacun de ces contours soit pris dans le sens associé au sens choisi sur D.

Dans le cas où S n'est pas déformable, cette démonstration ne suppose rien de plus sur $\varphi(A)$ que sa continuité.

Nous avons supposé implicitement que les coordonnées d'un point de S sont exprimables en fonctions continues et à dérivées premières et secondes continues de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$.

V. — Le problème de Dirichlet pour les équations linéaires.

23. *L'équation intégrale du problème.* — Proposons-nous de trouver une solution $u(X)$ de l'équation (1, 1), définie dans un domaine D de frontière S, et prenant des valeurs données sur S. Si D n'est pas réel, il doit satisfaire aux conditions requises (n° 7). Si S est tracée sur une multiplicité analytique à $m-1$ paramètres, et si la suite des valeurs données est analytique, la solution doit rester valable par une déformation de S n'excédant pas certaines limites.

Nous commencerons par former une solution de l'équation (1, 1) dans un domaine débordant partout S : nous la formerons par la méthode déjà indiquée, valable au moins quand la *mesure* du domaine est assez petite. Nous aurons du même coup une solution fondamentale (ou élémentaire) G(X, A) de l'équation *homogène*.

Nous nous servirons de celle-ci pour trouver une solution de l'équation homogène qui, ajoutée à la solution trouvée de l'équation non homogène, satisfasse à la question.

Cette solution $u(X)$ de l'équation homogène, nous la chercherons parmi les fonctions du type suivant. Soient $\rho_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$, m fonctions continues quelconques données (l'hypothèse de la continuité peut même être remplacée par d'autres moins restrictives). Nous poserons

$$(23, 1)\quad u(X) = \int_S^{(m-1)} \varphi(A)\Sigma_\alpha(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \times \left[\Sigma_\beta a_{\alpha,\beta}(A)\frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\beta} + \rho_\alpha(A)\, G(X, A)\right] d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}),$$

$\varphi(A)$ étant la fonction inconnue. Les termes en $G(X, A)$ (potentiel de simple couche) ne changeant pas la discontinuité de l'intégrale sur S, φ devra satisfaire à l'équation de Fredholm

$$(23,2)\quad \varphi(X) - \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}}\int_S^{(m-1)} \varphi(A)\Sigma_\alpha(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \times\left[\Sigma_\beta a_{\alpha,\beta}(A)\frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\beta} + \rho_\alpha(A)\,G(X, A)\right] d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}}\varphi(X),$$

où $\varphi(X)$ désigne la valeur donnée de $u(X)$ au point X de S.

La théorie classique est applicable à cette équation, car, en prenant des variables d'intégration $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$ (n° 21), le noyau est infini d'ordre $2-m$ quand les points X et A viennent se confondre.

Ici nous devons appliquer les formules de la théorie générale des équations de Fredholm, et non la méthode d'approximations successives comme au n° 9. Il n'y a aucune difficulté à montrer (comme aux n^{os} 10 et suivants) que les termes des séries qui interviennent dans ces formules ne changent pas, dans le cas analytique, par une déformation de S restant dans les limites voulues (n° 7).

24. *Cas où l'équation est soluble.* — Il faut maintenant se préoccuper de la solubilité de l'équation (23,2) en $\varphi(X)$; il faut, pour pouvoir utiliser cette équation, être assuré que le *déterminant* du noyau itéré de rang m n'est pas nul.

Or ici, il n'est plus possible de procéder comme précédemment; peu importe la mesure de S. On pourra aisément constater que, si les $a_{\alpha,\beta}$, sont constants, les b_α et c étant nuls, si l'on fait subir à S une homothétie de rapport quelconque, les différents termes de ce déterminant ne changent pas [dans ce cas, $G(X, A)$ coïncide avec $H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)$]; cette particularité empêche absolument de procéder comme pour l'équation (9, 1).

Remarquons cependant que, dans le cas où les $a_{\alpha,\beta}$ sont constants et les b_α et c nuls, rien n'empèche de démontrer, comme pour l'équation de Laplace [1], que l'équation (23, 2) est soluble, en prenant les ρ_α tous nuls.

Dans les autres cas, on peut essayer de choisir les ρ_α de façon à rendre ce déterminant non nul, si c'est possible. Remarquons qu'en réalité cela fait une seule fonction à choisir, car les termes dépendant des ρ_α peuvent être rassemblés en un seul :

$$\int_{S}^{(m-1)} \varphi(A)\,\rho(A)\,G(X, A)\sqrt{\Sigma_\alpha d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})^2},$$

avec

$$\rho(A) = \frac{\Sigma_\alpha \rho_\alpha(A)\,(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}\, d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})}{\sqrt{\Sigma_\alpha d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})^2}}.$$

On peut également poser

$$\varphi(A)\,\rho A) = \rho_1(A),$$

et considérer $\rho_1(A)$ (au lieu de ρ) comme une fonction donnée; dans le cas où le déterminant serait nul, on disposerait (si c'est possible) de ρ_1 de façon à satisfaire aux conditions de solubilité.

On sait d'ailleurs qu'il est des cas où le problème de Dirichlet généralisé est impossible, et où par suite tous les procédés précédents échoueront.

Nous allons prouver que, si D est assez petit *dans toutes ses dimensions* et reste homothétique à un domaine fixe, et si l'on prend les ρ_α tous nuls, le déterminant n'est pas nul.

Faisons en effet dans l'équation (1, 1) le changement de variables

$$x_\alpha = \lambda t_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

où λ est une constante positive. En désignant par λT le point de coordonnées $\lambda t_1, \lambda t_2, \ldots, \lambda t_m$, cette équation devient

$$(24, 1) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}(\lambda T)\frac{\partial^2 u}{\partial t_\alpha\, \partial t_\beta} + \lambda \Sigma_\alpha b_\alpha(\lambda T)\frac{\partial u}{\partial t_\alpha} + \lambda^2 c u = \lambda^2 f.$$

---

[1] Du reste ces équations se ramènent à l'équation de Laplace, en faisant sur $x_1, x_2, \ldots, x_m$ la transformation *adjointe* à celle qui change (1, 2) en $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_m^2$. Sur l'équation de Laplace, on peut consulter HEYWOOD et FRÉCHET, *loc. cit.*, ou GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, 2e édition, t. III, Chap. XXXIII, paragraphe II.

Supposons D assez petit, dans toutes ses dimensions, pour que, X et A étant deux points quelconques de ce domaine,

$$(24, 11) \qquad |x_\alpha - a_\alpha| < \lambda \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m).$$

Alors, si $a_\alpha = \lambda u_\alpha$, on aura

$$(24, 12) \qquad |t_\alpha - u_\alpha| < 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m).$$

Si λ est assez petit, il est évident que, dans tout le domaine de variation de T, les $\lambda b_\alpha(\lambda T)$ et $\lambda^2 c(\lambda T)$ seront aussi voisins de zéro que nous voudrons. De plus, les *dérivées* des $a_{\alpha,\beta}(\lambda T)$, c'est-à-dire les

$$\lambda \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\gamma},$$

seront également aussi petites que nous voudrons.

On peut donc dire que, si λ est assez petit, l'équation (24, 1) diffère aussi peu que l'on veut d'une équation où les $a_{\alpha,\beta}$ seraient constants, et où les b_α et c seraient nuls.

Or on va prouver que, si les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c et leurs dérivées premières varient de moins de ε, dans un domaine fixe, la variation du déterminant correspondant est moindre qu'une quantité proportionnelle à ε. En nous rappelant que le déterminant n'est pas nul dans le cas où les $a_{\alpha,\beta}$ sont constants, et les b_α et c nuls, nous aurons la conclusion annoncée.

Nous allons d'abord prouver que G(X, A) varie de moins de

$$k\varepsilon L^{2-m}(X, A)$$

(on se place ici dans le cas réel, ce qui suffit), et ses dérivées premières et secondes de moins de

$$k\varepsilon L^{1-m}(X, A) \quad \text{et} \quad k\varepsilon L^{-m}(X, A),$$

k étant une constante.

Nous supposons, bien entendu, ε assez petit pour que l'équation ne cesse pas d'être de type elliptique. Alors, quels que soient les $a_{\alpha,\beta}$ dans le domaine de variation en question, et quel que soit le point X du domaine D, les racines du discriminant de la forme quadratique

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta} X_\alpha X_\beta - s \Sigma_\alpha X_\alpha^2$$

restent supérieures à un nombre positif fixe σ. Il en résulte l'existence d'un nombre fixe k_1 tel que

$$|K(X, A)| < k_1 L^{1-m}(X, A).$$

De plus, pour une variation inférieure à ε des $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c et des dérivées premières des $a_{\alpha,\beta}$, on constate que $K(X, A)$ varie d'une quantité moindre que

$$k_2 \varepsilon L^{1-m}(X, A),$$

en choisissant convenablement la constante k_2; pour faire cette vérification, il est utile de remarquer que

$$a_{\alpha,\beta}(X) - a_{\alpha,\beta}(A) = \int_A^X \sum_\gamma \frac{\partial a_{\alpha,\beta}(\Gamma)}{\partial t_\gamma} dt_\gamma,$$

et que par suite ces différences, qui figurent au numérateur de $K(X, A)$, ont une variation moindre qu'une quantité proportionnelle à $\varepsilon L(X, A)$, le facteur de proportionnalité étant le produit par $\sqrt{m}$ d'une limite supérieure des $\left|\frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\gamma}\right|$ (nous supposons ici qu'on peut aller en ligne droite de A à X sans sortir du domaine d'existence et de continuité des coefficients et de leurs dérivées; cette hypothèse n'a pas d'inconvénient, puisque D est infiniment petit dans toutes ses dimensions).

Alors K_2 varie d'une quantité moindre que (n° 9)

$$2 k_1 k_2 \varepsilon \int_D^{(m)} L^{1-m}(X, T) L^{1-m}(T, A)\, d(t_1, \ldots, t_m) < 2 k_1 k_2 h_1 \varepsilon L^{2-m}(X, A);$$

et ainsi de suite. Finalement, $K_{m+1}(X, A)$ varie d'une quantité moindre que $k_3 \varepsilon$, k_3 étant une nouvelle constante.

Si nous passons au noyau $K_{(m+1)p}(X, A)$, nous constaterons que la valeur absolue de sa variation est inférieure à $p k_3 M^{p-1} \omega^p \varepsilon$, M étant une limite supérieure de $|K_{m+1}|$, et ω une limite supérieure de la mesure de D. La série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \right]^{(m+1)p} K_{(m+1)p}(X, A)$$

varie de moins de

$$k_3 \varepsilon \sum_{p=1}^{\infty} p \left[\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \right]^{(m+1)p} M^{p-1} \omega^p,$$

c'est-à-dire de moins que le produit de ε par une constante.

Si maintenant nous composons la somme de cette série avec

$$\sum_{p=1}^{m} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \right]^p K_p(X, A),$$

nous trouvons pour limite supérieure de la variation du noyau résolvant une quantité proportionnelle à $\varepsilon L^{1-m}(X, A)$.

Pour la solution $G(X, A)$ de l'équation homogène, cela nous donne bien une variation dont la valeur absolue est moindre que

$$k\varepsilon L^{2-m}(X, A),$$

à condition de choisir convenablement la constante k. Des raisonnements analogues fourniront pour la variation des dérivées de $G(X, A)$ une limite égale au produit de ε par une constante et par la puissance de L qui intervient dans la limitation des dérivées elles-mêmes.

Nous arrivons à l'équation (23, 2). Introduisons les paramètres λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$, qui servent (n° 21) à fixer les positions de X et de A sur S; quand on transforme S par homothétie, on pourra convenir de garder les mêmes paramètres pour les points homothétiques. Soit alors $P(A, M)$ le noyau de 23, 2), où l'on a pris tous les ρ_α nuls :

$$(24,2) \qquad P(A, M) = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \sum_{\alpha,\beta} (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \times a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\beta} \frac{d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})}{d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1})}.$$

En décomposant G en $H^{\frac{2-m}{2}} + G_2$, nous trouverons aisément pour limite supérieure de la valeur absolue de la variation de $P(A, M)$ une quantité proportionnelle à

$$\varepsilon[\Sigma_\alpha(\lambda_\alpha - \mu_\alpha)^2]^{\frac{2-m}{2}}.$$

En continuant le même genre de raisonnement, nous aurons finalement pour la variation du déterminant du noyau $P_m(A, M)$ une limitation proportionnelle à ε, ainsi qu'il avait été annoncé.

Donc ce déterminant ne sera pas nul pour (24, 1), dès que λ sera suffisamment petit; c'est ce que nous voulions démontrer.

On déduit même de là une limite inférieure de la valeur absolue de ce déterminant. En effet, si les $a_{\alpha,\beta}$ sont constants, et les b_α et c nuls, le déterminant est une fonction continue des $a_{\alpha,\beta}$; cette fonction n'étant jamais nulle, sa valeur absolue a un minimum positif si l'on borne d'une façon quelconque le domaine de variation des $a_{\alpha,\beta}$. Il en est donc de même du déterminant du noyau $P_m(A, M)$, si λ est assez petit.

25. Lemme. — *Considérons la fonction*

$$\text{(25, 1)} \qquad F(X) = \int_S^{(m-1)} \varpi(A)\Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \times a_{\alpha,\beta}(A)\frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\beta}\, d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}),$$

où $\varpi(A)$ *est une fonction donnée sur la surface* S.

Nous nous proposons de démontrer que, *si* $\varpi(A)$, *exprimé en fonctions de* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$ (n° 21), *admet des dérivées partielles du premier ordre continues*, $F(X)$ *admet, même sur* S, *des dérivées premières par rapport à* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ *continues; si* $\varpi(A)$ *admet des dérivées secondes continues*, $F(X)$ *admet, même sur* S, *une dérivée par rapport à* λ_m *continue*.

