

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RENÉ GARNIER

**Solution du problème de Riemann pour les systèmes  
différentiels linéaires du second ordre**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 43 (1926), p. 177-307

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1926\\_3\\_43\\_\\_177\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1926_3_43__177_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1926, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SOLUTION DU PROBLÈME DE RIEMANN

POUR

LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

PAR M. RENÉ GARNIER

---

## INTRODUCTION.

---

1. Le 6 novembre 1856, Riemann présentait à la Société royale de Göttingen son Mémoire, classique aujourd'hui, sur les fonctions représentables par la série hypergéométrique; si l'objet en est quelque peu spécial, on doit observer que dès cette époque il s'était posé le problème dans toute sa généralité. Une de ses Notes <sup>(1)</sup>, datée du 20 février 1857, et publiée seulement dans ses OEuvres, est consacrée à la question suivante : définir analytiquement tous les systèmes de  $n$  fonctions  $y_1, \dots, y_n$ , holomorphes sur la sphère sauf aux points critiques  $x = a, \dots, g$ ; en ces points elles ne peuvent être « infinies d'ordre infini » et leurs branches y subissent des substitutions linéaires données. Riemann ramène le problème à la construction d'un seul système de fonctions, c'est-à-dire à la formation d'une équation différentielle qui doit être vérifiée par ce système; mais, sur ce dernier point, ses résultats se bornent à une énumération de constantes. Et pourtant Riemann avait entrevu l'intérêt qui s'attache à l'étude des  $y_i$ , considérées comme fonctions de la variable  $x$  et des points singuliers  $a, \dots, g$ ; et il s'était demandé par exemple s'il est toujours possible « die Functionen mit  $a$  so zu ändern, dass sämtliche Substitutionen constant bleiben ». C'était là tout un programme de recherches.

---

<sup>(1)</sup> *Werke*, erste Auflage, Leipzig, 1876, p. 357.

Cependant, malgré son intérêt intrinsèque, malgré l'importance de ses applications à l'Analyse et à la Géométrie, la question ne devait être reprise que bien plus tard : à partir de 1898, M. L. Schlesinger <sup>(1)</sup> consacre toute une suite de travaux à la construction d'une équation ou d'un système différentiel linéaire admettant un groupe de monodromie donné  $\mathfrak{G}$ ; c'est ce qu'il appelle « le problème de Riemann » pour le groupe  $\mathfrak{G}$ . A l'équation linéaire il substitue d'ailleurs un système « canonique »  $s$ , dont les coefficients n'ont que des pôles du premier ordre,  $a, \dots, g$ ; d'après un théorème de H. Poincaré, les coefficients des substitutions de  $\mathfrak{G}$  sont des fonctions entières des résidus correspondant à  $a, \dots, g$ ; M. Schlesinger cherche à étayer la démonstration d'un théorème d'existence sur l'inversion de ce système de fonctions entières, et cela, au moyen de la méthode de continuité de Klein et Poincaré. Nous n'avons pas à rappeler ici les discussions que soulevèrent les recherches de M. Schlesinger; retenons seulement qu'à la même époque <sup>(2)</sup> il obtenait un résultat des plus remarquables : si on laisse fixe le groupe  $\mathfrak{G}$ , les résidus des coefficients de  $s$  sont des fonctions des points singuliers qui satisfont à un système différentiel très simple <sup>(3)</sup> (A); et du théorème d'existence relatif au problème de Riemann, M. Schlesinger inférait que les seules singularités mobiles des intégrales de (A) se réduisent à des pôles.

Or, à la même époque, M. D. Hilbert <sup>(4)</sup> appliquait la méthode des équations intégrales à la solution du problème de Riemann pour les équations du second ordre; son analyse fut reprise et développée pour les systèmes d'ordre quelconque par M. Plemelj <sup>(5)</sup>; elle fut ensuite

<sup>(1)</sup> *C. R. Ac. Sc.*, t. 126, 1898, p. 723; *Journal für reine und angew. Math.*, t. 123, 1901, p. 138. (L'introduction, en tête de ce Mémoire, contient diverses indications sur les travaux de Riemann et de Fuchs.) — On trouvera d'autres références bibliographiques sur les travaux de M. Schlesinger dans ses *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*, Leipzig et Berlin, 1908, p. 7.

<sup>(2)</sup> En 1905, *Journ. für r. und angew. Math.*, t. 129, p. 292.

<sup>(3)</sup> Voir plus loin ce système au n° 8, p. 188. [Le système est désigné par  $(A_m)$ .]

<sup>(4)</sup> Leçons orales du semestre d'hiver 1901-1902 à l'Université de Göttingen; *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Leipzig et Berlin, 1912, p. 102.

<sup>(5)</sup> *Monatshefte für Math. und Phys.*, t. 19, 1908, p. 211.

simplifiée de la manière la plus brillante par M. G. D. Birkhoff <sup>(1)</sup>. La méthode <sup>(2)</sup> est particulièrement adaptée au calcul pratique de la solution; mais, à un autre point de vue, on doit remarquer que les fonctions non analytiques qui interviennent au début des approximations n'ont avec le problème lui-même que des relations lointaines.

La méthode par laquelle je résous le problème de Riemann est entièrement distincte des précédentes; d'ailleurs, quoique le Mémoire actuel se limite aux systèmes linéaires du second ordre, la méthode s'applique aux systèmes d'ordre quelconque; *elle repose essentiellement sur l'étude des solutions du système <sup>(3)</sup> (A) de M. Schlesinger autour de leurs singularités essentielles*; cette dernière étude constitue donc avec la solution du problème de Riemann l'objet propre du Mémoire. Précisons d'ailleurs immédiatement les conditions que doit remplir l'étude de ces singularités: pour attaquer le problème par cette voie, *il ne suffirait pas de connaître des développements représentant certaines intégrales; il faut encore avoir la certitude que toute intégrale peut être représentée par les développements obtenus*.

J'indiquerai brièvement les résultats principaux et la disposition générale du Mémoire.

2. La première Partie est consacrée à la formation d'un système dont je substitue l'étude à celle du système différentiel (A) de M. Schlesinger. Quelques précisions sont ici nécessaires. Soient

$$x = t_1, \dots, t_n, t_{n+1} (\equiv 0), t_{n+2} (\equiv 1), t_{n+3} (\equiv \infty)$$

les points singuliers du système linéaire  $s$ ; le groupe de monodromie  $g$  étant actuellement du second ordre, le système (A) est d'ordre  $4n + 8$ ; il admet d'ailleurs  $2n + 7$  intégrales premières algébriques (I) et un groupe continu  $\infty^1$  de transformations; on prévoit donc que son ordre pourra être abaissé à  $2n$ . Mais, parmi les intégrales (I),  $n + 3$  sont du type *quadratique*: a priori, *il n'est donc nul-*

<sup>(1)</sup> *Proceed. of the Amer. Acad.*, t. 49, 1913-1914. Boston, 1914, p. 521.

<sup>(2)</sup> Cette méthode ramène le problème à un autre dont l'origine remonte aussi à Riemann: construire deux matrices de fonctions définies l'une intérieurement, l'autre extérieurement à une courbe fermée continue et liées sur cette courbe par des relations linéaires données, à coefficients susceptibles de discontinuités.

<sup>(3)</sup> Ou plutôt d'un système analogue ( $G_n$ ); cf. n° 2, p. 180.



lement évident que la formation effective d'un système résolvant (A') d'ordre  $2n$  soit pratiquement possible.

Or, au lieu du système linéaire  $s$ , envisageons l'équation équivalente du second ordre,  $E_n$ ; elle possédera  $n+3$  points singuliers effectifs, et, en outre,  $n$  points apparemment singuliers,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ; pour que son groupe soit indépendant des  $t_i$ , il faut que  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  envisagés comme fonctions des  $t_i$  satisfassent à un système différentiel d'ordre  $2n$  seulement : c'est le système  $(f_n, F_n)$  que j'ai formé dans ma Thèse (1) par une voie qui d'ailleurs est complètement indépendante de celle que M. Schlesinger a suivie pour former le système (A).

Toutefois, l'étude directe de  $(f_n, F_n)$  aurait présenté actuellement de graves difficultés : comme je l'ai montré, *ce ne sont pas les  $\lambda_j$  mais leurs combinaisons symétriques qui ont leurs points critiques fixes* : l'étude locale d'une singularité fixe aurait donc été compliquée par l'accumulation des points critiques qui permutent entre eux les  $\lambda_j$ ; et d'autre part les fonctions symétriques élémentaires des  $\lambda_j$  ne paraissent satisfaire à aucun système différentiel simple. J'ai pourtant réussi à montrer que les combinaisons symétriques

$$z_k = \frac{\psi(t_k)}{\varphi'(t_k)} \left[ \psi(x) \equiv \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j); \varphi(x) \equiv \prod_{k=1}^{n+2} (x - t_k); k = 1, \dots, n+2 \right],$$

combinaisons liées par les équations (d'un usage constant dans ce Mémoire)

$$\sum_{k=1}^{n+2} z_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n+2} t_k z_k = 1$$

satisfont au système très simple que voici (2) :

$$\begin{aligned} (G_n) \quad \frac{\partial^2 z_k}{\partial t_i^2} &= \frac{N_k}{t_k - t_i} + \frac{1}{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial t_i} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} \\ &+ \frac{z_k}{z_i(t_k - t_i)} \sum_{\substack{h=1 \\ (h \neq i)}}^{n+2} N_h + \frac{1}{t_k - t_i} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{D}{2} z_i z_k \left( z_i + \frac{1}{t_k - t_i} \right) \\ &\left[ \text{avec } N_k \equiv \frac{t_k - t_i}{2 z_k} \left( \frac{\partial z_k}{\partial t_i} \right)^2 + \frac{d_i z_k^2 - d_k z_i^2}{2 z_k (t_k - t_i)} \right] \end{aligned}$$

(1) *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, 3<sup>e</sup> série, t. 29, 1912, p. 73-86.

(2) Les constantes  $d_h$ ,  $D$  figurent déjà dans l'équation linéaire  $(E_n)$ .

et

$$(g_n) \quad z_h(t_i - t_k) \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + z_i(t_k - t_h) \frac{\partial z_h}{\partial t_k} + z_k(t_h - t_i) \frac{\partial z_i}{\partial t_h} = 0.$$

On verra que ce système peut être obtenu soit à partir du système (A), soit à partir de  $(f_n, F_n)$ ; du même ordre différentiel que le second, il participe à la simplicité de forme du premier; il relie, de la manière la plus naturelle, les deux systèmes l'un à l'autre et il peut être pris pour la résolvante (A') de (A). Ses intégrales  $z_k$  auront leurs points critiques fixes; ce sont ces fonctions dont j'analyse les singularités dans ce Mémoire.

Cette étude, je l'avais déjà entreprise dans un cas particulier : pour l'équation (VI) de M. Painlevé <sup>(1)</sup>, qui n'est autre que  $(F_1)$ ; mais le procédé qui m'a permis d'étudier  $(g_n, G_n)$  est entièrement nouveau : afin de bien marquer cette différence, j'ai pris pour règle générale de renvoyer au Mémoire précédent pour toute démonstration procédant directement d'une démonstration analogue de ce dernier Mémoire.

3. Résumons rapidement les résultats obtenus dans l'étude des singularités essentielles (qui sont toutes de même nature). Faisons tendre  $t_i$  vers 0, les autres points singuliers restant fixes, et considérons la région

$$(\mathbf{R}) \quad -\frac{\pi}{2} + \eta \leq \arg T \leq \frac{3\pi}{2} - \eta \quad (\eta = \text{nombre positif arbitrairement petit})$$

du plan  $T = \text{Log}(t_i : t_i^0)$ . On peut former par approximations successives des développements qui représentent les  $z_k$  le long des rayons  $\Delta$  issus de l'origine O et appartenant à la région  $(\mathbf{R})$ . Comme pour VI, ces développements sont de deux espèces; pour ceux de première espèce, il existe un nombre réel  $\omega$  ( $0 \leq \omega < 1$ ), variable avec  $\Delta$ , tel que quand T décrit  $\Delta$ ,  $|t_i|^{1-\omega} |z_i|$  reste borné inférieurement; pour ceux de deuxième espèce,  $|t_i|^{-\omega} |z_i|$  est borné supérieurement. Mais les approximations actuelles n'ont aucun rapport avec celles de VI : pour la première espèce, la variable indépendante participe aux approximations; elle est développée en fonction d'un paramètre auxiliaire; ce

<sup>(1)</sup> *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, 3<sup>e</sup> série, t. 34, 1917, p. 239-353. Désormais, ce Mémoire sera désigné par la notation [VI].

même paramètre sert aussi à l'étude des cas exceptionnels qui sont plus nombreux que pour VI. Pour la construction des caractéristiques de deuxième espèce il m'a fallu introduire *des fonctions auxiliaires, qui n'existent que pour  $n > 1$* . La discussion des divers cas possibles (de première et de deuxième espèce) est longue et minutieuse; elle fait apparaître aussi des circonstances qui ne se produisent pas pour l'équation (VI). Ajoutons enfin qu'*entre les caractéristiques des deux espèces, les similitudes de propriétés sont moins fréquentes pour  $n > 1$  que pour  $n = 1$* ; ainsi, il existe  $2^n$  intégrales holomorphes de première espèce; il y a, au contraire, deux séries  $\infty^{2^n-2}$  d'intégrales holomorphes de deuxième espèce.

4. Les démonstrations de convergence une fois achevées, l'exemple de l'équation (VI) laisse prévoir la possibilité de représenter une intégrale dans toute la région (**R**) dès qu'on saura trouver une caractéristique qui la représente sur un rayon quelconque de (**R**); mais un problème fondamental se pose aussitôt :

*Étant donnés une intégrale QUELCONQUE de  $(G_n)$  et un rayon de (**R**), existe-t-il une caractéristique qui représente l'intégrale sur ce rayon?*

La réponse, qui est affirmative, fait l'objet de la troisième partie. La première méthode que j'avais employée pour résoudre le problème actuel était une extension de celle qui m'a servi dans le même but pour l'équation (VI); mais, depuis, j'ai obtenu une démonstration bien plus simple. Cette démonstration est fondée sur *la méthode de récurrence* dont M. Émile Picard <sup>(1)</sup> a déjà montré l'efficacité dans des problèmes analogues : pour  $(G_1)$  (équation VI), la propriété est établie; admettons qu'elle ait été démontrée pour  $(G_{n-1})$  et montrons qu'elle est vraie encore pour  $(G_n)$ .

A cet effet, considérons une intégrale  $[z]$  de  $(G_n)$ , définie au point  $t_1^0, \dots, t_n^0$  par des conditions initiales quelconques; tout revient à montrer qu'on peut faire tendre  $t_i$  vers 0 de manière que certaines fonctions auxiliaires,  $R_k, S, U_k$  ou  $V_k$ , tendent vers des limites bien déterminées. Or *considérons  $[z]$  comme fonction d'un autre paramètre, soit  $t_n$* ;

---

(1) *Traité d'Analyse*, t. 2, 2<sup>e</sup> édition, Paris, 1905, Chap. XVI, nos 4, 8, 24.

faisons tendre  $t_n$  vers 1;  $(G_n)$  tendra vers un système  $(G_{n-1})$  (contenant une constante arbitraire et suivi d'une quadrature). La proposition étant admise pour  $(G_{n-1})$ , un théorème classique de H. Poincaré montre que pour  $|t_n - 1|$  assez petit, les fonctions auxiliaires tendent vers des limites quand  $t_i$  tend vers 0; *reste à établir que le fait subsiste lorsque  $t_n$  tend vers  $t_n^0$* . Mais admettons que sur le chemin suivi par  $t_n$  il y ait un point d'arrêt  $t'_n$ ; les limites de nos fonctions auxiliaires considérées comme fonctions de  $t_n$  satisfont à un système  $(G_{n-1})$  et à une équation de Riccati;  $t_n$  tendant vers  $t'_n$ , ces limites sont méromorphes; on montre d'ailleurs qu'elles ne peuvent avoir de pôles; dès lors, elles restent bornées quand  $t_n$  tend vers  $t'_n$  et le raisonnement s'achève aisément.

5. Ce point fondamental établi, on peut étudier en toute sécurité l'allure de l'intégrale générale dans la région  $(\mathbf{R})$ : c'est l'objet de la quatrième Partie.  $(\mathbf{R})$  peut être divisée en secteurs, et cela, de deux manières différentes; les secteurs  $(S')$ ,  $(S'')$  des deux décompositions empiètent mutuellement, les médianes des uns servant de frontières aux autres. L'intérieur  $(^1)$  d'un secteur  $(S')$  [ $(S'')$ ] de première (deuxième) espèce constitue la région de convergence d'une famille de caractéristiques de même nom; à l'intérieur de  $(S'')$  les  $z_k$  ( $k \neq i$ ,  $n+1$ ) *tendent, pour  $T = \infty$ , vers une même limite bien déterminée*; parallèlement à la frontière commune de deux secteurs *les  $z_k$  sont indéterminés*; *l'équation  $z_k = C$  possède deux suites infinies de racines*, qui tendent à se succéder périodiquement dans la direction de cette frontière commune; *il n'y a d'exception que si  $C$  coïncide avec l'une des deux valeurs asymptotiques limitrophes*. Ainsi le domaine d'indétermination de  $z_k$  au point  $t_i = 0$  comprend tout le plan; conformément à la terminologie introduite par M. Painlevé, il est donc préférable de qualifier cette singularité d'essentielle  $(^2)$ . A l'intérieur de  $(S'')$ ,  $z_i$  est asymptote à une expression de la forme  $\alpha t_i^s + \beta t_i^{-s} + \gamma$ , *l'exposant  $s$  augmentant de deux unités lorsqu'on passe d'un secteur au contigu*; les fonctions auxiliaires  $R_k$ ,  $S$ ,  $U_k$ ,  $V_k$  jouissent de propriétés analogues à celles de  $z_k$ , et

(<sup>1</sup>) C'est-à-dire l'ensemble des rayons de  $(S')$  ou  $(S'')$  faisant avec les frontières des angles supérieurs à un nombre positif arbitrairement petit  $\eta$ .

(<sup>2</sup>) Au lieu de transcendante, terme employé pour VI.

chaque fois, on peut vérifier sur ces fonctions les théorèmes établis par M. Montel et d'autres auteurs.

Ces résultats doivent être modifiés dans les cas exceptionnels, ou, encore, lorsque l'exposant  $s$  a une valeur réelle,  $s_0$  ( $0 \leq s_0 < 1$ ). Quand  $s$  tend vers une valeur réelle,  $(\mathbf{R})$  finit par ne plus constituer qu'un seul secteur (de première ou de deuxième espèce); à l'intérieur de  $(\mathbf{R})$  les fonctions  $z_k, z_i, \dots$  admettent toutes des valeurs asymptotiques, finies ou non : les zones d'indétermination sont sorties de  $(\mathbf{R})$ ; au lieu d'une singularité essentielle, on n'a plus qu'une singularité transcendante (ou algébrique, si  $s$  est rationnel et  $\neq 0$ ). Une dégénérescence analogue se rencontre, au moins partiellement, dans les cas exceptionnels.

La théorie précédente m'a permis de caractériser, de la manière la plus simple, l'allure des intégrales  $A_{\mu\nu}^k$  du système (A) de M. Schlesinger : le long de tout rayon intérieur (au sens strict) à un secteur de deuxième espèce, les  $A_{\mu\nu}^k$  ( $k \neq i, n+1$ ) admettent une valeur asymptotique (constante dans le secteur), et les  $A_{\mu\nu}^i, A_{\mu\nu}^{n+1}$  deviennent infinis comme  $z_i$ . Parallèlement aux frontières du secteur, les  $A_{\mu\nu}^k$  et les  $t_i A_{\mu\nu}^i, t_i A_{\mu\nu}^{n+1}$  sont indéterminés, les équations  $A_{\mu\nu}^k = C$ , par exemple, admettant une double série de racines (sauf si  $C$  est l'une des deux valeurs asymptotiques adjacentes).

Lorsque les paramètres  $d_k, D$  ( $k = 1, \dots, n+2$ ) qui entrent dans  $(G_n)$  satisfont à une certaine relation,  $(G_n)$  admet comme solutions particulières des quotients de fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur; l'étude directe du point singulier est alors facile et concorde pleinement avec les résultats précédents (cas exceptionnels) (1).

---

(1) Le cas de  $n=1$  comporte en outre une vérification remarquable : dans son Mémoire couronné sur les fonctions algébriques de deux variables indépendantes (*Journ. de Math. pures et appl.*, 4<sup>e</sup> série, t. 5, 1889, p. 298-300). M. Émile Picard a formé une équation (soit  $VI_0$ ) qui est un cas particulier de VI; on l'obtiendrait actuellement en faisant  $n=1, d_1=0=d_2=d_3=D$ . L'intégrale de  $VI_0$  est de la forme  $\varphi(A_1\omega_1 + A_2\omega_2; t)$ , où  $\varphi(u, t)$  est une fonction elliptique de  $u$ , admettant  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour périodes, et  $t$  pour module. La décomposition de  $(\mathbf{R})$  en secteurs se rattache alors à la décomposition du plan  $u$  en bandes de parallélogrammes de périodes. Peut-on intégrer par un procédé analogue le système  $(G_n)$  ( $n > 1$ ) lorsqu'on a annulé toutes les constantes  $d_1, \dots, d_{n+2}, D$ ? La question paraît difficile; il serait intéressant de pouvoir y répondre affirmativement.

Grâce au résultat fondamental de la troisième Partie, les propositions obtenues sur la singularité  $t_i = 0$  acquièrent une grande importance : *elles s'appliquent à toutes les intégrales d'une classe de systèmes différentiels  $(G_n)$ , d'ordre arbitrairement élevé, et dont le degré de généralité est le même que celui des équations linéaires du second ordre, à coefficients rationnels et à singularités régulières*; les intégrales de ces systèmes sont méromorphes partout, sauf en certaines singularités dont le mécanisme est désormais connu. Il est remarquable que *l'élévation de l'ordre de  $(G_n)$  ne complique aucunement ce mécanisme* : dans leur ensemble, les résultats établis pour VI [décomposition de  $(R)$  en secteurs, valeurs asymptotiques à l'intérieur des secteurs, quasi-périodicité et indétermination complète parallèlement aux frontières] subsistent pour  $(G_n)$  <sup>(1)</sup>. Ajoutons enfin que *les systèmes  $(G_n)$  constituent le premier exemple connu d'une classe de systèmes, d'ordre non limité, dont les intégrales sont irréductibles aux fonctions élémentaires et dont l'étude des singularités est complètement achevée*.

6. La dernière Partie de ce Mémoire est consacrée à la résolution proprement dite du problème de Riemann; *la méthode de récurrence*, dont on a reconnu plus haut l'efficacité, *va jouer une fois de plus un rôle prépondérant* <sup>(2)</sup>. Supposons qu'il s'agisse de former une équation linéaire du second ordre  $(E_n)$ , de singularités régulières  $x = t_1, \dots, t_n, 0, 1, \infty$ , admettent un groupe de monodromie donné,  $G_n$  : ce groupe dépendra de  $3n + 3$  paramètres. Supprimons de  $G_n$  la substitution  $S_i$  relative au point  $x = t_i$ ; nous obtiendrons un groupe  $G_{n-1}$ , et  $G_n$  pourra être défini par les  $3n$  paramètres de  $G_{n-1}$ , par l'invariant  $J$  de  $S_i$  — qui détermine à un entier près l'un des coefficients de  $(E_n)$  — et par les invariants  $J_0, J_1$  des substitutions  $S_i S_{n+1}, S_i S_{n+2}$  correspondant aux lacets enveloppant les points  $(t_i, 0)$  et  $(t_i, 1)$ . Ceci posé, le problème de Riemann pour  $G_n$  revient à choisir la solution  $[z]$  d'un certain sys-

(1) Par là, les systèmes  $(G_n)$  se rapprochent des systèmes linéaires réguliers (ou irréguliers) dont les singularités présentent aussi le même type, quel que soit l'ordre différentiel.

(2) Il me paraît hors de doute que la méthode de récurrence s'imposera dans d'autres problèmes : par exemple, pour étudier l'irréductibilité du système  $(g_n, G_n)$  au sens de M. J. Drach.

tème <sup>(1)</sup>  $(G_n)$  à l'aide de laquelle il faudra exprimer les coefficients de  $(E_n)$  pour que le groupe de  $(E_n)$  — qui est déjà indépendant des  $t_n$  — coïncide avec  $G_n$ . Or, faisons tendre  $t_i$  vers 0;  $(E_n)$  tendra vers une équation  $(E_{n-1})$  possédant un point singulier de moins et à  $(E_{n-1})$  sera associé un certain système  $(G_{n-1})$ ; mais on montre que *les limites* <sup>(2)</sup> *pour*  $t_i = 0$  *des intégrales*  $[z]$  *de*  $(G_n)$ , *considérées comme fonctions de*  $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$  *coïncident avec ces intégrales de*  $(G_{n-1})$  *qui résolvent le problème de Riemann pour*  $(G_{n-1})$ : ces limites peuvent donc être considérées comme connues <sup>(3)</sup>. Or elles figurent parmi les données qui permettent de construire une caractéristique de  $[z]$  par approximations successives; la seule donnée qui ne résulte pas des considérations précédentes se réduit à la valeur  $z_{n+1}^0$  prise par  $z_{n+1}$  en un point  $t_i^0$  voisin de  $t_i = 0$ . En définitive, tout revient à choisir  $z_{n+1}^0$  de manière que l'invariant de la substitution  $S_i S_{n+2}$  soit égale à  $J_i$ .

Or, dans le langage des caractéristiques, ceci signifie qu'une certaine fonction rationnelle  $\alpha_i$  des  $z_i$  et de leurs dérivées doit tendre vers une limite donnée  $\alpha$  quand  $t_i$  tend vers 1 suivant un chemin déterminé. Pour trouver  $z_{n+1}^0$  je montre d'abord, en m'appuyant sur les résultats de la quatrième Partie, qu'on peut déterminer  $z_{n+1}^0(t_i)$  de manière à satisfaire à l'équation  $\alpha_i = \alpha$  en un point  $t_i$  suffisamment voisin de zéro. La chose est possible de *deux manières différentes*: cela tient au fait que pour une intégrale déterminée  $[z]$  l'équation  $\alpha_i = \alpha$  possède une *double série de racines*, et ceci s'accorde de la manière la plus remarquable avec l'existence de deux groupes  $G_n$  admettant comme invariants  $J, J_0, J_1$  et ceux de  $G_{n-1}$ .

La solution  $z_{n+1}^0(t_i)$  une fois acquise dans le voisinage de  $t_i = 0$ , on montre en s'appuyant sur un théorème de M. Painlevé et sur le lemme de Borel-Lebesgue que  $z_{n+1}^0(t_i)$  ne saurait devenir indéterminé quand  $t_i$  tend vers 1.

Pratiquement, la solution effective du problème de Riemann par la méthode précédente n'exige qu'un nombre fini de prolongements analytiques; tout procédé qui simplifie l'opération du prolongement

<sup>(1)</sup>  $(G_n)$  peut être écrit explicitement dès que l'on connaît  $G_n$ .

<sup>(2)</sup> L'existence de ces limites est assurée d'après la troisième Partie, et l'on peut reconnaître une fois de plus l'importance de cette partie dans le Mémoire actuel.

<sup>(3)</sup> La méthode de récurrence ne serait plus applicable à un groupe  $G_0$ ; mais c'est précisément le problème traité par Riemann.

simplifie donc, au point de vue pratique, la solution précédente.

Signalons encore une conséquence de la méthode. Considérons deux équations  $(E_{n+1})$  admettant le même groupe de monodromie mais différenciant l'une de l'autre par les racines  $r', r''$  de l'équation déterminante relative au point  $x = 0$ . On peut les considérer comme provenant d'une même équation  $(E_n)$ , possédant un point singulier de plus,  $x = t_i$ , par deux passages à la limite différents; pour l'une et l'autre de ces équations  $t_i$  tendra vers 0 suivant des chemins distincts (spirales logarithmiques, transformées de deux rayons de  $(R)$  : la décomposition de  $(R)$  en secteurs est liée ainsi à l'existence d'une infinité d'équations  $(E_n)$  admettant le même groupe; et l'indétermination de  $r', r''$  (définies à un entier près) se rattache à l'indétermination des signalée plus haut (n°5).

Ajoutons enfin que la méthode actuelle résout le problème de Riemann (au sens généralisé) pour les équations irrégulières; j'ai montré <sup>(1)</sup> en effet que ce problème n'est qu'un cas-limite du problème actuel <sup>(2)</sup>.

7. *Notations.* — Signalons dès maintenant la signification des notations suivantes qui seront d'un usage constant : une lettre placée en exposant après le signe  $\Sigma$  représente une valeur interdite à l'indice de sommation. Pour abréger plus encore l'écriture, on a introduit les symboles  $\Sigma', \Sigma'', \Sigma'''$ ; ils désignent des sommes où l'indice de sommation varie de 1 à  $n+2$  et ne peut prendre soit la valeur  $i$ , soit les valeurs  $i$  et  $n+1$ , soit enfin les valeurs  $i, n+1$  et  $n+2$ .

## PREMIÈRE PARTIE.

### FORMATION DU SYSTÈME $(g_n, G_n)$ .

8. *Les systèmes  $(A_m)$  et  $(f_n, F_n)$ .* — Considérons un système différentiel linéaire  $\Sigma$ , d'ordre  $m$ , à coefficients rationnels et dont tous les points singuliers  $x = t_1, \dots, t_{n+3}$  sont réguliers au sens de L. Fuchs;

<sup>(1)</sup> *Journ. de Math.*, 8<sup>e</sup> série, t. 2, 1919, p. 191. Ce dernier problème avait été traité différemment par M. G.-D. Birkhoff (*loc. cit.*, p. 551).

<sup>(2)</sup> Les résultats du Mémoire actuel ont été résumés en partie dans trois Notes des *C. R. Ac. Sc.*, t. 178, 1924, p. 1674; t. 179, 1924, p. 1026; t. 181, 1925, p. 1046.



moyennant une substitution linéaire sur  $x$  on peut supposer  $t_{n+1} = 0$ ,  $t_{n+2} = 1$ ,  $t_{n+3} = \infty$ . Posons-nous alors la question suivante : Peut-on choisir les coefficients de  $\Sigma$  en fonction des  $t_i$  de manière que  $\Sigma$  possède un système fondamental de solutions dont le groupe soit indépendant des  $t_i$ ? Si  $\Sigma$  possède cette propriété, il en sera de même de tout système  $s$  déduit de  $\Sigma$  par une transformation linéaire ( $\mathfrak{C}$ ) à coefficients rationnels en  $x$ ; on pourra donc supposer que  $s$  se réduit au système canonique (1)

$$(s) \quad \frac{dy_\nu}{dx} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{k=1}^{n+2} \frac{A_{\mu\nu}^k}{x - t_k} y_\mu;$$

et, pour que  $s$  réponde à la question, il faut et il suffit, comme l'a montré (2) M. L. Schlesinger que, moyennant une transformation préalable ( $\mathfrak{C}$ ) effectuée sur  $s$ , les  $A_{\mu\nu}^k$  vérifient le système

$$(A_m) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_{\mu\nu}^k}{\partial t_i} = \sum_{\rho=1}^m \frac{A_{\mu\rho}^i A_{\rho\nu}^k - A_{\mu\rho}^k A_{\rho\nu}^i}{t_k - t_i} \\ \sum_{j=1}^{n+2} \frac{\partial A_{\mu\nu}^k}{\partial t_i} = 0 \end{array} \right. \quad (k \neq i).$$

Or, dans ma Thèse, j'ai traité le même problème pour l'équation linéaire du second ordre, à singularités régulières

$$(E_n) \quad \frac{1}{y} \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{c_i}{(x - t_i)^2} + \frac{c_{n+3}}{x(x-1)} \\ + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x(x-1)(x-t_i)} + \sum_{j=1}^n \left[ \frac{3}{4(x-\lambda_j)^2} + \frac{\beta_j}{x(x-1)(x-\lambda_j)} \right],$$

(1) Les indices supérieurs des  $A$  ne sont pas des exposants.

(2) Voir par exemple *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*, Leipzig et Berlin, 1908, p. 320. Voir aussi R. GARNIER, *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, t. 43, 1918-1919, p. 159-164. Le système  $(A_m)$  est complètement intégrable; la notation des matrices permet de le vérifier aisément; on observera seulement que la vérification de la relation  $\frac{\partial^2 A^j}{\partial t_i \partial t_k} - \frac{\partial^2 A^j}{\partial t_k \partial t_i}$  exige pour  $j = i$  ou  $k$  un examen spécial.

où les  $\lambda_j$  sont des points apparemment singuliers, et où les  $c_i$  sont des constantes indépendantes des  $t_i$ ; j'ai établi que les  $\lambda_j$  doivent vérifier par rapport aux  $t_i$  le système que voici :

$$\begin{aligned}
 (f_n) \quad & \frac{\varphi'(t_i)(t_i - \lambda_j)}{\psi(t_i)} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} - \frac{\varphi'(t_k)(t_k - \lambda_j)}{\psi(t_k)} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_k} = \frac{t_i - t_k}{(\lambda_j - t_i)(\lambda_j - t_k)} \frac{\varphi(\lambda_j)}{\psi(\lambda_j)}, \\
 (F_n) \quad & \frac{\partial^2 \lambda_j}{\partial t_i^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)} - \frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)} \right] \left( \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} \right)^2 - \left[ \frac{\varphi''(t_i)}{2\varphi'(t_i)} - \frac{\psi'(t_i)}{\psi(t_i)} \right] \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{\varphi(\lambda_j) \psi'(\lambda_l) (\lambda_l - t_i)^2}{\varphi(\lambda_l) \psi'(\lambda_j) (\lambda_j - t_i)^2 (\lambda_j - \lambda_l)} \left( \frac{\partial \lambda_l}{\partial t_i} \right)^2 \\
 & - \sum_{l=1}^n \frac{\lambda_j - t_i}{(\lambda_l - t_i)(\lambda_l - \lambda_j)} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} \frac{\partial \lambda_l}{\partial t_i} \\
 & + 2 \frac{\psi^2(t_i)}{\varphi'^2(t_i) (\lambda_j - t_i)^2} \frac{\varphi(\lambda_j)}{\psi'(\lambda_j)} \\
 & \times \left[ \sum_{k=1}^{n+3} \left( c_k + \frac{3}{4} \right) - 2 + \sum' \frac{\varphi'(t_k)}{\psi(t_k)} \frac{c_k + \frac{1}{4}}{\lambda_j - t_k} + \frac{\varphi'(t_i)}{\psi(t_i)} \frac{c_i}{\lambda_j - t_i} \right]
 \end{aligned}$$

[avec  $\varphi(x) \equiv x(x-1)(x-t_1)\dots(x-t_n)$ ;  $\psi(x) \equiv (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$ ];

quant aux  $\alpha_i$  et et aux  $\beta_j$ , ils s'expriment rationnellement en fonctions des  $t_j$ , des  $\lambda_j$  et des  $\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i}$ .

Ceci rappelé, nous allons montrer, comme nous l'avons annoncé (n° 2), qu'on peut remplacer pour notre problème les systèmes  $(A_2)$  et  $(f_n, F_n)$  par un système plus simple  $(g_n, G_n)$ . Nous allons d'abord former ce nouveau système en partant de  $(A_2)$ .

9. *Première transformation de  $(A_2)$ .* — Pour  $m = 2$ ,  $(A_m)$  s'écrit

$$(A_2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial A_{11}^k}{\partial t_i} &= \frac{A_{12}^i A_{21}^k - A_{12}^k A_{21}^i}{t_k - t_i} = - \frac{\partial A_{22}^k}{\partial t_i}; & \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\partial A_{11}^k}{\partial t_i} &= 0 = \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\partial A_{22}^k}{\partial t_i}; \\ \frac{\partial A_{12}^k}{\partial t_i} &= \frac{A_{11}^i A_{12}^k - A_{11}^k A_{12}^i + A_{12}^i A_{22}^k - A_{12}^k A_{22}^i}{t_k - t_i}; & \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\partial A_{12}^k}{\partial t_i} &= 0; \\ \frac{\partial A_{21}^k}{\partial t_i} &= \frac{A_{21}^i A_{11}^k - A_{21}^k A_{11}^i + A_{22}^i A_{21}^k - A_{22}^k A_{21}^i}{t_k - t_i}; & \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\partial A_{21}^k}{\partial t_i} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Ce système, d'ordre  $4n + 8$ , admet les intégrales premières que voici :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lll} A_{11}^k + A_{22}^k = \text{const.}, & \sum_{k=1}^{n+2} A_{11}^k = \text{const.}, & \sum_{k=1}^{n+2} A_{22}^k = \text{const.}; \\ A_{11}^k A_{22}^k - A_{12}^k A_{21}^k = \text{const.}, & \sum_{k=1}^{n+2} A_{12}^k = \text{const.}, & \sum_{k=1}^{n+2} A_{21}^k = \text{const.}, \end{array} \right.$$

ces intégrales se réduisent d'ailleurs à  $2n + 7$ , car celles de la première ligne sont liées linéairement. Or, en faisant sur les matrices  $A^k$  la transformation  $(1) A^k \div c^{-1} B^k c$ , où  $c$  est une matrice à coefficients indépendants des  $t_i$  et de  $k$ , et en multipliant les  $y$  par une expression de

la forme  $\prod_{k=1}^{n+2} (x - t_k)^{\varepsilon_k}$ , on peut supposer

$$(2) \quad A_{11}^k + A_{22}^k = 1, \quad \sum_{k=1}^{n+2} A_{12}^k = \varepsilon, \quad \sum_{k=1}^{n+2} A_{21}^k = 0,$$

$\varepsilon$  étant une constante numérique qu'on peut prendre égale à zéro dans le cas général où l'on a

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{n+2} A_{11}^k \neq \sum_{k=1}^{n+2} A_{22}^k;$$

nous écrirons en outre

$$(4) \quad A_{11}^k A_{22}^k - A_{12}^k A_{21}^k = \frac{1 - d_k}{4}.$$

Les solutions de  $(A_2)$  satisfaisant aux conditions (2) et (4) — où les  $d_k$  sont donnés — vérifient nécessairement un système différentiel  $(A_2'')$  d'ordre  $2n + 1$ ; inversement, les coefficients de  $(A_2'')$  dépendent de  $n + 2$  constantes arbitraires, les  $d_k$ , et, de toute solution de  $(A_2'')$ , on déduit  $\infty^{n+5}$  solutions de  $(A_2)$  moyennant les deux transformations précitées qui contiennent, la première trois constantes, et la seconde,  $n + 2$  : les  $\rho_k$ .

---

(1) L'opération revient à faire sur un système complet de solutions de  $S$  la transformation  $y \div xc$ .

D'autre part, dans le cas général (1) le système  $(A_2'')$  pourra toujours être ramené à un système résolvant  $(A')$  suivi d'une quadrature : car le système  $(A_2)$  et les équations (2) — avec  $\varepsilon = 0$  — et (4) ne changent pas quand on remplace les  $A_{2,1}$  par  $CA_{2,1}$  et les  $A_{1,2}$  par  $C^{-1}A_{1,2}$ ,  $C$  étant une constante arbitraire. Pour former  $(A')$  nous sommes ainsi conduits à prendre pour fonctions inconnues les quotients

$$z_k = \frac{A_{2,1}^k}{\sum_{h=1}^{n+2} t_h A_{2,1}^h},$$

qui restent invariants dans la dernière transformation. Les  $z_k$  satisferont évidemment aux relations

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{n+2} z_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n+2} t_k z_k = 1,$$

qui seront d'un emploi constant dans tout ce Mémoire ; elles entraînent les équations, souvent utilisées également

$$(6) \quad \Sigma' (t_k - t_i) z_k = 1, \quad \Sigma' (t_k - t_i) \frac{\partial z_k}{\partial t_i} = -z_i.$$

Ainsi, il n'y aura que  $n$  quotients  $z_k$  linéairement distincts ; toutefois, pour la simplicité de l'écriture, comme, plus tard, pour la discussion de la singularité  $t_i = 0$ , il est indispensable de conserver l'ensemble  $z_1, \dots, z_{n+2}$ .

Il s'agit maintenant de former le système résolvant vérifié par les  $z_k$  ; à cet effet, posons

$$A_{1,1}^k - A_{2,2}^k \equiv H_k;$$

d'après (2), on aura

$$A_{1,1}^k = \frac{1 + H_k}{2}, \quad A_{2,2}^k = \frac{1 - H_k}{2};$$

et, de plus, d'après (1), on peut écrire

$$(7) \quad \sum_{k=1}^{n+2} H_k = \sqrt{D} - 1,$$

---

(1) On verra plus loin (n° 11) que le résultat subsiste quand (3) n'est plus vérifiée et que l'on doit prendre  $\varepsilon \neq 0$ .

$\sqrt{D}$  étant une constante, qui d'après (3) est différente de 1 dans le cas général. Posons encore

$$\sum_{k=1}^{n+2} t_k A_{21}^k = \lambda$$

(de sorte que  $A_{21}^k = \lambda z_k$ ); il viendra, d'après  $(A_2)_3$  (p. 189),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial t_i} &= A_{21}^i + \Sigma' (t_k - t_i) \frac{\partial A_{21}^k}{\partial t_i} = A_{21}^i + \Sigma' (A_{21}^i H_k - A_{21}^k H_i) \\ &= A_{21}^i + (\sqrt{D} - 1 - H_i) A_{21}^i + A_{21}^i H_i, \end{aligned}$$

soit

$$(8) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t_i} = \sqrt{D} \lambda z_i.$$

Dès lors, on vérifiera aisément que le système  $(A_2'')$  est équivalent au suivant :

$$(B) \left\{ \begin{array}{lll} \sum_{k=1}^{n+2} t_k A_{21}^k = \lambda, & A_{21}^k = \lambda z_k, & \sum_{k=1}^{n+2} z_k = 0; \\ A_{41}^k = \frac{1+H_k}{2}, & A_{22}^k = \frac{1-H_k}{2}, & \sum_{k=1}^{n+2} H_k = \sqrt{D} - 1; \\ \sum_{k=1}^{n+2} A_{12}^k = \varepsilon, & A_{12}^k = \frac{d_k - H_k^2}{4\lambda z_k}, & \frac{\partial \lambda}{\partial t_i} = \sqrt{D} \lambda z_i; \\ (t_k - t_i) \frac{\partial H_k}{\partial t_i} = 2\lambda (z_k A_{12}^i - z_i A_{12}^k) & & \left( \begin{array}{c} k \neq i, \\ i \neq n+1, n+2 \end{array} \right), \\ (t_k - t_i) \left( \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \sqrt{D} z_i z_k \right) = z_i H_k - z_k H_i & & \end{array} \right.$$

qui est complètement intégrable, comme  $(A_2)$ . Les équations  $(B)_4$ ,  $(B)_5$  des deux dernières lignes de (B) (où  $i$  prend toutes les valeurs permises) sont au nombre de  $2n(n+1)$ ; si l'on écrit à part les  $2n+2$  équations de ces deux lignes qui répondent à une valeur fixe de  $i$ , il en reste encore  $2(n^2-1)$  que l'on transformera comme il suit.