Cette proposition exige toutefois que les $a_{\alpha,\beta}$ *aient des dérivées premières et secondes continues;* nous ne supposons pas nécessairement que $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$ soient réels sur S.

Remarquons tout d'abord que, si X n'est pas sur S, on peut appliquer à l'expression (25, 1) l'opération de la dérivation sous le signe $\int$: toutes les dérivées indiquées existent donc et sont continues, tant que X n'est pas sur S.

Occupons-nous maintenant des cas où X peut venir sur S. Introduisons les variables $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$, et, comme au n° 21, désignons par un accent ce que devient une fonction quelconque quand on l'exprime à l'aide de ces variables. Nous aurons donc

$$(25, 1) \qquad F'(A) = \int_S^{(m-1)} w'(M) \frac{d(a_1, \ldots, a_m)}{d(\mu_1, \ldots, \mu_m)} (-1)^{m-1} \times \Sigma_\alpha\, a'_{m,\alpha}(M) \frac{\partial G'(A, M)}{\partial \mu_\alpha} d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}).$$

Nous allons remarquer que si l'on pose

$$(25, 2) \qquad \frac{\partial G'(A, M)}{\partial \lambda_\alpha} + \frac{\partial G'(A, M)}{\partial \mu_\alpha} = T_\alpha(A, M) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

la fonction T_α admet une limitation d'ordre $2 - m$ par rapport à

$$L(A', M') = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{m} (\lambda'_\alpha - \mu'_\alpha)^2},$$

les λ'_α et les μ'_α étant les parties réelles des λ_α et des μ_α (dans ce système de variables, les domaines d'intégration satisfont encore à des inégalités du type du n° 7); et les dérivées premières de T_α ont une limitation d'ordre $1 - m$, la partie d'ordre $1 - m$ venant exclusivement du premier terme $H^{\frac{2-m}{2}}$ de G.

En effet, d'après la formule (10,4), en désignant provisoirement par D le domaine qui a servi à former G, et par S sa frontière,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a_1} \int_D^{(m)} & H^{\frac{2-m}{2}}(X, B) K(B, A)\, d(b_1, \ldots, b_m) \\
= & -\int_S^{(m-1)} H^{\frac{2-m}{2}}(X, B) K(B, A)\, d(b_2, \ldots, b_m) \\
& + \int_D^{(m)} \left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, B) R(B, A) + \frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, B)}{\partial b_1} K(B, A) \right] d(b_1, \ldots, b_m) \\
= & -\frac{\partial}{\partial x_1} \int_D^{(m)} H^{\frac{2-m}{2}}(X, B) K(B, A)\, d(b_1, \ldots, b_m) \\
& -\int_S^{(m-1)} H^{\frac{2-m}{2}}(X, B) K(B, A)\, d(b_2, \ldots, b_m) \\
& + \int_D^{(m)} H^{\frac{2-m}{2}}(X, B) R(B, A)\, d(b_1, \ldots, b_m) \\
& + \int_D^{(m)} \left[\frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, B)}{\partial b_1} + \frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, B)}{\partial x_1} \right] K(B, A)\, d(b_1, \ldots, b_m).
\end{aligned}$$

On en déduit, en raisonnant comme aux nos 11 et 12,

$$\left| \frac{\partial}{\partial a_1} \int_{\mathrm{D}}^{(m)} \mathrm{H}^{\frac{2-m}{2}}(\mathrm{X}, \mathrm{B})\, \mathrm{K}(\mathrm{B}, \mathrm{A})\, d(b_1, \ldots, b_m) + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\mathrm{D}}^{(m)} \mathrm{H}^{\frac{2-m}{2}}(\mathrm{X}, \mathrm{B})\, \mathrm{K}(\mathrm{B}, \mathrm{A})\, d(b_1, \ldots, b_m) \right| < \mathrm{ML}^{3-m}(\mathrm{X}', \mathrm{A}'),$$

M étant une constante; et les dérivées premières de la fonction du premier membre (¹) ont une limitation d'ordre $2-m$. Comme, dans ce calcul, D est le domaine qui sert à former G, les points B et A ne s'approchent pas de la frontière à moins d'une certaine distance, puisque, par la suite, nous restreignons ce domaine.

En développant comme au n° 9 le noyau résolvant de K(X, A), les termes

$$\int_{\mathrm{D}}^{(m)} \mathrm{H}^{\frac{2-m}{2}}(\mathrm{X}, \mathrm{B})\, \mathrm{K}_p(\mathrm{B}, \mathrm{A})\, d(b_1, \ldots, b_m) \qquad (p > 1)$$

de G peuvent être dérivés sous le signe $\int$ par rapport à a_1, ou à x_1, et l'on voit ainsi que

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial a_1}$$

a une limitation d'ordre $2-m$, et ses dérivées premières une limitation d'ordre $1-m$, la partie d'ordre $1-m$ venant exclusivement de $\mathrm{H}^{\frac{2-m}{2}}$.

Ce résultat peut évidemment s'étendre à

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial a_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

et, en passant aux variables λ_α, μ_α, on a le résultat annoncé.

Cela étant, nous allons dériver (25, 11) sous le signe $\int$, λ_m n'étant pas nul, c'est-à-dire A n'étant pas sur S; puis nous ferons tendre λ_m vers zéro, et nous examinerons ce que devient l'expression obtenue.

(¹) Elles se calculent toujours de la même façon : $\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial a_\alpha} + \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_\alpha}$ a une limitation d'ordre $2-m$.

D'après (24, 2), le coefficient de $\omega'(\mathrm{M})$ sous le signe $\int$ est

$$-\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}\mathrm{P}(\mathrm{A},\mathrm{M}),$$

λ_m n'étant pourtant pas nul comme dans (24, 2). Donc

$$(25,3)\quad \frac{\partial \mathrm{F}'(\mathrm{A})}{\partial\lambda_\beta}=-\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}\int_{\mathrm{S}}^{(m-1)}\omega'(\mathrm{M})\frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{A},\mathrm{M})}{\partial\lambda_\beta}d(\mu_1,\ldots,\mu_{m-1})$$
$$(\beta=1,2,\ldots,m).$$

Avant de faire tendre λ_m vers zéro, nous devons transformer cette expression. D'après ce qui précède, la fonction sous le signe $\int$ ne diffère de

$$(25,31)\quad (-1)^m\omega'(\mathrm{M})\frac{d(a_1,\ldots,a_m)}{d(\mu_1,\ldots,\mu_m)}\Sigma_\alpha\frac{\partial}{\partial\mu_\beta}\left[a'_{m,\alpha}(\mathrm{M})\frac{\partial \mathrm{G}'(\mathrm{A},\mathrm{M})}{d\mu_\alpha}\right]$$

que par une fonction qui a une limitation d'ordre $1-m$, la partie d'ordre $1-m$ provenant exclusivement de $\mathrm{H}'^{\frac{2-m}{2}}$, et le reste étant d'ordre $2-m$. En nous rappelant que les intégrales portant sur des fonctions d'ordre $2-m$ sont continues même sur S, nous sommes ramenés à étudier cette partie d'ordre $1-m$, provenant de $\mathrm{H}'^{\frac{2-m}{2}}$, puis à étudier l'intégrale portant sur (25, 31).

Or

$$(25,32)\quad \Sigma_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_\beta}+\frac{\partial}{\partial\mu_\beta}\right)\left[a'_{m,\alpha}(\mathrm{M})\frac{\partial\mathrm{H}'^{\frac{2-m}{2}}(\mathrm{A},\mathrm{M})}{\partial\mu_\alpha}\right]$$
$$=-\frac{m(m-2)}{2}\lambda_m\mathrm{H}'^{-\frac{m+2}{2}}(\mathrm{A},\mathrm{M})\,\Sigma_{\gamma,\delta}\frac{\partial}{\partial\mu_\beta}\left(\frac{\mathrm{A}'_{\gamma,\delta}}{\Delta'}\right)(\lambda_\gamma-\mu_\gamma)(\lambda_\delta-\mu_\delta)$$
$$+\text{ fonction d'ordre } 2-m.$$

La même remarque qu'il y a un instant permet d'étudier seulement ce qui provient du terme écrit, dans lequel on peut encore permuter A et M en changeant le signe, car cette opération lui ajoute une fonction d'ordre $2 - m$. Nous avons ainsi à étudier la discontinuité de

$$(-1)^{m-1}\frac{m(m-2)}{2}\int_S^{(m-1)} w'(M)\frac{d(a_1, \ldots, a_m)}{d(\mu_1, \ldots, \mu_m)}\lambda_m H'^{-\frac{m+2}{2}}(M, A) \times \Sigma_{\gamma,\delta}\frac{\partial}{\partial\lambda_\beta}\left(\frac{A'_{\gamma,\delta}}{\Delta'}\right)(\lambda_\gamma - \mu_\gamma)(\lambda_\delta - \mu_\delta)\, d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1})$$

ou de

$$(25, 33) \quad -\frac{m(m-2)}{2}\int_S^{(m-1)} w'(M)\frac{d(a_1, \ldots, a_m)}{d(\mu_1, \ldots, \mu_m)} H'^{-\frac{m+2}{2}}(M, A) \times \Sigma_{\gamma,\delta}\frac{\partial}{\partial\lambda_\beta}\left(\frac{A'_{\gamma,\delta}}{\Delta'}\right)(\lambda_\gamma - \mu_\gamma)(\lambda_\delta - \mu_\gamma) \times \Sigma_\zeta(-1)^{(m-1)(\zeta-1)}(\mu_\zeta - \lambda_\zeta)\, d(\mu_{\zeta+1}, \ldots, \mu_{\zeta-1})$$

car la quantité ajoutée sous le signe $\int$ est nulle sur S.

Nous ne changerons pas la discontinuité de l'intégrale en un point de S en étendant l'intégration à une multiplicité fermée S_1, ayant en commun avec S le point considéré et les points suffisamment voisins. On peut ainsi faire en sorte que S_1 et tous les points intérieurs à S_1 appartiennent à la région où la correspondance entre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et les variables $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ est biunivoque.

Mais le coefficient de

$$w'(M)\frac{d(a_1, \ldots, a_m)}{d(\mu_1, \ldots, \mu_m)}\Sigma_\zeta(-1)^{(m-1)(\zeta-1)}(\mu_\zeta - \lambda_\zeta)\, d(\mu_{\zeta+1}, \ldots, \mu_{\zeta-1})$$

sous le signe $\int$ est une fonction homogène et d'ordre $-m$ des variables $\lambda_\alpha - \mu_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$. Dès lors, on peut reproduire les raisonnements faits à propos du potentiel de double couche (n^os^ 18 à 22). On trouve ainsi qu'en atteignant S l'expression (25,33) diminue brusquement de

$$(25, 4) \qquad -\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)} w'(A)\,\Sigma_{\gamma,\delta}\, a'_{\gamma,\delta}(A)\frac{\partial}{\partial\lambda_\beta}\left(\frac{A'_{\gamma,\delta}}{\Delta'}\right)\Delta'^{\frac{-2}{m}}(A),$$

c'est-à-dire du produit de $w'(A)$ par une fonction continue connue.

Passons à l'intégrale portant sur (25,31). Ici nous avons à distinguer deux cas : premier cas, $\beta \neq m$; deuxième cas, $\beta = m$.

Dans le cas où β n'est pas égal à m, l'intégrale peut se transformer par intégration par parties. Nous aurons (Chap, I, n° 5)

$$(25,41)\qquad (-1)^m \int_S^{(m-1)} w'(M)\frac{d(a_1,\ldots,a_m)}{d(\mu_1,\ldots,\mu_m)}\Sigma_\alpha \frac{\partial}{\partial\mu_\beta}\left[a'_{m,\alpha}(M)\frac{\partial G'(A,M)}{\partial\mu_\alpha}\right] d(\mu_1,\ldots,\mu_{m-1})$$

$$= (-1)^{m\beta}\int_C^{(m-2)} w'(M)\frac{d(a_1,\ldots,a_m)}{d(\mu_1,\ldots,\mu_m)}\Sigma_\alpha a'_{m,\alpha}\frac{\partial G'(A,M)}{\partial\mu_\alpha} d(\mu_{\beta+1},\ldots,\mu_{m-1},\mu_1,\ldots,\mu_{\beta-1})$$

$$-(-1)^m\int_S^{(m-1)}\frac{\partial}{\partial\mu_\beta}\left[w'(M)\frac{d(a_1,\ldots,a_m)}{d(\mu_1,\ldots,\mu_m)}\right]\Sigma_\alpha a'_{m,\alpha}\frac{\partial G'(A,M)}{\partial\mu_\alpha} d(\mu_1,\ldots,\mu_{m-1}),$$

C étant la frontière de la région de l'espace $(\mu_1,\ldots,\mu_{m-1})$ qu'il suffit de considérer pour avoir S; si l'on n'a pas la même représentation paramétrique pour tous les points de S, il suffira de n'intégrer par parties que la portion d'intégrale correspondant à une région de S qui contient A; dans tous les cas, on peut supposer que C ne passe pas par A. Dans ces conditions, la seule intégrale discontinue en A est la dernière intégrale (25,41), qui est un potentiel de double couche : nous savons que cette intégrale diminue brusquement sur S de

$$(25,5)\qquad -\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}\frac{\partial}{\partial\lambda_\beta}\left[w'(A)\frac{d(x_1,\ldots,x_m)}{d(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}\right]\left[\frac{d(x_1,\ldots,x_m)}{d(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}\right]^{-1}$$
$$(\beta\neq m).$$