10. *Formation du système résolvant*  $(g_n, G_n)$ . — Tout d'abord, on a

évidemment (1), quels que soient  $h$  et  $k$  ( $\neq n+1$  et  $n+2$ )

$$(9) \quad \frac{\partial z_h}{\partial t_k} = \frac{\partial z_k}{\partial t_h}.$$

Formons alors la combinaison  $z_h \frac{\partial z_k}{\partial t_i} - z_k \frac{\partial z_h}{\partial t_i}$  où  $h, k, i$  sont trois entiers distincts; les relations (B)<sub>s</sub> donnent aussitôt

$$\begin{aligned} z_h \frac{\partial z_k}{\partial t_i} - z_k \frac{\partial z_h}{\partial t_i} \\ = (t_k - t_h) \left[ \frac{z_h z_i H_k}{(t_k - t_h)(t_k - t_i)} + \frac{z_i z_k H_h}{(t_h - t_i)(t_h - t_k)} + \frac{z_k z_h H_i}{(t_i - t_k)(t_i - t_h)} \right]; \end{aligned}$$

la quantité entre crochets étant symétrique par rapport aux trois indices, on en déduit les relations

$$(10) \quad \frac{z_h \frac{\partial z_k}{\partial t_i} - z_k \frac{\partial z_h}{\partial t_i}}{t_k - t_h} = \frac{z_i \frac{\partial z_h}{\partial t_k} - z_h \frac{\partial z_i}{\partial t_k}}{t_h - t_i} = \frac{z_k \frac{\partial z_i}{\partial t_h} - z_i \frac{\partial z_k}{\partial t_h}}{t_i - t_k}$$

(si l'un des indices,  $h$  par exemple, est égal à  $n+1$  ou  $n+2$ , on supprimera le rapport qui contient les dérivées par rapport à  $t_h$ ).

Or, à l'aide de (9) on peut remplacer les équations (10) par les suivantes (au nombre de  $n^2 - 1$ ) :

$$(g_n) \quad \frac{\partial z_h}{\partial t_k} = \frac{t_k - t_i}{t_k - t_h} \frac{z_h}{z_i} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{t_h - t_i}{t_h - t_k} \frac{z_k}{z_i} \frac{\partial z_h}{\partial t_i} \quad \left( \begin{matrix} k \neq i, n+1, n+2 \\ h \neq k \end{matrix} \right);$$

et ces équations [qui à leur tour entraînent (9)] peuvent s'écrire sous la forme symétrique équivalente

$$(g_n)' \quad z_h(t_i - t_k) \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + z_i(t_k - t_h) \frac{\partial z_h}{\partial t_k} + z_k(t_h - t_i) \frac{\partial z_i}{\partial t_h} = 0.$$

Si on leur adjoint les équations de forme analogue, relatives aux  $H_k$  (et qu'on formerait par un procédé identique), on aura obtenu les  $2(n^2 - 1)$  équations cherchées; ces équations permettent d'exprimer toutes les dérivées des  $z_h$  et des  $H_h$  par rapport aux  $t_k$  à l'aide des dérivées prises seulement par rapport à  $t_i$ .

(1) Les équations (9) résultent à la fois de (8) ou de (B)<sub>s</sub>.

Considérons alors  $t_i$  comme seule variable, et montrons que les  $z_k$  satisfont (par rapport à  $t_i$ ) à un système différentiel d'ordre  $2n$ .

Pour abréger l'écriture, posons

$$(11) \quad (t_k - t_i) \left( \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \sqrt{D} z_i z_k \right) = M_k \quad (k \neq i);$$

les équations (B)<sub>3</sub> et (B)<sub>4</sub> deviendront en vertu de (B)<sub>3</sub>

$$\begin{aligned} z_i H_k - z_k H_i &= M_k, \\ 2(t_k - t_i) \frac{\partial H_k}{\partial t_i} &= d_i \frac{z_k}{z_i} - d_k \frac{z_i}{z_k} + M_k \frac{z_i H_k + z_k H_i}{z_i z_k}, \end{aligned}$$

et d'après (B)<sub>2</sub>, on tire de là

$$\begin{aligned} (12) \quad \frac{\partial M_k}{\partial t_i} &= z_k \sum' \frac{\partial H_h}{\partial t_i} - H_i \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{\partial (z_i H_k)}{\partial t_i} \\ &= z_k \sum' \frac{d_i z_h^2 - d_h z_i^2}{2(t_h - t_i) z_i z_h} + \frac{z_k}{z_i} \sum' \frac{M_h (M_h + 2 z_h H_i)}{2(t_h - t_i) z_h} - H_i \frac{\partial z_k}{\partial t_i} \\ &\quad + \frac{d_i z_k^2 - d_k z_i^2}{2(t_k - t_i) z_k} + \frac{M_k (M_k + 2 z_k H_i)}{2(t_k - t_i) z_k} + \frac{M_k + z_k H_i}{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial t_i}. \end{aligned}$$

Or, en vertu de la relation

$$(13) \quad \sum' \frac{M_h}{t_h - t_i} = - \frac{\partial z_i}{\partial t_i} - \sqrt{D} z_i^2,$$

conséquence immédiate de (5), on vérifie aussitôt que le coefficient de  $H_i$  dans (12) est nul. Remplaçons ensuite dans (12) les  $M_k$  par leurs valeurs (11) on trouvera sans peine que les coefficients de  $\sqrt{D}$  sont égaux de part et d'autre, de sorte que les équations (12) s'écriront en définitive

$$\begin{aligned} (G_n) \quad \frac{\partial^2 z_k}{\partial t_i^2} &= \frac{1}{2 z_k} \left( \frac{\partial z_k}{\partial t_i} \right)^2 + \frac{1}{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial t_i} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{z_k}{2 z_i (t_k - t_i)} \sum' \frac{t_h - t_i}{z_h} \left( \frac{\partial z_h}{\partial t_i} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{t_k - t_i} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{d_i z_k^2 - d_k z_i^2}{2 z_k (t_k - t_i)^2} \\ &\quad + \frac{z_k}{2 z_i (t_k - t_i)} \sum' \frac{d_i z_h^2 - d_h z_i^2}{z_h (t_h - t_i)} + \frac{D}{2} z_i z_k \left( z_i + \frac{1}{t_k - t_i} \right) \quad (k \neq i); \end{aligned}$$

ce sont bien les équations que nous avons données au n° 2.

On aurait pu former aussi  $\frac{\partial M_k}{\partial t_h}$ ; et, en s'appuyant comme tout à

l'heure sur (13), on parviendrait à l'équation, d'une symétrie remarquable (1)

$$(14) \quad \frac{\partial^2 z_k}{\partial t_h \partial t_i} = \frac{1}{2z_k} \frac{\partial z_k}{\partial t_h} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{1}{2z_h} \frac{\partial z_h}{\partial t_i} \frac{\partial z_h}{\partial t_k} + \frac{1}{2z_i} \frac{\partial z_i}{\partial t_k} \frac{\partial z_i}{\partial t_h} \\ + \frac{d_k}{2(t_h - t_k)(t_k - t_i)} \frac{z_h z_i}{z_k} \\ + \frac{d_h}{2(t_i - t_h)(t_h - t_k)} \frac{z_i z_k}{z_h} + \frac{d_i}{2(t_k - t_i)(t_i - t_h)} \frac{z_k z_h}{z_i} + \frac{D}{2} \frac{z_k z_h z_i}{z_i}.$$

Le système  $(g_n, G_n)$  est complètement intégrable, comme  $(A_2)$  et (B) dont il procède (2); son intégrale dépend de  $2n$  constantes arbitraires : par exemple, les valeurs pour  $t_1 = t_1^0, \dots, t_n = t_n^0$  de  $z_1, \dots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial t_i}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial t_i}$ .

11. *L'intégration de  $(A_2)$  au moyen des solutions de  $(g_n, G_n)$ .* — Les  $z_k$  une fois déterminés par l'intégration de  $(g_n, G_n)$ , il faut encore calculer les  $H_k$  et  $\lambda$  pour achever l'intégration de  $(A_2)$ . Or, on tire de (B)<sub>3</sub>

$$\sum' \frac{d_k - \left( \frac{M_k + z_k H_i}{z_i} \right)^2}{\lambda z_k} + \frac{d_i - H_i^2}{\lambda z_i} = 4\varepsilon,$$

c'est-à-dire, en vertu de (6),

$$(15) \quad \sum' \frac{d_k - z_i^{-2} M_k^2}{z_k} - 2 \frac{\sqrt{D} - 1}{z_i} H_i + \frac{d_i}{z_i} = 4\varepsilon \lambda.$$

Dans le cas général, où l'on a  $\sqrt{D} \neq 1$  et où l'on peut prendre  $\varepsilon = 0$ , (8) fournira  $\lambda$  moyennant une quadrature de différentielle totale: (15) donnera alors  $H_i$  sans ambiguïté et les  $H_k$  en résulteront d'après (B)<sub>5</sub>.

Reste le cas (3)  $\sqrt{D} = 1, \varepsilon \neq 0$ . L'équation (15) fait alors connaître  $\lambda$ ,

(1) Cette symétrie acquiert sa signification véritable dans le rapprochement de (8) et (14).

(2) On pourrait aussi le vérifier directement, en s'appuyant sur (14).

(3) Le cas  $\sqrt{D} = 1, \varepsilon = 0$  n'est pas à envisager; le point  $x = \infty$  ne serait pas une singularité de  $\delta$ .



et pour déterminer  $H_i$ , on a l'équation

$$\frac{\partial H_i}{\partial t_i} = H_i \left( z_i + \frac{1}{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial t_i} \right) + \sum' \frac{1}{2(t_i - t_k) z_i z_k} (M_k^2 + d_i z_k^2 - d_k z_i^2),$$

conséquence immédiate de  $(B)_2$ ,  $(B)_3$  et (13); on en déduit aisément  $H_i = \lambda z_i h_i$ , avec

$$(16) \quad \frac{\partial h_i}{\partial t_i} = -\Sigma' \varphi_k, \quad \frac{\partial h_i}{\partial t_k} = \varphi_k$$

et

$$(17) \quad \varphi_k = \frac{1}{2\lambda z_i^2 z_k (t_k - t_i)} (M_k^2 + d_i z_k^2 - d_k z_i^2).$$

Dans les deux cas, la détermination de  $\lambda$  (ou de  $h_i$ ) introduira la  $(2n+1)^{\text{ième}}$  constante arbitraire qui doit figurer dans l'intégrale générale de  $(B)$  ou de  $(A_2)$ .

## 12. Transformation de $s$ en $(E_n)$ . Introduction des $z_k$ à partir de $(E_n)$ .

— Nous allons établir maintenant l'équivalence de  $(f_n, F_n)$  et  $(g_n, G_n)$ : nous aurons ainsi rattaché l'un à l'autre les deux systèmes  $(f_n, F_n)$  et  $(A_2)$ . Or pour  $m=2$ ,  $s$  s'écrit

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 a_{11} + y_2 a_{21}, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_1 a_{12} + y_2 a_{22},$$

les  $a_{\mu\nu}$  désignant les fonctions rationnelles de  $x$  précédemment explicitées;  $y_1$  satisfait donc à l'équation (') suivante (qui admet pour points apparemment singuliers les zéros de  $a_{21}$ )

$$y_1'' = \left( a_{11} + a_{22} + \frac{a_{21}'}{a_{21}} \right) y_1' + \left( a_{11}' - \frac{a_{21}'}{a_{21}} a_{11} + a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22} \right) y_1.$$

Or, d'après les équations (2), le coefficient de  $y'$  se réduit à  $\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}$ ,  $\psi(x)$  ayant le même sens qu'au n° 8; posons alors

$$y_1 = y \sqrt{\psi(x)};$$

---

(1) Dans ce numéro et les deux suivants, les accents indiquent des dérivées par rapport à  $x$ .

$y$  vérifiera l'équation

$$(18) \quad y'' = \left( a'_{11} - \frac{a'_{21}}{a_{21}} a_{11} + a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22} + \frac{3}{4} \frac{\psi'^2}{\psi^2} - \frac{\psi''}{2\psi} \right) y.$$

Pour qu'elle soit identique à  $(E_n)$  il faudra d'abord qu'on prenne

$$(19) \quad d_k = 4c_k + 1.$$

De plus, en vertu de (2), on a encore  $a_{11} + a_{22} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ ,  $\varphi(x)$  ayant le même sens qu'au n° 8, et (18) pourra s'écrire

$$(18') \quad y'' = \left( a'_{11} + a_{11}^2 + a_{12} a_{21} - a_{11} \frac{\psi'}{\psi} + \frac{3}{4} \frac{\psi'^2}{\psi^2} - \frac{\psi''}{2\psi} \right) y.$$

Pour  $x = \infty$ , le coefficient de  $y$  dans (18)' présente comme terme prépondérant une expression en  $x^{-2}$ , de coefficient

$$(20) \quad -\sum_{k=1}^{n+2} A_{11}^k + \left( \sum_{k=1}^{n+2} A_{11}^k \right)^2 - n \sum_{k=1}^{n+2} A_{11}^k + \frac{3}{4} n^2 - \frac{n(n-1)}{2};$$

mais, d'après  $(B)_2$  et (7), on a

$$\sum_{k=1}^{n+2} A_{11}^k = \frac{\sqrt{D} + n + 1}{2};$$

l'expression (20) est donc égale à  $(D-1):4$ ; d'autre part, calculé dans le développement de  $(E_n)$ , autour de  $x = \infty$ , le même coefficient de  $x^{-2}$  est égal à  $\sum_{k=1}^{n+3} c_k + \frac{3n}{4}$ ; on a donc

$$(21) \quad D = 4 \sum_{k=1}^{n+3} c_k + 3n + 1.$$

Ceci posé, observons qu'on peut écrire, d'après l'expression de  $a_{21}$ ,

$$a_{21} = a \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

avec  $a = \sum_{k=1}^{n+2} t_k A_{21}^k = \lambda$  (n° 9, p. 192), et l'on aura en conséquence

$$(22) \quad z_k = \frac{\psi(t_k)}{\varphi'(t_k)}.$$

Ainsi, pour  $n = 1$ , on a

$$z_1 = \frac{t - \lambda}{t(t-1)}, \quad z_2 = -\frac{\lambda}{t}, \quad z_3 = \frac{1 - \lambda}{1 - t},$$

les indices étant supprimés comme dans [VI]. On prendra nécessairement  $i = 1$ , et lorsqu'on voudra appliquer à l'équation VI un résultat quelconque du Mémoire actuel, il faudra remplacer  $t_i$  par  $t$ ,  $z_i$  par  $z_1$ ,  $z_{n+1}$  par  $z_2$ ,  $z_k$  par  $z_3$  ( $k \neq i, n+1$ ) ( $z_1, z_2, z_3$  étant donnés plus haut); de plus les constantes  $a, b, c, d$  de VI auront pour valeurs, d'après (19) et (21),

$$a = \frac{d_2 - 1}{4}, \quad b = \frac{d_3 - 1}{4}, \quad c = \frac{d_1 - 1}{4}, \quad a + b + c + d = \frac{D - 1}{4}.$$

13. *Équivalence de  $(f_n, F_n)$  et de  $(g_n, G_n)$  : calcul des fonctions symétriques.* — La démonstration d'équivalence que nous avons en vue va se réduire alors à un calcul de fonctions symétriques<sup>(1)</sup>. On tire de (22)

$$(23) \quad \frac{1}{z_k} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j - t_k} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} - \frac{1}{t_i - t_k},$$

$$(24) \quad \frac{1}{z_k} \frac{\partial^2 z_k}{\partial t_i^2} - \left( \frac{1}{z_k} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} \right)^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j - t_k} \frac{\partial^2 \lambda_j}{\partial t_i^2} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{(\lambda_j - t_k)^2} \left( \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} \right)^2 + \frac{1}{(t_i - t_k)^2}.$$

Remplaçons<sup>(2)</sup> dans (24) les  $\frac{\partial^2 \lambda_j}{\partial t_i^2}$  par leurs valeurs tirées de  $(F_n)$ ; le coefficient de  $\left( \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} \right)^2$  sera égal à

$$-\frac{1}{(\lambda_j - t_k)^2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)} - \frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)} \right] \frac{1}{\lambda_j - t_k} \\ + \frac{\psi'(\lambda_j)(\lambda_j - t_i)^2}{2\varphi(\lambda_j)} \sum_{l=1}^n \frac{\varphi(\lambda_l)}{\psi'(\lambda_l)(\lambda_l - t_i)^2(\lambda_l - t_k)(\lambda_l - \lambda_j)}.$$

(1) Pour plus de détails relativement aux calculs des n°s 13 et 14 se reporter à une note des *Comptes rendus du Congrès des Sociétés savantes* (Poitiers, 1926).

(2) Le déterminant des  $\frac{\partial^2 \lambda_j}{\partial t_i^2}$  dans les équations (24) (où  $i$  est fixe) n'est pas nul : il est égal à

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\delta(\lambda) \delta(t)}{\psi(t_1) \dots \psi(t_n)} \quad [\text{avec } \delta(u) \equiv (u_1 - u_2) \dots (u_1 - u_n)(u_2 - u_3) \dots (u_{n-1} - u_n)].$$

Il résulte de là, et de notre vérification, qu'inversement les équations  $(G_n)$  entraînent  $(F_n)$ .

Or, en écrivant que la somme des résidus de la fonction rationnelle

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)(x-t_i)^2(x-t_k)(x-\lambda_j)}$$

est nulle, on remplace aisément l'expression précédente par

$$\frac{1}{2(\lambda_j - t_k)} \left( \frac{2}{\lambda_j - t_i} - \frac{1}{\lambda_j - t_k} \right) + \frac{1}{2z_i(t_i - t_k)} \frac{(\lambda_j - t_i)\psi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)},$$

en sorte que dans le second membre de (24), les termes du second degré par rapport aux dérivées premières ont pour somme

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \equiv & -\frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j - t_k} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j - t_i} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} \right) \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j - t_k} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} \right) \\ & + \frac{1}{2z_i(t_i - t_k)} \sum_{j=1}^n \frac{(\lambda_j - t_i)\psi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)} \left( \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} \right)^2. \end{aligned}$$

Mais, en écrivant que la somme des résidus de  $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)(x-t_i)}$  est nulle, on trouve sans peine

$$(25) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j - t_i} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} = \frac{1}{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial t_i} + \frac{1}{z_i} \sum' \frac{z_h}{t_h - t_i};$$

de plus, les relations (23) entraînent l'identité en  $x$

$$(26) \quad \frac{\psi(x)(x-t_i)}{\varphi(x)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - \lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} = \sum' \frac{t_i - t_h}{x - t_h} \left( \frac{\partial z_h}{\partial t_i} + \frac{z_h}{t_i - t_h} \right).$$

Or, on tire de (26)

$$(27) \quad \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} = - \frac{\varphi(\lambda_j)}{\psi'(\lambda_j)(\lambda_j - t_i)} \sum' \frac{(t_h - t_i) \frac{\partial z_h}{\partial t_i} - z_h}{\lambda_j - t_h}.$$

La dernière somme qui figure dans  $\mathfrak{A}$  s'écrit alors

$$\mathfrak{L} \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(\lambda_j)}{\psi'(\lambda_j)(\lambda_j - t_i)} \left[ \sum' \frac{(t_h - t_i) \frac{\partial z_h}{\partial t_i} - z_h}{\lambda_j - t_h} \right]^2;$$

en vertu des identités qui expriment que la somme des résidus de

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)(x-t_i)(x-t_h)(x-t_g)} \quad (g \leq h, \text{ mais } g \text{ et } h \neq i)$$

est nulle, on trouve

$$L = \sum' \left[ \frac{t_i - t_h}{z_h} \left( \frac{\partial z_h}{\partial t_i} \right)^2 + \frac{z_h}{t_i - t_h} \right] - 2 \frac{\partial z_i}{\partial t_i};$$

et, grâce à (23) et (25),  $\mathfrak{A}$  prend alors la forme

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = & -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{z_k} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{1}{t_i - t_k} \right)^2 + \frac{1}{z_i} \left( \frac{1}{z_k} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{1}{t_i - t_k} \right) \left( \frac{\partial z_i}{\partial t_i} + \sum' \frac{z_h}{t_h - t_i} \right) \\ & - \frac{1}{z_i(t_i - t_k)} \frac{\partial z_i}{\partial t_i} + \frac{1}{2z_i(t_i - t_k)} \sum' \left[ \frac{t_i - t_h}{z_h} \left( \frac{\partial z_h}{\partial t_i} \right)^2 + \frac{z_h}{t_i - t_h} \right]. \end{aligned}$$

De même, d'après ce qui précède, les termes du second membre de (24) contenant les dérivées  $\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i}$  au premier degré auront pour somme

$$\mathfrak{B} = - \left[ \frac{\varphi''(t_i)}{2\varphi'(t_i)} - \frac{\psi'(t_i)}{\psi(t_i)} \right] \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j - t_k} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} = - \frac{1}{z_i} \left( \frac{1}{z_k} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{1}{t_i - t_k} \right) \sum' \frac{z_h}{t_h - t_i}.$$

Restent enfin les termes indépendants des dérivées; à l'aide de (19), (21) et des formules qui expriment que la somme des résidus de

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)(x-t_i)^2(x-t_h)(x-t_k)} \quad (k \neq i, h \text{ quelconque})$$

est nulle, on trouve aisément que leur somme est

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} = & \frac{d_i z_k^2 - d_k z_i^2}{2z_k^2(t_i - t_k)^2} + \frac{1}{2z_i(t_k - t_i)} \sum' \frac{d_i z_h^2 - d_h z_i^2}{z_h(t_h - t_i)} \\ & + \frac{1}{2(t_i - t_k)} \left[ \sum' \frac{z_h}{z_i(t_h - t_i)} + \frac{1}{t_i - t_k} \right] + \frac{D}{2} z_i \left( z_i + \frac{1}{t_k - t_i} \right). \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de former la somme  $z_k \left[ \left( \frac{1}{z_k} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} \right)^2 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \right]$  pour retrouver, après quelques réductions immédiates, le second membre de  $(G_n)$ .

Afin de retrouver les équations  $(g_n)$  j'observerai que les équations

tions  $(f_n)$  s'écrivent  $(')$ , en vertu de (27),

$$(28) \quad \frac{1}{z_i} \sum' \frac{\frac{\partial z_h}{\partial t_i} (t_h - t_i) - z_h}{\lambda_j - t_h} - \frac{1}{z_k} \sum_{h=1}^{n+2} \frac{\frac{\partial z_h}{\partial t_k} (t_h - t_k) - z_h}{\lambda_j - t_h} = \frac{t_i - t_k}{(\lambda_j - t_i)(\lambda_j - t_k)}$$

$$(j = 1, \dots, n).$$

Mais les relations (28) entraînent l'identité en  $x$

$$\frac{1}{z_i} \sum' \frac{\frac{\partial z_h}{\partial t_i} (t_h - t_i) - z_h}{x - t_h} - \frac{1}{z_k} \sum_{h=1}^{n+2} \frac{\frac{\partial z_h}{\partial t_k} (t_h - t_k) - z_h}{x - t_h} - \frac{t_i - t_k}{(x - t_i)(x - t_k)} = A \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

A étant un polynôme en  $x$ , *a priori* du premier degré; or, d'après (6), le premier membre de la relation précédente admet  $x = \infty$  comme zéro d'ordre 2; A est donc indépendant de  $x$  et les résidus du premier membre pour  $x = t_i$  et  $x = t_h$  sont respectivement  $A z_i$  et  $A z_h$ , ce qui entraîne aussitôt les équations  $(g_n)$ .

#### 14. Expression d'un coefficient de $(E_n)$ au moyen des $z_k$ et des $\frac{\partial z_k}{\partial t_i}$ .

— Pour la résolution du problème de Riemann nous aurons besoin de connaître l'expression explicite du coefficient  $\alpha_i$  de  $(E_n)$  au moyen des  $z_k$  et des  $\frac{\partial z_k}{\partial t_i}$ . On a  $\alpha_i = t_i(t_i - 1)\gamma_i$ ,  $\gamma_i$  étant le résidu en  $t_i$  du second membre de  $(E_n)$ ; or en vertu de (18') on peut écrire

$$\gamma_i = -A'_{11} \left[ \frac{\psi'(t_i)}{\psi(t_i)} - \sum' \frac{1}{t_i - t_h} \right]$$

$$+ b_{11}(t_i) + A_{21}^t b_{12}(t_i) + A_{12}^i b_{21}(t_i) - A_{22}^i b_{11}(t_i) - A_{11}^i b_{22}(t_i),$$

en posant d'une façon générale

$$b_{\mu\nu} \equiv \alpha_{\mu\nu} - \frac{A_{\mu\nu}^i}{x - t_i}.$$

(1) Considérées comme linéaires en  $\frac{\partial z_h}{\partial t_k} (t_h - t_k)$  les équations (28) ont un déterminant non nul [cf. note (2) p. 198]; donc, comme plus haut, la vérification entraînera l'équivalence de  $(f_n)$  et  $(g_n)$ .

Mais, en vertu d'une remarque utilisée pour la formation de (25) le crochet est égal à

$$\frac{1}{z_i} \sum' \frac{z_h}{t_i - t_h};$$

dès lors, en s'appuyant (B)<sub>2</sub> et (B)<sub>3</sub> (n° 9) on trouve aisément

$$\begin{aligned} \gamma_i = & \frac{1}{4} \sum' \frac{(H_k z_i - H_l z_k)^2}{z_i z_k (t_k - t_l)} + \frac{1}{2} \sum' \frac{H_k z_i - H_l z_k}{z_i (t_i - t_k)} \\ & + \frac{1}{2 z_i} \sum' \frac{z_k}{t_k - t_l} + \frac{1}{4} \sum' \frac{d_i z_k^2 + d_k z_l^2}{z_i z_k (t_i - t_k)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en vertu de (B)<sub>3</sub> et (6),

$$(29) \quad \gamma_i = \sum' \frac{t_k - t_l}{4 z_i z_k} \left( \frac{\partial z_k}{\partial t_l} \right)^2 + \frac{1}{2 z_i} \frac{\partial z_i}{\partial t_i} + \frac{1}{2 z_i} \sum' \frac{z_k}{t_k - t_l} + \sum' \frac{d_i z_k^2 + d_k z_l^2}{4 z_i z_k (t_i - t_k)} + \frac{D z_i}{4}.$$

On peut retrouver cette formule en partant de l'expression donnée dans ma Thèse pour  $\gamma_i$  ('). Les transformations se dérouleront comme plus haut; le seul point qui puisse offrir quelque difficulté nouvelle consiste à établir que  $\gamma_i$  reste holomorphe sur les multiplicités  $\lambda_j = \lambda_i$ ; et pour cela, on appliquera à la fonction

$$f(x) = \frac{\varphi(x)(x - \lambda_j)(x - \lambda_l)}{\psi(x)(x - t_i)}$$

la remarque suivante : l'expression  $F(\lambda_j, \lambda_l) + F(\lambda_l, \lambda_j)$ , où l'on a

$$F(u, v) = \frac{f(u)}{u - v} \left\{ \frac{3}{(u - v)^2} + \left[ \frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u - v} \right]^2 \right\},$$

considérée comme fonction de  $\lambda_j$  reste holomorphe pour  $\lambda_j = \lambda_l$ .

(<sup>1</sup>) *Loc. cit.*, p. 82. — Il faudra toutefois rectifier cette dernière formule et y remplacer  $q_j$  par  $q_j - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_j - 1} \right)^2$ . L'omission de ce dernier terme dans la formule n'entraînait d'ailleurs aucune conséquence dans la suite du raisonnement.

## DEUXIÈME PARTIE.

## THÉORIE DES CARACTÉRISTIQUES.

## I. — Caractéristiques de première espèce. Type général.

15. *Transformation de  $(G_n)$ .* — Afin d'appliquer la méthode des approximations successives à l'intégration de  $(G_n)$  dans le voisinage de  $t_i = 0$ , nous commencerons par substituer à  $(G_n)$  un système équivalent formé de  $2n$  équations du premier ordre. Posons

$$2g_k(z_k, z_i, t_i) \equiv -\frac{d_i z_k}{z_i^2} + \frac{d_k}{z_k} + D(t_k - t_i)^2 z_k;$$

nous allons voir que toute intégrale de  $(G_n)$  satisfait au système (1)

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{(t_k - t_i)^2}{2z_i^2 z_k} \left( \frac{\partial z_k}{\partial t_i} \right)^2 = g_k + R_k & (k \neq i, \quad n+1), \\ \frac{\partial R_k}{\partial t_i} = \left[ \frac{t_k - t_i}{z_i} \sum' \frac{R_h}{t_h - t_i} + \frac{d_i}{z_i^2} + \frac{D}{z_i} (t_k - t_i) \right] \frac{\partial z_k}{\partial t_i} - \frac{\partial g_k}{\partial t_i} - \frac{\partial g_k}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial t_i} \end{cases}$$

( $t_i, z_k$  et  $z_i$  étant regardés comme des variables indépendantes dans la dérivation de  $g_k$ ).

En effet, l'élimination de  $(R_k)$  entre les équations (30) donne

$$\begin{aligned} \frac{(t_k - t_i)^2}{z_i^2 z_k} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} \left[ \frac{\partial^2 z_k}{\partial t_i^2} - \frac{1}{2z_k} \left( \frac{\partial z_k}{\partial t_i} \right)^2 - \frac{1}{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial t_i} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{1}{t_i - t_k} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} \right. \\ \left. - \frac{z_i^2 z_k}{(t_k - t_i)^2} \frac{\partial g_k}{\partial z_k} - \frac{z_i z_k}{t_k - t_i} \sum' \frac{R_h}{t_h - t_i} - \frac{d_i z_k}{(t_k - t_i)^2} - \frac{D z_i z_k}{t_k - t_i} \right] = 0. \end{aligned}$$

Ainsi donc, ou bien (2) les solutions de (30) satisfont à  $\frac{\partial z_k}{\partial t_i} = 0$ , ou

(1) Dans (30)<sub>1</sub> on peut prendre  $k = n+1$ ; nous utiliserons cette équation au début de la théorie des caractéristiques de deuxième espèce; mais, actuellement, en vertu de (5), cette équation est inutile.

(2) Une circonstance analogue se présentait pour VI ([VI], p. 251). Il est toujours facile d'exclure les intégrales parasites.



bien elles annulent le crochet; mais alors, si l'on remplace  $R_k$  par sa valeur tirée de (30)<sub>1</sub>, on voit aussitôt que  $(G_n)$  est vérifié.

Cela étant, soit  $z_k^0, R_k^0 (k \neq i, n+1)$  un système de constantes finies <sup>(1)</sup> et arbitrairement choisies, mais telles que

$$(31) \quad \sum'' t_k z_k^0 = 1.$$

Au moyen de la méthode des approximations successives, nous allons montrer que, pour  $|t_i|$  suffisamment petit, on peut construire un système d'intégrales de (30) satisfaisant aux conditions suivantes : pour  $t_i = t_i^0$ ,  $z_i$  se réduira à  $z_i^0$ ;  $t_i$  tendant vers zéro le long d'un chemin  $\odot$  qui sera défini ultérieurement, les  $z_k$  et les  $R_k$  tendront respectivement vers les  $z_k^0$  et les  $R_k^0$ ; enfin, il existera un nombre réel  $\omega$ , tel que  $0 \leq \omega < 1$  et que  $|t_i|^{1-\omega} |z_i|$  reste borné inférieurement quand  $t_i$  tendra vers zéro sur  $\odot$ .

#### 16. La première approximation. — Posons

$$(32) \quad z_i dt_i = d\tau;$$

$\tau$  sera une variable auxiliaire <sup>(2)</sup>, qui s'annulera, par exemple, en  $t_i = 0$  sur  $\odot$ , et à l'aide de laquelle nous exprimerons les  $z_k, z_i$  et  $t_i$  avec une approximation croissante. Cela étant, la première équation (30) pourra s'écrire

$$(33) \quad \left(\frac{\partial z_k}{\partial \tau}\right)^2 = D z_k^2 + \frac{2R_k^0}{t_k^2} z_k + \frac{d_k}{t_k^2} \\ + \frac{2(R_k - R_k^0)z_k}{(t_k - t_i)^2} + \frac{2t_k - t_i}{t_k^2(t_k - t_i)^2} (2R_k^0 z_k + d_k) t_i - \frac{d_i}{(t_k - t_i)^2} \left(\frac{z_k}{z_i}\right)^2;$$

or, si,  $t_i$  tendant vers zéro,  $z_k, R_k$  et  $z_i$  possèdent les propriétés énoncées à la fin du n° 15, les termes écrits en seconde ligne dans (33)

(1) La restriction est indispensable pour  $R_k^0$  (cf. troisième Partie). Elle sera levée plus loin pour  $z_k^0$  (n° 26).

(2)  $\tau$  coïncide avec la fonction  $\frac{1}{\sqrt{D}} \text{Log } \lambda$  (n° 9) où l'on aurait donné aux  $t_k (k \neq i)$  des valeurs constantes.

tendront vers zéro, et, pour  $t_i$  très petit, (33) sera assimilable à

$$(34) \quad \left( \frac{\partial z_k}{\partial \tau} \right)^2 = P_k(z_k),$$

avec

$$(35) \quad P_k(z) \equiv Dz^2 + \frac{2R_k^0}{t_k^2} z + \frac{d_k}{t_k^2}.$$

Ces polynômes posséderont, au moins en partie, des propriétés analogues à celles du polynôme  $P(\lambda)$  de [VI] <sup>(1)</sup>;  $P_k$  ne pourrait être identiquement nul que si l'on avait  $D = 0 = d_k$ , et  $R_k^0 = 0$ , cas exceptionnel qui sera envisagé plus loin (n° 27).

Supposons d'abord  $D \neq 0$ , et admettons que si l'une des équations  $P_k = 0$  possède une racine double  $h_k$ , on ait  $z_k^0 \neq h_k$  <sup>(2)</sup>. Nous poserons

$$(36) \quad z_k = \Phi_k(\zeta_k) \equiv \frac{h'_k + h''_k}{2} + \left( z_k^0 - \frac{h'_k + h''_k}{2} \right) \operatorname{ch} \sqrt{D} \zeta_k \\ + \sqrt{(z_k^0 - h'_k)(z_k^0 - h''_k)} \operatorname{sh} \sqrt{D} \zeta_k,$$

$h'_k$  et  $h''_k$  étant les zéros de  $P_k$ ; d'après notre hypothèse sur  $z_k^0$ ,  $z_k$  dépendra effectivement de  $\zeta_k$ . Nous prendrons alors en première approximation

$$(37) \quad R_{k0} = R_k^0, \quad \zeta_{k0} = \tau,$$

ainsi, les fonctions  $z_{k0}(\tau)$  correspondant à  $\zeta_{k0}$  satisferont à (34), et, pour  $\tau = 0$ , elles se réduiront aux constantes  $z_k^0$ . Nous écrirons ensuite

$$(38) \quad t_{i,0} z_{i,0} = 1 - \sum'' t_k z_{k,0} = A \operatorname{ch}(\sqrt{D} \tau - 1) + B \operatorname{sh} \sqrt{D} \tau \equiv \tau \varphi_0(\tau),$$

le second membre s'annulant en effet pour  $\tau = 0$  en vertu de (31); nous ferons enfin

$$(39) \quad \operatorname{Log} \frac{t_{i0}}{t_i^0} = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{A (\operatorname{ch} \sqrt{D} \tau - 1) + B \operatorname{sh} \sqrt{D} \tau},$$

la constante  $\tau_0$  étant déterminée par l'égalité

$$(40) \quad 1 - \sum'' t_k \Phi_k(\tau_0) = t_i^0 z_i^0,$$

<sup>(1)</sup> Cf. [VI], p. 252.

<sup>(2)</sup> Ces restrictions seront levées plus loin.

de telle sorte que pour  $t_{i0} = t_i^0$ ,  $z_{i0}$  prenne la valeur  $z^0$ . Posons encore

$$(41) \quad s \equiv B\sqrt{D},$$

en raison du double signe de chacun des radicaux figurant dans B, on pourra prendre <sup>(1)</sup>

$$(42) \quad \Re\left(\frac{s}{i}\right) > 0, \quad \text{ou si } s \text{ est réel, } s > 0.$$

Nous obtiendrons ainsi

$$(43) \quad e^{\sqrt{D}\tau} = \frac{1 - (A - B)z \left(\frac{t_{i0}}{t_i^0}\right)^s}{1 - (A + B)z \left(\frac{t_{i0}}{t_i^0}\right)^s},$$

$$(44) \quad t_{i,0} z_{i,0} = \frac{2B^2 z \left(\frac{t_{i0}}{t_i^0}\right)^s}{\left[1 - (A - B)z \left(\frac{t_{i0}}{t_i^0}\right)^s\right] \left[1 - (A + B)z \left(\frac{t_{i0}}{t_i^0}\right)^s\right]},$$

$$e^{\sqrt{D}\tau_0} = \frac{1 - (A - B)z}{1 - (A + B)z},$$

avec

$$t_i^0 z_i^0 = \frac{2B^2 z}{[1 - (A - B)z][1 - (A + B)z]},$$

ce qui donne deux valeurs pour  $e^{\sqrt{D}\tau_0}$ , et l'on voit immédiatement que, pour l'une au moins de ces valeurs, la dérivée  $-\Sigma'' t_k \Phi'(\tau_0)$  ne peut être nulle. D'ailleurs, les seuls cas où ces formules soient en défaut sont les suivants : 1°  $A = 0 = B$  (d'où  $s = 0$ , cas déjà réservé); 2°  $z = 0$  ou  $\infty$ , d'où  $z_i^0 = 0$ ; pour VI le cas correspondant serait  $\lambda_0 = t_0$  <sup>(2)</sup>. On aura donc  $\tau_0 \neq 0$ . Le cas où l'on aurait  $z_i^0 = \infty$ , (d'où  $\tau_0 = \infty$ ) ne réclamerait d'ailleurs que des modifications sans importance.

**17. Les approximations de rang quelconque. Le secteur de convergence.** — Soit alors  $\eta$  un nombre positif arbitrairement petit, choisi

<sup>(1)</sup> Nous examinerons plus loin le cas où  $s$  serait nul (n° 21).