Pour traiter le cas où $\beta = m$, nous déduirons de la relation (16,4) que

$$(25,51)\qquad \mathcal{G}[G(X,A)] = \mathcal{G}[I((A,X)],$$

l'opération $\mathcal{G}$ portant sur le point A; le second membre est continu sur S (holomorphe dans le cas complexe). Cette relation s'écrit, avec les points variables A et M,

$$(25,52)\qquad \mathcal{G}'[G'(A,M)] = \mathcal{G}'[I'(M,A)].$$

Nous pouvons tirer de là $\dfrac{\partial^2 G'}{\partial\mu_m^2}$ en fonction linéaire des autres dérivées secondes, des dérivées premières, de G' lui-même, et de $\mathcal{G}'$ [I'(M, A)]. Nous portons dans (25,31) l'expression obtenue et nous intégrons par parties, comme ci-dessus, tout ce qui contient une dérivée seconde de G′ : nous obtenons une expression contenant une intégrale d'ordre $m-2$ qui ne donne lieu à aucune difficulté, une autre intégrale, d'ordre $m-1$, portant sur une fonction dépendant de $\mathcal{G}[\Gamma'(M, A)]$, et qui ne donne lieu non plus à aucune difficulté, et enfin une intégrale du type

$$(25, 53) \qquad \int_S^{(m-1)} \left[\Sigma_\alpha \varphi_\alpha(M) \frac{\partial G'(A, M)}{\partial \mu_\alpha} + \psi(M) G'(A, M)\right] d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}).$$

L'intégrale portant sur $\psi G'$ est continue sur S; nous écrivons le reste de (25, 53) sous la forme

$$(25, 54) \qquad \int_S^{(m-1)} \frac{\varphi_m(M)}{a'_{m,m}(M)} \Sigma_\alpha a'_{m,\alpha}(M) \frac{\partial G'(A, M)}{\partial \mu_\alpha} d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1})$$
$$+ \int_S^{(m-1)} \sum_\alpha \frac{a'_{m,m}(M)\varphi_\alpha(M) - a'_{m,\alpha}(M)\varphi_m(M)}{a'_{m,m}(M)} \frac{\partial G'(A, M)}{\partial \mu_\alpha} d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}),$$

et nous intégrons par parties tous les termes de la seconde intégrale (celui qui correspond à $\alpha = m$ est nul): nous les transformerons ainsi en une intégrale d'ordre $m-2$ et une intégrale portant sur le produit de G′ par une fonction continue, et qui, l'une et l'autre, ne donnent lieu à aucune difficulté; ce calcul suppose que $\varpi'(M)$ admet des dérivées secondes continues, car les $\varphi_\alpha(M)$ contenaient déjà les dérivées premières. Il reste seulement la première intégrale (25, 54), qui est un potentiel de double couche, diminuant brusquement de

$$(25, 6) \qquad (-1)^m \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)} \frac{\varphi_m(A)}{a'_{m,m}(A)} \left[\frac{d(x_1, \ldots, x_m)}{d(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)}\right]^{-1},$$

quand A atteint S.

Nous venons de démontrer que les valeurs de $\frac{\partial F'(A)}{\partial \lambda_\alpha}$, pour A intérieur à S, coïncident avec les valeurs de certaines fonctions continues même sur S : donc les $\frac{\partial F'(A)}{\partial \lambda_\alpha}$ tendent *uniformément* vers leurs limites quand λ_m tend vers zéro, ce qui entraîne que, pour $\lambda_m = 0$, ces dérivées existent, et sont égales aux limites trouvées; pour $\alpha = m$, ce raisonnement ne s'applique pas, mais la formule des accroissements finis donne le même résultat.

Notre théorème est démontré. Remarquons que nous avons des expressions des dérivées de $F'(A)$ valables sur S, expressions formées d'intégrales d'ordre $m-1$ et $m-2$, auxquelles on ajoute la somme de l'expression (25, 4) et, suivant le cas, de (25,5) ou de (25,6). Si l'on faisait $\lambda_m = 0$ dans (25,3), l'expression obtenue n'aurait pas de sens.

26. Nous aurons besoin d'avoir une limitation de la fonction I(A, B) définie par la relation (16,4). Remarquons que nous aurions pu remplacer G(X, A) par une autre solution de la même équation aux dérivées partielles, telle que la fonction I correspondante soit nulle. On déduit en effet de (16,4) l'identité (25,51); et, de celle-ci, on déduit

$$\mathcal{F}\{\mathcal{G}[I(A, X)]\} = 0,$$

en faisant porter l'opération $\mathcal{F}$ sur le point X (nous nous plaçons dans le cas complexe, où toutes les dérivées existent). Ceci montre que la fonction

$$\varphi(A, X) = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\int_{D}^{(m)} G^{\star}(A, B)\,\mathcal{G}[I(B, X)]\,d(b_1, \ldots, b_m),$$

qui satisfait à

$$\mathcal{G}\varphi = \mathcal{G}[I(A, X)],$$

satisfait aussi à

$$\mathcal{F}\varphi = 0.$$

Donc la fonction $G(X, A) - \varphi(A, X)$ satisfait, par rapport à X, à l'équation $\mathcal{F} = 0$, et par rapport à A, à l'équation $\mathcal{G} = 0$.

Si l'on avait remplacé G par cette autre solution fondamentale, I n'aurait pas apparu dans les calculs qui précèdent; mais on aurait retrouvé cette fonction quand il aurait fallu limiter cette nouvelle solution fondamentale.

Reportons-nous à l'expression de I. En désignant par S' la multiplicité, appelée S dans (16, 3), on a

$$(26,\ 1)\qquad I(A, B) = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\int_{S'}^{(m-1)} \Sigma_\alpha(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}$$
$$\times\left\{G^{\star}(X, B)\left[\Sigma_\beta a_{\alpha,\beta}\frac{\partial G(X, A)}{\partial x_\beta} + b_\alpha G(X, A)\right]\right.$$
$$\left. - G(X, A)\,\Sigma_\beta\frac{\partial[a_{\alpha,\beta}G^{\star}(X, B)]}{\partial x_\beta}\right\} d(x_{\alpha+1}, \ldots, x_{\alpha-1}).$$

Donc

$$(26, 2) \qquad |\mathrm{I}(\mathrm{A}, \mathrm{B})| < \int_{\mathrm{S}'}^{(m-1)} \frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{L}^{m-2}(\mathrm{A}', \mathrm{M}')\,\mathrm{L}^{m-2}(\mathrm{A}', \mathrm{N}')} \times \left[\frac{1}{\mathrm{L}(\mathrm{A}', \mathrm{M}')} + \frac{1}{\mathrm{L}(\mathrm{A}', \mathrm{N}')}\right] d(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{m-1}),$$

A, M, N correspondant respectivement à X, A, B; A$'$, M$'$, N$'$ sont leurs projections sur l'espace réel; $\mathfrak{A}$ est une constante dépendant des limites supérieures des valeurs absolues des $a_{\alpha,\beta}$, des b_α, de c, des dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ jusqu'au troisième ordre, de celles des b_α jusqu'au second ordre, des dérivées premières de c, du nombre g (n° 7), et d'une limite supérieure de la mesure ω des domaines complexes qui ont à former G.

Ceci suppose toutefois que S$'$ a pour équation $\lambda_m = \text{const.}$

Supposons que, A parcourant S$'$, $\mu'_m - \lambda'_m$ et $\nu'_m - \lambda'_m$ restent supérieurs à un nombre positif h. Alors

$$\mathrm{L}(\mathrm{A}', \mathrm{M}') > \sqrt{\mathrm{L}^2(\mathrm{A}', \mathrm{M}'_1) + h^2},$$
$$\mathrm{L}(\mathrm{A}', \mathrm{N}') > \sqrt{\mathrm{L}^2(\mathrm{A}', \mathrm{N}'_1) + h^2},$$

M_1 et N_1 se déduisant de M et de N en remplaçant μ_m et ν_m par λ_m. Mais

$$\mathrm{L}(\mathrm{A}', \mathrm{N}'_1) > |\mathrm{L}(\mathrm{A}', \mathrm{M}'_1) - \mathrm{L}(\mathrm{M}'_1, \mathrm{N}'_1)|;$$

si L_0 est une limite supérieure de $\mathrm{L}(\mathrm{M}'_1, \mathrm{N}'_1)$ dans le domaine où nous opérons, on en conclut que

$$\mathrm{L}^2(\mathrm{A}', \mathrm{N}'_1) + h^2 > \left(\frac{-\mathrm{L}_0 + \sqrt{\mathrm{L}_0^2 + 4h^2}}{2h}\right)^2 [\mathrm{L}^2(\mathrm{A}', \mathrm{M}'_1) + h^2].$$

Donc

$$(26, 3) \qquad \int_{\mathrm{S}'}^{(m-1)} \frac{\mathfrak{A}\, d(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{m-1})}{\mathrm{L}^{m-1}(\mathrm{A}', \mathrm{M}')\,\mathrm{L}^{m-2}(\mathrm{A}', \mathrm{N}')} < \mathfrak{B} h^{-m+2} \times \int_{\mathrm{S}'}^{(m-1)} \frac{d(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{m-1})}{[\mathrm{L}^2(\mathrm{A}', \mathrm{M}'_1) + h^2]^{\frac{2m-3}{2}}},$$

$\mathfrak{B}$ désignant une limite supérieure de

$$\mathfrak{A}\left(\frac{2h^2}{-\mathrm{L}_0 + \sqrt{\mathrm{L}_0^2 + 4h^2}}\right)^{m-2};$$

cette quantité restant finie quand h tend vers zéro, $\mathcal{B}$ peut être pris constant dès que h est suffisamment petit.

Soit

$$\rho = L(A', M'_1).$$

Le second membre de (26,3) est augmenté si l'on étend l'intégrale à toutes les valeurs réelles de $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{m-1}$; cette intégrale est alors

$$\frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \mathcal{B} h^{-m+2} \int_0^\infty \frac{\rho^{m-2}\, d\rho}{(\rho^2+h^2)^{\frac{2m-3}{2}}}.$$

En posant $\rho = ht$, on transforme ceci en

$$\mathcal{C}_1 h^{-2m+4}.$$

$$\mathcal{C}_1 = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \mathcal{B} \int_0^\infty \frac{t^{m-2}\, dt}{(t^2+1)^{\frac{2m-3}{2}}}.$$

La partie restante du second membre de (26,2) est de même inférieure à $\mathcal{C}_2 h^{-2m+4}$, $\mathcal{C}_2$ dépendant des mêmes données que $\mathcal{C}_1$. Donc

$$|I(A, B)| < \mathcal{C} h^{-2m+4} \qquad (\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2).$$

27. De là nous allons tirer une limitation de $\frac{\partial u'(A)}{\partial \lambda_m}$ sur S, $u'(A)$, ou $u(X)$, étant donné par (23, 1) où $\varphi(X)$ est la solution de (23, 2).

Précisons d'abord la limitation de $\varphi(A)$. Si

$$|\varphi(X)| < \Phi$$

et si notre domaine est assez petit dans toutes ses dimensions, les ρ_α étant nuls, on aura

$$|\varphi(A)| < A_1 \Phi, \tag{27, 1}$$

A_1 restant constant tant que les $a_{\alpha,\beta}$, les b_α et c ne sortent pas d'un certain domaine de variation.

Dans le cas complexe, la limitation (27, 1) sera valable tant que les parties imaginaires de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$ resteront en valeur absolue inférieures à une certaine quantité l, les parties réelles étant quelconques.

Si donc on suppose que les valeurs absolues de ces parties imaginaires restent inférieures à $l - l_1$ $(0 < l_1 < l)$, on aura

$$(27, 11) \qquad \left|\frac{\partial v'(\Lambda)}{\partial \lambda_\alpha}\right| < \frac{A_1 \Phi}{l_1}, \qquad \left|\frac{\partial^2 v'(\Lambda)}{\partial \lambda_\alpha \partial \lambda_\beta}\right| < \frac{A_1 \Phi}{l_1^2} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Passons à $u'(\Lambda)$. On aura

$$(27, 2) \qquad |u'(\Lambda)| < A_2 \Phi,$$

A_2 étant constant dans les mêmes conditions que A_1. Quant à $\dfrac{\partial u'(\Lambda)}{\partial \lambda_m}$, les calculs déjà faits (n° 25) en fournissent une expression qui fait intervenir les dérivées secondes de $v'(\Lambda)$. On aura donc sur S, tant que les valeurs absolues des parties imaginaires de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ resteront inférieures à $l - l_1$,

$$(27, 21) \qquad \left|\frac{\partial u'(\Lambda)}{\partial \lambda_m}\right| < \frac{A_3 \Phi}{l_1^2} + \text{limitation de l'intégrale où figure } \mathcal{G}[\mathrm{I}'(\mathrm{M}, \Lambda)],$$

A_3 étant constant dans les mêmes conditions que A_1 et A_2.

Or soit

$$\lambda_m = -h,$$

la surface S' qui intervient dans la limitation de I. Si $|\lambda_m + h|$ et $|\mu_m + h|$ sont au moins égaux à h_1, on aura

$$|\mathrm{I}'(\mathrm{M}, \Lambda)| < \mathcal{C} h_1^{4-2m}.$$

Même si l'on suppose que S' soit réel, les valeurs absolues des parties imaginaires de λ_m et de μ_m pourront, si $|\lambda_m + h|$ et $|\mu_m + h|$ sont au moins égaux à h_1, atteindre une limite $g' h_1$, g' étant un nombre qui ne dépend que de g (n° 7) et de la correspondance entre X et Λ. Soit

$$h_1 = \text{le plus petit des nombres } h - l_1 \text{ et } h - \frac{l_1}{g'}.$$

On voit que, sur S, les valeurs absolues de toutes les dérivées secondes de $\mathrm{I}'(\mathrm{M}, \Lambda)$ sont inférieures à

$$\mathcal{C} l_1^{-2} h_1^{4-2m}.$$

Si l_1 est proportionnel à h, on aura donc, sur S,

$$(27, 22) \qquad |\mathcal{G}'[\mathrm{I}'(\mathrm{M}, \Lambda)]| < \mathcal{D} h^{2-2m},$$

$\mathcal{D}$ étant une constante. Comme m est plus grand que *deux*, en portant dans (27, 21), on aura finalement, pour h assez petit,

$$\left|\frac{\partial u'(\Lambda)}{\partial \lambda_m}\right| < A_4 h^{2-2m}\Phi \tag{27, 3}$$

A_4 étant constant dans les mêmes conditions que les coefficients précédents.