<sup>(2)</sup> Ce cas (qui n'a pas été signalé pour VI) se traite comme le cas  $\lambda_0 = 0$  de VI par l'emploi des caractéristiques de deuxième espèce. Il en serait de même actuellement pour  $n$  quelconque.

une fois pour toutes; astreignons  $z_k$  à vérifier la condition

$$(45) \quad |P_k(z_k)| > \eta;$$

si, de plus,  $R_k$ ,  $z_i$  et  $t_i$  satisfont aux conditions

$$(46) \quad |R_k - R_k^0| < \eta,$$

$$(47) \quad |z_i^{-1}| < \eta,$$

$$(48) \quad |t_i| < \eta,$$

on pourra diviser les deux membres de (33) par  $P_k(z_k)$  et extraire les racines carrées, ce qui donnera en vertu de (36)

$$\frac{\partial \zeta_k}{\partial \tau} = 1 + F_k(\zeta_k, z_i, R_k - R_k^0, t_i),$$

$F_k$  désignant une fonction qui reste de module très petit, pourvu que ses quatre arguments vérifient (46), (47), (48) et la transformée de (45) par (33); d'une manière plus précise, on aura

$$(49) \quad |F_k| < A_k |R_k - R_k^0| + B_k |z_i|^{-2} + C_k |t_i|,$$

les nombres positifs  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  étant bornés, sous les conditions précédentes. Enfin, le second membre de (30)<sub>2</sub> pourra s'écrire

$$(50) \quad \frac{\partial R_k}{\partial \tau} = \Psi_k(R_k, z_i, t_i) \frac{\partial \zeta_k}{\partial \tau} + \Omega_k\left(\frac{\partial z_i}{\partial t_i}, z_i, \zeta_k, t_i\right).$$

Cela étant, supposons qu'on ait déjà calculé  $R_{k,v}(\tau)$ ,  $\zeta_{k,v}(\tau)$ ,  $z_{i,v}(\tau)$ ,  $t_{i,v}(\tau)$  et  $\tau_v$ ; on posera (1)

$$(51) \quad R_{k,v+1} = R_k^0 + \int_0^\tau \left( \Psi_{k,v} \frac{\partial \zeta_{k,v}}{\partial \tau} + \Omega_{k,v} \right) d\tau,$$

$$(52) \quad \zeta_{k,v+1} = \int_0^\tau [1 + F_k(\zeta_{k,v}, z_{i,v}, R_{k,v+1} - R_k^0, t_{i,v})] d\tau,$$

$$(53) \quad \text{Log} \frac{t_{i,v+1}}{t_i^0} = \int_{\tau_{v+1}}^\tau \frac{d\tau}{1 - \sum'' t_k \Phi_k(\zeta_{k,v+1})},$$

$\tau_{v+1}$  étant déterminé par l'égalité

$$(54) \quad 1 - \sum'' t_k (\Phi_{k,v+1})_{\tau=\tau_{v+1}} = t_i^0 z_i^0,$$

(1)  $\mathcal{F}_{k,v}$  désigne ce que devient une fonction  $\mathcal{F}_k$  quand on y remplace chaque argument  $u$  par  $u_v$ .

et

$$t_{i,\nu+1} z_{i,\nu+1} + \sum'' t_k z_{k,\nu+1} = 1.$$

Il nous faut établir qu'il existe dans le plan  $\tau$  des chemins  $\Gamma_\nu$  reliant les points  $\tau_\nu$  et  $o$ , le long desquels les approximations précédentes convergent régulièrement. Or,  $\omega$  étant défini comme à la fin du n° 15, nous allons montrer tout d'abord qu'on peut construire dans le plan  $t_{i,0}$  un chemin  $\mathcal{C}_0$ , convergeant vers l'origine et le long duquel l'expression

$$\left| \frac{t_{i,0}}{t_i^0} \right|^\omega : |t_{i,0} z_{i,0}|$$

reste bornée. Posons

$$(55) \quad \text{Log} \frac{t_{i,0}}{t_i^0} \equiv T_0 \equiv u e^{i\gamma}, \quad s \equiv \nu e^{i\delta} \quad (u, \nu > 0),$$

$$(56) \quad |t_{i,0}| \equiv r, \quad |t_i^0| \equiv r_0,$$

et choisissons  $\gamma$  de manière à vérifier les conditions

$$(57) \quad -\cos \gamma > \eta,$$

$$(58) \quad \frac{\nu \cos(\gamma + \delta)}{\cos \gamma} = f\omega \quad (f = \pm 1).$$

D'après (57),  $T_0$  devra appartenir à une région ( $\mathbf{R}_0$ ) analogue à la région ( $\mathbf{R}$ ) définie à l'Introduction (n° 3), et, en vertu de (58), nous aurons

$$\left| \left( \frac{t_{i,0}}{t_i^0} \right)^{fs} \right| = \left( \frac{r}{r_0} \right)^\omega;$$

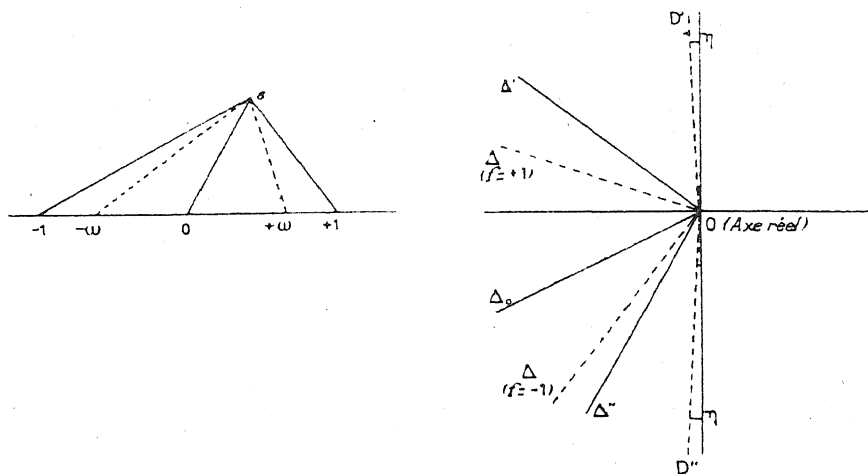
quelle que soit la détermination de  $f$ , il viendra donc, d'après (44),

$$(59) \quad |t_{i,0} z_{i,0}|^{-1} < a \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\omega},$$

$a$  étant un nombre positif (indépendant de  $r_0$ ); la condition énoncée plus haut pour  $|t_{i,0} z_{i,0}|$  sera donc sûrement vérifiée et la condition (47) sera vérifiée aussi en première approximation. Cherchons donc les chemins  $\mathcal{C}'_0$  du plan  $T_0$  qui vérifient (58); pour cela, joignons le point  $s = \nu e^{i\delta}$  (*supposé complexe*) au point  $f\omega$ ; on voit aussitôt que  $\gamma$  doit être égal à  $\frac{3\pi}{2} - \gamma_1$  ou  $\frac{3\pi}{2} - \gamma_2$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  désignant les angles que les vecteurs  $\overrightarrow{f\omega, s}$  font avec le demi-axe réel positif. Comme on peut

faire varier  $f\omega$  de  $-1$  à  $+1$  (limites exclues), on voit que  $\mathfrak{E}'_0$  sera un rayon rectiligne  $\Delta$  issu du point  $T_0 = 0$  et appartenant (au sens strict) à

Fig. 1.



un secteur <sup>(1)</sup> (S) dont les frontières  $\Delta'$ ,  $\Delta''$  font avec le demi-axe positif les angles  $\frac{3\pi}{2} - \overline{\gamma}_1$ ,  $\frac{3\pi}{2} - \overline{\gamma}_2$  ( $\overline{\gamma}_1$ ,  $\overline{\gamma}_2$  valeurs de  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  pour  $\omega = 1$ ).

A la droite  $\overrightarrow{Os}$  ( $\omega = 0$ ) correspondra la *médiane* de (S), au sens déjà utilisé pour VI <sup>(2)</sup>; la médiane, lieu des points tels que  $\gamma = \frac{3\pi}{2} - \delta$  partagera (S) en deux demi-secteurs : pour le demi-secteur *supérieur* (*inférieur*) on aura  $f = +1$  ( $-1$ ). Soit (S') un secteur fermé quelconque intérieur au sens strict au demi-secteur supérieur; à l'intérieur de (S')  $t_{i0}$  tend vers zéro; dès lors, d'après (43) à (S') correspond dans le plan  $\tau$  un domaine ( $\sigma$ ) limité par deux courbes  $\Gamma$  s'enroulant autour du point  $\tau = 0$ . Quitte à supprimer de (S'), s'il y a lieu, la région intérieure à un ou deux cercles de rayon très petit  $\eta$ , décrits autour des points  $T_0$  tels que  $e^{-\tau T_0} = (A \pm B)z$ , on pourra toujours supposer que ( $\sigma$ ) est entièrement à distance finie, ce qui donnera

$$(59)' \quad |t_{i0} z_{i0}|^{-1} > a' \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\omega} \quad (0 < a' < a).$$

<sup>(1)</sup> Bien entendu, on exclurait de (S) les régions qui n'appartiendraient pas à ( $\mathbf{R}$ ) (de frontières  $OD'$ ,  $OD''$  sur la figure 1).

<sup>(2)</sup> [VI], p. 315.

Dans la discussion qui va suivre nous supposerons essentiellement que le rayon  $\Delta$  appartient à  $(S')$ ; d'ailleurs rien ne serait changé aux démonstrations si  $\Delta$  appartenait au demi-secteur inférieur à la médiane, où  $t_{i_0}'$  croît infiniment;  $\tau$  tendrait vers  $\tau' = \frac{1}{\sqrt{D}} \text{Log} \frac{A-B}{A+B}$ ; et l'on substituerait  $\tau'$  à 0 comme limite inférieure des quadratures. Nous verrons enfin dans la quatrième Partie (n° 45) comment on peut calculer les caractéristiques dans la direction de la médiane.

Supposons maintenant que  $s$  soit réel, c'est-à-dire positif d'après (42); d'après (58) on aura  $\omega = s$ , il faudra donc supposer  $0 \leq s < 1$ ; la relation (58) étant d'ailleurs vérifiée quel que soit  $\gamma$ , le secteur  $(S)$  coïncide actuellement avec la région  $(R_0)$  (cf. n° 48).

18. *Les domaines d'exclusion.* — Cherchons enfin si la condition qu'on déduit de (45) par la substitution de  $2\eta$  à  $\eta$  est vérifiée en première approximation; s'il en est ainsi, il résultera aisément de la démonstration de convergence que la condition (45) — avec  $\eta$  au second membre — sera vérifiée quel que soit le rang  $\nu + 1$  de l'approximation. Or on a, pour  $h_k'' \neq h_k'$ ,

$$P_k(z_{k0}) = D \left( \frac{h_k'' - h_k'}{2} \right)^2 \text{sh}^2(\sqrt{D}\tau - \mu_k),$$

avec

$$\text{ch } \mu_k = \frac{z_k^0 - \frac{h_k' + h_k''}{2}}{\frac{h_k'' - h_k'}{2}}, \quad \text{sh } \mu_k = - \frac{\sqrt{(z_k^0 - h_k')(z_k^0 - h_k'')}}{\frac{h_k'' - h_k'}{2}}.$$

Supposons d'abord

$$(60) \quad (e^{\mu_k} \pm 1) \left( e^{\mu_k} \pm \frac{A+B}{A-B} \right) \neq 0;$$

la relation (43) montre alors que les points  $T_0$  qui annulent  $P_k$  se répartissent en deux séries

$$(61) \quad \overline{h_k} - \frac{3N\pi i}{s}, \quad \overline{h_k''} - \frac{2N\pi i}{s} \quad (N, \text{ entier positif}),$$

alignées parallèlement à la médiane. D'ailleurs, si l'on pose  $P_k(z_{k0}) \equiv u$ ,

on trouve aisément

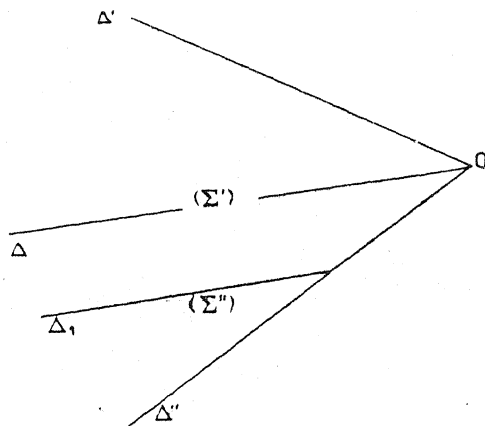
$$\frac{dT_0}{du} = \frac{1}{2t_{i0}z_{i0}} \frac{1}{\sqrt{Du \left[ D \left( \frac{h'_k - h''_k}{2} \right)^2 + u \right]}},$$

en vertu de (60) les points (61) ne peuvent annuler  $t_{i0}z_{i0}$ ; pour  $h''_k \neq h'_k$  le chemin  $\mathcal{C}'_0$  sera donc assujéti simplement à ne pas pénétrer dans des cercles  $(\gamma_{k,N})$  dont les centres sont aux points (61) et dont les rayons sont de l'ordre de  $\sqrt{\eta}$  <sup>(1)</sup>.

Soit alors  $h''_k = h'_k$ ; écartons d'abord l'hypothèse  $z_k^0 = h'_k$ : on serait dans le cas exceptionnel ou dans un cas semi-exceptionnel, éventualité que nous avons déjà exclue et que nous examinerons plus loin (n° 22).

Dans le cas actuel la condition (45) s'écrit  $D(z_k^0 - h'_k)^2 e^{2\sqrt{b}\tau} > \frac{\eta}{2}$ ; les cercles  $(\gamma_{k,N})$  existeront toujours, sauf si l'on avait  $A = B$ ; mais on retomberait alors sur l'hypothèse qu'il nous reste à examiner: (60) n'est plus vérifiée.

Fig. 2.



Dans ce cas on reconnaît aisément que la condition (45) peut être remplacée par l'une des suivantes  $|e^{\pm\sqrt{b}T_0}| > \varepsilon$ . Pour que (45) soit satisfaite en première approximation, il faudra donc que le point  $T_0$  soit dans l'une des régions, soit  $(\Sigma')$  limitées à l'intérieur de  $(S)$  par une

<sup>(1)</sup> Voir [VI], p. 261.



certaine parallèle<sup>(1)</sup>  $\Delta_1$  à la médiane  $\Delta$  de (S) (à l'exclusion de l'autre région  $\Sigma''$ ). Or, au point de vue du prolongement analytique de l'intégrale dans la région (R) (n° 3), il y aurait un inconvénient évident à laisser subsister la restriction précédente. Pour la faire disparaître, on procédera comme pour VI<sup>(2)</sup> : on cherchera à définir les caractéristiques dans un secteur  $\bar{\Sigma}$  contenu dans  $\Sigma''$ , de frontière  $\Delta_1$  et d'ouverture non nulle; cela suffira pour qu'on puisse prolonger l'intégrale dans  $\Sigma''$  par des caractéristiques de deuxième espèce. Pour former  $\Sigma$  remarquons que dans  $\Sigma''$   $[P_k(z_{k_0})]^{-\frac{1}{2}}$  est de l'ordre de  $\left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega$ ; dans cette région on pourra donc conserver (49) et ses conséquences, quitte à multiplier  $A_k, B_k, C_k$  par  $\left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega$ ; cela reviendra à multiplier les coefficients  $\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_s$ , de (76) par  $\left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega$ ; si donc on assujettit  $\bar{\Sigma}$  à vérifier une condition de la forme  $m\omega < 1$  ( $m > 0$ ), on trouvera que les approximations sont toujours convergentes dans  $\bar{\Sigma}$ ,  $r_0$  ayant été remplacé au besoin par un nombre plus petit.

19. *La seconde approximation.* — Ces préliminaires établis, nous étudierons d'abord la seconde approximation. D'après (37) et (51) on a

$$R_{k1} - R_{k0} = \int_0^\tau (\Psi_{k0} + \Omega_{k0}) d\tau.$$

Or on a

$$\sum' \frac{R_h}{t_h - t_i} = \sum'' \frac{R_h}{t_h - t_i} - \frac{R_{n+1}}{t_i};$$

pour  $R_h = R_{h0}$  et  $t_i = t_{i0}$ ,  $\Sigma''$  est bornée en module; quant au second terme, il peut s'écrire d'après (30),

$$\frac{R_{n+1}}{t_i} = \frac{\left(t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial \tau}\right)^2}{2 t_i z_i} \frac{z_i}{z_{n+1}} + \frac{d_i}{2 t_i z_i} \frac{z_{n+1}}{z_i} - \frac{d_{n+1}}{2 t_i z_i} \frac{z_i}{z_{n+1}} - \frac{D t_i z_i z_{n+1}}{2 z_i},$$

(1) Pour le passage par continuité de l'un à l'autre type des domaines d'exclusion (cercles ou secteurs), voir [VI], n° 13, p. 261.

(2) [VI] n°s 14, 15, 20, p. 263, 264, 272.

mais de (6) on tire

$$t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial \tau} = 1 + \Sigma'' (t_h - t_i) \frac{\partial z_h}{\partial \tau},$$

expression bornée en première approximation; de même, (47) étant vérifiée par  $z_{i0}$ ,  $\left| \frac{z_{n+1,0}}{z_{i0}} + 1 \right|$  est très petit avec  $\eta$ . On déduit de là que  $|\Psi_{k0}|$  est de l'ordre de  $r_0^{2\omega} r^{1-2\omega}$  et l'on trouvera de même que  $|\Omega_{k0}|$  est de l'ordre de  $r_0^{3\omega} r^{2-3\omega}$ .

Enfin, on peut écrire d'après (43)

$$\tau \left( \frac{t_{i0}}{t_i^0} \right)^{-s} = \frac{\tau}{e^{\sqrt{B}\tau} - 1} \frac{2Bz}{1 - (A+B)x \left( \frac{t_{i0}}{t_i^0} \right)^s},$$

d'où dans le domaine  $(\sigma)$  défini au n° 17

$$(62) \quad \overline{l} \left( \frac{r}{r_0} \right)^\omega < |\tau| < \overline{l} \left( \frac{r}{r_0} \right)^\omega,$$

et, par suite, d'après (32),

$$(63) \quad l_1 \frac{dr}{r} < \left| \frac{d\tau}{\tau} \right| < l_1 \frac{dr}{r},$$

les nouveaux coefficients ne dépendant que de  $\eta$ . On trouvera ainsi (1)

$$(64) \quad |R_{k1} - R_{k0}| < H_1 \varepsilon,$$

avec

$$(65) \quad \varepsilon = (1 - \omega) \int_0^r \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\omega} dr = r_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{1-\omega} \leq r_0,$$

et  $H_1$  étant un nombre positif fini, indépendant de  $r_0$ ; ainsi pour  $r_0$  assez petit,  $R_{k1}$  satisfait à (46).

Passons à  $\zeta_{k1}$ ; on peut écrire  $\zeta_{k1} = \tau + \gamma_{k1}(\tau) - \gamma_{k1}(0)$ , avec

$$\frac{\partial \gamma_{k1}}{\partial \tau} = F_k(\zeta_{k0}, z_{i0}, R_{k1} - R_{k0}, t_{i0}),$$

mais d'après (64), (49), (59), il viendra

$$\left| \frac{\partial \gamma_{k1}}{\partial \tau} \right| < A_k H_1 r_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{1-\omega} + \frac{B_k}{a_1^2} r_0^2 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2-2\omega} + C_k r,$$

---

(1) C'est précisément cette limitation de  $R_{k1}$  qui introduit la condition  $\omega < 1$ .

et, par suite,

$$(66) \quad |\zeta_{k1} - \zeta_{k0}| < H_2 r,$$

$H_2$  (comme plus loin  $H_3, H_4, H_5$ ) étant un nombre positif indépendant de  $r_0$ .

Étudions maintenant  $\tau$  et  $t_{i1}$ . Posons d'une manière générale

$$(67) \quad t_{i\nu} z_{i\nu} = 1 - \sum'' t_k z_{k\nu}(\tau) \equiv \tau \varphi_\nu(\tau);$$

d'après (54) on peut écrire

$$\tau_1 \varphi_0(\tau_1) - \tau_0 \varphi_0(\tau_0) + \tau_1 [\varphi_1(\tau_1) - \varphi_0(\tau_1)] = 0.$$

Or, d'après (36) et (66) l'expression  $\tau[\varphi_1(\tau) - \varphi_0(\tau)]$  est au plus de l'ordre de  $r_0$  dans la région  $(\sigma)$ ; il viendra donc (1)

$$(68) \quad |\tau_1 - \tau_0| < H_3 r_0.$$

Mais on peut considérer les fonctions de la première approximation, ainsi que  $R_{k1}$  et  $\zeta_{k1}$  (par le prolongement des quadratures qui les fournissent) comme parfaitement déterminées en tout point d'un cercle de centre  $\tau_0$  et de rayon  $H_3 r_0$ ; la formule

$$\text{Log} \frac{t_{i1}}{t_{i0}} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\varphi_0(\tau) - \varphi_1(\tau)}{\tau \varphi_0(\tau) \varphi_1(\tau)} d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_0} \frac{d\tau}{\tau \varphi_1(\tau)}$$

a donc aussi un sens bien déterminé. Or, comme  $\tau_0$  n'est pas nul (n° 16, *ad fin.*), la seconde intégrale est de l'ordre de  $r_0$ ; de plus, d'après (66),  $|\tau(\varphi_0 - \varphi_1)|$  est de l'ordre de  $r$ ; en vertu de (62) et (63) la première intégrale est donc aussi de l'ordre de  $r_0$ , et, en définitive, on peut écrire

$$(69) \quad \left| \frac{t_{i1}}{t_{i0}} - 1 \right| < H_4 r_0.$$

Puisque  $|\tau(\varphi_0 - \varphi_1)|$  est de l'ordre de  $r$ ,  $\left| \frac{t_{i1}}{t_{i0}} z_{i1} - z_{i0} \right|$  sera borné sur le chemin d'intégration; dès lors, d'après (59)' et (69) on pourra

(1) Toutefois, pour  $t_i^0 z_i^0 = \sqrt{A^2 - B^2} - A$ ,  $\tau_0$  annulerait la dérivée de  $\tau \varphi_0$ ; il faudrait remplacer dans (68)  $r_0$  par  $\sqrt{r_0}$ ; mais ceci n'entraînerait aucune modification essentielle dans la discussion.

écrire

$$(70) \quad |z_{i1} - z_{i0}| < H_5 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\omega-1}.$$

20. *Convergence des approximations.* — Pour pouvoir traiter plus facilement le cas de l'approximation de rang  $\nu$ , nous poserons

$$(71) \quad \Delta_\nu f \equiv |f_{\nu+1} - f_\nu|,$$

et nous admettrons, qu'on ait obtenu pour  $j = 0, 1, \dots, \nu$  les inégalités

$$(72) \quad \Delta_j R_k < \sigma_{1j}, \quad \Delta_j \zeta_k < \sigma_{2j}, \quad \Delta_j \tau < \sigma_{3j}, \quad \Delta_j t_i < \sigma_{4j} |t_{ij}|, \quad \Delta_j z_i < \sigma_{5j},$$

avec

$$(73) \quad \Delta_j z_k < k' \sigma_{2j}, \quad \sigma_{5j} > n \sigma_{2j},$$

et

$$(74) \quad \begin{cases} |R_{kj}| < M_1, & |z_{kj}| < M_2, & |\tau_j| < M_3, & \left| \frac{t_{ij}}{t_{i0}} \right| < M_4, \\ M_5 \left( \frac{r}{r_0} \right)^\omega < |t_{ij} z_{ji}| < M_6 \left( \frac{r}{r_0} \right)^\omega, \end{cases}$$

les inégalités (74) étant supposées vérifiées pour  $j = 0$  quand on y remplace les  $M_k$  par  $M_k : 2$ . Cela étant, on trouve d'abord, d'après (5) et (73),  $\Delta_j z_{n+1} < 2 \sigma_{5j}$ , puis à l'aide de (33)

$$\Delta_j \left( \frac{\partial z_k}{\partial \tau} \right) < k'_1 \sigma_{1j} + k'_2 \sigma_{2j} + k'_4 r \sigma_{4j} + k'_5 r^3 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{3\omega} \sigma_{5j},$$

les  $k'_\alpha$ , comme plus loin les  $k''_\alpha$ ,  $k_\alpha$ ,  $\overline{k}_\alpha$ ,  $\overline{k}''_\alpha$ , ..., désignant des polynômes par rapport aux  $M_k$  (et aux  $d_k$ ) à coefficients numériques. On en déduit

$$\Delta_j \left[ \frac{\left( t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial \tau} \right)^2}{t_i z_i z_{n+1}} \right] = \Delta_j \left\{ \frac{\left[ 1 + \sum'' (t_h - t_i) \frac{\partial z_h}{\partial \tau} \right]^2}{t_i z_i z_{n+1}} \right\} < r \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2\omega} (\overline{k}'_1 \sigma_{1j} + \overline{k}'_2 \sigma_{2j} + \overline{k}'_4 \sigma_{4j}) + r^2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{3\omega} \overline{k}'_5 \sigma_{5j},$$

et, par suite, d'après l'expression de  $\frac{R_{n+1}}{t_i}$  donnée au n° 19,

$$\Delta_j \left( \frac{R_{n+1}}{t_i z_i} \right) < r \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2\omega} \left[ k''_1 \sigma_{1j} + k''_2 \sigma_{2j} + k''_4 \sigma_{4j} + k''_5 r \left( \frac{r_0}{r} \right)^\omega \sigma_{5j} \right].$$

On trouve ensuite que  $\frac{R_h}{z_i(t_h - t_i)}$  vérifie une inégalité analogue et finalement, on obtient

$$(75) \quad \Delta_j \left( \Psi_k \frac{\partial \zeta_k}{\partial \tau} + \Omega_k \right) < r \left[ k_1 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2\omega} \sigma_{1j} + k_2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2\omega} \sigma_{2j} + k_4 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2\omega} \sigma_{4j} + k_5 r \left( \frac{r_0}{r} \right)^{3\omega} \sigma_{5j} \right].$$

On obtiendrait de même

$$\begin{aligned} \Delta_j F_k \equiv & |F_k(\zeta_{kj}, z_{ij}, R_{k,j+1} - R_k^0, t_{ij}) - F_k(\zeta_{k,j-1}, z_{i,j-1}, R_{k,j} - R_k^0, t_{i,j-1})| \\ & < |A'_k| R_{k,j+1} - R_k^0| + B'_k |z_{ij}|^{-2} + C'_k |t_{ij}| |\Delta_{j-1} \zeta_k + D'_k \Delta_j R_k \\ & + E'_k \Delta_{j-1}(z_i^{-2}) + F'_k \Delta_{j-1}(t_i), \end{aligned}$$

soit

$$(76) \quad \Delta_j F_k < \bar{k}_1 \sigma_{1j} + \bar{k}_2 r \sigma_{2,j-1} + \bar{k}_4 r \sigma_{4,j-1} + \bar{k}_5 r^3 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{3\omega} \sigma_{5,j-1},$$

en supposant

$$(77) \quad |R_{k,j+1} - R_k^0| < k'' \varepsilon,$$

ce qui est certainement vérifié pour  $j = 0$  d'après (64).

Ceci posé, admettons qu'on ait trouvé pour  $0 \leq j < \nu$

$$(78) \quad \begin{cases} \sigma_{1j} < H_1 (lqr_0)^j \varepsilon, \\ \sigma_{2j} < H_2 (lqr_0)^j r, \\ \sigma_{3j} < H_3 (lqr_0)^j r_0, \\ \sigma_{4j} < H_4 (lqr_0)^j r_0, \\ \sigma_{5j} < H_5 (lqr_0)^j \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\omega-1}, \end{cases}$$

$l$  désignant le produit  $\bar{l}l$ , des coefficients qui entrent dans (62) et (63). Les conditions (78), qui sont satisfaites pour  $j = 0$  d'après (64), (66), (68), (69), (70), entraînent pour  $r_0$  assez petit les inégalités (73) et (74); si donc nous établissons que pour un choix convenable de  $q$  elles sont encore vérifiées pour  $j = \nu$ , il en résultera qu'elles sont générales. Or on tire de (51), (75), (62), (63) et (65)

$$\Delta_\nu R_k < (lqr_0)^{\nu-1} l \int_0^r \mathfrak{M} \left( \frac{r}{r_0} \right)^\omega \frac{dr}{r},$$

avec

$$\mathfrak{N} \equiv k_1 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2\omega} H_1 r_0 r \left( \frac{r}{r_0} \right)^{1-\omega} + k_2 r^2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2\omega} H_2 + k_4 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2\omega} H_4 r r_0 \\ + k_5 H_5 r^2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2\omega+1},$$

soit

$$(79) \quad \Delta_\nu R_k < (lqr_0)^\nu \left[ \frac{k_1 H_1}{2(1-\omega)} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{1-\omega} + \frac{k_2 H_2}{2-\omega} \frac{r}{r_0} + \frac{k_4 H_4 + k_5 H_5}{1-\omega} \right] \frac{\varepsilon}{q} \\ < H_1 (lqr_0)^\nu \frac{q_1}{q} \varepsilon,$$

en posant

$$(80) \quad H_1 q_1 = \frac{k_1 H_1}{2(1-\omega)} + \frac{k_2 H_2}{2-\omega} + \frac{k_4 H_4 + k_5 H_5}{1-\omega}.$$

D'après (52) et (76) on aura de même

$$(81) \quad \Delta_\nu \zeta_k < (lqr_0)^\nu \left[ H_1 \bar{k}_1 lq_1 + \frac{H_2 \bar{k}_2}{2+\omega} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{1+\omega} \right. \\ \left. + \frac{H_4 \bar{k}_4}{1+\omega} \left( \frac{r}{r_0} \right)^\omega + \frac{H_5 \bar{k}_5 r_0}{2-\omega} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{1-\omega} \right] \frac{r}{q} \\ < H_2 (lqr_0)^\nu \frac{q_2}{q} r,$$

avec

$$(82) \quad H_2 q_2 = H_1 \bar{k}_1 lq_1 + \frac{H_2 \bar{k}_2}{2+\omega} + \frac{H_4 \bar{k}_4}{1+\omega} + \frac{H_5 \bar{k}_5 r_0}{2-\omega}$$

et l'on déduit de là, grâce à (36), (52), (76),

$$(83) \quad \Delta_\nu z_k < H_6 (lqr_0)^\nu \frac{q_1}{q} r, \quad \Delta_\nu \left( \frac{\partial z_k}{\partial \tau} \right) < H_7 (lqr_0)^\nu \varepsilon.$$

$H_6, H_7$  et, plus loin,  $H_8$  étant des nombres positifs indépendants de  $r_0$  et  $\nu$ . Or, prenons pour  $q$  un nombre supérieur à la plus grande des quantités  $q_1$  et  $q_2$  définies par (80) et (82); d'après (79) et (81), les inégalités (78)<sub>1</sub> et (78)<sub>2</sub> seront sûrement vérifiées encore pour  $j = \nu$ .

Écrivons alors l'inégalité

$$\tau_{\nu+1} \varphi_\nu(\tau_{\nu+1}) - \tau_\nu \varphi_\nu(\tau_\nu) + \tau_{\nu+1} [\varphi_{\nu+1}(\tau_{\nu+1}) - \varphi_\nu(\tau_{\nu+1})] = 0,$$

conséquence de (54); d'après (78)<sub>2</sub> on aura

$$(84) \quad |\tau_{\nu+1} \varphi_\nu(\tau_{\nu+1}) - \tau_\nu \varphi_\nu(\tau_\nu)| < H_8 (lqr_0)^\nu r;$$

quitte à remplacer  $H_3$  par un nouveau coefficient ne dépendant ni de  $r_0$  ni de  $\nu$ , on peut donc affirmer <sup>(1)</sup> que  $(78)_3$  s'applique encore pour  $j = \nu$ . D'ailleurs, il résulte de  $(78)_3$  que pour  $2lqr_0 < 1$  les points  $\tau_1, \dots, \tau_\nu$  sont intérieurs à un cercle de centre  $\tau_0$  et de rayon très petit avec  $r_0$ ; procédant alors comme pour  $\nu = 0$  (n° 19) on en déduit aussitôt <sup>(2)</sup> que  $(78)_4$  s'applique encore pour  $j = \nu$ .

Enfin, on tire de (84) l'inégalité

$$\left| \left( \frac{t_{i,\nu+1}}{t_{i0}} - 1 \right) z_{i,\nu+1} + z_{i,\nu+1} - z_{i,\nu} \right| < H_8 (lqr_0)^\nu,$$

ce qui entraîne  $(78)_5$  pour  $j = \nu$ , en vertu de (59) et des inégalités  $(78)_5$  écrites pour  $j = 0, \dots, \nu - 1$ .

En définitive, les formules (78) seront valables quel que soit  $j$ , pourvu que l'on ait choisi  $q$  supérieur au plus grand des deux nombres  $q_1$  et  $q_2$  définis par (80) et (82); de plus, pour  $r_0 < 1 : 2lq$  (et suffisamment petit) les relations (73) et (78) seront vérifiées quel que soit  $j$ ; la relation (45), supposée vérifiée en première approximation (avec substitution de  $2\eta$  à  $\eta$ ), le sera à toutes les approximations; toutes les conditions que nous nous sommes imposées seront constamment satisfaites, et nos approximations seront régulièrement convergentes. Par le procédé habituel <sup>(3)</sup> on établit que les fonctions-limites qu'elles définissent constituent une caractéristique de  $(G_n)$ , c'est-à-dire un système d'intégrales définies sur un chemin  $\varpi$ , convergent vers zéro; nous allons préciser ce chemin ainsi que les conditions aux limites de nos caractéristiques.

Il résulte <sup>(4)</sup> des formules (53) et  $(78)_3, (78)_4$  que  $t_0$  décrivant  $\varpi_0$  de 0 à  $t_i^0$ ,  $t_i$  décrit dans son plan un chemin  $\varpi$ , de 0 à  $t_i^0$ . En deux points correspondants de  $\varpi$  et  $\varpi_0$   $\left| \frac{t_i}{t_{i0}} - 1 \right|$  est inférieur à une quantité de l'ordre de  $r_0$ , en d'autres termes *les transformés de  $\varpi$  et  $\varpi_0$  dans les plans*

<sup>(1)</sup> Sous réserve de la même restriction qu'au n° 19 (note de la page 214).

<sup>(2)</sup> Quitte encore à remplacer  $H_4$  par un nouveau coefficient indépendant de  $r_0$  et de  $\nu$ .

<sup>(3)</sup> Cf. [VI], n° 19, p. 271.

<sup>(4)</sup> En ce qui concerne l'extrémité  $t_i^0$ , on fera croître indéfiniment  $\nu$  dans (53), et l'on observera que d'après  $(78)_3$   $\tau_\nu$  tend alors vers une limite bien déterminée  $\bar{\tau}$ ; pour  $\tau = \bar{\tau}$  on aura  $t_i = t_i^0$ .

$T = \text{Log}(t_i : t_i^0)$  et  $T_0 = \text{Log}(t_{i0} : t_i^0)$  seront très voisins l'un de l'autre pour  $r_0$  très petit; et le chemin décrit par  $T$  sera très voisin d'un rayon d'un secteur *identique* à  $(S)$  et appartenant à une région  $(R)$  identique à  $(R_0)$ . Lorsque  $t_i$ , décrivant  $\ni$  à partir de  $t_i^0$ , tend vers zéro,  $z_i$  part de  $z_i^0$ , les  $R_k$  tendent vers les  $R_k^0$  et les  $z_k$  vers les  $z_k^0$  ( $k \neq i, n+1$ ), tandis que  $\left| \frac{z_i}{z_{i0}} - 1 \right|$  reste inférieur à une quantité de l'ordre de  $r_0$ : ainsi donc, près de l'origine,  $z_i$  se comporte comme  $z_{i0}$ . Ajoutons enfin que lorsque  $(^1)$  les  $|z_k^0|$  et les  $|R_k^0|$  restent bornés supérieurement et que les  $z_k^0$  satisfont à (45),  $r_0$  reste supérieur à un nombre positif fixe  $(^2)$ .

21. *Cas particuliers* :  $s = 0$ ;  $D = 0$ . — Pour terminer l'étude des caractéristiques de première espèce et du type général nous traiterons deux cas que nous avons réservés jusqu'ici.

Supposons d'abord  $s = 0 \neq D$ . D'après (41) on aura  $B = 0$ , d'où

$$\text{Log} \frac{t_{i0}}{t_i^0} = \frac{2}{A\sqrt{D}} \left( \frac{1}{e^{\sqrt{D}\tau_0} - 1} - \frac{1}{e^{\sqrt{D}\tau} - 1} \right);$$

$t_{i0} z_{i0}$  sera une fonction rationnelle du second degré en  $\text{Log} \frac{t_{i0}}{t_i^0}$ ; dans l'étude de la convergence on verra s'introduire  $\log^{-2} \left( \frac{r_0}{r} \right)$  au lieu de  $\left( \frac{r}{r_0} \right)^\omega$  et rien d'autre ne sera changé dans les développements antérieurs.

Supposons enfin  $D = 0$ ; c'est l'hypothèse que nous avons exclue au début du n° 16. Les  $z_{k0}$  seront alors des polynômes du second degré en  $\tau$ , soit

$$z_{k0} = A_k \tau^2 + 2B_k \tau + C_k,$$

et l'on aura

$$t_{i0} z_{i0} = A \tau^2 + 2B \tau + C.$$

Pour  $AC - B^2 \neq 0$ ,  $\tau$  sera une fonction rationnelle du premier degré en  $\left( \frac{t_{i0}}{t_i^0} \right)^s$  avec  $s = 2\sqrt{B^2 - AC}$ ; on aura

$$t_{i0} z_{i0} = \frac{4(B^2 - AC)}{A} \frac{\left( \frac{t_{i0}}{t_i^0} \right)^s}{\left[ 1 - \left( \frac{t_{i0}}{t_i^0} \right)^s \right]^2},$$

(1) Nous leverons plus tard les restrictions relatives à  $z_k^0$  (cf. n° 26).

(2) Cette limite inférieure tend vers zéro avec  $1 - \omega$  [cf., par exemple, les formules (64), (65)].



et l'on poursuivra les développements comme précédemment. Pour  $AC - B^2 = 0$ ,  $s$  sera nul et  $\tau$  linéaire en  $1 : \text{Log} \left( \frac{t_{i0}}{t_i^0} \right)$ ;  $t_{i0} z_{i0}$  sera le carré d'une expression de cette forme, et l'on remplacerait encore dans l'étude de la convergence  $\left( \frac{r}{r_0} \right)^\omega$  par  $\text{Log}^{-2} \left( \frac{r}{r_0} \right)$ .

Ajoutons enfin qu'on étend aisément à  $(G_n)$  les résultats établis aux nos 21-24 de [VI] : étude de l'intégrale dans les cercles exclus  $(\gamma_{k,n})$ , dérivation par rapport à  $t_i^0$  ou à une valeur limite  $R_k^0, z_k^0$ .

#### Type exceptionnel. Première sorte.

22. *Les chemins d'intégration.* — En procédant comme au n° 18 on montrerait que lorsque quelques-unes des équations  $P_k = 0$  possèdent des racines doubles et que les  $z_k^0$  leur sont égales, on peut encore construire dans le plan T des secteurs  $(\bar{\Sigma})$  où les approximations convergent régulièrement; le secteur  $(\bar{\Sigma})$  se soudera à une portion  $(\Sigma')$  d'un secteur (S) le long d'une parallèle à la médiane de (S), et dans  $(\Sigma')$  on saura calculer aussi l'intégrale; mais, comme au n° 18,  $(\bar{\Sigma})$  serait assujéti à une restriction telle que  $m\omega < 1$ , ce qui constituerait un obstacle pour le prolongement de l'intégrale dans  $(\mathbf{R})$ . Comme pour VI (1) nous allons construire directement des caractéristiques qui convergeront dans un nouveau secteur  $(\Sigma)$ , distinct de (S) mais présentant un domaine commun avec lui, le secteur  $(\bar{\Sigma})$ ; enfin  $(\Sigma)$  ne sera pas assujéti à la condition  $m\omega < 1$  : il confinera à la frontière de  $(\mathbf{R})$ . Nous nous placerons d'abord dans le cas où toutes les équations  $P_k = 0$  possèdent, chacune, une racine double; les caractéristiques que nous définirons seront dites du type exceptionnel, de la première espèce et en outre de la première sorte, pour les distinguer d'autres caractéristiques que nous définirons plus loin (n° 27). Elles dépendront de  $n$  constantes arbitraires, comme il était vraisemblable *a priori*; elles convergeront le long de chemins du plan  $T = \text{Log} \frac{t_i}{t_i^0}$  qui pour  $|t_i|$  très petit différeront très peu de chemins rectilignes  $\varepsilon'$ , et le

---

(1) [VI], p. 280-289.

secteur que remplissent ces chemins sera dit exceptionnel et de la première espèce.

Si l'équation  $P_k(z) = 0$  possède une racine double, on aura d'après (35)  $(R_k^0)^2 = D d_k t_k^2$ ; cherchons alors à vérifier (34) par une expression du type

$$(85) \quad z_k = a_k + b_k e^{\sqrt{D}\tau} + \bar{c}_k e^{-\sqrt{D}\tau}.$$

On devra prendre pour cela

$$(86) \quad (a_k^2 - 4 b_k \bar{c}_k) D t_k^2 - d_k = 0,$$

$$(87) \quad a_k D t_k^2 + R_k^0 = 0,$$

il viendra donc actuellement

$$(88) \quad d_k = D t_k^2 a_k^2,$$

soit, en vertu de (86),

$$(89) \quad b_k \bar{c}_k = 0.$$

Cela étant, attribuons désormais à chaque radical  $\sqrt{d_k}$  une détermination arbitraire, mais fixe, et posons

$$(90) \quad h = 1 - \sum'' \frac{\sqrt{d_k}}{\sqrt{D}},$$

$\sqrt{D}$  désignant, par exemple, la racine carrée de  $D$  qui a été introduite au n° 9. Dans l'hypothèse  $h \neq 0$  nous allons montrer qu'on peut tracer dans le plan  $\tau$  des chemins  $\Gamma$  s'éloignant à l'infini de telle sorte que  $e^{\frac{\tau}{h}}$  et  $e^{\sqrt{D}\tau}$  tendent simultanément vers zéro (on tracerait de même des chemins  $\Gamma'$  pour lesquels  $e^{\frac{\tau}{h}}$  et  $e^{-\sqrt{D}\tau}$  tendent aussi vers zéro). Effectivement, posons provisoirement

$$\sqrt{D} = a e^{i\alpha}, \quad \frac{1}{h} = b e^{i\beta}, \quad \tau = \rho e^{i\theta},$$

$\Gamma$  sera défini par les conditions

$$(91) \quad \cos(\alpha + \theta) < 0, \quad \cos(\beta + \theta) < 0;$$

prenons encore

$$(92) \quad \sigma = h \sqrt{D};$$

il résultera des inégalités (91) que l'argument  $\theta + \beta \equiv \varphi$  de  $\tau : h$  devra varier entre les limites figurant au tableau suivant

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\sigma \text{ complexe}) \left\{ \begin{array}{l} \Re \left( \frac{\sigma}{i} \right) > 0, \quad \frac{\pi}{2} + \eta \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} - \alpha + \beta - \eta, \\ \Re \left( \frac{\sigma}{i} \right) < 0, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta + \eta \leq \varphi < \frac{3\pi}{2} - \eta, \end{array} \right. \\ (\sigma \text{ réel}) \left\{ \begin{array}{l} \sigma > 0, \quad \frac{\pi}{2} + \eta \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} - \eta, \\ \sigma < 0, \quad \text{le cas est impossible,} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où le symbole  $\eta$ , dont l'introduction sera bientôt légitimée, représente toujours un nombre positif arbitrairement petit.