28. *Prolongement analytique de* $u(X)$. — Nous pouvons conclure de là que $u(X)$ est prolongeable analytiquement à travers S. Nous savons déjà en effet que cette fonction est holomorphe dans D. Or l'inégalité (27, 3) aura lieu dès que λ_m sera suffisamment petit (c'est-à-dire dès qu'on sera assez près de S) et dès que les valeurs absolues des parties imaginaires de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ seront inférieures à $l - kh$, où k est une constante. Nous prendrons k assez petit pour que $2kh$ soit plus petit que l. Si les valeurs absolues des parties imaginaires de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ sont moindres que $l - 2kh$, nous connaissons des fonctions majorantes des valeurs prises par $u'(\Lambda)$ et par $\dfrac{\partial u'(\Lambda)}{\partial \lambda_m}$ sur une surface $\lambda_m =$ const. assez petite. Le théorème de Cauchy-Kowalewski nous fournit alors un développement de $u'(\Lambda)$ valable tant que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ne s'écartent pas de plus d'une certaine limite *fixe* de leurs valeurs initiales. Si donc on a pris la surface initiale assez voisine de S, on voit que le prolongement analytique de $u'(\Lambda)$ traverse S.

Pour évaluer le champ des valeurs de λ_m qu'on peut atteindre, nous pouvons prendre S comme surface initiale, puisque nous savons maintenant que u est holomorphe sur S.

Or nous avons

$$\frac{\partial^2 u'(\Lambda)}{\partial \lambda_m^2} = -\Sigma'_{\alpha,\beta} \frac{a'_{\alpha,\beta}(\Lambda)}{a'_{m,m}(\Lambda)} \frac{\partial^2 u'}{\partial \lambda_\alpha \partial \lambda_\beta} - \Sigma_\alpha \frac{b_\alpha(\Lambda)}{a'_{m,m}(\Lambda)} \frac{\partial u'}{\partial \lambda_\alpha} - \frac{c'(\Lambda)}{a'_{m,m}(\Lambda)} u', \tag{28, 1}$$

la notation $\Sigma'_{\alpha,\beta}$ signifiant que la combinaison $\alpha = \beta = m$ est exclue.

Plaçons-nous en un point déterminé de S, où les valeurs absolues des parties imaginaires des λ_α soient moindres que $l - 2kh$; il sera légitime d'admettre que la limitation (27, 3) a lieu tant que les valeurs absolues des différences y_α entre λ_α et la coordonnée correspondante du point initial de S restent inférieures à kh ($\alpha = 1, 2, \ldots, m-1$).

Si l'on considère l'équation

$$(28,\ 2)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y_m^2} = \frac{B}{\left(1 - \frac{y_m}{kh}\right)\left(1 - \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{m-1}}{kh}\right)} \times \left[\sum_{\alpha,\beta}' \frac{\partial^2 w}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} + \sum_\alpha \frac{\partial w}{\partial y_\alpha} + w\right],$$

où B est une constante convenable, et si, pour $y_m = 0$,

$$w = \frac{\partial w}{\partial y_m} = \frac{Q}{1 - \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{m-1}}{kh}},$$

w sera une fonction majorante de toute solution de (28, 1) telle que $|u|$ et $\left|\frac{\partial u}{\partial \lambda_m}\right|$ restent inférieures à Q pour

$$\lambda_m = 0 \quad \text{et} \quad |y_\alpha| < kh \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Cherchons w fonction seulement de y_m et de $y_1 + y_2 + \ldots + y_{m-1}$, que nous remplacerons par x; nous majorerons encore la solution cherchée en remplaçant (28, 2) par

$$(28,\ 21)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{C}{\left(1 - \frac{y}{kh}\right)\left(1 - \frac{x}{kh}\right)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + w\right);$$

où y remplace y_m, et où

$$C = m(m-1)B.$$

Soient

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w', \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = w'';$$

l'équation (28, 21) peut se remplacer par le système

$$(28,\ 22)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial y} = w'', \\ \dfrac{\partial w'}{\partial y} = \dfrac{\partial w''}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial w''}{\partial y} = \dfrac{C}{\left(1 - \frac{y}{kh}\right)\left(1 - \frac{x}{kh}\right)}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w'}{\partial x} + \dfrac{\partial w''}{\partial x} + w + w''\right). \end{cases}$$

Mais on majorera encore le résultat en prenant

$$w = w' = w'',$$

la fonction w devant satisfaire à

$$(28, 23) \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3C}{\left(1 - \frac{x}{kh}\right)\left(1 - \frac{y}{kh}\right)}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + w\right),$$

avec la valeur initiale

$$\frac{Q}{kh\left(1 - \frac{x}{kh}\right)^2},$$

pourvu que $3C > 1$ (sinon on remplacerait ce coefficient par *un*).

Posons

$$w = \frac{Qz}{kh\left(1 - \frac{x}{kh}\right)^2},$$

de sorte que z devra se réduire à *un* pour $y = 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3C}{\left(1 - \frac{x}{kh}\right)\left(1 - \frac{y}{kh}\right)}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{kh + 2 - x}{kh - x} z\right).$$

Nous majorerons encore le résultat en remplaçant ceci par

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3C}{1 - \frac{2x + \alpha y}{kh}}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{kh + 2}{kh} z\right) \qquad (\alpha > 1),$$

où l'on reconnaît le paramètre α introduit par M. Goursat dans la démonstration du théorème de Cauchy-Kowalewski.

Nous cherchons alors une solution qui soit fonction seulement de

$$2x + \alpha y = t;$$

l'équation s'écrit alors

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3C}{\alpha - 6C - \frac{\alpha t}{kh}} \frac{kh + 2}{kh} z.$$

Nous désirons que la solution égale à *un* pour $t = 0$ soit à coefficients tous positifs; or cette solution est

$$z = \left[1 - \frac{\alpha t}{kh(\alpha - 6C)}\right]^{-\frac{3C(kh+2)}{\alpha}};$$

les coefficients seront tous positifs si

$$\alpha > 6C,$$

et le rayon de convergence sera alors

$$kh \frac{\alpha - 6C}{\alpha}.$$

Si, par exemple, $\alpha = 12C$, ce rayon sera $\frac{kh}{2}$, et, pour

$$|t| < \frac{kh}{3},$$

on aura

$$|z| < 3^{\frac{kh+2}{4}}.$$

En remontant à u', on en conclut que le développement sera valable pour

$$|y_\alpha| < \frac{kh}{2m},$$

et que, pour

$$|y_\alpha| < \frac{kh}{3m},$$

on aura

$$|u| < 3^{\frac{kh+2}{4}} \frac{Q}{kh}.$$

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS NON LINÉAIRES.

1. Considérons une équation

$$(1, 1) \quad \mathfrak{F}(u) = F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}; u; x_1, \ldots, x_m\right) = 0,$$

que nous écrirons plus simplement

$$\mathfrak{F}(u) = \mathrm{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}; \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}; u; \mathrm{X}\right) = 0,$$

et dont nous connaissons déjà une solution qu'on pourra, par changement de fonction inconnue, supposer être la solution zéro; cette première solution pourra s'obtenir à l'aide du théorème de Cauchy-Kowalewski. Nous supposons que, dans un certain champ réel de variation de X, cette équation soit de type elliptique au voisinage de la solution zéro, c'est-à-dire que les

$$(1, 2) \qquad a_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)} \quad (\alpha \neq \beta), \qquad a_{\alpha,\alpha} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}\right)}$$

peuvent être regardés comme les coefficients d'une forme quadratique définie positive. On suppose en outre que F est holomorphe par rapport à l'ensemble des $\frac{m^2 + 5m + 2}{2}$ variables dont dépend cette fonction, pourvu que X soit dans le champ dont on vient de parler, et que les valeurs absolues de u et de ses dérivées premières et secondes soient assez petites.

Considérons, dans ce champ de variation de X, un domaine borné D, limité par un ou plusieurs contours fermés, dont chacun est régulièrement analytique, et dont nous désignerons la réunion par S.

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ sont les paramètres à l'aide desquels s'expriment analytiquement les coordonnées d'un point de S (ou d'une des parties de S), soit

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1})$$

une fonction holomorphe réelle de ces paramètres; nous nous donnons une telle fonction pour chacun des contours formant S.

Soit t un paramètre réel; nous nous proposons de trouver une solution de (1, 1), définie et continue dans D et sur S, et prenant sur S les valeurs

$$(1, 3) \qquad t\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}).$$

Nous montrerons que si D est suffisamment petit dans toutes ses dimensions, et si t est suffisamment petit en valeur absolue, ce problème admet une solution, et une seule, si l'on impose à u et à ses dérivées jusqu'au second ordre de rester, en valeur absolue, inférieures à un nombre suffisamment petit.

2. Pour démontrer ce théorème, nous considérons l'équation

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+\sum_\alpha b_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+cu=0, \tag{2,1}$$

où les $a_{\alpha,\beta}$ sont définis par (1, 2), et où

$$b_\alpha=\frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)},\qquad c=\frac{\partial F}{\partial u}. \tag{2,2}$$

Les $a_{\alpha,\beta}$, les b_α et c sont calculés en supposant u nul ainsi que toutes ses dérivées : ce sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et l'équation (2,1) est de type elliptique.

Nous cherchons une solution de l'équation (2,1) qui soit définie et continue dans D et sur S, et qui prenne sur S les valeurs (1,3). Nous avons déjà vu (Chap. II, 24) qu'il y en a une et une seule u_1, à dérivées secondes continues dans D, pourvu que ce domaine soit assez petit dans toutes ses dimensions, ce qui est notre hypothèse.

Soient maintenant $a'_{\alpha,\beta}$, b'_α, c' les quantités analogues à $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c, mais calculées en remplaçant u et ses dérivées par u_1 et ses dérivées. Nous considérons l'équation

$$\sum_{\alpha,\beta} a'_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 h}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+\sum_\alpha b'_\alpha\frac{\partial h}{\partial x_\alpha}+c'h=-\mathfrak{F}(u_1), \tag{2, 3}$$

et nous en cherchons une solution h_1 prenant sur S la valeur *zéro*. Si h_1 existe, nous aurons, comme seconde approximation de u, la fonction

$$u_2=u_1+h_1. \tag{2, 31}$$

D'une façon générale, si nous sommes parvenus à l'approximation u_n, nous calculons, à l'aide des formules (1, 2) et (2, 2), les coefficients $a^{(n)}_{\alpha,\beta}$, $b^{(n)}_\alpha$, $c^{(n)}$ correspondants, et nous considérons l'équation

$$\sum_{\alpha,\beta} a^{(n)}_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 h}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+\sum_\alpha b^{(n)}_\alpha\frac{\partial h}{\partial x_\alpha}+c^{(n)}h=-\mathfrak{F}(u_n), \tag{2, 4}$$

et nous en cherchons une solution h_n prenant sur S la valeur zéro. Si h_n existe, nous posons

$$u_{n+1} = u_n + h_n; \tag{2, 41}$$

c'est l'approximation suivante de u.

Il s'agit de voir que, sous les hypothèses faites, on n'est jamais arrêté dans ce calcul par une impossibilité ni par une indétermination, et que les approximations successives convergent effectivement vers une solution du problème posé, et qu'il n'y a pas d'autre solution. C'est ce que nous allons voir dans les numéros suivants.

On voit que cette manière de diriger les approximations successives ressemble à la méthode de Newton pour résoudre les équations dont l'inconnue est un nombre.

3. Nous commençons par déterminer un certain champ complexe $\mathcal{C}$ de variation pour le point X et pour u et ses dérivées jusqu'au cinquième ordre. Si l'on adjoint à un point quelconque X de D ou de S des valeurs suffisamment petites de u et de ses dérivées jusqu'au cinquième ordre, on devra obtenir un point de $\mathcal{C}$. Dans la partie réelle du champ $\mathcal{C}$, l'équation (1, 1) devra être de type elliptique.

D devra être assez petit dans toutes ses dimensions pour que, quelle que soit la fonction du champ $\mathcal{C}$ à l'aide de laquelle sont calculés les $a_{\alpha,\beta}$, les b_α et c, l'équation

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 h}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \sum_\alpha b_\alpha \frac{\partial h}{\partial x_\alpha} + ch = f(\mathrm{X})$$

admette une solution définie dans D, prenant sur S des valeurs qnelconques données à l'avance, et calculable par la méthode du Chapitre précédent.

Au voisinage de chaque partie de S, nous introduirons un paramètre λ_m, nul sur S, tel que $x_1, x_2, \ldots, x_m$ s'expriment analytiquement en fonctions de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, et, réciproquement, que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ soient fonctions analytiques de $x_1, x_2, \ldots, x_m$. λ_m sera, par exemple, la plus courte distance de X à S, cette distance étant affectée d'un signe. On fera en sorte que λ_m soit positif dans D.

Pour chaque équation telle que (2, 4), nous commencerons par former une solution fondamentale (ou principale) de l'équation homogène. Pour cela nous considérerons les surfaces S′ d'équation

$$\lambda_m = - l_{n+1},$$

où l_{n+1} est une constante positive dont le choix sera précisé plus loin. Si D′ est le domaine ainsi limité, et qui comprend D à son intérieur, cette solution G(X, A) sera définie dans D′.

Nous aurons besoin de définir aussi G(X, A) dans une région de l'espace complexe. Il suffira pour cela de faire choix d'un nombre g (Chap. II, n° 7), et de fixer la limite supérieure a des valeurs absolues des parties imaginaires de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ qui pourront être atteintes sur S′. La région balayée par les multiplicités complexes remplaçant D′ comprendra, sur S, tous les points tels que les valeurs absolues des parties imaginaires de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ soient inférieures à

$$a + h l_{n+1},$$

où h est une constante dépendant de g.

Pour former ensuite une solution de l'équation (2, 4) prenant des valeurs données sur S, nous ajouterons, à la solution particulière

$$(3, 1) \qquad h'_n = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \int_{D'}^{(m)} G(X, A) \mathcal{F}[u_n(A)]\, d(a_1, \ldots, a_m)$$

de cette équation, une solution convenable de l'équation homogène. Cette dernière solution devra aussi être formée dans l'espace complexe. On gardera le même nombre g que ci-dessus (qui doit pouvoir servir quelle que soit la fonction du champ $\mathcal{C}$ qui a servi à calculer les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c) et l'on admettra tous les domaines complexes D qui atteignent S en des points tels que les valeurs absolues des parties imaginaires de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ ne dépassent pas le même nombre a que tout à l'heure. La région balayée par les domaines D est ainsi intérieure à la région balayée par les domaines D′, et nous pourrons désigner par $k l_{n+1}$ la plus courte distance d'un point de la première région à la frontière de la seconde, k étant une nouvelle constante.

4. Occupons-nous d'abord de u_1. Soit Φ une limite supérieure de

$$|t\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1})|, \quad \left|t\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_\alpha}\right|, \quad \left|t\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda_\alpha\,\partial\lambda_\beta}\right|,$$

u_1 pourra être formé dans toute la région balayée par les domaines, analogues à D, qui atteignent S en des points intérieurs à la région balayée par les domaines D′ et, dans cette région d'existence de u_1, on aura

$$|u_1| < A_1 \Phi,$$

A_1 étant une constante, qui resterait la même si les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c étaient calculés à l'aide d'une fonction quelconque du champ $\mathcal{C}$.

Nous pourrons limiter aussi, sur S, $\left|\frac{\partial u_1}{\partial \lambda_m}\right|$; si l'on suppose que les valeurs absolues des parties imaginaires de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ soient inférieures à

$$a + \frac{1}{2} h l_1,$$

on a (Chap. II, n° 27) [1]

$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial \lambda_m}\right| < A_2 l_1^{2-2m} \log \frac{1}{l_1} \Phi, \tag{4,1}$$

A_2 étant une nouvelle constante.

En tout point de la frontière d'un domaine D, les valeurs prises par u_1 et par $\frac{\partial u_1}{\partial \lambda_m}$ ont comme majorantes respectives

$$\frac{A_1 \Phi}{1 - \dfrac{y_1 + \ldots + y_{m-1}}{h l_1}}, \qquad \frac{A_2 l_1^{2-2m} \log \dfrac{1}{l_1} \Phi}{1 - 2\dfrac{y_1 + \ldots + y_{m-1}}{h l_1}},$$

les y_α ayant le même sens qu'au n° 28 du Chapitre précédent. Ceci permet de prolonger analytiquement u_1 dans la région où

$$|y_\alpha| < 2 q l_1, \qquad |\lambda_m| < 2 q l_1;$$

q étant une certaine constante (Chap. II, n° 28) et, dans cette région, on aura

$$|u_1| < B \Phi l_1^{1-2m} \log \frac{1}{l_1}, \tag{4,2}$$

[1] Le facteur $\log \frac{1}{l_1}$ est ajouté pour n'avoir pas à changer le coefficient dans les limitations analogues qui suivront (*voir* Chap. II, n° 15, fin).

en supposant, comme il est légitime, l_1 assez petit pour que

$$A_2 l_1^{2-2m} \log \frac{1}{l_1} > A_1.$$

5. Pour avoir h_1, et par suite u_2, nous prendrons

$$l_2 = q l_1.$$

Les nouveaux domaines D′ sont entièrement intérieurs à la région où nous venons de limiter u_1; soit ρl_1 leur plus courte distance à la frontière de cette région. Sur un de ces nouveaux domaines D′, on a

$$|u_1| < B\Phi l_1^{1-2m} \log \frac{1}{l_1}, \qquad \left|\frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha}\right| < \frac{\sqrt{m}}{\rho} B\Phi l_1^{-2m} \log \frac{1}{l_1},$$
$$\left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right| < \frac{m}{\rho^2} B\Phi l_1^{-1-2m} \log \frac{1}{l_1}.$$

Par suite, nous pouvons limiter $\mathcal{F}(u_1)$ sur D′. Remarquons que

$$|\mathcal{F}(u_1)| < M\left[\sum_{\alpha,\beta}\left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right| + \sum_\alpha \left|\frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha}\right| + |u_1|\right]^2,$$

2M étant la limite supérieure des valeurs absolues des dérivées secondes de F; cette inégalité s'obtient en appliquant la formule des accroissements finis à la différence $\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(o)$, dont le second terme est nul, et en tenant compte de (2, 1). Alors

$$|\mathcal{F}(u_1)| < M\left[\frac{m^2(m+1)}{2\rho^2} l_1^{-1-2m} + \frac{m^{\frac{3}{2}}}{\rho} l_1^{-2m} + l_1^{1-2m}\right]^2 B^2\Phi^2 \log^2 \frac{1}{l_1}$$

ou

(5, 1) $$|\mathcal{F}(u_1)| < C_1 \Phi^2 l_1^{-2-4m} \log^2 \frac{1}{l_1},$$

C_1 étant une nouvelle constante.

En introduisant les dérivées troisièmes de u_1, on trouve de même

(5, 2) $$\left|\frac{\partial \mathcal{F}(u_1)}{\partial x_\alpha}\right| < C_1 \Phi^2 l_1^{-3-4m} \log^2 \frac{1}{l_1},$$

le nouveau facteur constant pouvant être confondu avec le précédent.

Nous aurons par suite, pour la fonction h'_1 de la formule (3, 1),

$$|h'_1(X)| < C_1 D_1 \Phi^2 l_1^{-2-4m} \log^2 \frac{1}{l_1}, \tag{5,3}$$

D_1 étant une nouvelle constante. Cette limitation sera en particulier valable sur S. Nous devons aussi limiter sur S les dérivées premières et secondes de h'_1. Pour les dérivées premières, on peut dériver sous le signe $\int$, ce qui conduit à une limitation qu'on peut confondre avec celle de h'_1. Pour les dérivées secondes, il faut procéder comme au Chapitre précédent : les dérivées de $\mathcal{F}[u_1(A)]$ interviennent, et l'on a la somme d'une intégrale d'ordre m et d'une intégrale d'ordre $m-1$ étendue à une surface comprise entre S et S'. On trouve ainsi

$$\left|\frac{\partial^2 h'_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right| < D_2 C_1 \Phi^2 l_1^{-3-4m} \log^2 \frac{1}{l_1} \log^2 \frac{1}{l_2} \leqq D_3 \Phi^2 l_1^{-3-4m} \log^4 \frac{1}{l_1},$$

D_2 et D_3 étant de nouvelles constantes $\left[D_3 \geqq C_1 D_2 \left(\frac{\log q + \log l_1}{\log l_1}\right)^2\right.$; l'inégalité subsiste si l'on remplace l_1 par un nombre plus petit$\left.\right]$.

La limitation sur S de h'_1 et de ses dérivées premières et secondes par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ peut donc être prise égale à

$$C_2 \Phi^2 l_1^{-3-4m} \log^4 \frac{1}{l_1} = \frac{1}{2} \Phi_1, \tag{5,4}$$

pendant que, dans tout son domaine d'existence, h'_1 admet la limitation (5,3).

Alors on a, pour la solution h''_1 de l'équation homogène

$$\sum_{\alpha,\beta} a'_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 h}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_\alpha b'_\alpha \frac{\partial h}{\partial x_\alpha} + ch = 0$$

qui prend sur S la valeur $-h'_1(X)$, et pour ses dérivées premières, les mêmes limitations [1] que ci-dessus pour u_1, en remplaçant Φ

[1] Bien entendu, il faut supposer que la valeur absolue du déterminant de Fredholm est supérieure à un nombre fixe; on évalue la différence entre ce déterminant et celui qui correspond à l'équation en u_1; en procédant de même dans la suite, on a, pour la série des valeurs absolues de ces différences, une somme aussi petite que l'on veut si t est assez petit.

par $\frac{1}{2}\Phi_1$; on trouve ainsi

$$|h''_2(x)| < \frac{1}{2} B \Phi_1 l_1^{1-2m} \log \frac{1}{l_1};$$

par suite, pour $h = h_1 = h'_1 + h''_1$, si l_1 a été pris assez petit pour que

$$2 C_1 D_1 l_1 < B C_2 \log^2 \frac{1}{l_1},$$

on aura

$$|h_1(x)| < B \Phi_1 l_1^{1-2m} \log \frac{1}{l_1}. \tag{5, 5}$$

Cette limitation a lieu sur la totalité des domaines analogues à D′ correspondant à

$$l_3 = q l_2.$$

On a alors comme plus haut

$$|\mathcal{F}(u_2)| < M \left[\sum_{\alpha,\beta} \left| \frac{\partial^2 h_1}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} \right| + \sum_\alpha \left| \frac{\partial h_1}{\partial x_\alpha} \right| + |h_1| \right]^2,$$

d'où une limitation de $\mathcal{F}(u_2)$.

On voit la suite. D'une façon générale on aura

$$l_n = q l_{n-1}, \tag{5, 6}$$

$$\Phi_n = 2 C_2 \Phi_{n-1}^2 l_n^{3-4m} \log^4 \frac{1}{l_n}, \tag{5, 61}$$

$$|h_n| < B \Phi_n l_n^{1-2m} \log \frac{1}{l_n}. \tag{5, 62}$$

Ce calcul suppose toutefois que les valeurs absolues des dérivées cinquièmes de u_n restent inférieures à un nombre fixe, car la constante A_2 intervient dans le calcul, et elle dépend des limitations des dérivées troisièmes des $a_{\alpha,\beta}^{(n)}$, qui contiennent les dérivées secondes de u_n. Or

$$\left| \frac{\partial^5 h_n}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta \, \partial x_\gamma \, \partial x_\delta \, \partial x_\varepsilon} \right| < \frac{m^{\frac{5}{2}}}{\rho^4} B \Phi_n l_n^{-4-2m} \log \frac{1}{l_n}, \tag{5, 63}$$

ce qui permet de limiter les dérivées cinquièmes de u_n (bien entendu, on peut aussi limiter les dérivées d'ordre moindre).

De (5,6) on déduit

$$l_n = q^{n-1} l_1.$$

La relation (5, 61) donne alors (¹)

$$(5,7)\quad \Phi_n = \left(\log\frac{1}{l_1}\right)^{2^{n+1}}\left(\log\frac{1}{l_2}\right)^{2^n}\cdots\left(\log\frac{1}{l_n}\right)^4\left(\frac{C_2\Phi}{q^{3+4m}\,l_1^{3+4m}}\right)^{2^n}\frac{(q^{n+1}\,l_1)^{3+4m}}{C_2}.$$

Du reste

$$\log\frac{1}{l_p} = (p-1)\log\frac{1}{q} + \log\frac{1}{l_1} < p\log\frac{1}{ql_1}.$$

Donc

$$\prod_{p=1}^{n}\left(\log\frac{1}{l_p}\right)^{2^{n+2-p}} < \left(\log\frac{1}{ql_1}\right)^{2^{n+2}-4}\prod_{p=1}^{n}p^{2^{n-p+2}} < \left(\log\frac{1}{ql_1}\right)^{2^{n+2}-4}S^{2^{n+2}},$$

en désignant par $\log S$ la somme de la série convergente

$$(5,\ 71)\qquad \log S = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\log p}{2^p}.$$

En nous reportant à (5,7) et aux limitations (5,62 et 5,63) de h_n et de ses dérivées, on voit que la série Σh_n et les séries des dérivées sont absolument et uniformément convergentes si

$$C_2 S^4\left(\log\frac{1}{ql_1}\right)^4 q^{-3-4m}\,l_1^{-3-4m}\,\Phi < 1,$$

c'est-à-dire si $|t|$ est assez petit; en outre cette série et ses dérivées (et même les séries des valeurs absolues) ont des sommes aussi petites que l'on veut si $|t|$ est assez petit, ce qui entraîne que l'on ne sort pas du champ $\mathcal{C}$. Tous nos calculs sont donc légitimes, et l'on voit que la limite u de u_n satisfait à l'équation (1, 1) et prend les valeurs données sur S; c'est la solution annoncée au n° 1.

La convergence étant uniforme dans la région balayée par les domaines D′, u est holomorphe à l'intérieur de cette région. De même à l'intérieur de la portion de S qui peut servir de frontière aux domaines D, u et $\frac{\partial u}{\partial\lambda_m}$ sont fonctions holomorphes de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$. Un raisonnement déjà fait à propos des équations linéaires montre

(¹) On a, en effet : $\sum_{p=1}^{n} p\,2^{n-p} = 2^{n+1} - n - 2.$

alors que u est prolongeable analytiquement à travers cette portion de S, en particulier à travers la partie réelle de S.

On pourrait alors, dans $\mathcal{F}(u)=0$, remplacer u par $u+\mathrm{U}$, u étant la fonction que nous venons de trouver, et recommencer pour U des raisonnements semblables, de façon à agrandir le domaine des valeurs de t pour lesquelles le problème est résolu; et ainsi de suite.