Ce point établi, éloignons indéfiniment le point  $\tau$  sur  $\Gamma$ ;  $e^{\sqrt{D}\tau}$  tendra vers zéro, et d'après (85), (88) et (89) toute solution de (34) qui tendra en même temps vers une limite finie sera de la forme

$$(93) \quad z_{k0} = \frac{\sqrt{d_k}}{t_k \sqrt{D}} + b_k e^{\sqrt{D}\tau};$$

à ces solutions approximatives de (33) correspondra pour  $z_i$  la formule approchée

$$(94) \quad t_{i0} z_{i0} = 1 - \sum \frac{\sqrt{d_k}}{\sqrt{D}} - \sum'' b_k t_k e^{\sqrt{D}\tau} \equiv h + M e^{\sqrt{D}\tau},$$

et l'on prendra (le long de  $\Gamma$ )

$$(95) \quad \text{Log } t_{i0} = \int_0^\tau \frac{d\tau}{h + M e^{\sqrt{D}\tau}},$$

soit

$$\sigma \text{Log } t_{i0} = \sqrt{D} \tau - \text{Log} \left( 1 + \frac{M}{h} e^{\sqrt{D}\tau} \right);$$

ainsi, avec des notations du n° 16,  $\sigma^2$  jouera <sup>(1)</sup> le rôle de  $s^2$ . De plus,  $\tau$  s'éloignant indéfiniment sur  $\Gamma$ ,  $t_{i0}$  et  $t_{i0}^\sigma$  tendront vers zéro; enfin, dans le plan  $T_0 \equiv \text{Log } t_{i0}$ , le chemin  $\mathcal{C}'_0$  décrit par  $T_0$  tendra vers le chemin décrit par le point  $\tau : h$ ; c'est dire que les chemins  $\mathcal{C}'_0$  rempliront dans le plan  $T_0$  un secteur dont les directions frontières sont pré-

(1)  $\sigma$  n'étant pas assujéti à (42), il n'est question que de  $\sigma^2$ .

cisément définies par le tableau ( $\mathfrak{C}$ ); l'une de ces frontières sera aussi une frontière de ( $\mathbf{R}$ ); l'autre sera arbitrairement voisine de la médiane du secteur ( $\mathbf{S}$ ), du type général (n° 17) appartenant à l'exposant  $s$ .

23. *Les  $2^n$  intégrales holomorphes de première espèce.* — Nous sommes ainsi amenés à effectuer le changement de variables suivant.

Faisons sur ( $G_n$ ) les transformations (32) et  $z_k = \frac{\sqrt{d_k}}{t_k \sqrt{D}} + \zeta_k$ ; il viendra<sup>(1)</sup>

$$(96) \quad \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial \tau^2} - D \zeta_k = \Lambda_k \left( \frac{\partial \zeta_f}{\partial \tau}, \zeta_f, t_i z_i, t_i \right) \quad (k \neq i, n+1),$$

où,  $d_k$  et  $D$  étant supposés différents de zéro, la fonction rationnelle  $\Lambda_k$  est de la forme<sup>(2)</sup>

$$\Lambda_k = a_k \left( \frac{\partial \zeta_k}{\partial \tau} \right)^2 + b_k \zeta_k^2 + c_k t_i \frac{\partial \zeta_k}{\partial \tau} + d_k t_i \zeta_k + e_k t_i,$$

$a_k, \dots, e_k$  désignant des fonctions rationnelles de  $\frac{\partial \zeta_f}{\partial \tau}, \zeta_f, t_i z_i - h, t_i$  holomorphes lorsque ces variables sont voisines de zéro. De plus, en conservant les notations des n°s 17 et 22, nous aurons

$$(97) \quad |t_{i0}^\sigma| = r^\varpi,$$

avec

$$\varpi = \frac{a}{b} \frac{\cos(\alpha - \beta + \gamma)}{\cos \gamma},$$

l'argument  $\gamma$  de  $\text{Log } t_{i0}$  étant très voisin de  $\varphi$ .

Procédons alors comme pour VI; afin d'établir l'existence des caractéristiques du type exceptionnel, nous effectuerons sur (96) un changement de variables qui repose sur l'existence d'intégrales holomorphes de (96).

<sup>(1)</sup> Dans  $\Lambda_k$ ,  $z_{n+1}$  et  $\frac{\partial z_{n+1}}{\partial \tau}$  sont supposés remplacés au moyen de (5) en fonction de  $\zeta_h$  et  $\frac{\partial \zeta_h}{\partial \tau}$ .

<sup>(2)</sup> Pour la vérification de cette assertion, on rapprochera dans ( $G_n$ ) les termes en  $d_k$  et en  $D$ .

Pour cela, nous prendrons d'abord (1)

$$(98) \quad \zeta_k = \zeta'_k + a_{1k} t_i + \dots + a_{q-1,k} t_i^{q-1},$$

où  $q$  est l'entier immédiatement supérieur à  $\varpi$ , et nous déterminerons les coefficients  $a_{1k}, \dots, a_{q-1,k}$  de manière que  $\zeta'_k$  satisfasse à une équation

$$\frac{\partial^2 \zeta'_k}{\partial \tau^2} - D \zeta'_k = \Lambda'_k \equiv a'_k \left( \frac{\partial \zeta'_k}{\partial \tau} \right)^2 + b'_k \zeta'^2_k + c'_k t_i \frac{\partial \zeta'_k}{\partial \tau} + d'_k t_i \zeta'_k + e'_k t_i^q,$$

les nouveaux coefficients  $a'_k, \dots$  étant holomorphes comme les  $a_k, \dots$ . Puisqu'on a

$$\frac{\partial^2 (t_i^m)}{\partial \tau^2} = \frac{m^2 t_i^m}{t_i^2 z_i^2} + \frac{m t_i^m}{t_i^2 z_i^2} \sum'' t_h \frac{\partial z_h}{\partial \tau},$$

on voit aussitôt que les  $a_{mk}$  sont donnés de proche en proche par des équations linéaires, le coefficient de l'inconnue à déterminer étant  $\frac{m^2 - \sigma^2}{h^2}$ : il ne pourra donc y avoir de difficulté que si  $\sigma$  est égal à un entier réel; on aura alors  $\varpi = \sigma = q - 1$ ; on remplacerait le dernier terme de (98) par  $a_{q-1,k} t_i^{q-1} \text{Log} t_i$  et au lieu d'obtenir une intégrale holomorphe en  $t_i$ , on trouverait une intégrale holomorphe en  $t_i$  et  $t_i \text{Log} t_i$ .

Ceci posé, faisons les approximations

$$\begin{aligned} \zeta'_{k0} &= 0, & \zeta'_{k,\nu+1} &= \frac{e^{\sqrt{D}\tau}}{2\sqrt{D}} \int_{\infty}^{\tau} \Lambda'_{\nu} e^{-\sqrt{D}\tau} d\tau - \frac{e^{-\sqrt{D}\tau}}{2\sqrt{D}} \int_{\infty}^{\tau} \Lambda_{\nu} e^{\sqrt{D}\tau} d\tau, \\ t_{i,\nu+1} z_{i,\nu+1} &= h - \sum'' t_k (\zeta'_{k,\nu+1} + a_{1k} t_{i\nu} + \dots + a_{q-1,k} t_{i\nu}^{q-1}) \equiv \Theta'_{\nu+1}(\tau) \\ &(\nu = -1, 0, \dots), \\ \text{Log} \frac{t_{i,\nu+1}}{t_{i0}} &= \int_{\infty}^{\tau} \left[ \frac{1}{\Theta'_{\nu+1}(\tau)} - \frac{1}{h} \right] d\tau, \\ t_{i,-1} &= 0, \end{aligned}$$

où toutes les quadratures sont effectuées sur  $\Gamma$  et où  $\Lambda'_{\nu}$  désigne ce que devient la fonction  $\Lambda'$  quand on y remplace ses différents arguments  $\zeta_k, \dots$  par leurs valeurs approchées  $\zeta_{k\nu}, \dots$ . En s'appuyant sur les formules (2)

$$|d\tau| < l \frac{dr}{r}, \quad |e^{\sqrt{D}\tau}| = r^{\varpi},$$

(1) Voir [VI], note de la page 283.

(2) La première est une conséquence de (62) et (63) (n° 49), toujours valables puisque  $\mathcal{C}'_0$  appartient à  $(\mathbf{R}_0)$ .

on établira aisément les inégalités

$$|\zeta'_{k1}| < H r^q, \quad \left| \frac{\partial \zeta'_{k1}}{\partial \tau} \right| < H r^q, \quad \left| \frac{t_{i1}}{t_{i0}} - 1 \right| < H r,$$

et d'une manière générale (1), H et p désignant des nombres positifs fixes

$$|\zeta'_{k,v+1} - \zeta'_{kv}| < H \frac{p^v}{v!} r^{q+v}, \quad \left| \frac{\partial \zeta'_{k,v+1}}{\partial \tau} - \frac{\partial \zeta'_{kv}}{\partial \tau} \right| < H \frac{p^v}{v!} r^{q+v},$$

$$\left| \frac{t_{i,v+1}}{t_{iv}} - 1 \right| < H \frac{p^v}{v!} r^{v+1}.$$

Ainsi, pour  $r$  assez petit (2), les approximations convergeront uniformément sur  $\Gamma$  vers une solution de  $(G_n)$ ; je dis que *cette solution est holomorphe en  $t_i$  pour  $t_i = 0$* . En effet,  $\Lambda'_0$  est une fonction de  $t_{i0}$  holomorphe pour  $t_{i0} = 0$ ;  $\zeta'_{k1}$  sera donc une fonction holomorphe de  $t_{i0}$  (ou, peut-être, de  $t_{i0}$  et  $t_{i0} \text{Log} t_{i0}$  si  $\sigma$  est un entier). On verrait de même que  $\text{Log}(t_{i1} : t_{i0})$  est une fonction holomorphe de  $t_{i0}$ , nulle à l'origine. D'une manière générale, toutes les différences  $\zeta'_{k,v+1} - \zeta'_{kv}$ ,  $t_{i,v+1} z_{i,v+1} - t_{iv} z_{iv}$ ,  $\text{Log}(t_{i,v+1} : t_{iv})$  sont holomorphes en  $t_{i0}$  et nulles pour  $t_{i0} = 0$ . En vertu de la convergence uniforme des approximations, les fonctions-limites sont donc aussi holomorphes en  $t_{i0}$ ; en particulier, on a  $t_i = t_{i0} [1 + \varphi(t_{i0})]$ ,  $\varphi$  étant holomorphe, et par suite,  $t_{i0} = t_i [1 + \psi(t_i)]$ ,  $\psi(t_i)$  étant holomorphe pour  $t_i = 0$ .

Ainsi les intégrales  $z_k (k \neq i \text{ et } n+1)$  et  $t_i z_i$ ,  $t_i z_{n+1}$  sont holomorphes en  $t_i = 0$ ; les  $z_k$  prennent d'ailleurs en ce point les valeurs  $\sqrt{d_k} : \sqrt{D} t_k$  (d'où résultent pour  $t_i z_i$  et  $t_i z_{n+1}$  les valeurs  $h$  et  $-h$ ); or ces systèmes de valeurs étant au nombre de  $2^n$ , il est bien établi que  $(G_n)$  possède  $2^n$  intégrales holomorphes (de première espèce) (3).

(1) Dans l'évaluation de  $|\zeta'_{k,v+1} - \zeta'_{kv}|$  les intégrales définies de comparaison sont de la forme  $\int_0^r r^{q+v \pm \sigma - 1} dr$ ; les diviseurs introduits sont de la forme  $q + v \pm \sigma$ , quantité supérieure à  $v$ , d'après le choix de  $q$ .

(2) De manière que les coefficients  $a'_k, \dots$  soient holomorphes et puissent être bornés (ce qui permettra de définir H et p).

(3) Exceptionnellement, si l'une des  $2^n$  valeurs de  $\sigma$  est entière l'intégrale sera seulement holomorphe en  $t_i$  et  $t_i \text{Log} t_i$ ; elle ne pourra être holomorphe en  $t_i$  que si les  $d_k$  et D satisfont à une relation qu'on peut former par des calculs rationnels.

24. *Construction des caractéristiques du type exceptionnel.* — Nous pouvons établir maintenant que  $(G_n)$  possède  $2^n$  familles de caractéristiques du type exceptionnel et de la première espèce. Effectivement, soit  $z_k = \bar{Z}_k(t_i)$  l'une quelconque des  $2^n$  intégrales holomorphes dont nous venons de démontrer l'existence; faisons le changement de variable  $z_k = \bar{Z}_k + Z_k$ ; l'équation (96) prendra la forme

$$(99) \quad \frac{\partial^2 Z_k}{\partial \tau^2} - DZ_k = \Lambda_k'' \equiv a_k'' \left( \frac{\partial Z_k}{\partial \tau} \right)^2 + b_k'' Z_k^2 + c_k'' t_i \frac{\partial Z_k}{\partial \tau} + d_k'' t_i Z_k$$

(le second membre devant s'annuler avec les  $Z_k$ ). Pour intégrer, on prendra, d'après (93), (94), (95),

$$(100) \quad \begin{cases} Z_{k0} = b_k e^{\sqrt{D}\tau}, \quad t_{i\nu} z_{i\nu} = 1 - \sum'' t_k (\bar{Z}_{k\nu} + Z_{k\nu}) \equiv \Theta_\nu(\tau), \quad \text{Log } t_{i0} = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\Theta_0(\tau)}, \\ Z_{k,\nu+1} = \frac{e^{\sqrt{D}\tau}}{2\sqrt{D}} \int_\infty^\tau \Lambda_{k\nu}''(\tau) e^{-\sqrt{D}\tau} d\tau - \frac{e^{-\sqrt{D}\tau}}{2\sqrt{D}} \int_\infty^\tau \Lambda_{k\nu}''(\tau) e^{\sqrt{D}\tau} d\tau + b_k e^{\sqrt{D}\tau}, \\ \text{Log } \frac{t_{i,\nu+1}}{t_{i0}} = \int_\infty^\tau \left[ \frac{1}{\Theta_{\nu+1}(\tau)} - \frac{1}{\Theta_0(\tau)} \right] d\tau \quad (\nu = 0, 1, \dots), \end{cases}$$

avec  $[\bar{Z}_{k\nu} \equiv \bar{Z}_k(t_{i\nu})]$ . La convergence des approximations se démontre aisément. Posons

$$\begin{aligned} |Z_{k,j+1} - Z_{kj}| &< \sigma_{1j}, & \left| \frac{\partial Z_{k,j+1}}{\partial \tau} - \frac{\partial Z_{kj}}{\partial \tau} \right| &< \sigma_{2j}, & \left| \frac{t_{i,j+1}}{t_{ij}} - 1 \right| &< \sigma_{3j}, \\ |t_{i,j+1} z_{i,j+1} - t_{ij} z_{ij}| &< \sigma_{4j}. \end{aligned}$$

A l'aide de l'expression de  $\Lambda_k''$  on trouvera  $\sigma_{f0} < \mathfrak{E} r^{\varpi + \varpi'} (f = 1, 2, 3, 4)$ ,  $\varpi'$  désignant le plus petit des nombres  $\varpi$  et 1, et  $\mathfrak{E}$  désignant un nombre positif qui ne dépend que de  $\eta$  et des  $b_k$ . Or d'une manière générale, supposons qu'on ait obtenu

$$\sigma_{fj} < \frac{\mathfrak{E} r^{\varpi + \varpi'} (p r^{\varpi'})^j}{j!} \quad (f = 1, 2, 3, 4; 0 \leq j < \nu),$$

$p$  désignant une autre constante positive. La forme du second membre de (99) donnera ( $A$  étant indépendant de  $\nu$ )

$$|\Lambda_{k\nu}'' - \Lambda_{k,\nu-1}''| < A r^{\varpi'} (\sigma_{1,\nu-1} + \sigma_{2,\nu-1} + r \sigma_{3,\nu-1} + \sigma_{4,\nu-1}),$$

et la limitation des intégrales définies (100) fera apparaître au déno-

minateur les sommes  $\varpi + (\nu - 1)\varpi' \pm \varpi + \varpi' \geq \nu\varpi'$ . La conclusion est alors immédiate : les approximations convergent régulièrement sur  $\Gamma$  du moment que  $|t_i|$  a été pris assez petit (1).

Nous avons obtenu ainsi  $2^n$  familles de  $\infty^n$  solutions de  $(G_n)$ , dans lesquelles les  $z_k$  tendent vers les valeurs  $\sqrt{d_k} : t_k\sqrt{D}$ , et  $t_i z_i$  vers  $h$ , et, cela, pendant que  $\tau$  tend vers l'infini sur  $\Gamma$ , c'est-à-dire, d'après (100), pendant que  $t_i$  tend vers zéro sur un chemin  $\varepsilon$  dont le transformé  $\varepsilon'$  dans le plan  $T = \text{Log } t_i$  diffère très peu du chemin  $\varepsilon'_0$  décrit par  $T_0 = \text{Log } t_{i0}$ ; il suffit alors de rapprocher les formules (95) et (100) pour constater que les chemins  $\varepsilon'$  remplissent dans leur plan un secteur (exceptionnel) dont les frontières seront définies encore par le tableau  $\mathfrak{E}$ .

On retrouve bien la généralisation des résultats établis pour les caractéristiques exceptionnelles de première espèce de VI; les formules données au n° 12 permettent de préciser le rapprochement. Moyennant un choix convenable de la racine de l'équation fondamentale déterminante relative au point  $x = 1$  de l'équation linéaire  $(E_n)$ , on peut prendre

$$\sqrt{d_k} = 1 - 2r_k,$$

et, de même

$$\sqrt{D} = 1 + 2r_{n+3},$$

d'où, d'après (90) et (92),

$$(101) \quad h = 1 + \sum'' \frac{2r_k - 1}{2r_{n+3} + 1}, \quad \sigma = 2r_{n+3} + 1 + \sum'' (2r_k - 1).$$

Or, d'après l'expression de  $t_i z_i$  (n° 12, p. 198),  $h$  désignera bien, comme pour VI la limite de  $\lambda$  pour  $t = 0$ ;  $\sigma$  aura le même sens que pour VI, et les changements d'écriture  $r_k | r_1; r_{n+3} | r_\infty$  permettront de passer des notations actuelles à celles de [VI], et des formules (101) aux formules (68), (69) de [VI]; de même encore le tableau ( $\mathfrak{E}$ ) généralise les indications données à la fin du n° 25 de [VI] (p. 281-282).

25. *Cas particuliers* :  $d_k = 0$ ;  $D = 0$ . — Examinons maintenant les hypothèses précédemment écartées (n° 23) :  $d_k = 0$  et  $D = 0$ . Dans le

(1) Pour les mêmes raisons que plus haut (note 2 de la page 225).



premier cas, on posera pour les valeurs correspondantes de l'indice  $k$

$$(102) \quad \zeta_k = \mu_k^2,$$

les équations (96) deviendront

$$\frac{\partial^2 \mu_k}{\partial \tau^2} - \frac{D}{2} \mu_k = -\frac{1}{\mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2 \mu_k} \overline{\Omega}_k;$$

mais, dans le cas actuel, on a

$$\frac{\overline{\Omega}_k}{2 \mu_k} = \frac{1}{\mu_k} \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{D}{4} \mu_k + \Omega_k,$$

$\Omega_k$  étant une fonction des variables  $\mu_k, \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau}, \zeta_f, \frac{\partial \zeta_f}{\partial \tau} (f \neq k), t_i \bar{z}_i, t_i$  qui reste holomorphe pour  $\mu_k = 0$ ; si on la développe dans le voisinage du point  $t_i = 0, \mu_k = 0$ , ses différents termes contiendront en facteurs  $\mu_k^2$  ou  $t_i \mu_k$ . Cette circonstance permet d'appliquer au système différentiel formé par les équations

$$\frac{\partial^2 \mu_k}{\partial \tau^2} - \frac{D}{4} \mu_k = \Omega_k,$$

et par les équations restantes, du type primitif, un procédé d'intégration complètement analogue à celui des nos 23 et 24.

Pour traiter le second cas réservé  $D = 0 \neq d_k$ , nous opérerons une transformation qui nous ramènera au premier cas.

Si dans l'équation linéaire  $(E_n)$  on pose

$$(103) \quad x = \frac{x'}{x' - 1}, \quad y = \frac{y'}{x' - 1}, \quad t_h = \frac{t'_h}{t'_h - 1} \quad (h = 1, \dots, n),$$

$$\lambda_j = \frac{\lambda'_j}{\lambda'_j - 1} \quad (j = 1, \dots, n),$$

l'équation  $(E'_n)$  aux variables  $x', y'$  aura même forme que  $(E_n)$ , mais les points singuliers 1 et  $\infty$  se seront permutés; les  $c_h (h \neq n+2, n+3)$  n'auront pas varié, mais  $c_{n+2}$  sera remplacé par

$$c'_{n+2} = \sum_{h=1}^{n+1} c_h + \frac{3n}{4} = \frac{D-1}{4}$$

et  $\frac{D}{4}$  sera remplacé par  $c_{n+2} + \frac{1}{4}$ ; la transformation échange donc  $d_{n+2}$

et D. De plus, on trouvera, à l'aide de (103) et des formules du n° 12,

$$(104) \quad \frac{\psi_1(x')}{\varphi_1(x')} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \frac{(x-1)^3 \varphi(1)}{\psi(1)},$$

$\varphi_1$  et  $\psi_1$  étant formés à l'aide des  $t'_k$  et des  $\lambda'_j$  comme  $\varphi$  et  $\psi$  à l'aide des  $t_k$  et des  $\lambda_j$ . Or, de (104) on tirera

$$(105) \quad \begin{cases} z'_k = \frac{z_k}{z_{n+2}} (1 - t_k) & (k \neq n+2), & z'_{n+2} = \frac{1}{z_{n+2}}, \\ z_k = \frac{z'_k}{z'_{n+2}} (1 - t'_k) & (k \neq n+2), & z_{n+2} = \frac{1}{z'_{n+2}}, \end{cases}$$

les  $z'$  étant définis pour  $(E'_n)$  comme les  $z$  pour  $(E_n)$ . Mais, si l'on suppose <sup>(1)</sup>  $d_{n+2} \neq 0$ , la valeur de D pour  $(E'_n)$  sera différente de zéro et l'on aura  $d'_{n+2} = 0$ ; conformément à (102) et (105) on posera donc <sup>(2)</sup>

$$(106) \quad z_k = \frac{\zeta_k}{\rho^2} \quad (k \neq i, n+1, n+2) \quad \text{et} \quad z_{n+2} = \frac{1}{\rho^2};$$

les  $\zeta_k$ ,  $\rho$  et  $t_i z_i$  seront donnés par un procédé d'approximations successives analogue à celui de tout à l'heure.

26. *Retour au type général : valeurs initiales  $z_k^0$  infinies.* — La méthode d'intégration des nos 23-25 s'appliquerait encore au cas (semi-exceptionnel) où une partie seulement des  $P_k$  admettraient les  $z_k^0$  comme racines doubles : les  $z_k$  restants seraient déterminés par la méthode des caractéristiques du type général. Il est une autre circonstance qui nécessite l'application simultanée des deux méthodes : c'est le cas où quelques-unes des  $z_k^0$  sont infinies. S'il en est ainsi, on déterminera  $z_{k_0}$  par les formules (85), (86), (87); supposant, comme au n° 22, que sur  $\Gamma$  le point  $\tau = \infty$  corresponde à  $t_{i_0} = 0$  (avec  $e^{\sqrt{U}\tau}$  tendant vers zéro), on prendra  $\bar{c}_k = 0$  pour tous les  $z_k$  qui doivent tendre vers des limites finies : mais alors ces limites finies ne pour-

<sup>(1)</sup> Pour  $d_{n+2} = 0$ , on substituerait dans (103) un autre point  $t_k$  au point  $t_{n+2} = 1$ . Si l'on a, quel que soit  $k$ ,  $d_k = 0 = D$ , et si les conditions initiales ne sont pas du type général, on se trouve dans le cas du type exceptionnel de la deuxième sorte, qui sera examiné bientôt.

<sup>(2)</sup> Pour  $n = 1$ , les formules (106) se réduisent à  $z_{n+2} = 1 : \rho^2$ ; or  $z_{n+2} = (1 - \lambda) : (1 - t)$ ; la transformation équivaut donc au changement  $\lambda = \mu^{-2}$  (cf. [VI], n° 29, p. 288).

ront être arbitraires : d'après (86) ce seront des racines doubles des  $P_k(z)$ . Ceci posé, on aura encore

$$t_{i0} z_{i0} = \alpha + \beta e^{\sqrt{D}\tau} \quad (\text{avec } \alpha \equiv 1 - \sum'' t_k a_k, \beta \equiv - \sum'' t_k b_k),$$

les  $\bar{c}_k$  satisfaisant à

$$(107) \quad \sum'' t_k \bar{c}_k = 0.$$

On tire de là

$$\text{Log} \frac{t_{i0}}{t_i^0} = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\alpha + \beta e^{\sqrt{D}\tau}},$$

d'où, en posant  $-\alpha \sqrt{D} \equiv s$ ,

$$(108) \quad \alpha e^{-\sqrt{D}\tau} = (\alpha + \beta) \left( \frac{t_{i0}}{t_i^0} \right)^s - \beta,$$

$$(109) \quad t_{i0} z_i^0 = \frac{\alpha (\alpha + \beta) \left( \frac{t_{i0}}{t_i^0} \right)^s}{(\alpha + \beta) \left( \frac{t_{i0}}{t_i^0} \right)^s - \beta}.$$

Dans les approximations suivantes on divisera les  $z_k$  en deux groupes; pour les  $z_k$  qui tendent vers l'infini, on posera

$$z_k = a_k + b_k e^{\zeta_k} + \bar{c}_k e^{-\zeta_k}$$

et l'on calculera les  $\zeta_{kj}$  et les  $R_{kj}$  correspondants comme dans le cas général (mais avec  $\tau = \infty$  au lieu de  $\tau = 0$  comme limites inférieures des quadratures); pour les  $z_k$  restants, leurs limites étant racines doubles des  $P_k(z)$ , on se servira de la méthode des nos 23-25. On observera d'ailleurs que sur le chemin où l'on définit les caractérisques  $(t_{i0}; t_i^i)^{-s}$  tend vers zéro en vertu de (108), et  $t_{i0} z_{i0}$  vers  $\alpha = -s : \sqrt{D}$  [en vertu de (109)], résultat qui s'applique aussi à  $t_i z_i$ .

Enfin, si parmi les  $z_k^0$  il en est  $\nu$  d'infinies, la caractéristique correspondante dépendra de  $n + \nu$  arbitraires (et non pas de  $2n - \nu$ , comme on aurait pu le croire *a priori*). Effectivement, les  $z_k$  qui tendent vers l'infini introduisent  $2\nu$  arbitraires ( $R_k^0, b_k$ ) liées par (107); les limites des  $z_k$  restants étant données par  $(G_n)$ , il n'y a plus que  $n - \nu + 1$  arbitraires nouvelles : les  $n - \nu$  données restantes  $R_k^0$  et  $t_i^0$  (1).

---

(1) On trouvera plus loin (n° 45, p. 270) une explication de ces résultats.

Les résultats de ce numéro et des nos 22-25 permettent de supprimer la double restriction imposée à  $z_k^0$  à la fin du n° 20.

### Deuxième sorte.

27. *Existence de  $\infty^n$  intégrales holomorphes.* — Traitons enfin le cas où tous (1) les polynômes  $P_k(z)$  sont identiquement nuls; on doit avoir alors  $d_k = 0 = D(k \neq i \text{ et } n+1)$ . Montrons que dans ce cas on peut définir pour  $(G_n)$  un système d'intégrales  $(z_k, R_k)$  holomorphes en  $t_i = 0$  (avec  $R_k^0 = 0$  et  $z_k^0$  arbitraire).

Introduisons toujours la variable  $\tau$  dans les équations  $(G_n)$ ; elles s'écriront actuellement (2)

$$\frac{\partial^2 z_k}{\partial \tau^2} = Y\left(z_h; \frac{\partial z_h}{\partial \tau}; t_i z_i, t_i\right) \quad (k \neq i, n+1)$$

avec

$$Y \equiv \frac{1}{2z_k} \left( \frac{\partial z_k}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{z_k}{2z_i(t_k - t_i)} \sum' \left[ \frac{t_h - t_i}{z_h} \left( \frac{\partial z_h}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{d_i z_h}{z_i^2(t_h - t_i)} \right] \\ + \frac{1}{z_i(t_k - t_i)} \frac{\partial z_k}{\partial \tau} + \frac{d_i z_k}{2z_i^2(t_k - t_i)^2} + \frac{d_{n+1} z_k}{2(t_k - t_i)t_i z_i z_{n+1}}.$$

Soit alors  $[z_k^0]$  un système de valeurs initiales arbitraires (mais finies, et telles que  $1 - \sum'' t_k z_k^0 \neq 0$ ); on fera les approximations

$$z_{k0} = z_k^0, \quad t_{i0} z_{i0} = 1 - \sum'' t_k z_{k0}, \quad \text{Log } \frac{t_{i0}}{t_i^0} = \int_0^\tau \frac{d\tau}{t_{i0} z_{i0}}, \\ z_{k,v+1} = z_k^0 + \tau \int_\infty^\tau Y_v d\tau - \int_\infty^\tau \tau Y_v d\tau = z_k^0 + \int_\infty^\tau d\tau \int_\infty^\tau Y_v d\tau, \\ t_{i,v+1} z_{i,v+1} = 1 - \sum'' t_k z_{k,v+1}, \\ \text{Log } \frac{t_{i,v+1}}{t_i^0} = \int_0^\tau \frac{d\tau}{t_{i,v+1} z_{i,v+1}},$$

avec

$$Y_v \equiv Y_v\left(z_{hv}; \frac{\partial z_{hv}}{\partial \tau}; t_{iv} z_{iv}, t_{iv}\right),$$

et les intégrales étant prises le long d'un chemin  $\Gamma$  du plan  $\tau$  s'éloignant à l'infini de telle sorte que  $t_{i0}$  tende vers zéro.

(1) Si le fait n'avait lieu que pour certaines valeurs de  $k$ , on calculerait les  $z_k$  correspondants par la méthode du numéro actuel; mais les  $z_k$  ne seraient plus holomorphes.

(2) On remplacera  $z_i$  par  $t_i z_i$ ;  $t_i$  et  $z_{n+1}$  par  $-z_i - \sum'' z_k$ .

Soient

$$\begin{aligned} |z_{k,v+1} - z_{kv}| &< \sigma_{1v}, & \left| \frac{\partial z_{k,v+1}}{\partial \tau} - \frac{\partial z_{kv}}{\partial \tau} \right| &< \sigma_{2v}, \\ |t_{i,v+1} z_{i,v+1} - t_{iv} z_{iv}| &< \sigma_{3v}, \\ \left| \frac{t_{i,v+1}}{t_{iv}} - 1 \right| &< \sigma_{4v} \quad \text{et} \quad |t_{i0}| = r; \end{aligned}$$

on trouve aisément (pourvu que  $\left| \frac{t_{iv}}{t_{i0}} - 1 \right|$  soit borné)

$$|Y_{v+1} - Y_v| < Ar[n(\sigma_{1v} + \sigma_{2v}) + \sigma_{3v} + \sigma_{4v}],$$

A désignant un nombre positif indépendant de  $v$ ; d'ailleurs, sur  $\Gamma$ , on peut écrire  $|d\tau| < l r^{-1} dr$ . Par le procédé accoutumé, on déduit de là

$$(\sigma_{1v}, \sigma_{2v}, \sigma_{3v}) < H(l^2 q r)^v r, \quad \sigma_{4v} < n H l (l^2 q r)^v r,$$

où l'on a  $q > (2n + 1 + nl) A$  et  $H$  indépendant de  $r_0$  et  $v$ .

Ces formules établissent pour  $r$  suffisamment petit la convergence régulière des approximations précédentes : ces approximations convergent ainsi vers une solution de  $(G_n)$  telle que,  $\tau$  tendant vers  $\infty$ ,  $t_i$  tende vers zéro, tandis que  $z_k$  et  $t_i z_i$  tendent vers  $z_k^0$  et  $1 - \Sigma'' t_k z_k^0 (\neq 0)$ . On montrera de plus que les  $z_{kv}$ ,  $t_{iv} z_{iv}$  et  $\text{Log}(t_{iv} : t_{i0})$  sont des fonctions holomorphes de  $t_{i0}$  : c'est immédiat pour  $z_{k1}$ , puis pour  $\text{Log}(t_{i1} : t_{i0})$ , et on l'étendra par récurrence au cas de  $n$  quelconque. Ainsi, en vertu de la convergence uniforme  $z_k - z_k^0$  et  $(t_i : t_{i0}) - 1$  sont des fonctions de  $t_{i0}$  holomorphes pour  $t_{i0} = 0$  et très petites avec  $r$ ; les  $z_k$  (et  $t_i z_i$ ,  $t_i z_{n+1}$ ) sont donc aussi holomorphes en  $t_i$  pour  $t_i = 0$ , les valeurs initiales des  $z_k$  étant les  $z_k^0$ .

Enfin, d'après (30)<sub>1</sub> et  $d_k = 0 = D$ ,  $R_k$  est alors une fonction holomorphe de  $t_i$ , nulle à l'origine <sup>(1)</sup> : on a donc bien  $R_k^0 = 0$  et  $P_k(z) \equiv 0$ .

## II. — Caractéristiques de deuxième espèce. Type général.

### 28. Transformation de $(G_n)$ . — Posons d'abord

$$(110) \quad 2S \equiv \frac{1}{z_i z_{n+1}} \left( t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} \right)^2 - \frac{d_i z_{n+1}^2 + d_{n+1} z_i^2}{z_i z_{n+1}} - D t_i^2 z_i z_{n+1};$$

<sup>(1)</sup> En s'appuyant sur les équations (1) et (4) de [VI] on peut démontrer directement la propriété analogue pour VI.

pour former  $\frac{\partial S}{\partial t_i}$  nous observerons que les formules (30) sont toujours valables pour  $k = n + 1$ , cas que nous n'avons pas à envisager dans la théorie des caractéristiques de première espèce; or on a

$$S = z_i R_{n+1} - d_i \frac{z_{n+1}}{z_i};$$

rapprochée de la remarque précédente cette égalité permet d'écrire

$$(111) \quad \frac{\partial S}{\partial t_i} = \left( \frac{S}{z_i} + \frac{d_i z_{n+1}}{z_i^2} \right) \left( \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} + \frac{\partial z_i}{\partial t_i} \right) - t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} \sum'' \frac{R_h}{t_h - t_i} - D t_i \left( \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} + z_i z_{n+1} \right).$$

Ceci fait, nous remplacerons les dérivées  $\frac{\partial z_k}{\partial t_i}$  par de nouvelles inconnues auxiliaires  $U_k$

$$(112) \quad U_k \equiv \frac{1}{z_i} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{z_k}{t_k - t_i} \frac{t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}}{z_i(z_i + z_{n+1})} \quad (k \neq i, n + 1);$$

d'après (6), les  $U_k$  seront liés par la relation

$$(113) \quad \sum'' (t_k - t_i) U_k = -1,$$

de sorte qu'on n'aura pas à envisager  $U_{n+2}$ , par exemple (<sup>1</sup>). Il nous faut exprimer  $\frac{\partial U_k}{\partial t_i}$  en fonction des  $z_h$ ,  $U_h$  et de  $S$ . Pour cela différencions (112) et remplaçons dans le second membre ainsi obtenu  $\frac{\partial^2 z_k}{\partial t_i^2}$  et  $\frac{\partial^2 z_{n+1}}{\partial t_i^2}$  par leurs expressions tirées de  $(G_n)$ ; dans le résultat, comme d'ailleurs dans (111), remplaçons  $\frac{\partial z_i}{\partial t_i} + \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}$  par

$$-\sum'' \frac{\partial z_h}{\partial t_i} = -z_i \sum'' U_h + \frac{t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}}{z_i + z_{n+1}} \sum'' \frac{z_h}{t_h - t_i},$$

et enfin, dans les équations trouvées, exprimons  $t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}$  au moyen de (110); finalement, nous aurons remplacé  $(G_n)$  par le système sui-

(<sup>1</sup>) Il n'y a donc que  $n - 1$  fonctions  $U_k$  indépendantes : les  $U_k$  n'existent que pour  $n > 1$ .

vant, que nous appellerons système  $\Sigma$  (1) :

$$(114) \quad \left( t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} \right)^2 = 2 z_i z_{n+1} S + d_i z_{n+1}^2 + d_{n+1} z_i^2 + D t_i^2 z_i^2 z_{n+1}^2,$$

$$(115) \quad \frac{\partial S}{\partial t_i} = [(z_{n+1} - z_i) S - d_i z_{n+1} + d_{n+1} z_i + D t_i^2 z_i z_{n+1}^2] \frac{\sum'' U_h}{z_i + z_{n+1}} - D t_i z_i z_{n+1} \\ + \left\{ \sum'' \left[ \frac{z_h}{2(t_h - t_i)(z_i + z_{n+1})^2} (2S - d_i - d_{n+1} - D t_i^2 z_{n+1}^2) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d_h}{2 z_h (t_h - t_i)} - \frac{t_h - t_i}{2 z_h} U_h^2 \right] \right. \\ \left. - \frac{D}{2} (1 - t_i z_{n+1}) \right\} t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i},$$

$$(116) \quad \frac{\partial z_k}{\partial t_i} = z_i U_k - \frac{z_k}{t_k - t_i} \frac{t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}}{z_i + z_{n+1}} \quad (k \neq i, n+1, n+2),$$

$$(117) \quad \frac{\partial U_k}{\partial t_i} = \frac{z_i}{2 z_k} U_k^2 + \frac{U_k}{t_k - t_i} + \frac{z_k z_i}{2(t_k - t_i)(z_i + z_{n+1})} \sum'' \frac{t_h - t_i}{z_h} U_h^2 \\ + \frac{z_k}{2(t_k - t_i)(z_i + z_{n+1})^2} \\ \times [2 z_{n+1} S - d_i(z_i + 2 z_{n+1}) + d_{n+1} z_i + D t_i^2 z_i z_{n+1}^2] \sum'' \frac{t_h - t_k}{(t_h - t_i)(t_k - t_i)} z_k \\ + \frac{z_i}{2(t_k - t_i)(z_i + z_{n+1})} \sum'' \left[ \frac{d_k z_h}{z_k(t_k - t_i)} - \frac{d_h z_k}{z_h(t_h - t_i)} \right] \\ + \frac{D z_i z_k}{2} \left[ 1 + \frac{1 + t_i z_{n+1}}{(t_k - t_i)(z_i + z_{n+1})} \right].$$

Dans le système  $\Sigma$ ,  $z_i$ ,  $z_{n+2}$  et  $U_{n+2}$  sont supposés exprimés au moyen de (5) et (113); dans (115) et (116),  $t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}$  doit être remplacé par son expression (114).

Cela étant, soit  $z_{n+1}^0$ ,  $S_0$ ,  $z_k^0$ ,  $U_k^0$  ( $k \neq i, n+1, n+2$ ) un système de  $2n$  constantes (2) finies, telles que

$$(118) \quad z_k \neq 0,$$

(1) On doit noter que  $z_i$  et  $z_{n+1}$  ne figurent plus aux dénominateurs que par la combinaison  $z_i + z_{n+1}$  [comparer avec (111), par exemple]; il était nécessaire que les seconds membres ne devinssent plus infinis pour  $z_i = 0$  ou  $z_{n+1} = 0$ , sinon l'étude des médianes de deuxième espèce eût été impossible.

(2) En ce qui concerne  $z_{n+1}^0$  et les  $z_k^0$  nous lèverons plus loin les restrictions qui vont suivre.

et telles en outre que si l'on pose (cf. n° 7)

$$\Sigma''' z_k^0 \equiv s_1, \quad \Sigma''' t_k z_k^0 \equiv s_2,$$

on ait

$$(119) \quad a \equiv s_2 - s_1 - 1 \neq 0.$$

Nous allons montrer qu'il existe une intégrale du système  $\Sigma$  satisfaisant aux conditions suivantes : pour  $t_i = t_i^0$  (suffisamment voisin de zéro),  $z_{n+1}$  se réduit à  $z_{n+1}^0$ , tandis que  $t_i$  tendant vers zéro le long d'un chemin  $\mathfrak{C}$  issu de  $t_i^0$  et que nous préciserons ultérieurement, les  $z_k$ ,  $U_k$  et  $S$  tendent respectivement vers les  $z_k^0$ ,  $U_k^0$  et  $S_0$ . Enfin, il existera un nombre positif  $\omega$  ( $0 \leq \omega < 1$ ) tel que  $t_i$  tendant vers zéro sur  $\mathfrak{C}$ , le produit  $|z_i| |t_i|^{-\omega}$  reste borné supérieurement.

29. *L'intégration par approximations successives.* — Posons

$$(120) \quad u \equiv -\Sigma'' z_h, \\ P(z_{n+1}) \equiv 2S_0 z_{n+1}(a - z_{n+1}) + d_i z_{n+1}^2 + d_{n+1}(a - z_{n+1})^2$$

et écrivons (114) sous la forme.

$$(121) \quad \frac{\left(t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}\right)^2}{P(z_{n+1})} = 1 + \frac{2S_0 z_{n+1} + d_{n+1}(u + a - 2z_{n+1})}{P(z_{n+1})}(u - a) \\ + \frac{2(S - S_0)z_i z_{n+1} + D t_i^2 z_i^2 z_{n+1}^2}{P(z_{n+1})}$$

(qui suppose  $P \neq 0$ ). Soient alors  $h'$  et  $h''$  les racines (supposées finies) de  $P(z) = 0$ ; nous prendrons

$$(122) \quad z_{n+1} = \frac{h' + h''}{2} + \left(z_{n+1}^0 - \frac{h' + h''}{2}\right) \operatorname{ch} s^* \zeta + \sqrt{(z_{n+1}^0 - h')(z_{n+1}^0 - h'')} \operatorname{sh} s^* \zeta,$$

en supposant  $z_{n+1}^0$  différent d'une racine double (éventuelle) de  $P(z)$ , et en posant

$$(123) \quad s^2 = d_{n+1} + d_i - 2S_0;$$

$s^*$  sera donc différent de zéro par hypothèse <sup>(1)</sup>, et, pour  $\zeta = 0$ ,  $z_{n+1}$  se réduira à  $z_{n+1}^0$ .