Pour montrer qu'il n'existe pas d'autre solution satisfaisant aux conditions énoncées, nous pouvons supposer que $\mathrm{F}'_u<0$; car le domaine étant petit dans toutes ses dimensions, un changement d'inconnue $u=vz$ permet de se ramener à ce cas. Si alors u et v sont deux solutions satisfaisant aux conditions voulues, il suffit d'appliquer la formule des accroissements finis à

$$\mathcal{F}(u)-\mathcal{F}(v)=0,$$

pour voir que $u=v$.

6. Théorème. — *Au lieu de supposer l'équation* (1, 1) *holomorphe, supposons-la seulement indéfiniment dérivable par rapport à ses* $\frac{m^2+5m+2}{2}$ *variables dans un certain domaine réel où elle est de type elliptique.*

Alors *si une solution* U(X) *appartient à ce domaine, et si ses dérivées jusqu'au troisième ordre sont continues,* U(X) *est indéfiniment dérivable.*

La démonstration commence par un lemme. Considérons l'équation linéaire elliptique

$$(6,1)\qquad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}=\psi(\mathrm{X}),$$

où les $a_{\alpha,\beta}$ et ψ sont continus ainsi que leurs dérivées *premières*. Si le rayon R d'une hypersphère S a été choisi assez petit pour qu'on puisse appliquer les méthodes du Chapitre précédent, on a, dans l'intérieur D de l'hypersphère,

$$(6,11)\qquad \begin{aligned}\varphi(\mathrm{X})=&-\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\int_{\mathrm{D}}^{(m)}\mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{A})\,\psi(\mathrm{A})\,d(a_1,\ldots,a_m)\\&-\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}}\int_{\mathrm{S}}^{(m-1)}\mathrm{P}(\mathrm{X},\mathrm{M})\,\Psi(\mathrm{M})\,d(\mu_1,\ldots,\mu_{m-1}),\end{aligned}$$

la seconde intégrale étant ce qu'il faut pour que φ prenne sur S des valeurs données. Nous nous proposons de prouver que

$$(6,12)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \times \int_D^{(m)} G(X, A)\left[\frac{\partial\psi(A)}{\partial a_1} - \sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial a_1}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_\alpha\,\partial a_\beta}\right] d(a_1, \ldots, a_m) - \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}}\int_S^{(m-1)} P(X, M)\,\Psi_1(M)\,d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}),$$

$\Psi(M)$ étant choisi de façon que les deux membres coïncident sur S.

Ce résultat est évident si ψ et les $a_{\alpha,\beta}$ ont leurs dérivées *secondes* continues, car alors φ admet des dérivées *troisièmes* continues, et

$$(6,13)\qquad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_1}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}.$$

Si alors nous revenons au cas où l'on suppose seulement la continuité des dérivées *premières* des $a_{\alpha,\beta}$ et de ψ nous pouvons représenter ces fonctions par des séries de polynomes, uniformément convergentes ainsi que les séries de leurs dérivées premières, qui représenteront alors les dérivées premières des $a_{\alpha,\beta}$ et de ψ. Pour chaque système de polynomes d'approximation, nous pouvons calculer une fonction φ_1 par la formule (6, 11), et réprésenter $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}$ par (6, 12). Or, quand on avance indéfiniment dans l'approximation, le produit

$$G(X, A)\,L^{m-1}(X, A)$$

converge uniformément, ainsi que $\psi(A)$; la première intégrale du second membre de (6, 11) tend donc uniformément vers une limite. Par suite $\Psi(M)$ tend aussi uniformément vers une limite (on suppose les valeurs données sur S constantes, ou uniformément convergentes); par suite φ_1 tend uniformément vers une limite, qui est la fonction φ. On constate de même que le second membre de (6, 12) tend uniformément vers une limite : donc $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$ tend uniformément vers $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$. Donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ est représenté par (6, 12).

On pourrait démontrer le résultat analogue pour les autres dérivées premières de φ.

Démontrons maintenant notre théorème. Si les $a_{\alpha,\beta}$ sont les dérivées de F par rapport aux dérivées secondes de u, calculées pour $u = \mathrm{U}$, l'équation (1, 1) peut s'écrire

$$(6,2) \qquad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} = \mathrm{F}_1;$$

F_1 est une certaine fonction composée de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, qui, d'après nos hypothèses, est continue et à dérivées premières continues; il en est de même des $a_{\alpha,\beta}$. Donc

$$(6,21) \qquad \mathrm{U} = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathrm{D}}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \mathrm{F}_1(\mathrm{A})\, d(a_1, \ldots, a_m) - \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathrm{S}}^{(m-1)} \mathrm{P}(\mathrm{X}, \mathrm{M})\, \Psi_1(\mathrm{M})\, d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1})$$

et

$$(6,22) \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_1} = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathrm{D}}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \mathrm{F}_2(\mathrm{A})\, d(a_1, \ldots, a_m) - \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathrm{S}}^{(m-1)} \mathrm{P}(\mathrm{X}, \mathrm{M})\, \Psi_2(\mathrm{M})\, d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}),$$

avec

$$\mathrm{F}_2(\mathrm{A}) = \frac{d\,\mathrm{F}_1(\mathrm{A})}{da_1} - \sum_{\alpha,\beta} \frac{da_{\alpha,\beta}}{da_1} \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial a_\alpha \, \partial a_\beta},$$

les d droits au second membre représentant des dérivées de fonctions composées. Il est capital de remarquer que, à cause de la définition des $a_{\alpha,\beta}$, F_2 ne dépend que des dérivées de U d'ordre au plus égal à *deux* :

$$F_2(X) = -\frac{dF(X)}{dx_1} + \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial F}{\partial \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}} \frac{\partial^3 U}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_1}.$$

$F_2(A)$ est donc continu et à dérivées premières continues. Par suite les dérivées de $\frac{\partial U}{\partial x_1}$ peuvent se représenter par une formule analogue à (6, 12); si φ_2 est une dérivée seconde quelconque de U, on aura

$$(6,23)\quad \varphi_2 = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \int_D^{(m)} G(X, A) F_3(A)\, d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$- \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \int_S^{(m-1)} P(X, M) \Psi_3(M)\, d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}),$$

où F_3, et, par suite Ψ_3, ne dépendent que des dérivées de U d'ordre au plus égal à *trois*.

F_3 étant continu, d'après nos hypothèses, il en résulte que les dérivées premières de φ_2 satisfont à une condition de Lipschitz généralisée [1] [Chap. II, n° 3]; il en est donc ainsi pour toutes les dérivées *troisièmes* de U. Mais alors F_3 satisfait aussi à une condition de Lipschitz généralisée; donc [Chap. II, n° 4] φ_2 admet des dérivées secondes continues, donc U admet des dérivées *quatrièmes* continues.

Supposons démontrées l'existence et la continuité des dérivées de U jusqu'à l'ordre p. Pour démontrer la même chose jusqu'à l'ordre $p+1$, nous écrivons, en désignant par φ_{p-1} une dérivée quelconque d'ordre $p-1$,

$$(6,24)\quad \varphi_{p-1} = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \int_{D_{p-1}}^{(m)} G(X, A) F_p(A)\, d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$- \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \int_{S_{p-1}}^{(m-1)} P_p(X, M) \Psi_p(A)\, d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}),$$

---

[1] Le remplacement de $H^{\frac{2-m}{2}}$, qui figure à l'endroit cité, par G, qui figure ici, n'entraîne pas de difficulté. Même observation plus bas. Tout ce raisonnement est le

où F_p et Ψ_p ne dépendent que des dérivées jusqu'à l'ordre p; nous introduisons ici des hypersphères S_3, S_4, ..., S_p, ..., dont chacune est intérieure à la précédente (S_3 est intérieure à S), parce que l'existence des dérivées *quatrièmes* n'est démontrée qu'à l'intérieur de S, et de même dans la suite.

F_p ne dépendant que des dérivées jusqu'à l'ordre p, cette fonction est continue. Donc les dérivées de φ_{p-1} satisfont à une condition de Lipschitz. Donc les dérivées de U d'ordre p satisfont à une condition de Lipschitz. Donc $F_p(A)$ satisfait à une condition de Lipschitz. Donc $\varphi_{p-1}(A)$ a des dérivées secondes continues. Donc U a des dérivées continues d'ordre $p+1$.

Le théorème est démontré.

Remarque. — En réalité il suffit de supposer l'existence et la continuité des dérivées de celles des dérivées secondes qui figurent dans les $a_{\alpha,\beta}$. Car alors les $a_{\alpha,\beta}$ ont des dérivées continues, et le raisonnement du type général, appliqué à l'équation (6,22) et aux équations analogues donnant $\frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_m}$, permet de démontrer l'existence et la continuité de toutes les dérivées troisièmes.

Si, en particulier, F contient linéairement les dérivées secondes, toute solution de (1,1) continue ainsi que ses dérivées jusqu'au second ordre est indéfiniment dérivable. Ainsi toute solution de l'équation des surfaces minima

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0$$

continue ainsi que ses dérivées jusqu'au second ordre est indéfiniment dérivable.

Si même les $a_{\alpha,\beta}$ ne contiennent aucune dérivée de u, toute solution de (6,21) continue ainsi que ses dérivées premières, est indéfiniment dérivable et satisfait à l'équation (1,1). Ceci s'applique à l'équation

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (u > 0)$$

---

développement et la généralisation d'un raisonnement de M. Gevrey (*Ann. scient. Éc. Norm. sup.*, t. 35, 1918, p. 155, note).

étudiée par M. Serge Bernstein [1]. Si, comme ici, les $a_{\alpha,\beta}$ dépendent de u, $G(X, A)$ et $P(X, M)$ en dépendent aussi.

7. *Limitations diverses.* — La démonstration du théorème précédent fournit un moyen de limiter les dérivées de U d'ordre supérieur au troisième, quand on a des limitations de celles des trois premiers ordres. Pour certains types d'équations, par exemple pour les équations linéaires, il suffit même d'avoir des limitations des dérivées des deux premiers ordres pour pouvoir limiter les autres. Dans la suite nous aurons effectivement à limiter des dérivées troisièmes d'équations linéaires, et des dérivées quatrièmes d'équation du type général.

Considérons, dans le but d'introduire les éléments nécessaires à ces limitations, l'équation linéaire

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \sum_\alpha b_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + c\varphi = \psi(X). \tag{7,1}$$

Nous choisissons une hypersphère S de rayon R assez petit pour qu'on puisse lui appliquer les méthodes du Chapitre précédent. Soient respectivement L_1 et L_2 des limites supérieures des valeurs absolues de $\psi(X)$ et de ses dérivées premières; soit encore L_3 une constante telle que

$$L_3 > \frac{|\psi(X) - \psi(X_1)|}{l \log \dfrac{3R}{l}},$$

quels que soient X et X_1 dans l'intérieur D de l'hypersphère, l étant la distance XX_1. Soit encore Φ une limite supérieure de $|\varphi|$ sur S. Il s'agit de trouver des limitations de $|\varphi|$, $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right|$, $\left|\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta}\right|$ dans l'intérieur de D.

D'après ce que nous avons vu au Chapitre précédent (*voir* aussi Chap. I, n° 15), il existe des constantes A_1, A_2, A_3, A_4 telles que la fonction $G(X, A)$ formée dans une hypersphère de rayon $R + \delta$

---

[1] Serge Bernstein, *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre* (Thèse de l'Université de Paris, 1904).

concentrique à S satisfasse, pour R et δ assez petits, aux inégalités

$$(7,2)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\int_{D}^{(m)}|G(X,A)|\,d(a_1,\ldots,a_m)<A_1R^2,$$

$$(7,21)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\int_{D}^{(m)}\left|\frac{\partial G(X,A)}{\partial x_\alpha}\right|d(a_1,\ldots,a_m)<A_2R\log\frac{1}{\delta}.$$

$$(7,22)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\int_{D}^{(m)}\left|\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{\partial G(X,A)}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial G(X,A)}{\partial a_\alpha}\right]\right|d(a_1,\ldots,a_m)$$
$$<A_3R\log\frac{1}{\delta},$$

$$(7,23)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\int_{S}^{(m-1)}\left|\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}d(a_{\beta+1},\ldots,a_{\beta-1})\right|<A_4\log\frac{2R}{R-r}\log\frac{1}{\delta},$$

la dernière inégalité ayant lieu seulement si X est intérieur à une hypersphère de rayon $r<R$, concentrique à S. Il en est de même des suivantes, concernant la fonction $P(X, M)$ de la relation (6, 11):

$$(7,3)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}}\int_{S}^{(m-1)}|P(X,M)|\,d(\mu_1,\ldots,\mu_{m-1})<B_1\log\frac{2R}{R-r}\log\frac{1}{\delta}.$$

$$(7,31)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}}\int_{S}^{(m-1)}\left|\frac{\partial P(X,M)}{\partial x_\alpha}\right|d(\mu_1,\ldots,\mu_{m-1})<\frac{B_2}{R-r}\log\frac{2R}{R-r}\log\frac{1}{\delta},$$

$$(7,32)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}}\int_{S}^{(m-1)}\left|\frac{\partial^2 P(X,M)}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right|d(\mu_1,\ldots,\mu_{m-1})<\frac{B_3}{(R-r)^2}\log\frac{2R}{R-r}\log\frac{1}{\delta}.$$

Introduisons encore la constante C_1 telle que

$$C_1\log\frac{1}{\delta}>\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\rho^m\left|\frac{\partial^2 G(X,A)}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right|,$$

où ρ est la distance AX. Comme on a, quel que soit r,

$$\int_{\mathrm{D}}^{(m)} \log\frac{3\mathrm{R}}{\rho}\,\frac{d(x_1,\ldots,x_m)}{\rho^{m-1}} < \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left[r\log\frac{3\mathrm{R}}{r}+r+\frac{\mathrm{R}^m}{mr^{m-1}}\log\frac{3\mathrm{R}}{r}\right],$$

on en déduit, en faisant $r=\mathrm{R}$,

$$\int_{\mathrm{D}}^{(m)} \log\frac{3\mathrm{R}}{\rho}\,\frac{d(x_1,\ldots,x_m)}{\rho^{m-1}} < \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\mathrm{R}\left(\frac{m+1}{m}\log 3+1\right),$$

et, par suite,

$$(7,4)\qquad \int_{\mathrm{D}}^{(m)} \rho\log\frac{3\mathrm{R}}{\rho}\left|\frac{\partial^2\mathrm{G}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right| d(a_1,\ldots,a_m) < \left(\frac{m+1}{m}\log 3+1\right)\mathrm{C}_1\mathrm{R}\log\frac{1}{\delta}.$$

En nous reportant au calcul de φ et de ses dérivées premières et secondes (Chap. II, n$^{\text{os}}$ 2 à 4), nous pourrons alors déterminer une constante τ, dépendant de toutes les précédentes, et telle que

$$(7,5)\qquad |\varphi| < \tau(\mathrm{R}^2\mathrm{L}_1+\Phi)\log\frac{2\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\log\frac{1}{\delta},$$

$$(7,51)\qquad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\right| < \tau\left(\frac{\mathrm{R}^2\mathrm{L}_1}{\mathrm{R}-r}+\frac{\Phi}{\mathrm{R}-r}\right)\log\frac{2\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\log\frac{1}{\delta},$$

$$(7,52)\qquad \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\right)_{\mathrm{X}_1}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\mathrm{X}}\right| < \frac{\tau}{(\mathrm{R}-r)^2}\left[\mathrm{R}^2\mathrm{L}_1 l\log\frac{3\mathrm{R}}{l}+\Phi l\right]\log\frac{2\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\log\frac{1}{\delta},$$

$$(7,53)\qquad \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right| < \tau\left[\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\right)^2\mathrm{L}_1+\mathrm{R}\mathrm{L}_3+\frac{\Phi}{(\mathrm{R}-r)^2}\right]\log\frac{2\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\log\frac{1}{\delta},$$

$$(7,54)\qquad \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right| < \tau\left[\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\right)^2\mathrm{L}_1+\mathrm{R}\mathrm{L}_2+\frac{\Phi}{(\mathrm{R}-r)^2}\right]\log\frac{2\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\log\frac{1}{\delta};$$

les inégalités qui ne contiennent pas L_2 ne supposent pas que ψ soit dérivable; celles qui ne contiennent pas L_3 ne supposent pas l'existence de L_3.

Ces limitations ne sont pas les plus avantageuses qu'on puisse trouver; ainsi (7,5) pourrait, en s'appuyant sur ce que nous avons dit du potentiel de double couche, être remplacée par une inégalité valable dans tout l'intérieur de D; mais ces inégalités suffisent à notre objet actuel.

Nous pouvons admettre que (7,5), (7,51), (7,54) s'appliquent encore si X fait partie d'un des domaines D complexes dont on a déjà parlé, le nombre g (Chap. II, n° 7) étant choisi une fois pour toutes.

8. Théorème. — Si l'équation (1, 1) est holomorphe par rapport à ses $\frac{m^2+5m+2}{2}$ variables, *toute solution continue ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres est analytique.*

En appliquant la remarque qui termine le n° 6, on peut élargir l'hypothèse dans certains cas; ainsi pour l'équation des surfaces minima, il suffit de supposer l'existence et la continuité des dérivées secondes pour pouvoir conclure que la solution est analytique [1].

Il s'agit, bien entendu, d'une solution relativement à laquelle l'équation (1, 1) est de type elliptique, au moins dans un certain domaine réel; et c'est dans l'intérieur de ce domaine que la solution est analytique (ou, plus exactement, holomorphe).

Soit U la solution considérée. Nous faisons un changement de variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, de façon à prendre pour origine un point quelconque de la région où nous voulons démontrer que U est holomorphe; et nous prouverons que U est holomorphe en O.

Nous considérerons une hypersphère S de centre O et de rayon R assez petit pour que les méthodes du Chapitre II s'appliquent aux équations

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+\sum_\alpha b_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+cu=\psi, \tag{8, 01}$$

où les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c sont calculés par les formules (1,2) et (2,2), en y remplaçant u par une fonction telle que $u-$ U et ses dérivées jusqu'au troisième ordre soient suffisamment petites. Nous nous réservons d'ailleurs de prendre R assez petit pour satisfaire à d'autres conditions qui seront indiquées plus loin.

Soit q un nombre positif quelconque inférieur à *un*, et soient

$$\mathrm{R}_n=\mathrm{R}_{n-1}(1-q^n), \qquad \mathrm{R}_0=\mathrm{R}, \qquad \mathrm{R}_\infty=\mathrm{R}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n); \tag{8, 02}$$

soient S, S_n, S_∞ les sphères de centre O et de rayons R, R_n, R_∞; soient D, D_n, D_∞ leurs intérieurs.

D, D_n, D_∞ désigneront aussi des multiplicités complexes à m

---

[1] Les résultats trouvés pour deux variables par M. Gevrey concordent en réalité avec ceux-ci (*loc. cit.*, p. 162).

dimensions, ayant pour frontières les *parties réelles* de S, S_n, S_∞, et correspondant à un nombre g qui sera choisi plus loin.

La première approximation de U que nous formerons sera une solution u_0, holomorphe en O, de l'équation (1, 1), telle que $U - u_0$ et ses dérivées jusqu'au second ordre soient nulles en O.

R sera pris assez petit pour que l'hypersphère S soit intérieure au domaine d'existence de u_0; g sera pris assez petit pour que l'on puisse appliquer les méthodes connues aux équations (8, 01), quand la fonction holomorphe à l'aide de laquelle sont calculés les coefficients $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c est suffisamment voisine de u_0, ainsi que ses dérivées jusqu'au second ordre.

Désignons par $u_n (n = 1, 2, \ldots)$ les approximations de U que nous allons former; soient $a^{(n)}_{\alpha,\beta}$, $b^{(n)}_\alpha$, $c^{(n)}$ les coefficients correspondants; $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c correspondront à u_0.

Nous chercherons la fonction h_0 analytique dans les domaines D_1 (réels ou non), prenant sur S_1 les valeurs $U - u_0$, et telle que

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 h_0}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \sum_\alpha b_\alpha \frac{\partial h_0}{\partial x_\alpha} + c h_0 = 0, \tag{8, 1}$$

et nous poserons

$$u_1 = u_0 + h_0. \tag{8, 11}$$

Ensuite, d'une façon générale, ayant défini la fonction u_n dans la région balayée par les domaines D_n, nous formerons la fonction h_n, analytique dans les domaines D_{n+1}, prenant sur S_{n+1} les valeurs $U - u_n$, et telle que

$$\sum_{\alpha,\beta} a^{(n)}_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 h_n}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \sum_\alpha b^{(n)}_\alpha \frac{\partial h_n}{\partial x_\alpha} + c^{(n)} h_n = -\mathcal{F}(u_n), \tag{8, 12}$$

et nous poserons

$$u_{n+1} = u_n + h_n. \tag{8, 13}$$

Nous allons prouver que les u_n convergent uniformément sur les domaines D_∞, et que leur limite est U sur le domaine D_∞ réel : le théorème en résultera immédiatement.

Nous désignerons par Q un polynome à coefficients positifs quelconque, par rapport aux limites supérieures, dans le champ où nous entendons que restent nos approximations, des valeurs absolues de F et de ses dérivées partielles jusqu'au troisième ordre, par rapport à ses $\frac{m^2+5m+2}{2}$ variables; le polynome Q pourra aussi contenir les variables r, $R:R_x$, R et R_n, pourvu cependant qu'il y ait un terme indépendant de R et de R_n. Nous ne rencontrerons qu'un nombre fini de ces polynomes Q; Q sera finalement la valeur numérique du plus grand d'entre eux, R étant supposé inférieur à une limite fixe (si le polynome contient la variable R_n, on peut remplacer celle-ci par R).

Soit

$$k_n = U - u_n, \tag{8,14}$$

de sorte que

$$k_n - h_n = k_{n+1}. \tag{8,15}$$

Nous désignerons par H_n une limite supérieure de $|h_n|$ dans les domaines D_{n+1} réels ou non; par $K_n, K'_n, K''_n, K'''_n, K^{\text{IV}}_n$ des limites supérieures des valeurs absolues de k_n et de ses dérivées jusqu'au quatrième ordre, dans des domaines compris dans D_n et comprenant D_{n+1}, et qui seront précisés; par L_n le plus grand des nombres

$$K_n R_n^{-3}, \quad K'_n R_n^{-2}, \quad K''_n R_n^{-1}, \quad K'''_n, \quad K^{\text{IV}}_n R,$$

de sorte que

$$K_n \leq L_n R_n^3, \qquad K'_n \leq L_n R_n^2, \qquad K''_n \leq L_n R_n, \qquad K'''_n \leq L_n, \qquad K^{\text{IV}}_n \leq \frac{L_n}{R}. \tag{8,16}$$

Remarquons que L_0 est borné si R l'est; c'est de là que découlera la convergence.

h_0 étant donné par l'équation (8,1), nous pouvons d'abord en tirer H_0; la fonction G correspondante pourra être formée à l'aide de l'hypersphère S, ce qui donne

$$H_0 < \tau R^3 L_0 \log\frac{1}{qR} \log\frac{10}{q^2}, \tag{8,2}$$

pourvu que l'on reste dans l'hypersphère concentrique à S de rayon,

$$R_1 \sqrt[5]{1-q^2} < R_1\left(1 - \frac{q^2}{5}\right),$$

ou dans les domaines complexes correspondants.

Limitons maintenant k_1 et ses dérivées, et pour cela, formons une équation aux dérivées partielles nous donnant k_1. Nous avons

$$\mathcal{F}(u_0+k_0)=0, \tag{8,21}$$

ou, puisque $\mathcal{F}(u_0)=0$,

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 k_0}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+\sum_\alpha b_\alpha\frac{\partial k_0}{\partial x_\alpha}+ck_0=F_{0,0}, \tag{8,22}$$

$F_{0,0}$ ayant un développement suivant les puissances de k_0 et de ses dérivées qui commence par des termes du second ordre, de sorte que la formule de Taylor limitée au second ordre nous donne

$$|F_{0,0}|<QL_0^2R^2. \tag{8,23}$$

Mais, en retranchant membre à membre les équations (8,22) et (8,1), nous obtenons

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+\sum_\alpha b_\alpha\frac{\partial k_1}{\partial x_\alpha}+ck_1=F_{0,0}, \tag{8,3}$$

qui est l'équation annoncée.

Or k_1 est nul sur S_1; donc, d'après (7,5),

$$K_1<QR^2R_1^2L_0^2\log\frac{10}{q^2}\log\frac{q}{R}<QR^4L_0^2\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}, \tag{8,31}$$

limitation valable dans l'hypersphère concentrique à S, de rayon

$$R_1\sqrt[5]{1-q^2}.$$

Dans le même domaine, d'après (7,51),

$$K_1'<\frac{QR^3L_0^2}{q^2}\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}. \tag{8,32}$$

Nous aurons K_1'' si nous savons limiter les dérivées de $F_{0,0}$. Or, en dehors des dérivées partielles de F, la dérivée complète de $F_{0,0}$ par rapport à x_α contiendra au second degré les dérivées de k_0; et, dans ces termes du second degré, figureront des produits de dérivées troisièmes par des dérivées secondes. Donc

$$\left|\frac{dF_{0,0}}{dx_\alpha}\right|<QRL_0^2,$$

les d droits indiquant qu'il s'agit de dérivées complètes. D'après (7,54) on aura donc, toujours dans l'hypersphère de rayon $R_1\sqrt[5]{1-q^2}$,

$$(8,33)\quad K''_1 < \left(\frac{QL_0^2R^2}{q^4}+QL_0^2R^2\right)\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR} < \frac{QL_0^2R^2}{q^4}\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR};$$

le nouveau Q dépendant ici de q^2; dans les approximations suivantes, quand on calculera K''_n, q^2 sera à remplacer par q^{n+1}, ce qui permettra de conserver la même valeur de Q, puisque

$$q^{n+1} < q^2 \qquad (n > 1).$$

Pour avoir K'''_1, nous dérivons, par rapport à x_1 par exemple, les deux membres de (8,3), ce qui donne

$$(8,34)\quad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(\frac{\partial k_1}{\partial x_1}\right)+\sum_\alpha b_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial k_1}{\partial x_1}\right)+c\,\frac{\partial k_1}{\partial x_1}$$
$$=\frac{dF_{0,0}}{dx_1}-\sum_{\alpha,\beta}\frac{da_{\alpha,\beta}}{dx_1}\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\sum_\alpha\frac{db_\alpha}{dx_1}\frac{\partial k_1}{\partial x_\alpha}-\frac{dc}{dx_1}k_1=F_{0,1}.$$

Nous connaissons une limite supérieure de la valeur absolue du second membre dans l'hypersphère de rayon $R_1\sqrt[5]{1-q^2}$; cette limite supérieure peut s'écrire

$$QRL_0^2+Q(K''_1+K'_1+K_1)$$

ou

$$|F_{0,1}| < QRL_0^2+\frac{QR^2L_0^2}{q^4}\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}.$$