---

(<sup>1</sup>) Le cas où l'on aurait  $s^* = 0$  donne lieu aux mêmes remarques que le cas  $s = 0$



Ceci posé, le système  $\Sigma$ , ou, si l'on veut, (121), (115), (116), (117) pourra s'écrire

$$(\Sigma_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} t \frac{\partial \zeta}{\partial t_i} = 1 + F(\zeta, u - a, S - S_0, t_i), \\ \frac{\partial S}{\partial t_i} = g(\zeta, u - a, S; z_k; U_k; t_i), \\ \frac{\partial z_k}{\partial t_i} = \varphi_k(\zeta, u - a, S; z_k; U_k, t_i), \\ \frac{\partial U_k}{\partial t_i} = \psi_k(\zeta, u - a, S; z_k; U_k; t_i), \end{array} \right.$$

où  $F$  est une fonction holomorphe des variables indépendantes  $\zeta$ ,  $u - a$ ,  $S - S_0$ ,  $t_i$  lorsque les trois dernières variables sont de modules assez petits et que la condition

$$(124) \quad |P(z_{n+1})| > \eta$$

( $\eta$  nombre positif arbitrairement petit) est vérifiée par  $\zeta$ ; quant à  $g$ ,  $\varphi_k$ ,  $\psi_k$ , ce sont également des fonctions holomorphes de leurs arguments respectifs, toutes les fois que ces arguments vérifient (124) et les conditions

$$(125) \quad |u - a| < \eta, \quad m_1 < |z_k| < M_1, \quad |U_k| < M_2, \quad |S| < M_3,$$

$m_1 > 0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  désignant des nombres positifs fixes; enfin, considérés comme fonctions de  $\zeta$ ,  $g$ ,  $\varphi_k$ ,  $\psi_k$  deviennent infinies avec  $\zeta$  comme  $e^{\pm \zeta}$ .

Or il est facile de définir sur  $\Sigma_1$  un algorithme d'approximations successives fournissant une caractéristique répondant aux conditions initiales que nous avons énoncées. Partons des approximations

$$(126) \quad S_0, \quad z_{k0} = z_k^0, \quad U_{k0} = U_k^0 \quad \text{et} \quad \zeta_0 = \text{Log} \frac{t_i}{t_i^0}$$

[qui donnent  $z_{n+1,0}$  au moyen de (122) et  $z_{i0}$ ,  $z_{n+2,0}$  au moyen de (5)]. D'une façon générale, supposons que nous ayons calculé  $S_v$ ,  $z_{kv}$ ,  $U_{kv}$ , et  $\zeta_v$  (d'où  $z_{n+1,v}$ ,  $z_{iv}$  et  $z_{n+2,v}$ ); pour obtenir les quantités analogues,

---

du n° 21;  $z_{n+1,0}$  est alors un polynôme du second degré (en général) par rapport à  $\text{Log}(t_i; t_i^0)$ ;  $\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\omega}$  est remplacé par  $\log^{-2} \left(\frac{r_0}{r}\right)$  dans la discussion.

affectées de l'indice  $\nu + 1$  nous poserons <sup>(1)</sup>

$$(127) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{\nu+1} = S_0 + \int_0^{t_i} g_\nu dt_i, \quad z_{k,\nu+1} = z_k^0 + \int_0^{t_i} \varphi_{k\nu} dt_i, \\ U_{k,\nu+1} = U_k^0 + \int_0^{t_i} \psi_{k\nu} dt_i, \\ \zeta_{\nu+1} = \int_{t_i}^{t_i} [1 + F(\zeta_\nu, u_{\nu+1} - a, S_{\nu+1} - S_0, t_i)] \frac{dt_i}{t_i}. \end{array} \right.$$

30. *La seconde approximation.* — Il faut démontrer maintenant que la solution précédente n'est pas purement formelle; pour cela étudions d'abord la seconde approximation. Assujettissons  $\tilde{s}$  à vérifier (42), et posons

$$(55') \quad \text{Log } \frac{t_i}{t_i^0} \equiv T \equiv u e^{i\gamma}, \quad \tilde{s} \equiv \tilde{\nu} e^{i\tilde{\delta}},$$

$$(56') \quad |t_i| \equiv r, \quad |t_i^0| \equiv r_0;$$

astreignons  $\gamma$  à vérifier (57) et

$$(58') \quad \frac{\tilde{\nu} \cos(\gamma + \tilde{\delta})}{\cos \gamma} = f \omega \quad (f = \pm 1).$$

On pourra procéder comme au n° 17 : quelle que soit la détermination de  $f$ , on aura

$$(128) \quad |z_{n+1,0}| < a \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\omega},$$

$a$  étant un nombre positif (indépendant de  $r_0$ ), et  $z_{i0}$  vérifiera une inégalité analogue. Dans le plan  $T$ , l'image  $\mathfrak{C}'$  du chemin d'intégration  $\mathfrak{C}$  du plan  $t_i$  sera un rayon ( $\gamma = \text{const.}$ ) appartenant à la région ( $\mathbf{R}$ ) et en outre à un secteur ouvert ( $\omega < 1$ ), ( $\tilde{\mathbf{S}}$ ) qu'on définira à partir de  $\tilde{s}$  comme ( $\mathbf{S}$ ) l'était au n° 17 à partir de  $s$ . Comme au n° 18, les domaines d'exclusion seront constitués en général par de petits cercles ( $\gamma_N^*$ ) dont les centres sont alignés dans la direction de la médiane de ( $\tilde{\mathbf{S}}$ ) et forment en général deux séries distinctes; lorsque  $P(z)$  possédera un zéro double, la région interdite sera

(1) Voir la note de la page 207.

formée par une portion de  $(\tilde{S})$  limitée par une parallèle à la médiane : c'est le cas exceptionnel sur lequel on reviendra plus loin (n° 34).

Sans nous arrêter d'avantage sur ces extensions faciles des résultats précédents, nous observerons qu'en vertu des propriétés assignées à  $g, \varphi_k, \psi_k$ , on peut écrire <sup>(1)</sup>

$$(129) \quad |S_1 - S_0| < H_1 \varepsilon, \quad |z_{k1} - z_{k0}| < H_2 \varepsilon, \quad |U_{k1} - U_{k0}| < H_3 \varepsilon,$$

$\varepsilon$  étant toujours défini par (65),  $H_1, H_2, H_3$ , et plus loin  $H_4$  étant indépendants de  $r_0$ ; ce sont des nombres positifs qui ne dépendent que des paramètres de  $(G_n)$ , des conditions initiales, de  $\omega$  et de  $\eta$ . On déduit de là

$$|u_1 - a| > n H_2 \varepsilon$$

et l'on aura

$$(130) \quad \begin{aligned} & |F(\zeta_0, u_1 - a, S_1 - S_0, t_i)| \\ & < k_1 |u_1 - a| + k_2 |S_1 - S_0| + k_3 |t_i^2 z_{n+1,0}^2| \\ & < k_4 \varepsilon + k_5 r^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2\omega}, \end{aligned}$$

$k_4, \dots, k_5$  étant définis comme  $H_4$ . Or l'inégalité nécessaire  $r_0 < 1$  entraîne

$$r < r_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^\omega < \left(\frac{r}{r_0}\right)^\omega,$$

d'où

$$(131) \quad r \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2\omega} < \frac{\varepsilon}{r},$$

et d'après  $(126)_4, (127)_4, (130)$

$$(132) \quad |\zeta_1 - \zeta_0| < H_4 \varepsilon',$$

en posant

$$\varepsilon' \equiv (1 - \omega) \int_r^{r_0} \frac{\varepsilon}{r'} dr = r_0 - \varepsilon.$$

31. *Convergence des approximations.* — Employons la notation du n° 20; les inégalités  $(129), (132)$  seront un cas particulier des sui-

---

<sup>(1)</sup> Cette manière d'effectuer les limitations exige l'inégalité  $\omega < 1$ .

vantes :

$$(133) \begin{cases} \Delta_j S < H_1 (lqr_0)^j \varepsilon, & \Delta_j z_k < H_2 (lqr_0)^j \varepsilon, & \Delta_j U_k < H_3 (lqr_0)^j \varepsilon, \\ & \Delta_j \zeta < H_4 (lqr_0)^j \varepsilon', \end{cases}$$

$l$  et  $q$  étant deux nombres positifs que nous définirons tout à l'heure. Supposons donc que les inégalités (133) aient été démontrées pour  $j = 0, 1, \dots, \nu - 1$  et établissons qu'elles subsistent pour  $j = \nu$ . Observons d'abord que pour  $r_0$  assez petit (et  $2lqr_0 < 1$ ), les conditions (124), (125) seront vérifiées quand on remplacera  $\zeta$ ,  $S$ ,  $z_h$ ,  $U_h$  par des symboles analogues, affectés de l'indice supplémentaire  $j (= 0, \dots, \nu - 1)$  (\*). Procédant alors comme pour VI ([VI] n° 17, p. 265-266) et utilisant (122), on pourra écrire

$$(134) \quad \Delta_j z_{n+1} < k \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\omega} \Delta_j \zeta,$$

d'où, par un calcul aisé, fondé sur (133) et sur les expressions de  $g$ ,  $\varphi_k$ ,  $\psi_k$  tirées de  $\Sigma$ ,

$$(135) \quad \Delta_\nu \Phi < [(k_6 H_1 + k_7 H_2 + k_8 H_3) \varepsilon + k_9 H_4 \varepsilon'] (lqr_0)^{\nu-1} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\omega},$$

$k_6, \dots, k_9$  étant définis comme  $H_1$ , et  $\Phi$  représentant  $g$ ,  $\varphi_k$  ou  $\psi_k$ . Or on a  $\varepsilon < r_0$ ,  $\varepsilon' < r_0$ ; donc, en posant  $l \equiv \sec \gamma$  (d'où, sur  $\odot$ ,  $|dt_i| = l dr$ ), et en prenant

$$(1 - \omega) q_f H_f \equiv k_6 H_1 + k_7 H_2 + k_8 H_3 + k_9 H_4 \quad (f = 1, 2, 3),$$

on peut écrire

$$(136) \quad \begin{cases} \Delta_\nu S < H_1 l q_1 r_0 (lqr_0)^{\nu-1} (1 - \omega) \int_0^r \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\omega} dr = H_1 (lqr_0)^\nu \frac{q_1}{q} \varepsilon, \\ \Delta_\nu z_k < H_2 (lqr_0)^\nu \frac{q_2}{q} \varepsilon, \\ \Delta_\nu U^k < H_3 (lqr_0)^\nu \frac{q_3}{q} \varepsilon. \end{cases}$$

(\*) Pour  $j = 0$  on remplacera  $\eta$  par  $2\eta$  dans (124), par  $\frac{\eta}{2}$  dans (125), et  $m_1$  par  $2m_1$ ,  $M_1, M_2, M_3$  par  $\frac{M_1}{2}, \frac{M_2}{2}, \frac{M_3}{2}$ .

Enfin, on déduit de (128), (136) et (134)

$$(137) \quad |F(\zeta_\nu, u_{\nu+1} - a, S_{\nu+1} - S_0, t_i) - F(\zeta_{\nu-1}, u_\nu - a, S_\nu - S_0, t_i)| \\ < k_{10}(lqr_0)^\nu \frac{Q}{q} \varepsilon + k_{11}(lqr_0)^{\nu-1} r^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2\omega} \varepsilon',$$

Q désignant la plus grande des trois quantités,  $q_1, q_2, q_3$ ; on tire enfin de (137), (131) et (127),

$$(138) \quad \Delta_\nu \zeta < H_4 (lqr_0)^\nu \frac{q_4}{q} \varepsilon',$$

en posant

$$(1 - \omega) H_4 q_4 \equiv k_{10} lQ + k_{11}.$$

Ainsi, d'après (136) et (138), les relations (133) sont encore valables pour  $j = \nu$ , à condition de prendre  $q \geq Q$  et  $q \geq q_4$ ; la valeur ainsi obtenue est indépendante de  $r_0$  et  $\nu$ . Dès lors, pour  $r_0$  assez petit, nos approximations convergent régulièrement sur le chemin  $\odot$ ; elles représentent donc une intégrale de  $\Sigma$  [ou de  $(G_n)$ ]. Or on tire de (133), en faisant croître  $\nu$  indéfiniment

$$S - S_0 < \frac{H_1 \varepsilon}{1 - lqr_0} < 2 H_1 \varepsilon \quad \text{pour } 2 lqr_0 < 1;$$

$t_i$  tendant vers zéro sur  $\odot$ ,  $S$  tend donc vers  $S_0$ ; de même les  $z_k$  et les  $U_k$  tendent vers les  $z_k^0$  et les  $U_k^0$ ; on a  $z_{n+1}(t_i^0) = z_{n+1}^0$ , et l'on verrait enfin que  $|z_i| |t_i|^{-\omega}$  reste borné supérieurement comme nous l'avions annoncé.

32. *Cas où  $z_f^0 = 0$ .* — Il s'agit maintenant de lever les restrictions que nous nous sommes imposées sur les  $z_k^0$  au n° 28. Laissons de côté le cas où quelques-uns des  $z_k^0$  seraient infinis (<sup>1</sup>); il se traiterait comme au n° 26 par la transformation (105) et d'ailleurs nous y reviendrons dans la quatrième Partie.

Nous examinerons d'abord le cas où la condition (119) étant toujours remplie, (118) cesse de l'être pour  $n' < n$  valeurs de l'indice  $h$ ;

---

(<sup>1</sup>) Le cas où  $z_{n+1}^0$  serait infini se traiterait grâce à la théorie des caractéristiques de première espèce; il faudrait utiliser la soudure entre les caractéristiques des deux espèces qui est décrite au n° 46.

la méthode restant la même dans tous les cas nous supposons que l'on a  $n' = 1$ . Prenons donc  $z_f^0 = 0$ , et  $z_h^0 \neq 0$  ( $h \neq f, i, n+1$ ); nous allons montrer que dans le cas actuel on peut encore définir et calculer des caractéristiques de deuxième espèce. Posons

$$(139) \quad U_f \equiv \frac{\sqrt{d_f}}{t_f - t_i} + z_f u_f;$$

dans (115) nous aurons

$$(140) \quad \frac{d_f}{2 z_f (t_f - t_i)} - \frac{t_f - t_i}{2 z_f} U_f^2 = - \frac{t_f - t_i}{2} z_f u_f^2 - \sqrt{d_f} u_f,$$

et la même transformation s'applique à (117) (pour  $k \neq f$ ); reste à former  $\frac{\partial u_f}{\partial t_i}$ ; or on trouve aisément

$$(141) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_f}{\partial t_i} = & - \frac{z_i}{2} u_f^2 + \frac{u_f}{t_f - t_i} \left( 1 + \frac{t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}}{z_i + z_{n+1}} \right) \\ & + \frac{z_i}{2(t_f - t_i)(z_i + z_{n+1})} \sum'' \left[ \frac{t_h - t_i}{z_h} U_h^2 - \frac{d_h}{z_h(t_h - t_i)} \right] \\ & + \frac{1}{2(t_f - t_i)(z_i + z_{n+1})^3} \\ & \times [2S z_{n+1} - d_i(z_i + 2z_{n+1}) + d_{n+1} z_i + D t_i^2 z_i z_{n+1}^2] \sum'' \frac{t_h - t_f}{(t_h - t_i)(t_f - t_i)} z_h \\ & + \frac{D z_i}{2} \left[ 1 + \frac{1 + t_i z_{n+1}}{(t_f - t_i)(z_i + z_{n+1})} \right]. \end{aligned}$$

Appelons  $\Sigma'$  le système différentiel qu'on déduit de  $\Sigma$  en faisant dans (115) et (117) la transformation (140), en substituant à  $U_f$  dans (116)<sub>f</sub> sa valeur (139) et en remplaçant (117)<sub>f</sub> par (141). Les seconds membres de  $\Sigma'$  ne deviendront plus infinis pour  $z_f = 0$ , et l'on procédera sur  $\Sigma'$  comme plus haut sur  $\Sigma$  (en cherchant à définir une caractéristique pour laquelle  $u_f$  tende vers une valeur  $u_f^0$ , finie, lorsque  $t_i$  tend vers 0).

33. *Cas où  $a = 0$ .* — Lorsque (119) n'est plus vérifiée on substitue aux  $U_k$  les nouvelles variables

$$V_k \equiv U_k + \frac{z_k}{t_k - t_i} \frac{A}{z_i + z_{n+1}}$$

avec

$$A \equiv \sqrt{d_i + d_{n+1} - 2S + D t_i^2 z_{n+1}^2},$$

la détermination du radical étant celle qui tend vers  $+s^*$  ou  $-s^*$  (avec  $S - S_0$  et  $t_i z_{n+1}$  infiniment petits) suivant que  $|t_i^*|$  tend vers  $\infty$  ou vers zéro sur  $\mathfrak{S}'$  (c'est-à-dire suivant que  $\frac{t_i}{z_{n+1,0}} \frac{\partial z_{n+1,0}}{\partial t_i}$  tend vers  $+s^*$  ou  $-s^*$ ). On aura ainsi

$$(142) \quad \frac{\partial z_k}{\partial t_i} = z_i V_k - \frac{z_k}{t_k - t_i} \frac{t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} + A z_i}{z_i + z_{n+1}};$$

mais, supposons que  $|t_i^*|$  tende vers  $\infty$ ; il viendra d'après (114)

$$(143) \quad t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} + A z_i = - \frac{2(S - d_i) + d_i z_i^{-1} (z_i + z_{n+1})}{A - \frac{t_i}{z_i} \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}} (z_i + z_{n+1}),$$

et l'on voit que le second membre de (142) reste fini pour  $z_i + z_{n+1} = 0$ .

Les calculs sont analogues mais plus complexes <sup>(1)</sup> pour  $\frac{\partial S}{\partial t_i}$  et  $\frac{\partial V_k}{\partial t_i}$ ; ils fournissent également pour ces dérivées des expressions qui restent finies si  $z_i + z_{n+1} = 0$ . Nous ne reproduirons pas à cause de leur lon-

(1) On s'appuiera sur des identités telles que

$$\sqrt{1+x} = y = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{8x^3 - x^4}{8(1+y)^2(2-x+2y)},$$

$$y = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{80 + 24x - 10x^2 + x^3 + 16y(5-x)}{16(8+4x-x^2+8y)^2} x^4,$$

où l'on remplacera  $x$  par  $\frac{2(S-d_i)}{A^2 z_i} (z_i + z_{n+1}) + \frac{d_i}{A^2 z_i^2} (z_i + z_{n+1})^2$ ; on pourra ainsi transformer l'expression de  $t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}$ . On utilisera la première expression pour le calcul de  $\frac{\partial S}{\partial t_i}$ , et la seconde interviendra dans le calcul de  $\frac{\partial V_k}{\partial t_i}$  qui contient le terme

$$\frac{1}{z_i + z_{n+1}} \left( - \frac{\partial S}{\partial t_i} + D t_i z_{n+1}^2 + D t_i^2 z_{n+1} \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} \right);$$

on transformera au moyen de la seconde expression le produit  $t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}$  qui figure dans  $\frac{\partial S}{\partial t_i}$  sous la parenthèse. En général, la transformation s'applique encore parallèlement à la médiane d'un secteur de deuxième espèce (où  $t_i^*$  devient indéterminé); elle cessera seulement d'être applicable à l'intérieur des petits cercles, alignés suivant la médiane, où  $z_{i0}$  est petit; ce seront des régions d'exclusion qu'on étudiera directement (cf. [VI], n° 22, p. 273-275).

gueur les expressions obtenues pour ces dérivées; ces expressions se comporteront dans les approximations <sup>(1)</sup> comme les fonctions  $g$ ,  $\varphi_k$  et  $\psi_k$  du système  $\Sigma$ ; rien ne sera donc changé à la démonstration de convergence. Sans nous arrêter sur ces détails nous nous bornerons à indiquer les expressions qu'on obtient pour  $\frac{\partial S}{\partial t_i}$ ,  $\frac{\partial z_k}{\partial t_i}$ ,  $\frac{\partial V_k}{\partial t_i}$  quand on annule  $z_i + z_{n+1}$ ; on trouve <sup>(2)</sup>

$$(144) \quad \frac{\partial S}{\partial t_i} = \frac{1}{2z_i} \left[ d_i A - \frac{(S - d_i)^2}{A} \right] \sum'' \frac{z_h}{t_h - t_i} - D t_i z_i z_{n+1} \\ + \frac{A z_i}{2} \left\{ \sum'' \left[ \frac{t_h - t_i}{z_h} V_h^2 - \frac{d_h}{z_h(t_h - t_i)} \right] + D(1 - t_i z_{n+1}) \right\} + \dots,$$

$$(145) \quad \frac{\partial z_k}{\partial t_i} = z_i V_k + \frac{z_k}{t_k - t_i} \frac{S - d_i}{A} + \dots,$$

$$(146) \quad \frac{\partial V_k}{\partial t_i} = \frac{z_i}{2} \left[ \frac{V_k^2}{z_k} - \frac{d_k}{(t_k - t_i)^2 z_k} + D z_k \right] + \frac{V_k}{t_k - t_i} \\ - \frac{z_k}{2A(t_k - t_i)} \left\{ \left[ \frac{(S - d_i)^2}{A^2} - d_i \right] \left( \frac{A}{z_i(t_k - t_i)} + \sum'' \frac{V_h}{z_i} \right) \right. \\ \left. + \frac{S - d_i}{A} \left[ \sum'' \left( \frac{t_h - t_i}{z_h} V_h^2 - \frac{d_h}{z_h(t_h - t_i)} \right) + 2D t_i z_i \right] \right. \\ \left. + D(1 + t_i z_{n+1}) \right\} + \dots$$

Des résultats précédents et de ceux des nos 30, 31, on déduit (*cf.* n° 20, *ad fin.*) qu'il existe un nombre positif  $R_0 (> 0)$  tel que toutes les caractéristiques de deuxième espèce pour lesquelles les  $|U_k^0|$ , les  $|u_k^0|$  ou les  $|V_k^0|$  sont bornés supérieurement restent convergentes pour  $r < R_0$ .

#### Type exceptionnel. Première sorte.

34. *Transformation de  $(G_n)$ .* — Étudions le cas que nous avions réservé (n° 30) où le polynôme  $P(z)$  possède un zéro double; pour les mêmes raisons qu'au n° 22 il nous faut construire les caractéristiques correspondantes dans des secteurs qui ne soient pas assujettis aux

<sup>(1)</sup> Elles vérifient des conditions du type (135) comme on peut déjà le constater grâce à (142), (143), pour les nouvelles fonctions  $\varphi_k$ .

<sup>(2)</sup> Les points représentent des fonctions holomorphes et nulles pour  $z_i + z_{n+1} = 0$ .



restrictions (telles que  $m\omega < 1$ ) qui résulteraient alors de l'application de la méthode générale. Or nous pouvons écarter le cas  $a = 0$  que nous venons d'examiner; la racine double de  $P(z)$  n'est donc pas nulle, et en divisant par  $z_{n+1}(a - z_{n+1})$  on peut dire que l'équation

$$(147) \quad d_i \frac{z_{n+1}}{a - z_{n+1}} + d_{n+1} \frac{a - z_{n+1}}{z_{n+1}} + 2S_0 = 0$$

devra posséder une racine double; cette racine satisfera à l'équation

$$(148) \quad d_i \frac{a}{(a - z_{n+1})^2} - d_{n+1} \frac{a}{z_{n+1}^2} = 0.$$

Posons

$$(149) \quad d_i = (2r_i - 1)^2, \quad d_{n+1} = (2r_{n+1} - 1)^2,$$

de sorte que  $r_i$  et  $r_{n+1}$  désigneront deux quelconques des racines des équations fondamentales déterminantes relatives respectivement aux points  $x = t_i$  et  $x = 0$  de l'équation linéaire  $(E_n)$ . On tire alors de (148)

$$\frac{a - z_{n+1}}{z_{n+1}} = - \frac{2r_i - 1}{2r_{n+1} - 1};$$

le double signe étant inutile en raison de l'arbitraire introduit dans la désignation des racines; la racine double de  $P(z)$  sera donc égale à  $a^*h$  avec

$$(150) \quad h \equiv \frac{2r_{n+1} - 1}{2r_{n+1} - 2r_i},$$

et l'on aura, d'après (147),

$$S_0 = (2r_i - 1)(2r_{n+1} - 1),$$

de sorte que d'après (123) on pourra prendre pour  $s^*$  la valeur

$$(151) \quad \sigma^* \equiv 2(r_{n+1} - r_i),$$

le double signe étant inutile pour la même raison que plus haut.

Posons  $\sigma^* = \rho^* e^{i\delta^*}$ ;  $\gamma$  désignant toujours l'argument de  $T$ , on aura

$$(152) \quad |t_i^*| = r^\varpi \quad \text{avec} \quad \varpi = \frac{\rho^* \cos(\gamma + \delta^*)}{\cos \gamma}.$$

Pour que  $t_i^*$  tende vers zéro il faudra que  $T$  s'éloigne indéfiniment à l'intérieur d'un secteur  $(\check{S})$  dont les frontières ont les arguments  $\frac{\pi}{2} - \check{\delta}$  et  $\frac{3\pi}{2} - \eta$  ou  $\frac{\pi}{2} + \eta$  et  $\frac{3\pi}{2} - \check{\delta}$  suivant qu'on a  $\sin \check{\delta} < 0$  ou  $> 0$  (et pour  $\sigma^2$  positif, on prendra  $\sigma$  positif); aux deux déterminations de  $\sigma$  correspondent ainsi deux secteurs différents de la région  $(R)$  <sup>(1)</sup>.

Cela étant, nous poserons encore

$$z_{n+1} = a\check{h} + \rho,$$

et nous montrerons que dans l'hypothèse où  $\check{h}$  est différent de 0 et de 1, il existe une infinité d'intégrales de  $(G_n)$ , dépendant d'une constante arbitraire, telles que  $t_i$  tendant vers zéro dans  $(\check{S})$ ,  $\rho$  et  $t_i \frac{\partial \rho}{\partial t_i}$  tendent vers zéro tandis que les  $z_k$  et les  $U_k (k \neq i, n+1, n+2)$  tendent vers des limites  $z_k^0, U_k^0$  arbitrairement données [mais vérifiant pourtant (119)]. A cet effet, nous remplacerons  $(G_n)$  par un système que nous appellerons  $(\check{S})$ ; ce système sera formé d'abord des équations (116), (117) — où  $z_{n+1}$  sera remplacé par  $a\check{h} + \rho$  et  $z_i$  par  $a(1 - \check{h}) - \rho - (\Sigma'' z_k + a)$  —, puis de l'équation  $(G_n)$  (écrite pour  $k = n+1$ ) et que nous transformerons comme il suit.

Observons d'abord que le seul terme en  $t_i^{-2}$  de cette équation s'écrit

$$(153) \quad \frac{d_i z_{n+1}^2 - d_{n+1} z_i^2}{2 t_i^2} \left( \frac{1}{z_{n+1}} + \frac{1}{z_i} \right);$$

or, d'après la valeur de  $\check{h}$ , on a  $d_i \check{h}^2 - d_{n+1} (1 - \check{h})^2 = 0$ ; si donc  $\rho$  et  $\Sigma'' z_k + a$  tendent vers zéro la partie prépondérante de (153) sera

$$\frac{(2r_{n+1} - 2r_i)^2}{t_i^2} \rho + \frac{(2r_{n+1} - 1)(2r_{n+1} - 2r_i)}{t_i^2} (\Sigma'' z_k + a);$$

on en déduira aisément que l'équation envisagée dans  $(G_n)$  peut s'écrire

$$(154) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t_i^2} + \frac{1}{t_i} \frac{\partial \rho}{\partial t_i} - \frac{\sigma^2}{t_i^2} \rho = a_1 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t_i} \right)^2 + b \frac{\rho^2}{t_i^2} + c \frac{\partial \rho}{\partial t_i} + d \frac{\rho}{t_i} + \frac{e}{t_i} + f \frac{\Sigma'' z_k + a}{t_i^2},$$

(1) Les résultats précédents, et notamment les formules (150) à (152), pourront être rapprochés de ceux des nos 22 à 24 du Mémoire actuel et aussi des formules de la page 294 de [VI] (les symboles  $r_0$  et  $r_i$  de VI sont désignés actuellement par  $r_{n+1}$  et  $r_i$ ).

les fonctions  $a_1, \dots, f$  des variables indépendantes  $\rho, z_k, t_i$  étant holomorphes quand  $\rho, t_i$  et  $z_k - z_k^0$  restent voisins de zéro; de plus  $e$  est un polynôme du second degré par rapport aux  $U_k$ .

35. *Convergence des approximations.* — Procédons alors comme aux nos 23, 24. On montrera d'abord qu'on peut trouver <sup>(1)</sup> des coefficients  $a_j, b_j, c_j$  tels que, si l'on pose

$$(155) \quad \rho = \rho' + \sum_{j=1}^{q+1} a_j t_i^j, \quad z_k = z'_k + \sum_{j=1}^{q+1} b_{kj} t_i^j, \quad U_k = U'_k + \sum_{j=1}^{q+1} c_{kj} t_i^j$$

( $q$  désignant l'entier immédiatement supérieur à  $\varpi - 2$ ), les nouvelles fonctions  $\rho', z'_k, U'_k$  satisfont à un système  $\tilde{\Sigma}'$ , analogue à  $\tilde{\Sigma}$ , mais dans lequel le terme  $e t_i^{-1}$  de (154) serait remplacé par un terme en  $e' t_i^q$ ,  $e'$  étant holomorphe dans les mêmes conditions que  $e$ .

Cela fait, on établira, comme au n° 23, que  $\tilde{\Sigma}$  possède  $\infty^{2n-2}$  intégrales holomorphes  $\bar{\rho}, \bar{z}_k, \bar{U}_k$ , telles que  $t_i$  tendant vers zéro, les  $\bar{z}_k$  et les  $\bar{U}_k$  ( $k \neq i, n+1, n+2$ ) tendent vers  $2n-2$  valeurs arbitrairement choisies et  $\bar{\rho}$  vers zéro; comme d'ailleurs à chaque système  $(G_n)$  correspondent deux systèmes  $\tilde{\Sigma}^*$  (par suite du double choix possible de  $\sigma^*$ ), on voit que  $(G_n)$  possédera deux séries  $\infty^{2n-2}$  d'intégrales holomorphes de seconde espèce <sup>(2)</sup>.

Effectuons enfin le changement de variables

$$\rho = \bar{\rho} + \hat{\rho}, \quad z_k = \bar{z}_k + \hat{z}_k, \quad U_k = \bar{U}_k + \hat{U}_k;$$

on établira que  $\hat{\rho}, \hat{z}_k, \hat{U}_k$  satisfont à un système analogue à  $\tilde{\Sigma}^*$ , mais où

(1) Il y aura généralement exception si  $\sigma^*$  est un entier; dans ce cas, on remplacerait par  $a_{q+1} t_i^{q+1} \text{Log } t_i$  le dernier terme de (155)<sub>1</sub>; rien ne serait changé aux développements qui vont suivre, si ce n'est que les intégrales seraient holomorphes en  $t_i$  et  $t_i \text{Log } t_i$ .

(2) Pour les intégrales holomorphes de première espèce du n° 23, les limites des  $z_k$  ne sont pas arbitraires, et ce ne sont pas  $z_i, z_{n+1}$  mais  $t_i z_i, t_i z_{n+1}$  qui restent holomorphes à l'origine. Ici, les limites de  $z_k$  peuvent être choisies arbitrairement ainsi que celles de leurs dérivées [d'après (116) et  $h \neq 1$ ]; enfin  $z_i$  et  $z_{n+1}$  sont holomorphes.

les coefficients correspondant à  $e$  et  $f$  sont identiquement nuls. On intégrera ce système en posant d'abord

$$\hat{\rho}_0 = A t_i^*, \quad \hat{z}_{k0} = 0, \quad \hat{U}_{k0} = 0,$$

puis d'une façon générale,

$$\hat{\rho}_{v+1} = \frac{t_i^*}{2\sigma} \int_0^{t_i} t_i^{1-\sigma} \Lambda_v dt_i - \frac{t_i^*}{2\sigma} \int_0^{t_i} t_i^{1+\sigma} \Lambda_v dt_i + A t_i^*,$$

$\Lambda_v$  désignant ce que devient le second membre de la nouvelle équation (154) lorsqu'on y affecte les symboles variables de l'indice  $v$ , et  $\hat{z}_{kv}$ ,  $\hat{U}_{kv}$  étant toujours définis par (127)<sub>2</sub>, (127)<sub>3</sub>; enfin les solutions holomorphes employées  $\overline{z}_k$ ,  $\overline{U}_k$  sont celles qui tendent vers les valeurs initiales assignées à  $z_k$ ,  $U_k$ . On établira ainsi que  $\hat{\Sigma}$  possède une solution répondant à ces conditions initiales et telle que  $\rho : A t_i^*$  et  $t_i \frac{\partial \rho}{\partial t_i} : \sigma A t_i^*$  tendent vers 1 lorsque  $t_i$  vers zéro sur un rayon de  $(\hat{S})$ , la convergence régulière des approximations successives étant assurée pour  $r$  assez petit.

36. *Cas particuliers* :  $d_i = 0$ ;  $d_{n+1} = 0$ . — Dans ce qui précède nous avons supposé  $\hat{h}(\hat{h} - 1) \neq 0$ . Examinons maintenant le cas où il en serait autrement, et supposons d'abord  $\hat{h} = 1$ , ce qui exige, d'après (149) et (150),  $d_i = 0$ . Posons alors

$$z_{n+1} = a + \lambda^2, \quad a + \Sigma'' z_k = \chi \lambda^2;$$

l'équation  $(G_n)$  s'écrira (pour  $k = n + 1$ )

$$(156) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t_i^2} + \frac{1}{t_i} \frac{\partial \lambda}{\partial t_i} - \frac{(2r_{n+1} - 1)^2}{4t_i^2} \lambda = \mathfrak{S} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t_i}, \lambda, \chi, z_k; U_k; t_i \right)$$

avec

$$\mathfrak{S} \equiv \frac{\alpha \chi + \beta t_i}{\lambda} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t_i} \right)^2 + \gamma \frac{\partial \lambda}{\partial t_i} + \frac{\partial' \lambda^3 + \partial'' \lambda \chi}{t_i^2} + \varepsilon \frac{\lambda}{t_i}.$$

Considérés comme fonctions des variables  $\lambda$ ,  $\chi$ ,  $z_k$ ,  $t_i$ , les coefficients

sont holomorphes pour  $|\chi| < 1$ ,  $|\varepsilon_k|$ ,  $|\varepsilon_k^{-1}|$  bornés <sup>(1)</sup> et  $|t_i|$  suffisamment petit; de plus,  $\gamma$  est du premier degré et  $\varepsilon$  du second degré par rapport aux  $U_k$ . Choisissons alors pour  $\sigma^*$  l'une des racines carrées (non négative) de  $\left(\frac{2r_{n+1}-1}{2}\right)^2$  et construisons le chemin  $\odot$  de manière que sur  $\odot |t_i^{\sigma^*}| \equiv r^{\varpi}$  tende vers zéro avec  $t_i$ . On fera les approximations

$$\varepsilon_{k0} = \varepsilon_k^0, \quad U_{k0} = U_k^0, \quad \lambda_0 = A t_i^{\sigma^*}, \quad \varepsilon_{n+1,0} = a + \lambda_0^2, \quad \varepsilon_{i0} = -\lambda_0^2$$

et  $\chi_0 = 0$ ; puis

$$\varepsilon_{k1} = \varepsilon_k^0 + \int_0^{t_i} \varphi_{k0} dt_i, \quad U_{k1} = U_k^0 + \int_0^{t_i} \psi_{k0} dt_i,$$

d'où l'on déduit <sup>(2)</sup>

$$|\varepsilon_{k1} - \varepsilon_{k0}| < H_1 r^{1+\varpi}, \quad |U_{k1} - U_{k0}| < H_2 r, \quad |\chi_1| < H_3 r;$$

de la formule

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & \frac{t_i^{\sigma^*}}{2\sigma^*} \int_0^{t_i} t_i^{1-\sigma^*} \mathfrak{S} \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial t_i}, \lambda_0, \chi_1, \varepsilon_{k1}; U_{k1}; t_i \right) dt_i \\ & - \frac{t_i^{\sigma^*}}{2\sigma^*} \int_0^{t_i} t_i^{1+\sigma^*} \mathfrak{S} \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial t_i}, \lambda_0, \chi_1, \varepsilon_{k1}; U_{k1}; t_i \right) dt_i + A t_i^{\sigma^*}, \end{aligned}$$

et de l'expression donnée plus haut pour  $\mathfrak{S}$  on tirera

$$|\lambda_1 - \lambda_0| < H_4 r^{\frac{\varpi}{2} + \varpi'};$$

$H_1, \dots, H_n$  désignent des nombres positifs fixes;  $\varpi'$  est le plus petit des nombres 1 et  $\varpi$ . D'une manière générale, on montrera qu'il existe un nombre positif  $H$  tel qu'on a quel que soit  $\nu$

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{k\nu} - \varepsilon_{k,\nu-1}| & < \frac{H}{\nu!} (ar)^{\varpi+\nu\varpi'}, & |U_{k\nu} - U_{k,\nu-1}| & < \frac{H}{\nu!} (ar)^{\nu\varpi'}, \\ |\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}| & < \frac{H}{\nu!} (ar)^{\frac{\varpi}{2} + \nu\varpi'}, \\ |\varepsilon_{i\nu} - \varepsilon_{i,\nu-1}| & < \frac{H}{\nu!} (ar)^{\varpi+\nu\varpi'}, & |\varepsilon_{n+1,\nu} - \varepsilon_{n+1,\nu-1}| & < \frac{H}{\nu!} (ar)^{\varpi+\nu\varpi'}, \end{aligned}$$

(1) Dans le cas contraire, on procédera comme aux n° 26 et 32.

(2) D'une manière générale  $\chi$  et  $\varepsilon_{n+1,\nu}$  seront définis par (5).

H et a désignant deux constantes positives dont la seconde croît avec  $\sec \gamma$ ; d'ailleurs on observera que dans l'équation (117) le crochet qui contient S se réduit actuellement à  $\frac{1}{z_i} \left( \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} \right)^2$ : il n'est donc pas nécessaire de calculer S. Enfin l'expression

$$\left| \frac{\sum'' z_k + a}{\lambda_{j-1}^2} \right|,$$

qui doit être plus petite que 1, est de l'ordre de  $a r^{\sigma'}$ ; la convergence sera donc assurée dans un certain secteur de (R), pour  $r$  suffisamment petit.

On étudiera de même le second cas réservé  $\tilde{h} = 0$  ou  $d_{n+1} = 0$ ; on posera  $z_{n+1} = \mu^2$ ,  $z_i = a - \mu^2 - (\sum'' z_k + a)$  et l'on parviendra à un système différentiel, contenant une équation analogue à (156), et qu'on étudiera comme le système précédent.

#### Deuxième sorte.

37. *Existence de  $\infty^{2n-1}$  intégrales holomorphes.* — Examinons enfin le cas, exclu au n° 29, où  $P(z) \equiv 0$ ; on a alors  $d_i = 0 = d_{n+1} = S_0$ . Montrons que dans ce cas on peut définir pour  $(G_n)$  un système d'intégrales  $[z_1, \dots, z_{n+2}]$  holomorphes en  $t_i = 0$ , prenant en ce point ainsi que les  $U_k (k \neq i, n+1, n+2)$  un système de  $2n-1$  valeurs arbitraires [liées par (5)].

En effet, l'équation  $(G_n)$  pour  $k = n+1$  peut alors s'écrire

$$(157) \quad \frac{\partial^2 z_{n+1}}{\partial t_i^2} + \frac{1}{t_i} \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} = X \left( \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}, z_{n+1}; z_k; \frac{\partial z_k}{\partial t_i}; t_i \right)$$

avec

$$X \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z_{n+1}} - \frac{1}{z_i} \right) \left( \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} \right)^2 - \frac{1}{z_i} \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} \sum'' \frac{\partial z_k}{\partial t_i} - \frac{z_{n+1}}{2 t_i z_i} \sum'' \left[ \frac{t_k - t_i}{z_k} \left( \frac{\partial z_k}{\partial t_i} \right)^2 - \frac{d_k z_i}{z_k (t_k - t_i)} \right] + \frac{D}{2} z_i z_{n+1} \left( z_i - \frac{1}{t_i} \right),$$

$t_i z_i, z_{n+2}$  et  $\frac{\partial z_{n+2}}{\partial t_i}$  étant toujours calculés au moyen de (5) et (6). Comme au n° 36 la connaissance de S devient inutile; il suffira d'adjoindre à (157) les équations (116) et (117), et pour intégrer ce système on fera

les approximations

$$z_{n+1,0} = z_{n+1}^0 (\neq 0), \quad z_{k0} = z_k^0, \quad U_{k0} = U_k^0 \quad (k \neq i, n+1, n+2),$$

$$z_{n+1,v+1} = z_{n+1}^0 + \int_0^{t_i} \frac{dt_i}{t_i} \int_0^{t_i} t_i X_v dt_i$$

combinées avec (127)<sub>2</sub> et (127)<sub>3</sub>; et les intégrales seront étendues à un rayon de la région (R). On montrera aisément que sur ce chemin la convergence est régulière, que les fonctions limites définies par les approximations sont holomorphes en 0 (où elles prennent les valeurs  $z_{n+1}^0, z_k^0, U_k^0$ ) et qu'elles satisfont à (G<sub>n</sub>); enfin, on vérifiera sans peine que la fonction S correspondante s'annule à l'origine : on a donc bien  $P(z) \equiv 0$ .

Les transformations des n<sup>os</sup> 32, 33 sont encore applicables.

### TROISIÈME PARTIE.

POSSIBILITÉ DE REPRÉSENTER PAR DES CARACTÉRISTIQUES  
L'INTÉGRALE GÉNÉRALE DE (G<sub>n</sub>).

38. *Dégénérescence de (g<sub>n</sub>, G<sub>n</sub>) en (g<sub>n-1</sub>, G<sub>n-1</sub>)*. — Nous nous proposons maintenant d'établir que dans le voisinage du point singulier  $t_i = 0$  toute intégrale (G<sub>n</sub>) peut être représentée par les caractéristiques qui viennent d'être construites. La démonstration qui va suivre fait intervenir la variation d'un second point singulier de (E<sub>n</sub>), soit  $x = t_n$  et procède par récurrence; elle repose sur cette proposition fondamentale que nous allons établir.