Dans le calcul des approximations suivantes, le second membre sera à remplacer par

$$QRL_{n-1}^2+\frac{QR^2L_{n-1}^2}{q^{2n}}\log\frac{10}{q^n}\log\frac{\lambda}{q^{n-1}R},$$

λ étant une constante supérieure à *un* qui s'introduira; nous pourrons remplacer ceci par

$$\frac{QRL_{n-1}^2}{q^{2n}}\log\frac{10}{q^n}\log\frac{\lambda}{q^{n-1}R};$$

ici, nous aurons

$$|F_{0,1}| < \frac{QRL_0^2}{q^4}\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}.$$

Alors, d'après (7, 52), et dans l'hypersphère de rayon $R_1(1-q^2)^{\frac{2}{3}}$,

(8, 341)
$$\left|\left(\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)_{X_1}-\left(\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)_X\right|$$
$$<\frac{QR}{q^4}\left(\frac{L_0^2}{q^4}\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\,l\log\frac{3R}{l}+\frac{L_0^2}{q^2}\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\,l\right)\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}$$
$$<\frac{QRL_0^2}{q^8}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^2 l\log\frac{3R}{l}.$$

Nous devons maintenant calculer le coefficient de Lipschitz correspondant à $F_{0,1}$; $F_{0,1}$ contient d'abord $\frac{dF_{0,0}}{dx_1}$, que nous pouvons dériver; on trouve, comme plus haut,

$$\left|\frac{d^2F_{0,0}}{dx_\alpha\, dx_\beta}\right|<QL_0^2.$$

Nous avons ensuite

$$-\sum_{\alpha,\beta}\frac{da_{\alpha,\beta}}{dx_1}\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}-\sum_\alpha\frac{db_\alpha}{dx_1}\frac{\partial k_1}{\partial x_\alpha}-\frac{dc}{dx_1}k_1.$$

Les deux derniers termes peuvent être dérivés par rapport à l'une quelconque des variables $x_1, \ldots, x_m$; la dérivée sera moindre en valeur absolue que

$$\frac{QL_0^2R^2}{q^4}\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}$$

(c'est la limitation de $\frac{db_\alpha}{dx_1}\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma}$ qui est la moins favorable). Pour le premier terme, nous ne pouvons que limiter son coefficient de Lipschitz; en écrivant

$$\left(\frac{da_{\alpha,\beta}}{dx_1}\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)_{X_1}-\left(\frac{da_{\alpha,\beta}}{dx_1}\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)_X$$
$$=\left[\left(\frac{da_{\alpha,\beta}}{dx_1}\right)_{X_1}-\left(\frac{da_{\alpha,\beta}}{dx_1}\right)_X\right]\left(\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)_{X_1}$$
$$+\left(\frac{da_{\alpha,\beta}}{dx_1}\right)_X\left[\left(\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)_{X_1}-\left(\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)_X\right],$$

on en conclut que la valeur absolue du premier membre est moindre que

$$\frac{QRL_0^2}{q^8}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^2 l\log\frac{3R}{l}.$$

Finalement, nous trouvons pour le coefficient de Lipschitz de $F_{0,1}$ une limitation du type

$$\frac{QL_0^2}{q^8}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{q}\right)^2$$

$\left[\text{il faut remarquer que } R\left(\log\frac{1}{R}\right)^2 \text{ est borné, puisque } R \text{ l'est}\right]$; dans les calculs ultérieurs pour k_n, ceci sera à remplacer par

$$\frac{QL_{n-1}^2}{q^{8n+8}}\left(\log\frac{10}{q^{n+1}}\log\frac{1}{q^n}\right)^2,$$

avec le *même* polynome Q.

Alors, d'après (7,53), dans l'hypersphère de rayon $R_1(1-q^2)^{\frac{3}{5}}$,

$$K_1''' < QL_0^2\left[\frac{R}{q^8}\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR} + \frac{R}{q^8}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{q}\right)^2 + \frac{R}{q^6}\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right]$$
$$\times \log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}$$

ou

$$K_1''' < \frac{QRL_0^2}{q^8}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^3. \tag{8,4}$$

Nous devons maintenant limiter K_1^{iv}. On ne peut songer à dériver une fois de plus l'équation (8,3), car cela introduirait les dérivées *cinquièmes* de k_0. Nous partirons de l'équation en k_1

$$\mathcal{F}(u_1 + k_1) = 0. \tag{8,41}$$

En la dérivant deux fois, et en nommant φ la dérivée seconde correspondante de k_1, on trouve

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}^{\star}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = T_1, \tag{8,42}$$

T_1 ne contenant les dérivées de k_1 que jusqu'au troisième ordre; les $a_{\alpha,\beta}^{\star}$ sont donnés par les formules (1,2), avec $u = U$.

T_1, si l'on y remplace k_1 et ses dérivées par zéro, se réduit à $-\mathcal{F}(u_1)$. Or, d'après la façon dont on a calculé h_0, $\mathcal{F}(u_1)$, ou $\mathcal{F}(u_0+h_0)$, commence par des termes du second degré par rapport à h_0 et à ses dérivées jusqu'au second ordre. On a donc, dans l'hypersphère de rayon $R_1(1-q^2)^{\frac{3}{5}}$,

$$\left|\frac{\partial^2 \mathcal{F}(u_1)}{\partial x_\gamma \partial x_\delta}\right| < \frac{QH_0^2}{q^{12}R^6},$$

ou, en tenant compte de la valeur (8, 2) de H_0,

$$(8,43)\qquad \left|\frac{\partial^2 \mathcal{F}(u_1)}{\partial x_\gamma \partial x_\delta}\right| < \frac{QL_0^2}{q^{12}}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^2.$$

D'après la formule des accroissements finis, pour limiter T_1, il suffit d'ajouter à ceci une combinaison linéaire de K_1, K'_1, K''_1, K'''_1, avec des coefficients de la forme Q. On trouve ainsi

$$(8,44)\qquad |T_1| < \frac{QL_0^2}{q^{12}}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^3.$$

Par conséquent, d'après la formule (7, 52), nous aurons, dans l'hypersphère de rayon $R_1(1-q^2)^{\frac{4}{5}}$,

$$\left|\left(\frac{\partial^3 k_1}{\partial x_\gamma \partial x_\delta \partial x_\zeta}\right)_{X_1} - \left(\frac{\partial^3 k_1}{\partial x_\gamma \partial x_\delta \partial x_\zeta}\right)_X\right|$$
$$< \frac{QL_0^2}{q^4}\left[\frac{1}{q^{12}}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^3 + \frac{1}{q^4}\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right]\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\, l\log\frac{3R}{l},$$

ou

$$(8,45)\qquad \left|\left(\frac{\partial^3 k_1}{\partial x_\gamma \partial x_\delta \partial x_\zeta}\right)_{X_1} - \left(\frac{\partial^3 k_1}{\partial x_\gamma \partial x_\delta \partial x_\zeta}\right)_X\right| < \frac{QL_0^2}{q^{16}}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^4 l\log\frac{3R}{l}.$$

Nous en déduisons

$$(T_1)_{X_1} - (T_1)_{X_0}| < \left[\frac{QL_0^2}{q^{14}R}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^3 + \frac{QL_0^2}{q^{16}}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^4\right] l\log\frac{3R}{l}$$

ou bien

$$(8,46)\qquad |(T_1)_{X_1} - (T_1)_X| < \frac{QL_0^2}{q^{16}R}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^4 l\log\frac{3R}{l}.$$

Enfin la formule (7, 53) nous donne, dans le domaine D_2 réel,

$$K_1^{\text{IV}} < QL_0^2\left[\frac{1}{q^{16}}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^3\right.$$
$$\left. + \frac{1}{q^{16}}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^4 + \frac{1}{q^8}\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right] \times \log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}$$

ou bien

$$K_1^{\text{IV}} < \frac{QL_0^2}{q^{16}}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^5. \tag{8, 5}$$

Des inégalités (8, 31), (8, 32), (8, 33), (8, 4), (8, 5), nous pouvons tirer une limite supérieure de L_1 ; on trouve

$$L_1 < \frac{QRL_0^2}{q^{16}}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^5. \tag{8, 6}$$

Nous pouvons maintenant obtenir H_1 ; en effet, nous connaissons l'équation (8, 12) qui donne h_1, et nous connaissons une limite supérieure $L_1 R^3$ des valeurs que cette fonction prend sur S_2. Il faut seulement observer que h_0 n'est limité par (8, 2) que dans l'hypersphère de rayon $R_1\sqrt[5]{1-q^2}$; les dérivées de h_0 ne seront limitées que dans une hypersphère de rayon plus petit, par exemple de rayon

$$R_1(1-q^2)^{\frac{2}{5}}:$$

c'est donc seulement dans cette dernière hypersphère que nous pouvons être assurés que u_1 et ses dérivées jusqu'au troisième ordre ne sortent pas du champ fixé *a priori*. C'est donc cette dernière hypersphère que nous devrons employer pour former la nouvelle fonction $G(X, A)$, et en conséquence la quantité δ (égale à qR dans ce qui précède) sera ici à remplacer par

$$R_1\left[(1-q^2)^{\frac{2}{5}}-(1-q^2)\right] > \frac{Rq^2}{\lambda}.$$

On aura donc, dans l'hypersphère de rayon $R_2\sqrt[5]{1-q^3}$,

$$H_1 < \tau\left(Q\frac{H_0^2}{R^2q^8}+L_1R^3\right)\log\frac{10}{q^3}\log\frac{\lambda}{q^2R},$$

le premier terme de la parenthèse provenant d'une limitation du carré des dérivées secondes de h_0. Ceci s'écrit encore

$$H_1 < \left[\frac{QR^4L_0^2}{q^8}\left(\log\frac{10}{q^2}\log\frac{1}{qR}\right)^2+L_1R^3\right]\log\frac{10}{q^3}\log\frac{\lambda}{q^2R},$$

ou bien, en augmentant une dernière fois Q (et par suite la limite de L_1),

(8, 7) $$H_1 < L'_1 R^3 \log \frac{10}{q^3} \log \frac{\lambda}{q^2 R}$$

avec

(8, 71) $$L'_1 = \frac{QRL_0^2}{q^{16}} \left(\log \frac{10}{q^2} \log \frac{1}{qR}\right)^5 > L_1.$$

Il est manifeste alors que les calculs peuvent se répéter, et conduiront à

(8, 72) $$L_2 < L'_2 = \frac{QRL_1'^2}{q^{24}} \left(\log \frac{10}{q^3} \log \frac{\lambda}{q^2 R}\right)^5,$$

(8, 73) $$H_2 < L'_2 R^3 \log \frac{10}{q^4} \log \frac{\lambda}{q^3 R},$$

et, d'une façon générale, à

(8, 8) $$L_n < L'_n = \frac{QRL_{n-1}'^2}{q^{8(n+1)}} \left(\log \frac{10}{q^{n+1}} \log \frac{\lambda}{q^n R}\right)^5,$$

(8, 81) $$H_n < L'_n R^3 \log \frac{10}{q^{n+2}} \log \frac{\lambda}{q^{n+1} R},$$

cette dernière inégalité limitant h_n dans la sphère de rayon $R_{n+1} \sqrt[5]{1 - q^{n+2}}$, et la précédente servant à limiter k_n et ses dérivées jusqu'au quatrième ordre dans le domaine D_{n+1} réel. En particulier ces limitations sont valables dans le domaine D_∞ réel pour les k_n, dans les domaines D_∞ complexes pour les h_n, si l'on est certain que u_n et ses dérivées jusqu'au second ordre ne diffèrent pas de celles de u_0 de plus qu'on n'a décidé à l'avance, et que les dérivées troisièmes de u_n restent bornées.

Or on tire de (8, 8), en introduisant le nombre S de la relation (5, 71),

(8, 9) $$L'_n = \left[\frac{S^{15} QRL_0}{q^{24}} \left(\log \frac{10}{q} \log \frac{\lambda}{qR}\right)^5\right]^{2^n} \left(\log \frac{10}{q} \log \frac{1}{qR}\right)^{-5} \frac{q^{8(n+3)}}{QR},$$

L'_n tend donc vers zéro si la quantité entre crochets est plus petite que *un*, ce qui a lieu quand R est assez petit; donc, dans ce cas, les u_n tendent vers U dans le domaine D_∞ réel.

En ce qui concerne les H_n, la série des seconds membres de l'inégalité (8,81) est convergente, et la somme $\sum_{n=1}^{\infty} H_n$ est le produit de R^3

par une quantité infiniment petite avec R. En ce qui concerne H_0, le quotient par R^3 de sa limitation (8,2) n'est pas borné quand R tend vers zéro; mais ceci provient du facteur $\log \frac{1}{qR}$, qu'on peut remplacer par $\log \frac{1}{\delta}$, δ ne dépendant pas de R, puisqu'on peut, pour former G(X, A), se servir de tout le domaine d'existence de u_0.

Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ est uniformément convergente dans la région balayée par les domaines D_∞ complexes; sa somme, et ses dérivées jusqu'au second ordre, sont infiniment petites avec R dans la même région, et ses dérivées troisièmes sont bornées. Comme ces propriétés ont lieu aussi pour les séries des valeurs absolues, il est clair que u_n ne sort pas du champ fixé et que, par suite, les calculs sont légitimes.

La série des dérivées troisièmes serait aussi infiniment petite avec R si l'on annulait en O les dérivées troisièmes des $U - u_0$, car alors L_0 serait infiniment petit du premier ordre.

Il résulte de tout ceci que la série $u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} h_n$ représente, dans la région balayée par les D_∞ complexes, une solution de l'équation (1,1). Cette solution coïncide avec U dans le domaine D_∞ réel, puisque

$$u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} h_n = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (k_n - k_{n+1}) = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim u_n = U.$$

Donc U est holomorphe dans D_∞ réel, et en particulier en O, ce qu'il fallait démontrer.