*Lorsqu'un des points singuliers  $t_j$  tend vers un autre point singulier  $t_k$ , les  $z_h$  ( $h \neq j$  et  $k$ ) et  $z_j + z_k$  vérifient un système (g<sub>n-1</sub>, G<sub>n-1</sub>) aux variables indépendantes*

$$t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t, \dots, t_{n+2},$$

aux fonctions inconnues

$$z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_j + z_k, \dots, z_{n+2},$$

et aux constantes

$$d_1, \dots, d_{j-1}, d_{j+1}, \dots, d, \dots, d_{n+2} \text{ (et D),}$$

la constante  $d$  étant arbitraire; de plus, à la limite, le rapport  $z_j : z_k$  est fourni en fonction de  $t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n$  par une quadrature de différentielle totale. D'une manière plus brève, on peut dire que la fusion de deux points singuliers fait dégénérer  $(g_n, G_n)$  en un système  $(g_{n-1}, G_{n-1})$  <sup>(1)</sup>.

Nous appliquerons successivement le théorème dans les deux cas suivants :

$$j = n, \quad k = n + 2 \quad \text{et} \quad j = i, \quad k = n + 1;$$

à la notation près ces deux cas sont d'ailleurs identiques au cas général; nous n'introduirons donc aucune restriction en adoptant pour la démonstration les notations du second cas <sup>(2)</sup>.

Cela étant, nous poserons <sup>(3)</sup>  $t_i = \varepsilon$ ; le système  $(g_n, G_n)$  aura donc ses coefficients holomorphes en  $\varepsilon$  pour  $|\varepsilon|$  inférieur à la plus petite,  $\varepsilon_1$ , des quantités  $|t_h|$  ( $h \neq n + 1$ ). Soit alors  $\bar{f}$  l'une quelconque des fonctions inconnues de  $(g_n, G_n)$  — ou une combinaison de ces fonctions et de leurs dérivées —; nous poserons systématiquement <sup>(4)</sup>

$$\bar{f} = f + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots,$$

sans nous préoccuper actuellement de la convergence des développements <sup>(5)</sup>. Effectuons alors le changement de variables

$$(158) \quad \bar{z}_i = \bar{Z} \bar{\zeta}, \quad \bar{z}_{n+1} = \bar{Z}(1 - \bar{\zeta}),$$

et faisons tendre  $\varepsilon$  vers zéro; le système  $(g_n, G_n)$  va tendre vers un

(1) Dans ma Thèse (n° 26, p. 103), j'avais énoncé un résultat analogue, mais moins complet, pour le système  $(f_n, F_n)$ ; j'avais dû supposer alors que l'une des constantes de  $(F_n)$ ,  $c_n$  dépendait aussi de  $\varepsilon$  et tendait vers  $-1/4$ ; le maintien de cette dernière condition aurait compliqué la discussion qui va suivre; aussi donnerons-nous actuellement une démonstration toute différente de celle qui vient d'être rappelée.

(2) C'est la notation la plus commode pour l'ensemble des applications qui suivront.

(3) Et, d'une manière générale,  $t_j = t_k + \varepsilon$ .

(4) Ainsi, on notera, dès maintenant, que les notations non surlignées se rapportent au système-limite  $(g_{n-1}, G_{n-1})$ .

(5) On peut supposer, par exemple, que les développements s'effectuent autour d'une solution holomorphe quelconque du système-limite.



système dont les inconnues seront les fonctions-limites  $z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n, Z, z_{n+2}$  d'une part, et  $\zeta$  d'autre part; remarquons que les  $n+1$  premières vérifient déjà un système analogue à (5), mais où manqueraient  $t_i$  et  $z_i$ , et où  $Z$  jouerait le rôle de  $z_{n+1}$ . Ajoutons que la limite de  $(g_n)$  s'obtient aisément: toutes les équations  $(g_n)$  écrites avec les indices  $h, j, n$  ( $h$  et  $j$  étant différents de  $i$  ou  $n+1$ ) conservent leur forme; et les deux groupes d'équations où l'on a  $h=i$  ou  $n+1$  donnent à la limite

$$(159) \quad t_j z_n \frac{\partial Z}{\partial t_j} - t_n z_j \frac{\partial Z}{\partial t_n} = (t_j - t_n) Z \frac{\partial z_n}{\partial t_j},$$

$$(160) \quad t_j z_n \frac{\partial \zeta}{\partial t_j} - t_n z_j \frac{\partial \zeta}{\partial t_n} = 0;$$

en ce qui concerne  $(g_n)$  notre assertion sur le rôle de  $z_i + z_{n+1} = Z$  se trouve légitimée par (159).

Passons aux équations  $(G_n)$ , la variable indépendante étant  $t_n$ . Tout d'abord, cherchons la limite de  $\Sigma^n \bar{N}_k$  ( $n^\circ 2$ ). Les  $\bar{N}_k$  ( $k \neq i$  et  $n+1$ ) conservent la même forme et la somme  $2(\bar{N}_i + \bar{N}_{n+1})$  tend vers la même limite que

$$(161) \quad -\frac{t_n}{\bar{Z}} \left( \frac{\partial \bar{Z}}{\partial t_n} \right)^2 - \frac{d_n \bar{Z}}{t_n} + \frac{\bar{\varphi} z_n^2}{t_n \bar{Z}},$$

en posant

$$(162) \quad \bar{\varphi} \equiv \frac{t_n^2 \bar{Z}^2}{z_n^2 \bar{\zeta} (\bar{\zeta} - 1)} \left( \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t_n} \right)^2 + \frac{d_i}{\bar{\zeta}} + \frac{d_{n+1}}{1 - \bar{\zeta}}.$$

Cela étant, écrivons les équations  $(G_n)$  pour  $k=i$  et  $k=n+1$ ; à la limite leur somme deviendra <sup>(1)</sup>

$$(163) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial t_n^2} &= \frac{1}{2Z} \left( \frac{\partial Z}{\partial t_n} \right)^2 + \frac{1}{z_n} \frac{\partial z_n}{\partial t_n} \frac{\partial Z}{\partial t_n} \\ &\quad - \frac{Z}{t_n z_n} \left[ \Sigma^n N_k - \frac{t_n}{2Z} \left( \frac{\partial Z}{\partial t_n} \right)^2 - \frac{d_n Z^2 - \bar{\varphi} z_n^2}{2 t_n Z} \right] \\ &\quad - \frac{1}{t_n} \frac{\partial Z}{\partial t_n} + \frac{d_n Z^2 - \bar{\varphi} z_n^2}{2 t_n^2 Z} + \frac{D}{2} z_n Z \left( z_n - \frac{1}{t_n} \right). \end{aligned}$$

D'après cette équation, et d'après les équations restantes de  $(G_n)$ , s'il était établi que  $\bar{\varphi}$  se réduit à une constante *absolue*, nos affirmations

(1) Les accents placés après le signe  $\Sigma$  signifient  $k \neq i, n, n+1$ .

relatives à la forme  $(G_{n-1})$  du système-limite et au rôle de  $Z$  pour ce système seraient complètement justifiées. Or multiplions (163) par  $\zeta$  et retranchons le produit de la limite de l'équation vérifiée par  $\bar{z}_i$ ; il viendra

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t_n^2} = \frac{1}{2\zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t_n} \right)^2 - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial t_n} \frac{\partial \zeta}{\partial t_n} + \frac{1}{z_n} \frac{\partial z_n}{\partial t_n} \frac{\partial \zeta}{\partial t_n} - \frac{1}{t_n} \frac{\partial \zeta}{\partial t_n} - \frac{d_i z_n^2}{2 t_n^2 Z^2 \zeta} + \frac{\varphi \zeta z_n^2}{2 t_n^2 Z^2}.$$

Dans l'équation (162), différenciée par rapport à  $t_n$  substituons la valeur qu'on vient d'obtenir pour  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t_n^2}$ ; on trouvera, après quelques réductions faciles,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_n} = 0.$$

Ainsi, la limite de  $\varphi$  est déjà indépendante de  $t_n$ ; montrons qu'elle est aussi indépendante des  $t_j$  ( $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n-1$ ). A cet effet écrivons les équations (14) pour  $k = i$  et  $k = n+1$ ; ajoutons-les; nous aurons à la limite

$$(164) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial t_n \partial t_j} = & \frac{1}{2Z} \frac{\partial Z}{\partial t_n} \frac{\partial Z}{\partial t_j} + \frac{1}{2z_n} \frac{\partial z_n}{\partial t_j} \frac{\partial Z}{\partial t_n} + \frac{1}{2z_j} \frac{\partial z_j}{\partial t_n} \frac{\partial Z}{\partial t_j} \\ & + \frac{d_n}{2 t_n (t_j - t_n)} \frac{z_j Z}{z_n} + \frac{d_j}{2 t_j (t_n - t_j)} \frac{z_n Z}{z_j} \\ & - \frac{\varphi}{2 t_n t_j} \frac{z_n z_j}{Z} + \frac{D}{2} z_n z_j Z, \end{aligned}$$

en posant (1)

$$\bar{\varphi} \equiv \frac{t_n t_j \bar{Z}^2}{z_n z_j \bar{\zeta} (\bar{\zeta} - 1)} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t_n} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t_j} + \frac{d_i}{\bar{\zeta}} + \frac{d_{n+1}}{1 - \bar{\zeta}}.$$

Multiplions (164) par  $\zeta$  et retranchons le produit de la limite de l'équation (14) écrite pour  $k = i$ ; il viendra

$$(165) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t_n \partial t_j} = & \frac{1}{2z_n} \frac{\partial z_n}{\partial t_j} \frac{\partial \zeta}{\partial t_n} + \frac{1}{2z_j} \frac{\partial z_j}{\partial t_n} \frac{\partial \zeta}{\partial t_j} - \frac{1}{2Z} \frac{\partial Z}{\partial t_n} \frac{\partial \zeta}{\partial t_j} - \frac{1}{2Z} \frac{\partial Z}{\partial t_j} \frac{\partial \zeta}{\partial t_n} \\ & + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\bar{\zeta}} + \frac{1}{\bar{\zeta} - 1} \right) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t_n} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t_j} \right. \\ & \left. - d_i \frac{z_n z_j (1 - \zeta)}{t_n t_j \zeta Z^2} - d_{n+1} \frac{z_n z_j \zeta}{t_n t_j (\zeta - 1) Z^2} \right]. \end{aligned}$$

Différentions alors (162) par rapport à  $t_j$  et tenons compte de (165); à

---

(1) D'après (160) on a d'ailleurs  $\bar{\varphi} = \varphi$ .

l'aide de (159) et (160) on trouvera aisément

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_j} = 0;$$

ainsi donc  $\varphi$  se réduit à une constante absolue, soit  $d$ ; et les équations (163) constituent bien un système  $(G_{n-1})$ , contenant une constante arbitraire,  $d$  (sur laquelle nous reviendrons au n° 40).

Enfin, on trouvera aisément qu'à la limite  $\zeta$  satisfait à l'équation (1)

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{d_i(1-\zeta) + d_{n+1}\zeta - d\zeta(1-\zeta)}} = - \sum_{j=1}^n \frac{z_j dt_j}{t_j Z};$$

mais nous n'aurons pas à utiliser ce résultat.

### 39. Démonstration du théorème fondamental pour $t_n$ voisin de 1.

Revenons à notre proposition; il s'agit d'établir que dans le voisinage de  $t_i = 0$ , toute intégrale de  $(g_n, G_n)$  peut être représentée par des caractéristiques de première ou de deuxième espèce. En d'autres termes, soit  $[\bar{z}]$  une intégrale *quelconque* de  $(g_n, G_n)$ , intégrale qu'on peut supposer définie au point  $t_1^0, \dots, t_n^0$  par des conditions initiales *quelconques*; en choisissant, comme nous le ferons, la représentation de deuxième espèce, il s'agit d'établir qu'on peut faire tendre  $t_i$  vers zéro le long d'un chemin  $\varphi$ , de telle façon que sur  $\varphi$  les  $\bar{z}_k$ ,  $\bar{S}$  et les  $\bar{U}_k$ , par exemple, tendent vers des limites bien déterminées (*finies* pour  $\bar{S}$  et les  $\bar{U}_k$ ).

Pour cela, nous procéderons par récurrence; supposant qu'on ait démontré le théorème pour les systèmes  $(g_{n-1}, G_{n-1})$ , nous montrerons qu'il subsiste encore pour  $(g_n, G_n)$ ; comme nous avons établi directement la proposition pour  $(G_1)$  <sup>(2)</sup>, il s'ensuit bien qu'elle sera valable pour  $(g_n, G_n)$  quel que soit  $n$ .

Or faisons tendre  $t_n$  vers 1, et appliquons la proposition du n° 38

(1) D'après (159) le second membre est bien une différentielle totale.

(2) [VI], p. 295-312.

en prenant actuellement  $j = n$ ,  $k = n + 2$ , soit <sup>(1)</sup>

$$\bar{z}_n = \bar{Z}' \bar{\zeta}', \quad \bar{z}_{n+2} = \bar{Z}'(1 - \bar{\zeta}'), \quad t_n = 1 + \varepsilon.$$

Notre intégrale  $[\bar{z}]$  pourra être définie par les valeurs  $(\frac{\bar{z}}{z})$  qu'elle prend au point  $t_1 = t_1^0, \dots, t_{n-1} = t_{n-1}^0, t_n = 1 + \varepsilon_0 (|\varepsilon_0| < \varepsilon_1; \text{cf. n}^\circ 38)$ : nous nous bornerons actuellement aux intégrales pour lesquelles les valeurs précédentes satisfont aux conditions

$$[C(\eta)] \left\{ \begin{array}{l} \eta < |\bar{z}_k| < \eta^{-1}, \quad \eta < |\bar{Z}| < \eta^{-1}, \quad \eta < |\bar{\zeta}| < \eta^{-1}, \quad \eta < |1 - \bar{\zeta}|, \\ \left| \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial t_i} \right| < \eta^{-1}, \quad \left| \frac{\partial \bar{Z}}{\partial t_i} \right| < \eta^{-1}, \quad \left| \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t_i} \right| < \eta^{-1}, \end{array} \right.$$

où  $\eta$  est un nombre positif arbitrairement petit; nous lèverons plus loin (n° 43) la restriction que nous venons d'établir. Soit alors (D) un arc (ou un domaine quelconque) du plan  $t_i$ , où, pour  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , notre intégrale vérifie les conditions  $\left[ C\left(\frac{\eta}{2}\right) \right]$ ; d'après le théorème classique de H. Poincaré, cette intégrale pourra être développée en série procédant suivant les puissances entières et positives de  $\varepsilon - \varepsilon_0$ ; le développement sera convergent dans (D) pour  $|\varepsilon - \varepsilon_0| < \eta_1$ ,  $\eta_1$  ne dépendant que de  $\eta$  et nullement de  $\varepsilon_0$  (pourvu que  $|\varepsilon_0|$  reste inférieur à une certaine quantité positive  $\varepsilon_2$ , inférieure à  $\varepsilon_1$ ). En particulier, pour  $|\varepsilon_0| < \eta_1$ , le développement convergera pour  $\varepsilon = 0$ ; inversement, on saura donc développer l'intégrale précédente  $[\bar{z}]$  à partir d'une intégrale  $[z]$  d'un certain système  $(g_{n-1}, G_{n-1})$ , le développement en série procédant suivant les puissances positives croissantes de  $\varepsilon$  et restant convergent tant que l'intégrale  $[z]$  de  $(g_{n-1}, G_{n-1})$  vérifiera des conditions de la forme  $\left[ C\left(\frac{\eta}{2}\right) \right]$  et que  $|\varepsilon|$  sera suffisamment petit.

Mais, par hypothèse, les intégrales de  $(g_{n-1}, G_{n-1})$  peuvent être représentées par des caractéristiques dans le voisinage de  $t_i = 0$ , et il résulte de la théorie des caractéristiques qu'on peut prendre  $|t_i^0|$  assez petit <sup>(2)</sup> pour que les intégrales de  $(g_{n-1}, G_{n-1})$  qui vérifient en  $t_i^0$  les

<sup>(1)</sup> Les accents ont pour but d'éviter toute confusion avec les notations analogues des n°s 40, 41.

<sup>(2)</sup> La limite supérieure de  $|t_i^0|$  ne dépend que de  $\eta$ ; on incorporera cette condition aux conditions  $[C(\eta)]$ .

conditions  $[C(\eta)]$  vérifient sur tout un rayon  $\varrho'$  (<sup>1</sup>), convenablement choisi dans un secteur  $(\dot{S})$  du plan  $T \equiv \text{Log}(t_i : t_i^0)$ , les conditions  $\left[C\left(\frac{\eta}{2}\right)\right]$ . A l'infini sur  $\varrho'$  les  $U_k$  tendront vers des limites finies; de plus, pour  $|\varepsilon|$  très petit, on pourra considérer  $\varrho'$  comme fixe, car les frontières de  $(\dot{S})$  ne dépendent que de  $\dot{s}$  qui, *a priori* (<sup>2</sup>), varie très peu avec  $\varepsilon$ ; sur le chemin  $\varrho'$  les successions de valeurs des  $z_k$ ,  $S$ ,  $U_k$  varieront donc très peu avec  $\varepsilon$ .

Toutefois, ceci ne prouve pas encore que  $T$  tendant vers l'infini sur  $\varrho'$ ,  $\overline{z_k}$ , par exemple, tende vers une limite déterminée (finie ou non) : rien ne prouve que pour  $|\varepsilon|$  très petit et  $|T|$  très grand sur  $\varrho'$ ,  $\overline{z_k}$  ne soit pas indéterminé dans un cercle dont le centre serait la limite  $z_k$  de  $\overline{z_k}$  et dont le rayon serait infiniment petit avec  $\varepsilon$ ; et la même remarque s'applique à  $\overline{S}$  et aux  $\overline{U_k}$ .

Mais l'objection est facile à lever, car les  $|U_k|$ , par exemple, resteront bornés pour  $|\varepsilon|$  suffisamment petit et  $|T|$  arbitrairement grand sur  $\varrho'$ ; or, nous savons calculer un nombre positif  $\rho(M)$  assez petit pour que  $|\overline{t_i}|$  étant inférieur à  $\rho$ , on puisse trouver une caractéristique de deuxième espèce telle qu'en  $\overline{t_i}$  les  $z_k$  prennent des valeurs quelconques et les  $U_k$  des valeurs de modules  $< M$  (<sup>3</sup>). Donc, pour  $|\varepsilon|$  assez petit, c'est-à-dire pour  $|t_n - 1|$  assez petit, notre intégrale — soumise aux restrictions  $[C(\eta)]$  — peut être sûrement représentée par des caractéristiques dans le voisinage de  $t_i = 0$ .

40. THÉOREME. — La constante  $d$  de  $(G_{n-1})$  est égale à  $s^2$ . Il faut montrer maintenant que le résultat précédent subsiste quel que soit

(<sup>1</sup>) Exception faite, peut-être, de certains domaines très petits avec  $\eta$  et qu'il faudra contourner.

(<sup>2</sup>) Nous verrons même que  $\dot{s}$  est indépendant de  $\varepsilon$  (n° 40).

(<sup>3</sup>) Cela résulte aisément de l'existence du nombre  $R_0$  (fin du n° 33) et de la possibilité de choisir  $\overline{t_i}$  assez petit pour que  $|\overline{z_k} - \overline{z_k^0}|$  et  $\left|\frac{\partial \overline{z_k}}{\partial \overline{z_k^0}} - 1\right|$  (fin du n° 21) restent arbitrairement petits sur le chemin, entre  $\overline{t_i}$  et 0; ajoutons d'ailleurs qu'on a actuellement  $\overline{z_k^0} \equiv z_k$ .

$t_n$  et en particulier pour  $t_n = t_n^0$  (n° 39). Or supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et faisons décrire à  $t_n$  dans son plan un chemin  $\Gamma$  issu du point  $t_n = 1$  et aboutissant au point  $t_n^0$ ; par hypothèse, il existe sur  $\Gamma$  un arc  $\gamma$ , d'origine 1, ouvert en son extrémité 0, et tel que pour tous les points de  $\gamma$  la représentation dans le plan  $T = \text{Log}(t_i : t_i^0)$  est possible par caractéristiques, tandis qu'elle cesse de l'être pour  $t_n = 0$ : nous allons montrer que l'hypothèse est absurde.

Nous observerons tout d'abord que, pour tous les points de l'arc ouvert  $\gamma$ , les  $\bar{z}_k$  tendent sur  $\mathfrak{E}'$  vers des limites bien déterminées  $\bar{z}_k$ ; d'après le n° 38, ces limites sont des fonctions de  $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$  qui vérifient un système  $(g_{n-1}, G_{n-1})$ , où la variable principale serait, par exemple,  $t_n$ ; d'ailleurs le passage à la limite de  $(g_n, G_n)$  à  $(g_{n-1}, G_{n-1})$  ne saurait offrir aucune difficulté, car sur  $\mathfrak{E}'$ , pour  $|t_i|$  assez petit, les conditions de convergence sont sûrement remplies, d'après les propriétés des solutions-limites [qui sont des caractéristiques de  $(G_{n-1})$ ]. Je dis que pour ce système-limite  $(G_{n-1})$ , la constante  $d$  (n° 38) est identique à la constante de deuxième espèce  $s^2$  (n° 29).

Effectivement, reprenons les calculs du n° 38, en conservant toujours la notation  $j = i, k = n + 1$ ; grâce à l'équation

$$(166) \quad \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial t_n} = \frac{t_n - t_i}{t_n - t_k} \frac{\bar{z}_k}{\bar{z}_i} \frac{\partial \bar{z}_n}{\partial t_i} + \frac{t_k - t_i}{t_k - t_n} \frac{\bar{z}_n}{\bar{z}_i} \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial t_i}$$

(n° 10), il viendra

$$\frac{t_n}{\bar{z}_n} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t_n} = \frac{\bar{\zeta}^2}{\bar{z}_i^2} t_i \left( \frac{\bar{z}_{n+1}}{\bar{z}_n} \frac{\partial \bar{z}_n}{\partial t_i} - \frac{\partial \bar{z}_{n+1}}{\partial t_i} \right),$$

puis

$$\frac{t_n^2 \bar{Z}^2}{\bar{z}_n^2 \bar{\zeta} (\bar{\zeta} - 1)} \left( \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t_n} \right)^2 = - \frac{t_i^2}{\bar{z}_i \bar{z}_{n+1}} \left( \frac{\bar{z}_{n+1}}{\bar{z}_n} \frac{\partial \bar{z}_n}{\partial t_i} - \frac{\partial \bar{z}_{n+1}}{\partial t_i} \right)^2.$$

Or (1), sauf sur une parallèle à une médiane de première espèce (2) (c'est-à-dire sur une parallèle à une frontière d'un secteur de

(1) On a le droit, par hypothèse, d'appliquer la théorie des caractéristiques quand  $t_n$  appartient à l'arc ouvert  $\gamma$ .

(2) D'ailleurs, dans cette direction, les  $\bar{z}_k$  deviennent indéterminés (cf. n° 47).

deuxième espèce), le rapport

$$\frac{\bar{z}_{n+1}}{\bar{z}_n} \frac{\partial \bar{z}_n}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \bar{z}_{n+1}}{\partial t_i}$$

tend vers zéro comme  $t_i \bar{z}_i$ ; l'expression (162) tend donc pour  $|T|$  infiniment grand vers la limite de

$$\begin{aligned} & - \frac{t_i^2}{\bar{z}_i \bar{z}_{n+1}} \left( \frac{\partial \bar{z}_{n+1}}{\partial t_i} \right)^2 + d_i \frac{\bar{z}_i + \bar{z}_{n+1}}{\bar{z}_i} + d_{n+1} \frac{\bar{z}_i + \bar{z}_{n+1}}{\bar{z}_{n+1}} \\ & = -2\bar{S} + d_i + d_{n+1} - D \frac{t_i^2}{\bar{z}_i \bar{z}_{n+1}}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire vers  $\bar{s}^2$  (n° 29); et les calculs du n° 38 montrent que  $\bar{s}$  est indépendant des  $t_i$ , fait bien remarquable qui se rattache étroitement à la solution que nous donnerons du problème de Riemann (n° 56, p. 297). Il résulte de là que  $t_n$  tendant vers 0, les frontières des secteurs ( $\bar{s}$ ) (qui ne dépendent que de  $\bar{s}$ ) resteront fixes; en particulier, on pourra donc supposer que le chemin  $\varpi'$  n'est parallèle ni à une frontière ni à une médiane du secteur.

41. *Introduction des fonctions-limites  $\rho_k$ ; formation du système différentiel qu'elles vérifient.* — Étudions de plus près les valeurs-limites des  $\bar{z}_k$  et des  $\bar{U}_k$  comme dépendant du point  $t_n$  de l'arc  $\gamma$ . Les limites  $\bar{z}_k$  des  $\bar{z}_k$  (limites qu'on aurait pu désigner, d'après la seconde Partie, par  $\bar{z}_k^0$ ) peuvent être définies comme étant les solutions du système ( $G_{n-1}, G_{n-1}$ ) du n° 40, qui prennent en  $t_1^0, \dots, t_{i-1}^0, t_{i+1}^0, \dots, t_{n-1}^0$ ,  $1 + \varepsilon_0$  les valeurs

$$\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{i-1}, \bar{z}_{i+1}, \dots, \bar{z}_n, \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial t_n}, \dots, \frac{\partial \bar{z}_{i-1}}{\partial t_n}, \frac{\partial \bar{z}_{i+1}}{\partial t_n}, \dots, \frac{\partial \bar{z}_n}{\partial t_n},$$

ces dernières étant les limites pour  $t_i = 0$  des symboles analogues  $\left[\frac{\bar{z}}{z}\right]$  qui définissent en  $t_n = 1 + \varepsilon_0$  notre intégrale  $[\bar{z}]$ . Cela étant, posons

$$\rho_k \equiv \lim_{t_i=0} \frac{t_k}{\bar{z}_i} \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial t_i};$$

nous aurons ainsi, d'après (116),

$$(167) \quad U_k \equiv \lim_{t_i=0} \bar{U}_k = \frac{\rho_k}{t_k} + \frac{z_k}{t_k} \lim_{t_i=0} \frac{\frac{t_i}{z_i} \frac{\partial \bar{z}_{n+1}}{\partial t_i}}{z_i + z_{n+1}} = \frac{1}{t_k} \left( \rho_k - \frac{s^* z_k}{Z} \right),$$

en supposant que sur  $\odot |t_i^*|$  croisse indéfiniment. Dans le cas où  $Z \equiv \lim (z_i + z_{n+1})$  serait nul en  $\theta$ , on aurait, d'après (145),

$$(168) \quad V_k \equiv \lim_{t_i=0} \bar{V}_k = \frac{\rho_k}{t_k}.$$

Nous nous proposons d'établir que *les  $\rho_k$  restent bornés quand  $t_n$  tend vers  $\theta$  sur  $\gamma$* ; à cet effet, nous formerons d'abord le système différentiel vérifié par les  $\rho_k$ . Tout d'abord, considérons le système  $(g_n)$  écrit sous la forme (166) ( $k \neq i, n, n+1$ ); sur tout arc fermé  $\gamma'$  appartenant à  $\gamma$  le second membre converge uniformément vers sa limite pour  $t_i = 0$ ; on peut donc écrire

$$(169) \quad \rho_k = \frac{z_k}{z_n} \rho_n + \frac{t_k - t_n}{z_n} \frac{\partial z_k}{\partial t_n} \quad (k \neq i, n+1),$$

et il n'y a plus qu'à calculer  $\rho_n$ . Or posons

$$\sigma \equiv \frac{t_n}{z_i} \frac{\partial \bar{z}_n}{\partial t_i},$$

de sorte que  $\sigma$  tend vers  $\rho_n$  lorsque  $t_i$  tend vers zéro; on aura

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t_n} = \frac{\sigma}{t_n} - \frac{t_n}{z_i^2} \left( \frac{\partial \bar{z}_n}{\partial t_i} \right)^2 + \frac{t_n}{z_i} \frac{\partial^2 \bar{z}_i}{\partial t_n^2}.$$

Explicitons la dérivée seconde à l'aide de  $(G_n)$  et passons à la limite comme tout à l'heure; il viendra

$$(170) \quad \frac{\partial \rho_n}{\partial t_n} = -\frac{\rho_n^2}{2 t_n} + \frac{\rho_n}{z_n} \frac{\partial z_n}{\partial t_n} - \frac{\mathfrak{A}_n}{2 z_n} + \frac{d_n}{2 t_n} + \frac{D}{2} z_n (t_n z_n - 1),$$

en posant

$$\mathfrak{A}_n \equiv \sum_{h=1}^{n+2} \left[ \frac{t_h - t_n}{z_h} \left( \frac{\partial z_h}{\partial t_n} \right)^2 + \frac{d_n z_h^2 - d_h z_n^2}{z_h (t_h - t_n)} \right] + \frac{\rho_n^* Z}{t_n} - \frac{d_n Z}{t_n}.$$

D'après (169) et (170) les  $\rho_k$  et  $\rho_n$  sont des fonctions méromorphes de



$t_n$  en tout point distinct des  $t_h$  ( $h \neq i$  et  $n$ ); ils ne peuvent donc cesser d'être bornés sur  $\gamma$  que s'ils présentent un pôle en  $\theta$ ; nous allons montrer que l'hypothèse est inadmissible.

42. THÉORÈME. — *Les  $\rho_k$  restent bornés quand  $t_n$  tend vers  $\theta$ . Moyennant au besoin une transformation (105) on peut toujours supposer qu'en  $\theta$  — et par suite sur tout arc voisin  $\gamma'$  — les  $z_k$  restent finis. Je dis qu'alors, si  $\rho_n$  présente un pôle en  $\theta$ ,  $Z$  s'y annule nécessairement.*

Supposons d'abord  $z_n(\theta) \neq 0$ . D'après (170)  $\rho_n$  aura en  $\theta$  un pôle du premier ordre; et en posant  $z_k(\theta) \equiv c_k$ , on pourra écrire, dans le voisinage de  $\theta$ ,

$$\rho_k = \frac{c_k}{c_n} \frac{r_n}{t_n - \theta} + \dots \quad (r_n \neq 0).$$

Mais, en vertu de (41), on a

$$s = \sum'' t_k \sqrt{D(z_k - h'_k)(z_k - h''_k)} = \sum'' \rho_k,$$

d'après (33) et la définition de  $\rho_k$ ; or  $(1) s (= s^* \pm 1)$  est constant; on doit donc avoir

$$\sum'' c_k = 0 \quad \text{ou} \quad Z(\theta) = 0.$$

On aboutit à la même conclusion si  $z_n(\theta) = 0$ . En effet, d'après ( $G_n$ ) et les équations (5),  $z_n$  possède en  $\theta$  un zéro du premier ordre, soit

$$z_n = c(t_n - \theta) + \dots;$$

on aura donc

$$\rho_k = \frac{r_n c_k}{c(t_n - \theta)^2} + \dots \quad (k \neq i, n, n+1);$$

mais l'équation (170) montre qu'en  $\theta$ ,  $\rho_n$  est infini du premier ordre au plus; on en déduit, puisque  $s$  est constant,

$$c_1 + \dots + c_{i-1} + c_{i+1} + \dots + c_{n-1} + c_{n+2} = 0.$$

Or, comme  $z_n(\theta) = 0$ , la relation (5)<sub>1</sub>, écrite pour ( $G_{n-1}$ ), donne alors  $Z(\theta) = 0$ .

Ce point établi, remplaçons le système ( $G_n$ ) (où  $t_i$  est la variable principale) par le système équivalent du n° 33, aux inconnues  $z_k$ ,

---

(1) Voir, par exemple, n° 46, p. 271.

S,  $V_k$ ; les équations (144), (145), (146) en représentent la limite <sup>(1)</sup> quand on fait tendre  $z_i + z_{n+1} = Z$  vers zéro. Si  $\theta$  est un pôle pour les  $\rho_k$ , sur  $\mathcal{C}'$  et  $\gamma$ , dans le voisinage de  $t_i = 0$ ,  $t_n = \theta$ ,  $|Z|$  sera arbitrairement petit; les  $|V_k|$  et  $|z_i|$  seront arbitrairement grands. Soit  $(t'_i, t'_n)$  un point appartenant à ce voisinage; quelque voisin que ce point soit de  $(0, \theta)$ , les  $z_k$  y sont finis, et de même les  $V_k$ , car la singularité polaire  $t_n = \theta$  est isolée; or  $t_i$  variant seul à partir de  $t'_i$  sur  $\mathcal{C}$ , on aura, d'après (145) et (146),

$$(171) \quad \frac{dV_k}{dz_k} = \frac{V_k}{2z_k} (1 + \Omega),$$

$|\Omega|$  étant arbitrairement petit si  $(t'_i, t'_n)$  a été choisi assez près de  $(0, \theta)$ . Mais  $z_k(t_n)$  n'ayant pas de pôle en  $(0, \theta)$  reste uniformément borné sur l'arc envisagé du chemin  $\mathcal{C}$ , si voisin que  $t'_n$  soit de  $\theta$ ; d'après (171)  $|V_k|$  reste donc uniformément borné, soit inférieur à  $\mathfrak{M}$ , et l'existence d'une singularité polaire est inadmissible aussi bien pour  $\rho_k$  que pour  $V_k$ .

43. *Application au théorème fondamental, et suppression de la restriction du n° 39.* — Or, comme nous l'avons rappelé au n° 39 (*ad fin.*), lorsque les  $|\bar{V}_k|$  — ou les  $|\bar{U}_k|$  — sont bornés, soit pour

$$|\bar{V}_k| < M \quad (k \neq i, n+1),$$

il est possible de calculer un nombre  $R$  tel que pour

$$(172) \quad \Re \left( \text{Log} \frac{t_i}{t_i^0} \right) < -R \quad \text{et} \quad \left| \arg \text{Log} \frac{t_i}{t_i^0} \right| < \frac{\pi}{2} - \eta,$$

on puisse construire des caractéristiques qui représentent une intégrale prenant en  $t_i$  un système de valeurs quelconques  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{i-1}, \bar{z}_{i+1}, \dots, \bar{z}_n, \bar{z}_{n+2}$ , tandis que les  $|V_k|$  y prennent des valeurs  $< M$ . Actuellement, calculons  $R$  en faisant  $M = \mathfrak{M}$ ; il résulte de l'analyse du n° 42 que pour  $\text{Log}(t_i : t_i^0)$  assez loin dans  $(\mathfrak{D})$  on a sûrement  $|V_k| < \mathfrak{M}$  si  $t_n$  appartient à l'arc ouvert  $\gamma$ ; or l'intégrale  $[\bar{z}]$  envisagée en un tel

(1) Abstraction faite de la limite de (114), facile à obtenir, mais que nous n'aurons pas à utiliser.

point  $t_i$  est une fonction continue <sup>(1)</sup> de  $t_n$ , sur l'arc *fermé*  $\gamma$ , pour  $t_n = 0$ : l'intégrale est donc encore représentable par caractéristiques pour  $t_n = 0$ . Le chemin  $\Gamma$ , aboutissant en  $t_n^0$ , ne saurait donc être coupé par aucun point d'arrêt tel que  $\theta$ , et l'intégrale est encore représentable par caractéristiques pour  $t_n = t_n^0$ , ainsi que nous voulions l'établir.

Mais, pour que notre théorème fondamental soit complètement démontré, il faut encore que nous nous débarrassions de la restriction que nous avons introduite au n° 39 : nous avons supposé que les valeurs initiales des intégrales de  $(g_n, G_n)$  satisfont à des conditions de la forme  $[C(\eta)]$ , pour  $t_n = 1 + \varepsilon_0$  (avec  $|\varepsilon_0|$  et  $|t_i|$  suffisamment petits en fonction de  $\eta$ ). Or supposons que la représentation par caractéristiques dans le voisinage de  $t_i = 0$  ne soit possible que pour les intégrales dont le point représentatif

$$m \left( \overset{\wedge}{z}_1, \dots, \overset{\wedge}{z}_n, \frac{\partial \overset{\wedge}{z}_1}{\partial t_i}, \dots, \frac{\partial \overset{\wedge}{z}_n}{\partial t_i} \right)$$

des conditions initiales en  $(t_1^0, \dots, t_n^0)$  appartienne à un certain domaine  $(\Delta)$ ; soit  $p$  un point frontière de  $(\Delta)$ . Envisageons les intégrales définies en  $(t_1^0, \dots, t_n^0)$  par des conditions initiales identiques aux  $2n - 1$  coordonnées de  $p$ , sauf la première, par exemple,  $\overset{\wedge}{z}_1 = c$  que nous ferons tendre vers la valeur frontière  $c_0$  [de telle sorte que l'arc  $\mathfrak{L}$  décrit par le point  $m$  correspondant reste dans  $(\Delta)$ ]. Par hypothèse, sur tout arc fermé appartenant à  $\mathfrak{L}$  (au sens strict),  $\overline{U}_1, \dots, \overline{U}_n$  <sup>(2)</sup> admettent des limites finies quand  $t_i$  tendra vers zéro. Considérées comme fonctions de l'un quelconque des  $t_h$  ( $h \neq i$ ), ces limites vérifient un système  $(g_{n-1}, G_{n-1}) - (170)$ , à points critiques et à singularités non algébriques fixes; or cette remarque permet d'élucider l'allure de ces limites, envisagées comme dépendant de la constante  $c$ ; il résulte en effet d'un théorème de M. Painlevé <sup>(3)</sup> que

<sup>(1)</sup> Du moins pour  $t_i$  suffisamment voisin de 0, et moyennant, comme nous l'avons dit, une transformation (105) éventuelle.

<sup>(2)</sup> On remplacerait les  $\overline{U}_h$  par les  $\overline{V}_h$  si cela est nécessaire.

<sup>(3)</sup> La démonstration procède comme dans les *Leçons... professées à Stockholm*, Paris, 1897, p. 36-38 et p. 415.

les fonctions-limites  $U_1, \dots, U_n$  ou bien sont holomorphes pour  $c = c_0$ , ou bien admettent tout au plus  $c = c_0$  comme singularité polaire <sup>(1)</sup>.

Le premier cas est à exclure : sinon, pour les points  $t_i$  arbitrairement voisins de zéro, les  $|\bar{U}_h|$  seraient bornés quelque voisin que soit  $m$  de  $p$ , et  $p$  ne serait pas point frontière pour  $(\Delta)$ . Dans le second cas, le point  $c = c_0$  est nécessairement pour les  $(z_h, U_h)$  une singularité indépendante des  $t_h$  et des  $t_h^0$ ; sinon on envisagerait les  $U_h$  comme fonctions de  $t_n$  dans le voisinage du pôle  $t_n = t_n^0$ , pour  $c = c_0$ , et l'on serait ramené au cas du n° 42; on peut donc affirmer que  $p$  restera un point frontière de  $(\Delta)$ , même si l'on modifie très peu <sup>(2)</sup>  $(t_1^0, \dots, t_n^0)$ . Montrons que l'hypothèse est absurde.

Effectivement, si  $m$  est un point de  $(\Delta)$  suffisamment voisin de  $p$ , il existe dans les plans complexes  $\hat{z}_1, \dots, \frac{\partial \hat{z}_n}{\partial t_i}$  un système de  $2n$  cercles  $\Gamma$  ayant leurs centres aux  $2n$  coordonnées de  $m$  et ne contenant sur leurs circonférences qu'un seul point frontière : le point  $p$ . Or, il est toujours possible de substituer au point  $(t_1^0, \dots, t_n^0) \equiv t^0$  un point voisin  $t'_0$  tel que la même intégrale, définie par  $p$  en  $t^0$ , soit définie également en  $t'_0$  par un point  $m'$  intérieur (au sens strict) aux cercles  $\Gamma$  : on posera

$$t_h^0 - t'_0 = x'_h + \sqrt{-1} x''_h \quad (x'_h, x''_h \text{ réels});$$

et tout reviendra à résoudre un système de la forme

$$\sum_{j=1}^n (a'_{ij} x'_j + a''_{ij} x''_j) = \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, 2n),$$

où les  $a', a''$  sont des quantités réelles formées à l'aide des coefficients de  $(G_n)$ , tandis que les  $\varepsilon_i$  sont des quantités réelles, très petites de signes donnés; la résolution d'un tel système est toujours possible, quitte à modifier préalablement (très peu) le point  $t^0$  si le déterminant du système était nul. L'intégrale définie par les conditions  $t'_0, m'$  est sûrement représentable par caractéristiques malgré le déplacement de  $t^0$ , puisque la frontière de  $(\Delta)$  n'a pas varié (au voisinage de  $p$ ); or,

(1) Quitte à modifier  $(t_1^0, \dots, t_n^0)$  on peut toujours supposer  $c_0 \neq 0$  et  $\infty$ .

(2) De manière à ne pas rencontrer d'autres singularités polaires.

d'après ce qui a été établi au n° 42, elle est encore représentable par caractéristiques quand on fait tendre  $t'_0$  vers  $t^0$ ; ainsi  $p$  ne saurait être un point frontière de  $(\Delta)$ .

Il est donc bien établi qu'une intégrale quelconque de  $(g_n, G_n)$  est représentable par caractéristiques dans le voisinage de l'origine.

## QUATRIÈME PARTIE.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES CARACTÉRISTIQUES  
A L'ÉTUDE DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE DANS LA RÉGION  $(\mathbf{R})$ .

44. *Prolongement de l'intégrale à l'intérieur d'un demi-secteur.* — Nous pouvons maintenant utiliser en toute sécurité les caractéristiques de la seconde Partie pour étudier une intégrale quelconque de  $(g_n, G_n)$  à l'intérieur de la région  $(\mathbf{R})$ , lieu des points  $T = \text{Log}(t_i : t_i^0)$  dont les arguments sont compris entre  $\frac{\pi}{2} + \eta$  et  $\frac{3\pi}{2} - \eta$  <sup>(1)</sup>. Nous commencerons par faire cette étude à l'intérieur d'un secteur, et pour compléter les résultats du n° 17 nous envisagerons plus spécialement les caractéristiques et les secteurs de première espèce.

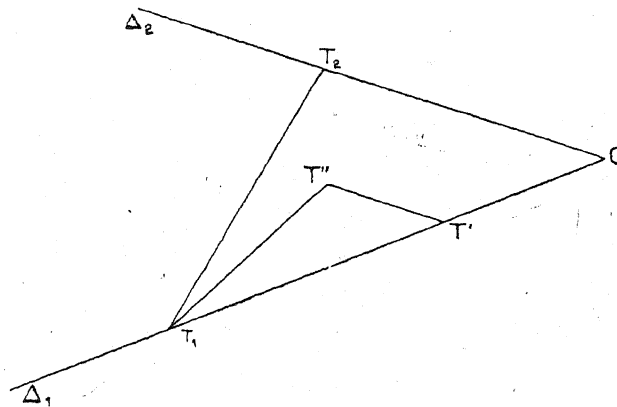
Supposons d'abord que nous ayons calculé le long d'un rayon  $O\Delta$  du plan  $T$  une caractéristique de première espèce de  $(G_n)$ . A ce rayon correspond un certain choix des nombres  $\omega$  et  $f$  (n° 17); faisons varier  $\omega$  de 0 (inclus) à 1 (exclu) et prenons successivement  $f = \pm 1$ ;  $O\Delta$  balayera un secteur ouvert  $(S)$ , divisé par sa médiane ( $\omega = 0$ ) en deux demi-secteurs,  $(S')$ ,  $(S'')$ . Nous montrerons d'abord que les caractéristiques définies aux extrémités des rayons d'un même demi-secteur ouvert par les mêmes conditions initiales (pour  $T = \infty$ ,  $R_k = R_k^0$ ,  $z_k = z_k^0$ ; pour  $T = 0$ ,  $z_i = z_i^0$ ) appartiennent à la même intégrale de  $(g_n, G_n)$ .

Soient  $O\Delta_1$  et  $O\Delta_2$  deux rayons d'un demi-secteur,  $(S')$  par

(1) La condition est équivalente à (57).

exemple. Prenons respectivement sur  $O\Delta_1$  et  $O\Delta_2$  deux points  $T_1$  et  $T_2$  arbitrairement éloignés, et tels en outre que le segment rectiligne  $T_1T_2$  fasse avec l'axe imaginaire du plan  $T$  un angle supérieur à  $\eta$  en valeur absolue <sup>(1)</sup>, et que tous les rayons  $T_1T''$  issus du point  $T_1$  et pénétrant à l'intérieur du triangle  $OT_1T_2$  remplissent la même condition <sup>(1)</sup>; nous désignerons enfin par  $T''T'$  un segment rectiligne dont l'extrémité  $T'$  est sur  $O\Delta_1$  et qui fait avec l'axe imaginaire un angle supérieur à  $\eta$  en valeur absolue <sup>(1)</sup>.

Fig. 3.



Cela étant, considérons deux caractéristiques de première espèce définies par les mêmes conditions initiales relativement aux extrémités de  $O\Delta_1$  pour la première, et de  $O\Delta_2$  pour la seconde.

L'algorithme d'approximations successives que nous avons employé pour calculer les caractéristiques de première espèce ne cessera pas de converger si l'on substitue au rayon  $O\Delta_1$  un chemin brisé tel que  $OT_2T_1\Delta_1$  ou  $OT''T'T_1\Delta_1$ . Or supposons d'abord que le triangle  $OT_1T_2$  ne contienne à son intérieur aucune circonférence  $(\gamma_{k,N})$  (n° 18, p. 211); les fonctions à intégrer seront holomorphes dans le triangle  $OT_1T_2$ , et, à chaque approximation, les quadratures étendues à  $OT$  ou  $\Delta_1T$  ( $T$  appartenant au segment  $OT'$ ) auront les mêmes valeurs, qu'elles

(1) Cette restriction est introduite pour que le nombre positif  $l$  figurant dans la démonstration de convergence (n° 20) puisse être conservé sur les nouveaux chemins.

soient étendues au chemin rectiligne primitif ou au chemin brisé  $OT'T''T_1\Delta_1$ ; le résultat subsiste d'ailleurs si  $T$  appartient au rayon  $T_1\Delta_1$ . Ainsi, à la limite, les valeurs obtenues pour les intégrales coïncident sur  $OT'$  et  $T_1\Delta_1$ ; et l'introduction de la ligne brisée  $OT'T''T_1\Delta_1$  comme chemin d'intégration fournit *le prolongement dans le triangle  $OT_1T_2$  de l'intégrale définie primitivement sur  $O\Delta_1$* .

La conclusion est moins immédiate dans le cas où le triangle  $OT_1T_2$  contient une circonférence  $(\gamma_{k,N})$ . Soit  $\bar{T}$  un point quelconque de  $O\Delta_1$ ; de  $\bar{T}$  comme origine décrivons un contour fermé  $\mathcal{L}^{(1)}$  autour de  $(\gamma_{k,N})$  et considérons les deux caractéristiques définies par les mêmes données extrêmes, la première sur  $O\Delta_1$ , la seconde sur le chemin  $O\bar{T}\mathcal{L}\bar{T}\Delta_1$ ; celle-ci définit dans le plan complexe une intégrale qui est *uniforme* à l'intérieur de  $\mathcal{L}$ ; calculée sur  $O\Delta_1$ , cette intégrale définit  $(^2)$  à son tour une troisième caractéristique qui coïncide avec la seconde sur  $O\bar{T}$  et  $\bar{T}\Delta_1$ ; mais, d'après l'uniformité de la convergence des approximations successives, il n'existe qu'une seule caractéristique répondant aux mêmes données extrêmes imposées sur  $O\Delta_1$ ; la troisième caractéristique coïncide donc avec la première, et, par suite, celle-ci, avec la seconde sur  $O\bar{T}\Delta_1$ , et *la conclusion est la même que plus haut*.

Or, aux points arbitrairement éloignés  $T_1, T_2$  du demi-secteur  $(S')$ , les  $R_k$  (ou les  $z_k$ ) prennent des valeurs  $R_k^{(1)}, R_k^{(2)}$  (ou  $z_k^{(1)}, z_k^{(2)}$ ) qui diffèrent aussi peu qu'on voudra des  $R_k^0$  (ou des  $z_k^0$ ); pour le voir, il suffit d'observer que sur  $T_1T_2$  on peut calculer les caractéristiques par les formules (51)-(54) moyennant la substitution de  $R_k^{(1)}$  à  $R_k^0$  et le remplacement de  $t_i^0, z_i^0$  par les valeurs  $t_i^{(2)}, z_i^{(2)}$  prises par  $t_i, z_i$  en  $T_2$ ; comme  $T_1T_2$  appartient à un demi-secteur ouvert,  $[t_{i0} : t_i^{(2)}]^s$  reste constamment très petit ou très grand en module suivant que le demi-secteur  $(S')$  est au-dessus ou au-dessous de la médiane;  $t_{i0} z_{i0}$  restera très petit, et les  $\zeta_k$  (ou les  $z_k$ ) ainsi que les  $R_k$  varieront très peu.

Mais la méthode des approximations successives montre que *les caractéristiques définies en  $O$  et en  $T_2$  par les systèmes de valeurs  $z_i^0$  et*

(<sup>1</sup>) On pourra prendre pour  $\mathcal{L}$  un polygone dont les côtés font avec l'axe imaginaire des angles supérieurs à  $\eta$ .

(<sup>2</sup>) En vertu du résultat fondamental de la troisième Partie.

$[z_k^{(2)}, R_k^{(2)}]$  — celles-ci pouvant dépendre de  $T_2$  et tendant vers les  $z_k^0, R_k^0$  lorsque  $T_2$  s'éloigne à l'infini — *tendent uniformément sur  $O\Delta_2$  vers la caractéristique définie en  $O$  et à l'infini sur  $O\Delta_2$  par  $z_i^0$  et les limites  $z_k^0, R_k^0$  des  $z_k^2, R_k^2$ . Ainsi,  $\varepsilon$  étant un nombre positif arbitrairement petit, on peut choisir  $T_1$  et  $T_2$  assez loin pour que l'intégrale, prolongement sur  $O\Delta_2$  de la caractéristique définie sur  $O\Delta_1$  et la caractéristique définie par les mêmes données extrêmes sur  $O\Delta_2$  diffèrent mutuellement d'une quantité de module uniformément inférieur à  $\varepsilon$ .*

C. Q. F. D.

45. *Soudure de deux demi-secteurs de première espèce  $(S'), (S'')$ . Étude de  $R_k, z_k$  et  $t_i z_i$  dans un secteur de première espèce.* — Étudions maintenant le passage d'un demi-secteur à l'autre et le voisinage de la médiane de première espèce qui les sépare. Soient  $O\Delta_1$  et  $O\Delta_2$  deux rayons appartenant respectivement à  $(S')$  et  $(S'')$ ; joignons ces rayons par un segment  $T_1 T_2$  faisant avec l'axe imaginaire un angle supérieur à  $\eta$  <sup>(1)</sup>. En  $T_1$  les fonctions  $R_k$  et  $z_k$  prennent des valeurs  $R_k^1$  et  $z_k^1$  très voisines de  $R_k^0$  et  $z_k^0$  (si  $T_1$  est assez loin); soit  $\zeta_k^1$  la valeur correspondant <sup>(2)</sup> à  $z_k^1$  au moyen de (36); posons alors sur  $T_1 T_2$  (les notations étant celles du n° 17)

$$R_k = R_k^1 + \int_0^\tau \left( \Psi_k \frac{\partial \zeta_k}{\partial \tau} + \Omega_k \right) d\tau,$$

$$\zeta_k = \zeta_k^1 + \int_0^\tau (1 + F_k) d\tau,$$

$$\text{Log} \frac{t_i}{t_i^1} = \int_0^\tau \frac{d\tau}{t_i z_i} \quad (t_i^1 = t_i^0 e^{s T_1});$$

on développera par approximations successives la solution des équations précédentes, tout comme le long du rayon  $\Delta$  du n° 17, mais sans avoir à introduire les  $\tau_i$ ; en particulier, *malgré que la variation de  $\tau$  ne soit plus infiniment petite sur  $T_1 T_2$  (comme elle l'était sur  $T_1 \Delta_1$ ), les*

(1) Voir la note de la page 265.

(2) Cette valeur est définie sans ambiguïté par les calculs mêmes qui fournissent la caractéristique de  $(G_n)$  le long de  $O\Delta_1$ .



inégalités (78)<sub>f</sub> ( $f \neq 3$ ) continueront à rester valables. Dès lors, d'après (78)<sub>1</sub>, on voit aussitôt que le long de  $T_1 T_2$  et  $T_2 \Delta_2$  les  $R_k$  restent aussi voisins qu'on voudra de  $R_k^1$ , c'est-à-dire de  $R_k^0$ , pourvu que  $T_1$  et  $T_2$  soient assez éloignés; *dans tout secteur fermé intérieur au sens strict à (S), les  $R_k$  tendent donc uniformément vers leurs limites  $R_k^0$ .*

Étudions maintenant l'allure des  $z_k$ . Tout d'abord, d'après (36) on peut écrire

$$(172) \quad z_k = A_k e^{\sqrt{v} \zeta_k} + B_k e^{-\sqrt{v} \zeta_k} + C_k$$

avec

$$(173) \quad \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ z_k^0 - \frac{h'_k + h''_k}{2} \pm \sqrt{(z_k^0 - h'_k)(z_k^0 - h''_k)} \right], \quad C_k = \frac{h'_k + h''_k}{2};$$

or, d'après (78)<sub>2</sub>, (43) et (78)<sub>4</sub>, on peut écrire

$$e^{\sqrt{v} \zeta_k} = \frac{1 - (A - B) \times (1 + \theta_1 L_1 r_0) \left( \frac{t_i}{t_i^0} \right)^s}{1 - (A + B) \times (1 + \theta_1 L_1 r_0) \left( \frac{t_i}{t_i^0} \right)^s} (1 + \theta_2 L_2 r) \quad (|\theta_1|, |\theta_2| < 1),$$

où  $L_1$  et  $L_2$  désignent deux nombres positifs bornés. Rapprochée de (172), l'équation précédente donne enfin

$$(174) \quad z_k = A_k \frac{1 - (A - B) \times (1 + \theta_1 L_1 r_0) \left( \frac{t_i}{t_i^0} \right)^s}{1 - (A + B) \times (1 + \theta_1 L_1 r_0) \left( \frac{t_i}{t_i^0} \right)^s} (1 + \theta_2 L_2 r) \\ + B_k \frac{1 - (A + B) \times (1 + \theta_1 L_1 r_0) \left( \frac{t_i}{t_i^0} \right)^s}{1 - (A - B) \times (1 + \theta_1 L_1 r_0) \left( \frac{t_i}{t_i^0} \right)^s} (1 + \theta_3 L_3 r) + C_k \quad (|\theta_3| < 1),$$

$L_3$  étant aussi un nombre positif borné; observons enfin que  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  sont indépendants de  $t_i^0$ , et que, d'après la remarque faite tout à l'heure sur les relations (78)<sub>f</sub> ( $f \neq 3$ ), l'équation (174) sera valable dans tout le secteur de première espèce (S).

Cela étant, faisons tendre  $t_i$  vers zéro sur un chemin rectiligne ou spiraliforme  $\odot$  de manière que  $T$  s'éloigne indéfiniment sur un rayon

de S appartenant au demi-secteur inférieur (S''); on aura ainsi <sup>(1)</sup> (n° 17)

$$\gamma > \frac{3\pi}{2} - \delta;$$

$(t_i : t_i^0)^s$  croîtra indéfiniment, et d'après (174)  $z_k$  tendra vers la limite

$$(175)^- \quad z_k^- = A_k \frac{A-B}{A+B} + B_k \frac{A+B}{A-B} + C_k;$$

de même, dans le demi-secteur supérieur (S'),  $z_k$  tendra vers la limite

$$(175)^+ \quad z_k^+ = A_k + B_k + C_k,$$

quantité qui est égale à  $z_k^0$  d'après (173); et cela devait être puisque les calculs de la deuxième Partie étaient effectués précisément dans (S') (cf. n° 17, p. 210).

On étudiera de même

$$t_i z_i \quad \text{et} \quad t_i z_{n+1} (= -t_i z_i - \Sigma'' t_i z_k);$$

à l'aide de (44) et (78)<sub>3</sub> on obtiendrait une formule que nous écrirons (en introduisant encore des nombres positifs bornés,  $L_4, L_5$ )

$$(176) \quad \frac{1}{t_i z_i} = \frac{1}{2B^2 x} (1 + \theta_4 L_4 r_0) \left( \frac{t_i}{t_i^0} \right)^{-s} \\ - \frac{A}{B^2} + \frac{A^2 - B^2}{2B^2} x (1 + \theta_5 L_5 r_0) \left( \frac{t_i}{t_i^0} \right)^s \quad (|\theta_4|, |\theta_5| < 1);$$

on pourra la rapprocher <sup>(2)</sup> de la représentation analogue donnée <sup>(3)</sup> pour  $\lambda^{-1}$ . Ainsi, quand T s'éloigne indéfiniment sur un rayon quelconque supérieur ou inférieur à la médiane,  $t_i z_i$  tend vers zéro comme une quantité de l'ordre de  $\left( \frac{r}{r_0} \right)^\omega$ ,  $\omega$  étant l'exposant d'indétermination <sup>(4)</sup> du rayon. Mais alors, en vertu de (5)<sub>2</sub>, on devra avoir

$$\Sigma'' t_k (z_k^+ - z_k^-) = 0,$$

<sup>(1)</sup> D'après (78)<sub>4</sub> l'argument  $\gamma$  de  $T_0$  (n° 17) est asymptote à celui de T (n° 20; *ad fin.*).

<sup>(2)</sup> Grâce aux formules du n° 12 (p. 198).

<sup>(3)</sup> [VI], n° 47, p. 315.

<sup>(4)</sup> [VI], n° 47, p. 316.

c'est-à-dire, d'après les relations (175),

$$\Sigma'' t_k \left( \frac{A_k}{A+B} - \frac{B_k}{A-B} \right) = 0;$$

or cette relation est une conséquence des formules

$$\Sigma'' t_k (A_k + B_k) = -A, \quad \Sigma'' t_k (A_k - B_k) = -B,$$

qui résultent elles-mêmes du rapprochement de (36), (38) (définition de A et B) et (173).

Comme application de la formule (174) nous allons montrer comment on peut retrouver *a priori* les solutions  $z_k$  à limites  $z_k^0$  infinies. A cet effet, construisons, par exemple, une caractéristique de première espèce, telle que  $z_{n+2}^0 = 0$ ; effectuons ensuite sur le système  $(G_n)$  la transformation (105); on aura  $z_{n+2}' = \infty$ , et de même  $z_k' = \infty$ , sauf pour  $z_k^0 = 0$ . Or, si l'on suppose ce cas réalisé dans un demi-secteur supérieur, par exemple, on tire de (175)<sup>+</sup>, (174), (173), puis de (35), la relation approximative

$$z_k \sim 2B \times (A_k - B_k) \left( \frac{t_i}{t_i^0} \right)^s = 2B \times \sqrt{h_k' h_k''} \left( \frac{t_i}{t_i^0} \right)^s = 2B \frac{z}{t_k} \frac{\sqrt{d_k}}{\sqrt{D}} \left( \frac{t_i}{t_i^0} \right)^s,$$

et de même pour  $z_{n+2}$

$$z_{n+2} \sim 2B \times \frac{\sqrt{d_{n+2}}}{\sqrt{D}} \left( \frac{t_i}{t_i^0} \right)^s;$$

mais on déduit de là

$$z_k' \sim \frac{\sqrt{d_k}}{\sqrt{d_{n+2}}} \frac{1 - t_k}{t_k} = - \frac{\sqrt{d_k}}{t_k' \sqrt{d_{n+2}}},$$

expression qui coïncide avec la valeur (88) (1) si l'on observe que (105) conserve  $d_k$  et échange  $d_{n+2}$  et D. Enfin, on verrait de même que  $t_i z_i'$  tend vers une limite finie  $\frac{B\sqrt{D}}{\sqrt{d_{n+2}}} = \frac{s}{\sqrt{d_{n+2}}}$ , ce qui concorde bien avec la valeur trouvée antérieurement pour  $\alpha$  (n° 26), car la transformation (105) conserve  $s$ .

---

(1) D'après le n° 26, la valeur-limite de  $z_k$  est précisément la constante  $\alpha_k$  de (88).

46. *Prolongement de l'intégrale hors du secteur primitif.* — Nous envisagerons d'abord la fonction  $S$ . Désignons désormais par  $(S_0)$  le secteur (ouvert) de première espèce où nous venons d'étudier l'intégrale, par  $(S'_0)$  et  $(S''_0)$  les deux demi-secteurs de  $(S_0)$  situés respectivement au-dessus et au-dessous de la médiane. D'après (5) et (176) (1), si  $T$  s'éloigne indéfiniment sur un rayon de  $(S'_0)$  [ou de  $(S''_0)$ ],  $\left(\frac{t_i}{z_{n+1}} \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}\right)^2$  tendra vers  $(s-1)^2$  [ou vers  $(s+1)^2$ ]; il résulte alors de (114) que, dans  $(S'_0)$ ,  $2S$  tendra vers  $d_i + d_{n+1} - (s-1)^2$ . On aura donc  $\bar{s}^2 = (s-1)^2$ ; et, puisque  $\bar{s}$ , comme  $s$ , vérifie (42) (n° 30), on en déduira, pour  $s$  complexe,

$$(177) \quad \bar{s} = s - 1;$$

et dans  $(S''_0)$ , il viendrait de même  $\bar{s} = s + 1$ . D'ailleurs lorsque  $T$  s'éloigne indéfiniment dans  $(S'_0)$ , il résulte (1) de (174) et de (116) que  $U_k$  tend vers une limite bien définie (2); on pourra donc calculer l'intégrale générale de  $(G_n)$ , dans  $(S'_0)$ , par des caractéristiques de deuxième espèce (du moins pour  $r$  assez petit). Comme au n° 44, on montrerait que les caractéristiques qui répondent aux mêmes données extrêmes ne cessent d'appartenir à une même intégrale de  $(G_n)$  lorsque le rayon sur lequel on effectue le calcul balaie tout le secteur (ouvert) de deuxième espèce,  $(S_1)$ , contenant  $(S'_0)$ ; or d'après (177), et en vertu des résultats du n° 30,  $(S_1)$  adhère à  $(S_0)$  suivant  $(S'_0)$ ; sa médiane  $O\Delta_1$  sera la frontière supérieure de  $(S_0)$ ; et pour frontière inférieure,  $(S_1)$  aura la médiane  $(O\Delta_0)$  de  $(S_0)$ .

On définirait de même au-dessous de  $O\Delta_0$  un second secteur de deuxième espèce  $(S_{-1})$ , adhérent à  $(S_0)$  suivant  $(S''_0)$ ; nous désignerons les constantes fondamentales  $s, \bar{s}$  des secteurs  $(S_0), (S_1), (S_{-1})$  par

(1) La méthode même qui a fourni les équations (176) ou (174) montrerait qu'on a le droit de dériver ces équations par rapport à  $t_i$ , quitte à remplacer les  $\theta$  et  $L$  par d'autres quantités de même définition.

(2) On remplacera  $U_k$  par  $V_k$  si cela est nécessaire. On a d'ailleurs

$$U_k^+ - U_k^- = \frac{\bar{z}_k^+}{t_k \Sigma'' \bar{z}_h^+} (s-1) + \frac{\bar{z}_k^-}{t_k \Sigma'' \bar{z}_h^-} (s+1) + 2s \left( \frac{A_k}{A+B} + \frac{B_k}{A+B} \right).$$

$s_0 (= s)$ ,  $s_1$  et  $s_{-1}$ ; on aura ainsi

$$s_1 = s_0 - 1, \quad s_{-1} = s_0 + 1.$$

Enfin, d'après la remarque qu'on vient d'énoncer à propos des caractéristiques de  $(S_1)$ , on peut affirmer que lorsque  $T$  s'éloigne à l'infini sur un rayon intérieur au sens strict à  $(S_1)$ , les  $z_k$  tendent vers les  $z_k^+$ ,  $2S$  vers  $d_i + d_{n-1} - (s_0 - 1)^2$ , et les  $U_k$  vers des limites bien définies. Quant à  $R_k$ , il tend dans  $(S_1)$  vers deux limites distinctes, soient  $R_k^0$  et  $R_k^{(2)}$ , suivant que le rayon décrit par  $T$  est au-dessous ou au-dessus de  $O\Delta_1$ , et l'on trouvera aisément [conformément à la notation (119)]

$$R_k^{(2)} - R_k^0 = - \frac{2s_1 t_k U_k^0}{a}.$$

A l'aide des  $z_k^+$  et des  $R_k^{(2)}$  on pourra donc construire des caractéristiques de première espèce convergeant (du moins pour  $r$  assez petit) dans un secteur  $(S_2)$  situé au-dessus de  $(S_0)$  et dont nous allons déterminer les directions frontières.

Au-dessus de la médiane  $O\Delta_1$  de  $(S_1)$ ,  $t_i z_i$  et  $t_i z_{n+1}$  sont, d'après (122),  $(126)_4$  et  $(133)_4$ , de l'ordre de  $t_i^{-s_1}$ , c'est-à-dire de l'ordre de  $t_i^{2-s_0}$ ; or, si  $s_2$  est la constante fondamentale de  $(S_2)$ ,  $t_i z_i$  doit être au-dessous de la médiane  $O\Delta_2$  du secteur de première espèce  $(S_2)$  de l'ordre de  $t_i^{-s_2}$ ; on a donc

$$s_2 = s_0 - 2.$$

Par suite, les frontières de  $(S_2)$  se construisent comme celles de  $(S_0)$ , mais à partir du point  $s_2 = s_0 - 2$  (au lieu de  $s_0$ ) : c'est dire que la frontière inférieure de  $(S_2)$  coïncide avec la frontière supérieure  $O\Delta_1$  de  $S_0$ .

On pourra d'ailleurs raisonner sur  $(S_2)$  comme sur  $(S_0)$ , et ainsi de suite, du moins tant qu'on ne sortira pas de la région  $(R)$ ; il en serait de même au-dessous de  $(S_0)$  et, finalement, nous pourrions énoncer comme pour l'équation VI le résultat général auquel nous nous trouvons conduits :

Soit  $[z_1(t_i), \dots, z_{n+2}(t_i)]$  une intégrale de  $(G_n)$  définie le long d'un rayon  $O\Delta$  de  $(R)$  par une caractéristique de première espèce dont la

constante fondamentale  $s_0$  satisfait aux conditions

$$\Re\left(\frac{s_0}{i}\right) > 0, \quad s_0 - \sigma \neq n \neq s_0 - \sigma^*$$

( $n$  entier quelconque;  $\sigma, \sigma^*$  constantes exceptionnelles de première ou de deuxième espèce, ne dépendant que des  $d_n$ ); à l'intérieur de  $(\mathbf{R})$ , l'intégrale  $[z]$  peut être représentée de la façon suivante :

Soit  $e_m$  le point du plan T d'affixe  $-s_0^{-1}|s_0|^2\sqrt{-1} + m\sqrt{-1}$ ; appelons  $(S_m)$  le secteur dont les frontières  $O\Delta_{m-1}$  et  $O\Delta_{m+1}$  passent respectivement par  $e_{m-1}$  et  $e_{m+1}$ ; suivant que  $m$  sera pair ou impair, l'intégrale sera représentée dans  $(S_m)$  par des caractéristiques de première ou de deuxième espèce; la constante fondamentale de  $(S_m)$  sera  $s_m = s_0 - m$  et l'on peut toujours supposer  $t_i^0$  de module assez petit pour que les conditions initiales puissent être prises en  $t_i^0$  quel que soit  $m$  et qu'elles s'écrivent  $z_i = z_i^0$  ou  $z_{n+1} = z_{n+1}^0$  suivant que  $m$  est pair ou impair.

47. *Indétermination de l'intégrale dans les directions frontières.* — En procédant comme pour VI (1) on démontrera de même les résultats suivants :

Dans un secteur  $(S_m)$  de première (deuxième) espèce, l'équation

$$t_i^{-\omega} z_i - C = 0 \quad (t_i^{\omega} z_i - C = 0),$$

où l'on a soit  $0 \leq \omega < 1$ ,  $C \neq 0$  et  $\infty$ , soit  $\omega = 0$ ,  $C \neq 0$  ( $C \neq \infty$ ), admet une double suite infinie de racines; ces racines se rapprochent indéfiniment de deux parallèles à deux rayons  $O\Delta$  (distincts pour  $\omega \neq 0$ , confondus pour  $\omega = 0$ ) qui coupent la droite lieu des points  $e_m$  en deux points  $e$  tels que  $\text{dist. } ee_m = \omega$ , et les distances de deux racines consécutives tendent vers la pseudo-période  $\Omega = 2\pi : \overline{Oe}$ .

De même, parallèlement à une médiane de deuxième espèce, l'équation

$$z_i : z_{n+1} = C \quad (C \neq -1)$$

admet une double infinité de racines, qui se rapprochent indéfiniment

(1) [VI], n° 48, p. 316-321.

des racines de l'équation

$$z_i : (\sum'' z_h^0 + z_i) = -C.$$

De même encore l'équation

$$z_k = C \quad (C \neq z_k^{(2m \pm 1)})$$

admet dans  $(S_{2m})$  une double infinité de racines qui tendent vers deux suites périodiques, alignées parallèlement à la médiane de  $(S_{2m})$ ;  $z_k^{(2m \pm 1)}$  représente d'ailleurs la valeur asymptotique de  $z_k$  dans le secteur  $(S_{2m \pm 1})$  adhérent à  $(S_{2m})$ .

Un énoncé analogue s'applique aux  $U_k$ , aux  $V_k$ , ainsi qu'à  $S$ .

Quant aux équations  $R_k = C$  [où  $C$  est différent des valeurs asymptotiques de  $R_k$  dans  $(S_{2m})$  et  $(S_{2m+2})$ ], elles admettent à l'intérieur du secteur de deuxième espèce  $(S_{2m+1})$  quatre suites de racines qui convergent vers des parallèles à la médiane  $OA_{2m+1}$  du secteur, à des intervalles tendant vers  $2\pi : Oe_{2m+1}$ .

Nous n'insisterons pas sur les démonstrations de ces propositions qui sont toutes pareilles à celles que nous avons données pour VI, une fois qu'on a mis  $z_k$  sous la forme (174) et les autres fonctions sous des formes analogues ('). Montrons plutôt que les résultats précédents confirment d'une manière remarquable la théorie des singularités essentielles isolées des fonctions uniformes.

Si l'on pose

$$T = \text{Log}(t_i : t_i^0),$$

les fonctions  $z_k$ ,  $R_k$ ,  $S$ ,  $U_k$ ,  $V_k$  deviennent dans  $(R)$  des fonctions

(') Par exemple, d'après (172) et (78)<sub>2</sub>, l'équation  $z_k = C$  est asymptotiquement équivalente à deux équations

$$e^{\sqrt{b}\tau} = C' \text{ ou } C'';$$

ses racines, d'après (43) et (78)<sub>4</sub>, seront donc asymptotiquement égales à

$$T' + \frac{2M\pi i}{s}, \quad T'' + \frac{2M\pi i}{s} \quad (M \text{ entier});$$

l'une de ces séries ne saurait disparaître que pour  $C = z_k^{(2m \pm 1)}$ . On précisera l'asymptotisme en enfermant les racines dans des petits cercles dont le rayon s'évaluera comme il a été indiqué dans [VI] (n° 48).

méromorphes de  $T$ ; étudions la portion du domaine du point à l'infini qui appartient à  $(\mathbf{R})$ . Soit  $(\mathfrak{O})$  une région limitée par deux rayons issus de  $T=0$  et s'éloignant à l'infini dans un secteur de deuxième espèce  $(S_{2m-1})$ ; dans  $(\mathfrak{O})$  les  $|z_k|$  sont bornés pour  $|T|$  assez grand [moyennant, s'il le faut, une transformation (105)]; de plus,  $z_k$  tend vers  $z_k^{(2m-1)}$  le long des deux frontières de  $(\mathfrak{O})$ ; d'après un théorème connu,  $z_k$  doit tendre uniformément vers  $z_k^{(2m-1)}$  à l'intérieur de  $(\mathfrak{O})$ , ce qui concorde avec le résultat que nous avons énoncé plus haut. Supposons maintenant que les frontières de  $(\mathfrak{O})$  appartiennent respectivement à  $(S_{2m-1})$  et  $(S_{2m+1})$ ; sur ces frontières  $z_k$  tend vers deux limites différentes; dans ce cas, d'après un autre théorème général, la fonction  $z_k$  ne peut rester bornée dans  $(\mathfrak{O})$ ; effectivement l'équation  $z_k = \infty$  possède une infinité de solutions qui s'éloignent parallèlement à  $O\Delta_{2m}$ ; et nous savons, en outre, que  $z_k$  prend dans  $(\mathfrak{O})$  toute valeur, finie ou non, les racines formant deux suites pseudo-périodiques (sauf pour deux valeurs exceptionnelles où les suites se réduisent à une seule).

48. *Cas de  $s$  réel; dégénérescence de la singularité essentielle en singularité transcendante.* — Dans l'énoncé du n° 46 nous avons exclu le cas où  $s_0$  est réel; or, s'il en est ainsi, on sait <sup>(1)</sup> que dans la région  $(\mathbf{R})$  l'intégrale sera représentée par des caractéristiques de première espèce répondant aux mêmes données initiales  $z_k^0, R_k^0, z_i^0$  pour tout rayon de  $(\mathbf{R})$  (n° 44). On vérifiera d'ailleurs aisément que,  $T$  s'éloignant à l'infini sur un rayon de  $(\mathbf{R})$ ,  $S$  et les  $U_k$  tendent vers des limites bien déterminées, et l'on trouvera d'après (42)

$$s^* = 1 - s;$$

ainsi, pour  $s$  réel une intégrale sera représentée indifféremment dans la région  $(\mathbf{R})$  par des développements de première ou de deuxième espèce.

Comme pour l'équation VI <sup>(2)</sup>, on peut considérer en toute rigueur ce cas comme un cas-limite du cas général,  $s_0$  complexe;  $s_0$  tendant vers une valeur réelle  $\neq 0$  (suivant une direction déterminée), il y a deux

<sup>(1)</sup> Voir n° 17, *ad fin.*

<sup>(2)</sup> [VI], n° 52, p. 328.



points consécutifs de la suite  $s_0 \pm m$  qui tendent vers deux points du segment  $(-1, +1)$ , distincts d'ailleurs de 0 et  $\pm 1$ ; les ouvertures des secteurs correspondants tendent vers  $\pi$ , mais à cause des conditions générales de convergence des approximations, on se bornera à considérer les caractéristiques-limites comme définies seulement dans la région  $(\mathbf{R})$ . Dans cette région, chacune des fonctions  $z_k, R_k, S, U_k, V_k$  présente une valeur asymptotique bien définie; chacune est méromorphe en  $T$  et admet dans  $(\mathbf{R})$  le point  $T = \infty$  comme *singularité transcendante, et non plus essentielle*.

Il est facile d'expliquer cette dégénérescence du point singulier, de prime abord paradoxale: au cours du passage à la limite, les médianes tendent vers des parallèles à l'axe imaginaire. Dans le plan  $t_i$  les zones d'indétermination s'écartent donc de l'origine; les racines des équations  $z_k = C$ , par exemple, tendent à s'échelonner dans ce plan le long de cercles de centre  $O$  (et dans le plan  $T$ , parallèlement à l'axe imaginaire) <sup>(1)</sup>.

Dans les cas exceptionnels de première ou de deuxième espèce, les intégrales se comportent comme celles de l'équation VI <sup>(2)</sup>; on peut aussi les considérer comme des formes-limites des caractéristiques du type général et légitimer cette manière de voir par une analyse analogue à celle du n° 54 de [VI] (p. 331). Nous ne nous attarderons pas sur cette discussion qui ne présente aucune difficulté nouvelle <sup>(3)</sup>; et nous montrerons plutôt comment on peut appliquer les résultats précédents à l'étude des intégrales  $A_{\mu, \nu}^k$  du système (A) de M. Schlesinger.

---

<sup>(1)</sup> Il paraît probable que les conclusions précédentes s'étendent hors de la région  $(\mathbf{R})$  à tout le demi-plan  $T$ ; c'est ce que suggère l'exemple du cas

$$n = 1, \quad d_1 = d_2 = d_3 = D = 0$$

(équation VI<sub>0</sub> de M. Émile Picard; voir [VI], quatrième formule de la page 347; on fera  $A_2$  réel); mais l'extension de la démonstration de convergence dans le sens précédent était inutile pour la résolution du problème de Riemann; et elle nous aurait entraînés trop loin.

<sup>(2)</sup> [VI], n° 53, p. 229; rappelons que  $(\mathbf{R})$  comprend alors un secteur exceptionnel et des secteurs généraux, des deux espèces.

<sup>(3)</sup> De même, on démontrerait aisément que le système  $(g_n, G_n)$  ne peut admettre aucune autre intégrale holomorphe que celles qui ont été énumérées dans la seconde Partie (nos 23, 27, 35, 37).

49. *Étude des intégrales du système*  $(A_2)$  *de M. Schlesinger.* — Considérons d'abord le cas général où la condition (3) est vérifiée; on pourra donc annuler la constante  $\varepsilon$  définie par (2). D'après la théorie des caractéristiques de première espèce, l'intégrale  $\int_0^{t_i} z_i dt_i$  étendue à un rayon du demi-secteur initial  $(S')$  des approximations est égale à  $\tau$ ; la fonction  $\lambda$  définie par (8) est donc égale à  $Ee^{\sqrt{B}\tau}$  ( $E$ , constante), et l'on pourra prendre dans le secteur  $(S)$ , avec les notations du n° 45,

$$\lambda = E \frac{1 - (A - B) \times (1 + \theta_1 L_1 r_0) \left(\frac{t_i}{t_i^0}\right)^s}{1 - (A + B) \times (1 + \theta_1 L_1 r_0) \left(\frac{t_i}{t_i^0}\right)^s}.$$

Parallèlement à la médiane  $\Delta$  de  $(S)$ ,  $\lambda$  est indéterminé, et parallèlement aux frontières  $\Delta'$  et  $\Delta''$  de  $(S)$  la théorie des caractéristiques de deuxième espèce montre que  $\lambda$  tend vers  $E$  ou  $E \frac{A-B}{A+B}$ , qui sont aussi les limites de  $\lambda$  à l'intérieur de  $(S')$  et de  $(S'')$ .

Or, il résulte de (11) que  $M_k : z_i$  est indéterminé sur  $\Delta$  et tend vers une limite à l'intérieur (au sens strict) des demi-secteurs  $(S')$ ,  $(S'')$ . Dès lors, d'après (15),  $H_i : z_i$  obéira aux mêmes lois, et il résulte aisément des équations (B) (n° 9, p. 192) que parallèlement à  $\Delta$  les fonctions

$$A_{\mu\nu}^k \quad (k \neq i, n+1) \quad \text{et} \quad t_i A_{\mu\nu}^i, \quad t_i A_{\mu\nu}^{n+1}$$

sont indéterminées <sup>(1)</sup>.

Arrêtons-nous davantage sur l'étude des frontières  $\Delta'$  et  $\Delta''$  qui est plus délicate. Dans (15), remplaçons  $M_k$  par sa valeur (11), où  $\frac{\partial z_k}{\partial t_i}$  aura été exprimé au moyen de (116). Le premier membre de (15) va devenir un polynôme du second degré en  $t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}$ , produit qui est indéterminé parallèlement à  $\Delta'$ ; nous allons établir que  $A_{\mu\nu}^k (k \neq i, n+1)$  y présente pourtant la même valeur asymptotique que dans  $(S')$ .

(1) De la même façon que  $z_k$  ou  $t_i z_i$ ; en d'autres termes, les équations  $A_{\mu\nu}^k = C$  admettent parallèlement à  $\Delta$  une double série de racines, sauf lorsque  $C$  est une des valeurs asymptotiques limitrophes; une série disparaît alors. A l'intérieur (au sens strict) de  $(S')$  ou  $(S'')$  chacun des  $A_{\mu\nu}^k$  admet une valeur asymptotique, tandis que  $A_{\mu\nu}^i$  et  $A_{\mu\nu}^{n+1}$  y croissent indéfiniment comme  $z_i$ .

Effectivement, le terme en  $\left(t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}\right)^2$  dans (15) aura pour coefficient

$$-\sum'' \frac{z_k}{z_i^2 (z_i + z_{n+1})^2} - \frac{1}{z_i^2 z_{n+1}} = -\frac{1}{z_i z_{n+1} (z_i + z_{n+1})};$$

groupons avec ce terme l'expression  $\frac{d_i}{z_i} + \frac{d_{n+1}}{z_{n+1}}$  de (15) et l'on constatera au moyen de (114) que la somme tend vers une limite finie parallèlement à  $\Delta'$ .

Les termes du premier degré en  $t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}$  seront multipliés par

$$2 \left[ \sum'' \frac{(U_k + \sqrt{D} z_k) (t_k - t_i)}{z_i (z_i + z_{n+1})} - \sqrt{D} \frac{t_i}{z_i} \right];$$

en vertu de (113) et de (6)<sub>1</sub>, cette expression se réduit à

$$\frac{2}{z_i + z_{n+1}} \left( -\sqrt{D} t_i + \frac{\sqrt{D} - 1}{z_i} \right);$$

dès lors, d'après (15), nous parvenons à ce résultat essentiel : *parallèlement à  $\Delta'$  l'expression*

$$(178) \quad \frac{H_i}{z_i} - \frac{t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}}{z_i (z_i + z_{n+1})}$$

*tend vers une limite finie*, la même que dans (S'), d'après la théorie des caractéristiques de deuxième espèce. Les équations (B) montrent alors que parallèlement à  $\Delta'$  les  $A_{\mu\nu}^k$  ( $k \neq i, n+1$ ) admettent la même valeur asymptotique que dans (S'), tandis que les  $A_{\mu\nu}^i, A_{\mu\nu}^{n+1}$  y sont indéterminés.

Ces résultats s'étendent au cas où (3) n'est plus vérifiée. On a alors  $\sqrt{D} = 1$ , et la seule difficulté nouvelle consiste à établir que parallèlement à  $\Delta'$ , l'expression (178) tend vers une limite. Or, d'après (15), et d'après les développements qu'on vient de donner à l'instant,  $\lambda$  tend vers une limite  $\lambda_0$  parallèlement à  $\Delta'$ , tandis que, d'après (133)<sub>4</sub>,  $|\lambda - \lambda_0|$  sera de l'ordre de  $r$ . Cela étant, en vertu de (16) et (17), tout

revient à prouver que

$$(179) \quad -\lambda \int_{t_i^0}^{t_i} \varphi_{n+1} dt_i - \frac{t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}}{z_i(z_i + z_{n+1})}$$

tend vers une limite; mais  $|\varphi_{n+1}|$  est de la forme  $K : r$ ,  $K$  étant borné parallèlement à  $\Delta'$ ; en vertu de la remarque qu'on vient de faire sur  $\lambda - \lambda_0$ , on pourra substituer à (179) l'expression

$$(180) \quad - \int_{t_i^0}^{t_i} \lambda \varphi_{n+1} dt_i - \frac{t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}}{z_i(z_i + z_{n+1})} \\ = \frac{1}{2} \int_{t_i^0}^{t_i} \frac{t_i^2 \left( \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} + z_i z_{n+1} \right)^2 + d_i z_{n+1}^2 - d_{n+1} z_i^2}{t_i z_i^2 z_{n+1}} dt_i - \frac{t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}}{z_i(z_i + z_{n+1})}.$$

Or dérivons (180) en remplaçant  $\frac{\partial^2 z_{n+1}}{\partial t_i^2}$  par sa valeur tirée de  $(G_n)$ ; la théorie des caractéristiques de deuxième espèce montre aisément que la dérivée de (180) reste finie sur  $\Delta'$ , ce qui établit la proposition en vue.

En définitive, on vient d'établir le résultat général énoncé à l'Introduction (n° 5, p. 184).

Nous allons vérifier maintenant les résultats de cette quatrième Partie en les appliquant à un cas particulier où  $(g_n, G_n)$  possède des intégrales du type hypergéométrique.

50. *Formation du système hypergéométrique (H).* — J'ai montré dans ma Thèse <sup>(1)</sup> que dans un cas où l'équation différentielle linéaire  $(E_n)$  possède une intégrale  $y_1(x)$  dont la dérivée logarithmique est rationnelle, le système différentiel  $(f_n, F_n)$  est vérifié par toutes les solutions d'un système d'ordre  $n$  qui se ramène lui-même à un système hypergéométrique [désigné plus loin par  $(\theta)$ ]. On va voir tout d'abord que la même propriété peut s'établir très simplement pour le système  $(g_n, G_n)$ .

Dans l'hypothèse actuelle, si le groupe de monodromie de  $(E_n)$  est

---

<sup>(1)</sup> *Loc. cit.*, p. 105.

indépendant des  $t_i$ , les combinaisons

$$(181) \quad \frac{\partial \text{Log } \gamma_1}{\partial t_i} - \frac{z_i \varphi(x)}{2(x-t_i)\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} \text{Log} \frac{\varphi(x)}{(x-t_i)\psi(x)\gamma_1^2} \quad (i=1, \dots, n)$$

doivent être indépendantes de  $x$  (*loc. cit.*). Or  $\gamma_1$  est nécessairement de la forme

$$\gamma_1 = \prod_{h=1}^{n+2} (x-t_h)^{r_h} \prod_{i=1}^n (x-\lambda_i)^{-\frac{1}{2}} P(x);$$

comme dans le travail précité, plaçons-nous dans le cas où le polynome  $P(x)$  se réduit à une constante; on aura ainsi

$$(182) \quad \gamma_1 = \frac{\prod_{h=1}^{n+2} (x-t_h)^{r_h}}{\sqrt{\psi(x)}}.$$

Posons alors

$$\varphi_i(x) = \frac{\varphi(x)}{x-t_i};$$

il viendra

$$(183) \quad \frac{1}{\varphi_i(x)} \frac{\partial \psi(x)}{\partial t_i} = \sum' \frac{1}{(x-t_k) \varphi'_i(t_k)} \frac{\partial \psi(t_k)}{\partial t_i};$$

mais, de l'égalité (22), on déduit

$$\frac{\partial \psi(t_k)}{\partial t_i} = \varphi'(t_k) \left( \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{z_k}{t_i - t_k} \right)$$

et (183) devient

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial \psi(x)}{\partial t_i} = \frac{\varphi_i(x)}{\psi(x)} \sum' \frac{t_k - t_i}{x - t_k} \left( \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{z_k}{t_i - t_k} \right).$$

Or, en vertu de (182), l'expression (181) s'écrit alors

$$(184) \quad - \frac{\varphi(x)}{2(x-t_i)\psi(x)} \\ \times \left[ \sum' \frac{t_k - t_i}{x - t_k} \left( \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{z_k}{t_i - t_k} \right) - z_i \sum' \frac{a_k}{x - t_k} - \frac{a_i + 1}{x - t_i} z_i \right] - \frac{r_i}{x - t_i}$$

avec  $a_k \equiv 2r_k - 1$ , d'où, d'après (19),

$$(185) \quad d_k = a_k^2 \quad (i=1, \dots, n+2).$$

Exprimons alors que l'expression (184), indépendante de  $x$ , prend les mêmes valeurs pour  $x = t_k$  et  $x = \infty$  ; il viendra

$$(186) \quad -\frac{1}{2z_k(t_k - t_i)} \left[ (t_k - t_i) \frac{\partial z_k}{\partial t_i} - z_k - a_k z_i \right] + \frac{r_i}{t_i - t_k} = \frac{K z_i}{2}$$

avec

$$K \equiv 1 + \sum_{k=1}^{n+2} a_k;$$

et réciproquement, comme la fonction rationnelle (184) est d'ordre  $n$ , les  $n+1$  relations (186), qui se réduisent à  $n$ , d'après (5) et (6), suffisent à entraîner l'indépendance de (184) par rapport à  $x$ .

Nous écrirons les équations (186) sous la forme

$$(187) \quad (t_k - t_i) \frac{\partial z_k}{\partial t_i} = a_k z_i - a_i z_k - K z_i z_k (t_k - t_i) \quad (k \neq i);$$

on leur adjoindra les équations (5) et l'on vérifiera qu'elles admettent comme conséquences les équations  $(g_n, G_n)$ . Pour les équations  $(g_n)$ , c'est immédiat; pour  $(G_n)$ , en tenant compte de (185), on aboutira, après différentiation de (187) et substitution dans  $(G_n)$ , à la condition

$$\frac{1}{2} (D - K^2) z_i z_k \left( z_i + \frac{1}{t_k - t_i} \right) = 0.$$

Or, en vertu de la relation

$$c_{n+3} = 2 \sum_{h=1}^{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} r_h r_k - n \sum_{k=1}^{n+2} r_k + \frac{n(n-1)}{4}$$

que doivent vérifier les coefficients de  $(E_n)$  pour que  $(E_n)$  admette l'intégrale (182), et d'après (21), on a précisément

$$D = 4 \sum_{k=1}^{n+3} c_k + 3n + 1 = \left[ \sum_{k=1}^{n+2} (2r_k - 1) + 1 \right]^2 = K^2.$$

C. Q. F. D.

Cela étant, pour  $K = 0$ , le système (187) est linéaire; pour  $K \neq 0$ ,

c'est une équation de Riccati généralisée qui peut être remplacée par le système linéaire

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} (t_k - t_i) \frac{\partial Z_k}{\partial t_i} = a_k Z_i - a_i Z_k \quad \left( \begin{array}{l} k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+2 \\ i = 1, \dots, n \end{array} \right) \\ \frac{\partial Z}{\partial t_i} = K Z_i \end{array} \right.$$

moyennant la substitution

$$z_k = \frac{Z_k}{Z};$$

bien entendu, on devra adjoindre à (H) les équations suivantes, conséquences de (5) :

$$(5') \quad \sum_{k=1}^{n+2} Z_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n+2} t_k Z_k = Z.$$

51. *Équivalence de (H) et de (θ).* — Je dis que H est bien équivalent au système

$$(θ) \left\{ \begin{array}{l} \theta_v = s_v \theta_0 - \frac{1}{K} \sum_{i=1}^n t_i (t_i - 1) s_{v-1}^i \frac{\partial \theta_0}{\partial t_i}, \\ (t_i - t_k) \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t_i \partial t_k} = -a_k \frac{\partial \theta_0}{\partial t_i} + a_i \frac{\partial \theta_0}{\partial t_k}, \\ \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t_i^2} = \left( \sum' \frac{a_k}{t_i - t_k} + \frac{a_i}{t_i} + \frac{a_i}{t_i - 1} \right) \frac{\partial \theta_0}{\partial t_i} \\ \quad - a_i \sum_{k=1}^n \frac{t_k (t_k - 1)}{t_i (t_i - 1) (t_i - t_k)} \frac{\partial \theta_0}{\partial t_k} - \frac{K a_i}{t_i (t_i - 1)} \theta_0, \end{array} \right.$$

dont il a été question plus haut (1). Pour le vérifier, il suffit d'écrire l'identité en  $x$  :

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1}^{n+2} \frac{z_k}{x - t_k};$$

(1) *Loc. cit.*, p. 109-111. Rappelons qu'on a  $\theta_v = s_v \theta_0$ , les  $s_v$  et les  $s_v$  étant les fonctions symétriques élémentaires des  $\lambda_j$  et des  $t_k$  ( $k \neq n+1, n+2$  et de l'indice supérieur qui affecte  $s_{v-1}$ ).

on en déduit

$$(188) \quad z_k = \frac{t_k^n - \sigma_1 t_k^{n-1} + \dots + (-1)^j \sigma_j t_k^{n-j} + \dots + (-1)^n \sigma_n}{\varphi'(t_k)} \quad (k \neq n+1, n+2).$$

En vertu des relations (où l'indice supérieur  $j$  a le même sens que dans la note de la page 282),

$$\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu s_j^\nu t_i^{n-\nu-1} = \begin{cases} 0 & (j \neq i), \\ \frac{\varphi'(t_i)}{t_i(t_i-1)} & (j = i), \end{cases}$$

et des expressions des  $\theta$ , en fonction de  $\theta_0, \frac{\partial \theta_0}{\partial t_i}$ , on tire de (188)

$$z_k = \frac{1}{K} \frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial t_k} \quad (k \neq n+1, n+2).$$

D'après (H), on a donc pour  $k = 1, \dots, n$

$$\frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial t_k} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial t_k},$$

ce qui permet de prendre  $\theta_0 = Z$ .

On pouvait arriver aussi à la même conclusion en observant que les systèmes linéaires, d'ordre  $n+1$ , (H) et ( $\theta$ ) possèdent  $n+1$  intégrales communes distinctes de la forme (1)

$$Z = \int_{t_k}^{t_{n+2}} V dx \quad \text{avec} \quad V(x) \equiv \prod_{k=1}^{n+2} (x - t_k)^{\alpha_k}.$$

Effectivement, on aura

$$Z_k = -\frac{\alpha_k}{K} \int_{t_k}^{t_{n+2}} \frac{V}{x - t_k} dx;$$

les équations (H) sont alors vérifiées, et il en est de même des équations

(1) On peut évidemment se borner au cas où les  $\alpha_k$  sont choisis de telle sorte que  $V$  s'annule aux deux extrémités du chemin d'intégration. Pour le système ( $\theta$ ), la vérification est effectuée dans ma Thèse, n° 32, p. 112-113.



tions (5') du n° 50 en vertu des relations

$$\sum_{k=1}^{n+2} Z_k = -\frac{1}{K} [V(x')]_{t_p}^{t_v} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n+2} t_k Z_k = \frac{K-1}{K} Z - \frac{1}{K} \int_{t_p}^{t_v} x V \left[ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{x-t_k} + \frac{a_{n+1}+1}{x} - \frac{1}{x} \right] dx = Z.$$

52. *Vérification de la théorie générale.* — Pour effectuer la vérification que nous avons en vue, formons d'abord  $R_k$ ,  $S$ ,  $U_k$ . On trouvera

$$(189) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_k = -\frac{a_k z_i - a_i z_k}{z_i} \left[ K(t_k - t_i) + \frac{a_i}{z_i} \right], \\ S = -a_i a_{n+1} + K t_i (a_{n+1} z_i - a_i z_{n+1}), \\ U_k = \frac{1}{t_k - t_i} \left[ a_k - a_i \frac{z_k}{z_i} - K z_k (t_k - t_i) \right] \\ \quad + \frac{z_k}{t_k - t_i} \frac{a_i z_{n+1} - a_{n+1} z_i - K t_i z_i z_{n+1}}{z_i (z_i + z_{n+1})}. \end{array} \right.$$

Ceci posé, observons que dans le voisinage du point  $t_i = 0$  la solution générale du système (H) est de la forme

$$Z = \Theta_1(t_i) + C t_i^{a_i + a_{n+1} + 1} \Theta_2(t_i);$$

$\Theta_1(t_i)$  est une fonction holomorphe dans le voisinage de  $t_i = 0$ , ses coefficients dépendant linéairement de  $n$  constantes arbitraires;  $\Theta_2(t_i)$  est également holomorphe en  $t_i = 0$ ; et si l'on prend, par exemple,  $\Theta_2(0) = K$ ,  $\Theta_2$  ne dépendra d'aucune arbitraire; enfin  $C$  est une  $(n+1)^{\text{ième}}$  constante arbitraire: la démonstration résulte aussitôt de l'identification que nous avons faite au n° 51 entre  $\theta_0$  et  $Z$ ; il suffira d'observer que  $\theta_0$  satisfait à une équation linéaire <sup>(1)</sup> d'ordre  $n+1$ , les racines de l'équation fondamentale déterminante relative à  $t_i = 0$  étant  $0, 1, \dots, n-1$  et  $a_i + a_{n+1} + 1$ .

Observons encore qu'à la solution particulière

$$(10) \quad Z = t_i^{a_i + a_{n+1} + 1} \Theta_2(t_i) = t_i^{a_i + a_{n+1} + 1} (K + \dots)$$

---

<sup>(1)</sup> *Thèse*, p. 112, équation (56).

correspond pour  $Z_i$  une expression de la forme

$$Z_i = (a_i + a_{n+1} + 1) t_i^{a_i + a_{n+1}} (1 + \dots);$$

on aura donc

$$z_i = \frac{a_i + a_{n+1} + 1}{K t_i} (1 + \dots);$$

d'ailleurs, d'après (H),  $Z_k$  ( $k \neq i, n+1$ ) doit appartenir à l'exposant  $a_i + a_{n+1} + 1$ , ce qui donne

$$z_k = \frac{a_k}{K t_k} (1 + \dots) \quad (k \neq i, n+1)$$

et l'on trouverait enfin

$$z_{n+1} = - \frac{a_i + a_{n+1} + 1}{K t_i} (1 + \dots).$$

les parenthèses désignant des fonctions holomorphes nulles pour  $t_i = 0$ .

Cela étant, supposons  $a_i + a_{n+1}$  complexe et  $C \neq 0$ . Si  $T$  s'éloigne indéfiniment dans  $(\mathbf{R})$  de manière que  $|t_i^{a_i + a_{n+1} + 1}|$  croisse indéfiniment, la solution correspondante se comportera à l'infini comme celle qu'on vient d'étudier; on aura

$$(191) \quad \lim_{t_i \rightarrow 0} t_i z_i = \frac{a_i + a_{n+1} + 1}{K} = - \lim_{t_i \rightarrow 0} t_i z_{n+1};$$

$z_k$  tendra vers  $a_k : K t_k$  ( $k \neq i, n+1$ ) et  $R_k$ , d'après (189), vers  $-K a_k t_k$ . Mais comme on a  $d_k = a_k^2$  et  $D = K^2$ , les polynômes de première espèce  $P_k(z)$  (n° 16) se réduisent tous à  $(Kz - a_k t_k^{-1})^2$ ; leur racine double coïncide avec  $\sqrt{d_k} : \sqrt{D} t_k$ , de sorte qu'on se trouve dans le cas *exceptionnel de première espèce*; et l'on vérifie bien que les constantes désignées dans cette théorie par  $h$  et  $\sigma$  (n° 22) ont pour valeurs

$$h = 1 - \sum'' \frac{a_k}{K} = \frac{a_i + a_{n+1} + 1}{K}, \quad \sigma = hK = a_i + a_{n+1} + 1,$$

comme cela devait être, d'après (191) et d'après la valeur de l'exposant de la solution particulière (190). Quant au champ dans lequel on doit déplacer  $T = \text{Log}(t_i : t_i^0)$  pour que  $t_i^\sigma$  tende vers l'infini, il se détermine aussitôt; moyennant le changement de  $\sigma$  en  $-\sigma$ , il coïncide avec le secteur *exceptionnel* défini par le

tableau (6) du n° 22 (1). Si l'on trace la droite  $O\Delta$  du plan  $T$  parallèlement à laquelle  $t_i^\sigma$  devient indéterminé, le secteur précédent, que nous désignerons par  $(\Sigma)$  sera pour  $\Re\left(\frac{\sigma}{i}\right) > 0$  au-dessous de  $O\Delta$ , qui sera aussi une direction d'indétermination pour  $t_i z_i$  et les  $z_k$ .

Supposons maintenant que  $T$  s'éloigne à l'infini au-dessus de  $O\Delta$ ;  $t_i^\sigma$  tendra vers zéro;  $t_i z_i$  et  $t_i z_{n+1}$  tendront aussi vers zéro,  $S$  vers  $-a_i a_{n+1}$  et les  $z_k$ ,  $U_k$  (2) vers des limites bien déterminées. Calculons  $\dot{s}$ ; on aura  $\dot{s}^2 = d_i + d_{n+1} - 2S_0 = (a_i + a_{n+1})^2$ , soit  $\dot{s} = \sigma - 1$  et l'on pourra construire dans cette région des caractéristiques de deuxième espèce  $y$  représentant l'intégrale. Mais observons aussitôt que si  $t^\star$  tend vers zéro — ce qui a lieu au-dessus d'un rayon  $O\dot{\Delta}$  (situé lui-même au-dessus de  $O\Delta$ ) —  $z_i$ ,  $z_{n+1}$  tendront vers des limites finies bien déterminées : ceci laisse prévoir qu'au-dessus de  $O\dot{\Delta}$  les caractéristiques seront du type *exceptionnel*; nous allons le vérifier.

Les limites de  $z_i$  et  $z_{n+1}$  sont les mêmes que celles que l'on obtiendrait en prenant pour  $Z$  l'intégrale holomorphe  $\Theta_i(t_i)$ ; or substituons  $\Theta_i(t_i)$  dans la dernière équation du système (9); son premier membre sera holomorphe pour  $t_i = 0$ ; écrivons que le coefficient de  $1 : t_i$  dans le second membre est nul, et utilisons des relations (5); il viendra aisément

$$\frac{(z_{n+1})_0}{(z_i)_0} = \frac{a_{n+1}}{a_i},$$

l'indice 0 dénotant les limites pour  $t_i = 0$ . Si donc on pose, comme il est permis (n° 34) (3),  $-a_{n+1} = 2r'_{n+1} - 1$ , on voit que  $z_{n+1} : z_i$  tend vers  $(2r'_{n+1} - 1) : 1 - 2r_i$  et  $S$ , vers  $(2r_i - 1)(2r'_{n+1} - 1)$ ; on se retrouve donc bien dans le cas des caractéristiques exceptionnelles de deuxième espèce. Elles définiront l'intégrale dans un secteur  $(\dot{\Sigma})$  limité inférieurement par un rayon situé au-dessus de  $O\dot{\Delta}$  (et arbitrairement

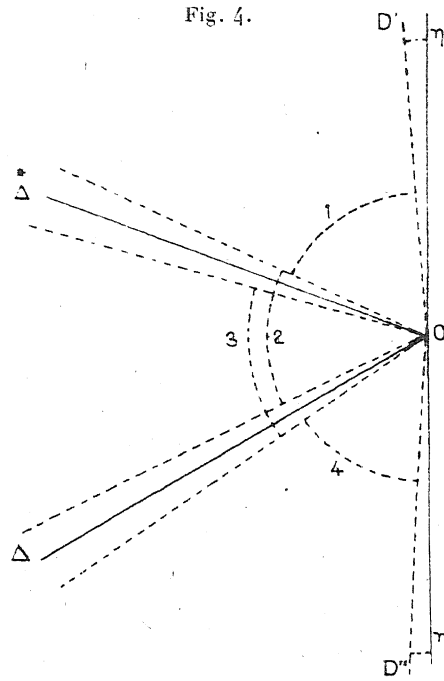
(1) On a le droit actuellement de confondre  $(R)$  avec le demi-plan  $(T)$  situé à gauche de l'axe imaginaire.

(2) En ce qui concerne les  $U_k$ , on aura soin de réunir les termes en  $a_i$  dans (189) avant de procéder à la vérification.

(3) La notation implique que la racine  $r'_{n+1}$  est distincte de la racine  $r_{n+1}$  du n° 34.

près de  $\hat{\Delta}$ ). Enfin, à l'intérieur de  $\Delta O \hat{\Delta}$  et un peu en deçà des deux frontières de ce secteur, l'intégrale du système (187) peut être

Fig. 4.



- 1, secteur exceptionnel de 2<sup>e</sup> espèce ( $\hat{\Sigma}$ )  
 2, secteur général de 2<sup>e</sup> espèce;  
 3, secteur général de 1<sup>re</sup> espèce;  
 4, secteur exceptionnel de 1<sup>re</sup> espèce ( $\Sigma$ ).

définie indifféremment par des caractéristiques de première ou de deuxième espèce; leurs domaines de convergence débordant  $\Delta O \hat{\Delta}$  du côté de  $O \Delta$  ou de  $O \hat{\Delta}$  <sup>(1)</sup> le raccordement des secteurs exceptionnels ( $\Sigma$ ) et ( $\hat{\Sigma}$ ) se trouve ainsi assuré <sup>(2)</sup>.

Observons encore que pour  $C = 0$  on obtient une intégrale holomorphe en  $t_i = 0$  et dépendant de  $n - 1$  arbitraires <sup>(3)</sup>; et si l'on

(1) On a déjà indiqué (*cf.* n° 22, *ad init.*) qu'il est possible de faire débordier les secteurs du type général sur les secteurs exceptionnels adjacents.

(2) Ceci rectifie une inadvertance commise dans [VI] à propos de la délimitation des secteurs exceptionnels ( $\Sigma$ ) et ( $\hat{\Sigma}$ ) ([VI], p. 341).

(3) La théorie générale (n° 33) apprend que  $G_n$  possède une intégrale holomorphe

prend  $C = \infty$ , on aura une intégrale  $(z_k, t_i z_i, t_i z_{n+1})$  holomorphe en  $t_i = 0$  (et de première espèce).

Terminons par l'étude de deux cas particuliers remarquables. Tout d'abord, si l'on a  $K = 0 = a_k$  ( $k \neq i$  et  $n + 1$ ),  $P_k(z)$  sera identiquement nul; les caractéristiques seront du type exceptionnel, de la première espèce et de la deuxième sorte; les  $z_k$  devront donc être holomorphes à l'origine, leurs valeurs  $y$  étant arbitraires; effectivement, on trouve alors

$$Z \equiv 1, \quad z_k = Z_k = C_k(t_i - t_k)^{a_i},$$

les  $C_k$  étant des constantes arbitraires (par rapport à  $t_i$ );  $t_i z_i$  et  $t_i z_{n+1}$  sont aussi holomorphes à l'origine, et, à l'aide de (189), on vérifie une fois de plus que les  $R_k$  s'annulent à l'origine.

De même, pour  $a_i = 0 = a_{n+1}$ , on a  $d_i = 0 = d_{n+1} = S_0$  et l'on se trouve dans le cas exceptionnel de la deuxième espèce et de la deuxième sorte. Or les équations (H) donnent aisément

$$Z_{n+1} \equiv \text{const.}, \quad Z_i = \prod_{h=1}^n (t_i - t_h)^{a_h} \Phi(t_i),$$

et de la dernière équation (θ) on tire  $\Phi(t_i) = C(t_i - 1)^{a_{n+2}}$ , d'où

$$Z_i = C \Pi''(t_i - t_k)^{a_k}.$$

On vérifie aussi que les  $Z_k$  (et les  $z_k$ ) sont holomorphes en  $t_i = 0$  et  $y$  prennent des valeurs qu'on peut fixer arbitrairement [sous réserve de satisfaire à (5)].

## CINQUIÈME PARTIE.

### RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE RIEMANN.

53. *Étude de l'équation linéaire ( $E_n$ ) parallèlement aux frontières d'un secteur de deuxième espèce.* — Revenons à l'équation différentielle

dépendant de  $2n - 2$  arbitraires; mais il résulte de (189) que, pour celles de ces intégrales qui satisfont à un système (187) les valeurs à l'origine des  $n - 1$  fonctions  $U_k$  linéairement indépendantes ne peuvent plus être fixées arbitrairement dès qu'on s'est donné les  $z_k^0$ .

linéaire ( $E_n$ ) et supposons que les coefficients  $\lambda_j, \alpha_i, \beta_j$  de cette équation aient été exprimés en fonction des  $z_k$  et de leurs dérivées par rapport à  $t_i$ . Nous allons faire tendre  $t_i$  vers zéro le long de chemins déterminés  $\varepsilon$ , et nous chercherons la forme-limite que prendra l'équation dans le voisinage de  $t_i = 0$ , et  $x = 0$ .

Tout d'abord, il nous faut examiner ce que deviennent les  $\lambda_j$ . Or, avec les notations des nos 8 et 12, on a

$$(192) \quad \psi(x) = \varphi(x) \sum_{k=1}^{n+2} \frac{z_k}{x - t_k},$$

d'où, en posant

$$\bar{\varphi}(x) \equiv \frac{\varphi(x)}{x(x - t_i)} :$$

$$(193) \quad \psi(x) = [(z_i + z_{n+1})x - t_i z_{n+1}] \bar{\varphi}(x) + x(x - t_i) \bar{\varphi}(x) \sum'' \frac{z_k}{x - t_k}.$$

Si le transformé  $\varepsilon'$  de  $\varepsilon$  dans le plan T n'est pas parallèle à une médiane de première espèce,  $t_i z_{n+1}$  tendra vers zéro sur  $\varepsilon$ , et l'un des  $\lambda_j$  (que nous désignerons par  $\lambda_g$ ) tendra vers zéro à la manière de  $t_i z_{n+1} : a$  <sup>(1)</sup>; les autres  $\lambda_j$  tendront vers les racines de l'équation <sup>(2)</sup>

$$a \bar{\varphi}(x) + x \bar{\varphi}(x) \sum'' \frac{z_k^0}{x - t_k} = 0.$$

Au contraire, si T s'éloigne parallèlement à une médiane de première espèce, il résulte de l'analyse du n° 47, que les  $z_k$  seront indéterminés; par conséquent il en sera de même des  $\lambda$ : *aucun d'eux ne tendra vers zéro* <sup>(3)</sup>.

Plaçons-nous d'abord dans ce dernier cas. Il s'agit d'étudier, pour

<sup>(1)</sup>  $a$  est toujours défini par (119); la démonstration est immédiate si l'on pose

$$x = t_i z_{n+1} \xi.$$

Pour le cas où l'on a  $a = 0$ , voir n° 54 (*ad fin.*).

<sup>(2)</sup> Dans toute la cinquième Partie, l'indice supérieur 0 désigne une limite pour  $t_i = 0$ .

<sup>(3)</sup> De l'équation (193) il résulte encore que les points critiques qui permutent entre eux les  $\lambda_j$  se répartissent dans un secteur du plan T en  $4n - 4$  séries asymptotiquement périodiques à une médiane de première espèce et de pseudo-période  $2\pi i : s$ .

$t_i$  infiniment petit, la partie principale de  $(E_n)$  pour  $x = 0$ . Or, les seuls termes de  $(E_n)$  qui puissent donner dans l'équation-limite  $(E_n^0)$  des termes en  $x^{-2}$  sont (n° 8)

$$\frac{c_{n+1}}{x^2} + \frac{c_i}{(x - t_i)^2} + \frac{\alpha_i}{x(x-1)(x-t_i)};$$

si  $\alpha_i$  tend vers une limite  $\alpha_i^0$  le coefficient de  $x^{-2}$  dans  $(E_n^0)$  sera  $c_i + c_{n+1} - \alpha_i^0$ ; tout revient donc à calculer cette limite  $\alpha_i^0$  (si elle existe). Or on a (n° 14)  $\alpha_i = t_i(t_i - 1)\gamma_i$  et, d'après (29),

$$t_i \gamma_i = \Sigma'' A_k + A_{n+1}$$

avec

$$\begin{aligned} A_k &\equiv \frac{t_i(t_k - t_i)}{4z_i z_k} \left( \frac{\partial z_k}{\partial t_i} \right)^2 - \frac{t_i}{2z_i} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{t_i}{2z_i} \frac{z_k}{t_k - t_i} + \frac{d_i z_k^2 + d_k z_i^2}{4z_i z_k (t_i - t_k)} t_i - \frac{D}{4} t_i z_k, \\ (194) \quad A_{n+1} &\equiv - \frac{t_i^2}{4z_i z_{n+1}} \left( \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} \right)^2 - \frac{t_i}{2z_i} \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} - \frac{z_{n+1}}{2z_i} \\ &\quad + \frac{d_i z_{n+1}^2 + d_{n+1} z_i^2}{4z_i z_{n+1}} - \frac{D}{4} t_i z_{n+1} \\ &= - \frac{z_i}{4z_{n+1}} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} (t_i z_{n+1}) \right]^2 + \frac{d_i - 1}{4} \frac{z_{n+1}}{z_i} + \frac{d_{n+1}}{4} \frac{z_i}{z_{n+1}} - \frac{D}{4} t_i z_{n+1}. \end{aligned}$$

Posons

$$A'_k \equiv \frac{t_i z_i (t_k - t_i)}{4z_k} \left( \frac{\partial z_k}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{d_k}{4t_k z_k} t_i z_i;$$

quand on s'éloignera parallèlement à une médiane de première espèce la différence  $A_k - A'_k$  tendra vers zéro; mais si l'on fait

$$A''_k \equiv \frac{t_i z_i}{4} \left( D t_k z_k + \frac{2R_k^0}{t_k} \right),$$

il résulte aussitôt des n°s 16 et 45 que  $A'_k - A''_k$  tendra <sup>(1)</sup> vers zéro; il en sera donc de même de  $A_k - A''_k$ .

Quant à  $A_{n+1}$  les relations (6) montrent que si l'on fait

$$A'_{n+1} \equiv \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} (t_i z_i) \right]^2 - \frac{d_i}{4} - \frac{d_{n+1}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{D}{4} t_i z_i$$

la différence  $A_{n+1} - A'_{n+1}$  tendra <sup>(1)</sup> vers zéro. Considérons alors

(1) On peut toujours supposer que le chemin décrit par T évite les zéros des polynômes  $P_k(z)$ .

l'expression

$$\mathfrak{A} \equiv \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} (t_i z_i) \right]^2 + \frac{t_i z_i}{4} \Sigma'' \left( D t_k z_k + \frac{2 R_k^0}{t_k} \right) + \frac{D}{4} t_i z_i;$$

s'il est prouvé que cette expression tend vers  $s^2 \cdot 4$ ,  $s$  étant toujours la constante du n° 16, il sera établi du même coup que,  $t_i$  tendant vers zéro sur un chemin  $\ominus$  [dont l'image dans (T) est parallèle à la médiane de première espèce],  $t_i \gamma_i$  tend vers

$$\frac{s^2}{4} - \frac{d_i + d_{n+1} - 1}{4} = \frac{s^2 - 1}{4} - c_i - c_{n+1},$$

d'après (19). Or l'assertion précédente est vraie en première approximation; car on a, en vertu des développements de la page 205,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} (t_{i0} z_{i0}) \right]^2 = D (A \operatorname{sh} \sqrt{D} \tau + B \operatorname{ch} \sqrt{D} \tau)^2,$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \Sigma'' \left( D t_k z_{k0} + \frac{2 R_k^0}{t_k} \right) \\ &= \frac{D}{4} \Sigma'' \left[ -t_k \frac{h'_k + h''_k}{2} + t_k \left( z_k^0 - \frac{h'_k - h''_k}{2} \right) \operatorname{ch} \sqrt{D} \tau \right. \\ & \quad \left. + t_k \sqrt{(z_k^0 - h'_k)(z_k^0 - h''_k)} \operatorname{sh} \sqrt{D} \tau \right] \\ &= -\frac{D}{4} (A + 1 + A \operatorname{ch} \sqrt{D} \tau + B \operatorname{sh} \sqrt{D} \tau), \end{aligned}$$

d'où en première approximation

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{D}{4} (A \operatorname{sh} \sqrt{D} \tau + B \operatorname{ch} \sqrt{D} \tau)^2 \\ & \quad - \frac{D}{4} [A (\operatorname{ch} \sqrt{D} \tau - 1) + B \operatorname{sh} \sqrt{D} \tau] [A (\operatorname{ch} \sqrt{D} \tau + 1) + B \operatorname{sh} \sqrt{D} \tau] \\ &= \frac{D}{4} (-A^2 + B^2 + A^2) = \frac{s^2}{4}. \end{aligned}$$

Cela étant, on tire de (83)<sub>1</sub>, (84), (83)<sub>2</sub>

$$|z_{kj} - z_{k0}| < 2 H_6 r, \quad |t_{ij} z_{ij} - t_{i0} z_{i0}| < 2 H_8 r, \quad \left| \frac{\partial(t_{ij} z_{ij})}{\partial \tau} - \frac{\partial(t_{i0} z_{i0})}{\partial \tau} \right| < 2 H_7 \varepsilon$$

(pourvu que  $2 l g r_0$  soit  $< 1$ ). Le résultat précédent est donc uniformément valable, quel que soit le rang  $j$  des approximations et, par suite, à la limite pour  $j = \infty$ .



Ainsi donc,  $t_i$  tendant vers zéro sur le chemin  $\ni$  précédemment défini <sup>(1)</sup>,  $\alpha_i = t_i(t_i - 1)\gamma_i$  tend vers  $-\frac{s^2}{4} + c_i + c_{n+1} + \frac{1}{4}$  et, par suite, le second membre de  $(E_n^0)$  sera de la forme

$$\frac{s^2 - 1}{4x^2} + \frac{\Omega(x)}{x},$$

$\Omega(x)$  étant holomorphe dans le voisinage de  $t_i = 0$ ,  $x = 0$ .

54. *Étude de  $(E_n)$  à l'intérieur d'un secteur de deuxième espèce.* — Supposons maintenant que le chemin  $\ni'$  décrit par T ne soit pas parallèle à la frontière d'un secteur de deuxième espèce. Nous avons vu (n° 53) que pour  $a \neq 0$  l'un des  $\lambda_j$ , soit  $\lambda_g$ , tend vers zéro; dans  $(E_n^0)$  les termes en  $x^{-2}$  proviendront donc de la somme

$$\frac{c_{n+1}}{x^2} + \frac{c_i}{(x - t_i)^2} + \frac{3}{4(x - \lambda_g)^2} + \frac{\alpha_i}{x(x - 1)(x - t_i)} + \frac{\beta_g}{x(x - 1)(x - \lambda_g)};$$

étudions l'allure de  $\alpha_i$  et de  $\beta_g$ .

Remarquons d'abord que  $t_i z_i$  tend vers zéro sur  $\ni'$ ;  $A_k$  tend donc vers zéro, et d'après (194) la somme <sup>(2)</sup>

$$A_{n+1} + \frac{1}{2} \left( S + \frac{z_{n+1}}{z_i} + \frac{t_i}{z_i} \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} \right)$$

tend aussi vers zéro. Passons maintenant à  $\beta_g$ ; sa valeur résulte de la formule

$$(195) \quad \frac{1}{z_i} \frac{\partial \lambda_g}{\partial t_i} = \frac{\varphi(\lambda_g)}{(\lambda_g - t_i) \psi'(\lambda_g)} \left[ \frac{1}{\lambda_g} + \sum'' \frac{1}{\lambda_g - t_k} - \frac{\psi''(\lambda_g)}{2\psi'(\lambda_g)} + \frac{2\beta_g}{\lambda_g(\lambda_g - 1)} \right]$$

que j'ai donnée dans ma Thèse (p. 79). Or, quand  $t_i$  tend vers zéro, il

(1) En ce qui concerne  $z_i$  la démonstration précédente fournit un résultat plus complet : T s'éloignant indéfiniment sur un chemin quelconque (non parallèle à une médiane de deuxième espèce),  $z_i$  tend vers une limite bien déterminée (constante à l'intérieur d'un secteur de première espèce).

(2) Actuellement, on ne peut plus remplacer  $z_{n+1} : z_i$  par  $-1$ , à cause de l'indétermination de ce rapport sur les médianes de deuxième espèce.

résulte de l'équation (193), dérivée par rapport à  $x$ , que

$$(196) \quad \frac{(z_i + z_{n+1}) \bar{\varphi}(\lambda_g)}{\psi'(\lambda_g)} = \frac{(z_i + z_{n+1}) \varphi(\lambda_g)}{\lambda_g(\lambda_g - t_i) \psi'(\lambda_g)}$$

tend vers 1. Reste  $\frac{\partial \lambda_g}{\partial t_i}$ . Mais en dérivant l'équation (192) et en y faisant ensuite  $x = \lambda_g$ , on trouve <sup>(1)</sup>

$$(197) \quad \left[ \frac{\varphi'(\lambda_g)}{\varphi(\lambda_g)} \sum_{k=1}^{n+2} \frac{z_k}{\lambda_g - t_k} - \sum_{k=1}^{n+2} \frac{z_k}{(\lambda_g - t_k)^2} \right] \frac{\partial \lambda_g}{\partial t_i} + \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{\lambda_g - t_k} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{z_i}{(\lambda_g - t_i)^2} = 0,$$

d'où, en n'écrivant que les termes prépondérants à l'intérieur d'un secteur de deuxième espèce (S),

$$\left[ \frac{z_i + z_{n+1}}{\lambda_g(\lambda_g - t_i)} + \dots \right] \frac{\partial \lambda_g}{\partial t_i} + \frac{1}{\lambda_g - t_i} \frac{\partial z_i}{\partial t_i} + \frac{1}{\lambda_g} \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} + \frac{z_i}{(\lambda_g - t_i)^2} + \dots = 0$$

Or

$$\lambda_g \left( \frac{\partial z_i}{\partial t_i} + \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} \right) = -\lambda_g \sum'' \frac{\partial z_k}{\partial t_i},$$

qui est de l'ordre de  $\lambda_g z_i$ , est négligeable devant  $t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i}$ , qui est de l'ordre de  $z_i$ ; on a donc sensiblement pour  $|t_i|$  très petit dans (S)

$$\frac{\partial \lambda_g}{\partial t_i} = \frac{1}{z_i + z_{n+1}} t_i \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} - \frac{\lambda_g}{\lambda_g - t_i} \frac{z_i}{z_i + z_{n+1}};$$

mais  $\lambda_g : (\lambda_g - t_i)$  a pour expression asymptotique  $-z_{n+1} : z_i$ ; la partie principale de  $\frac{\partial \lambda_g}{\partial t_i}$  sur  $\mathfrak{S}'$  est donc <sup>(2)</sup>

$$\frac{1}{z_i + z_{n+1}} \frac{\partial}{\partial t_i} (t_i z_{n+1}).$$

Dès lors, on déduit de (195) et (196) que sur  $\mathfrak{S}'$   $1 - 2\beta_s$  tend vers

<sup>(1)</sup> Dans (197) la première somme est évidemment nulle. On l'a maintenue pour la commodité du calcul.

<sup>(2)</sup> C'est le résultat qu'on aurait obtenu en dérivant l'expression asymptotique de  $\lambda_g$ .

$\frac{1}{z_i} \frac{\partial}{\partial t_i} (t_i z_{n+1})$ , et en définitive  $-t_i \gamma_i + \beta_g$ , ou  $\alpha_i + \beta_g$  tend vers

$$\lim_{t_i=0} \left[ \frac{1}{2} \left( S + \frac{z_{n+1}}{z_i} + \frac{t_i}{z_i} \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{t_i}{z_i} \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} + \frac{z_{n+1}}{z_i} \right) \right] \\ = \frac{1}{2} (S_0 + 1) = \frac{d_i + d_{n+1} - s^2}{4} + \frac{1}{2} = c_i + c_{n+1} + 1 - \frac{s^2}{4},$$

de sorte que le terme prépondérant pour  $x = 0$  de  $(E_n^0)$  est

$$\frac{s^2 - 1}{4x^2}.$$

De même, en s'appuyant sur la formule (29) relative à  $\gamma_k$  et sur la relation  $(g_n)$  (n° 10), on montrerait que  $t_i$  tendant vers zéro le long d'un chemin  $\mathfrak{C}$  dont le transformé  $\mathfrak{C}'$  dans le plan  $T$  est intérieur à un secteur de deuxième espèce, les coefficients  $\alpha_k$  tendent vers des limites finies; les formules (195) et (197) permettent d'établir un résultat analogue pour tous les  $\beta_j$  ( $j \neq g$ ), de sorte que *dans les conditions précitées l'équation  $(E_n)$  admet une forme-limite  $(E_n^0)$  parfaitement déterminée* <sup>(1)</sup>.

Nous avons supposé  $a \neq 0$ ; or supposons, plus généralement, qu'on ait

$$(198) \quad \sum \frac{z_k^0}{t_k^p} = 0 \quad (p = 0, 1, \dots, q-2);$$

$t_i$  tendant vers zéro à l'intérieur d'un secteur de deuxième espèce,  $(E_n)$  possédera un groupe de  $q$  points apparemment singuliers infiniment petits, et l'on trouverait que dans  $(E_n^0)$  le terme prépondérant (pour  $x$  voisin de 0) est

$$\frac{[s - (q-1)]^2 - 1}{4x^2}.$$

Nous n'insisterons pas sur la démonstration qui est identique à celle qui vient d'être développée; ajoutons d'ailleurs qu'en faisant varier

---

(1) Il n'en serait plus de même si  $\mathfrak{C}'$  était parallèle à une frontière d'un secteur de deuxième espèce: dans ce cas les coefficients  $\alpha_h$  ( $h \neq i$ ),  $\beta_j$ ,  $\lambda_j$  de  $(E_n)$  seraient indéterminés au voisinage de  $t_i = 0$ .

les  $t_k$  ( $k \neq i$ ) on peut toujours supposer que les conditions (198) ne sont pas remplies.

Ces préliminaires établis, abordons le problème de Riemann pour  $(E_n)$ , et montrons d'abord comment on peut le ramener à un problème ne concernant que le système  $(g_n, G_n)$ .

55. *Les paramètres du groupe de monodromie  $G$ .* — Nous commencerons par rappeler des résultats classiques. L'équation  $(E_n)$  étant privée de son terme en  $y'$ , son groupe  $G_n$  sera le groupe linéaire spécial, à substitutions unimodulaires. Partons alors d'un système fondamental de  $(E_n)$ , soit  $(Y_1, Y_2)$ , canonique pour le point singulier  $x = 0$ ; en remplaçant  $Y_2$  par  $cY_2$ , on peut toujours supposer que  $(Y_1, Y_2)$  subit autour de  $x = 0$  et  $x = 1$  les substitutions respectives

$$S_{n+1} = \begin{pmatrix} A_{n+1} & 0 \\ 0 & A_{n+1}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_{n+2} = \begin{pmatrix} A_{n+2} & 1 \\ C_{n+2} & D_{n+2} \end{pmatrix}$$

avec  $A_{n+2}D_{n+2} - C_{n+2} = 1$ . Les substitutions précédentes dépendent déjà de trois paramètres arbitraires; de plus, le système  $(Y_1, Y_2)$  ainsi défini subit autour des points  $t_k$  ( $k = 1, \dots, n$ )  $n$  substitutions

$$S_k = \begin{pmatrix} A & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix},$$

qui, étant unimodulaires, dépendent chacune de trois paramètres et qui, prises avec  $S_{n+1}$  et  $S_{n+2}$ , peuvent être choisies comme base du groupe  $G_n$ ; le nombre total de paramètres de  $G_n$  est donc bien égal à  $3n + 3$  (pour  $n \geq 0$ ) <sup>(1)</sup>.

Or résoudre le problème de Riemann pour  $G_n$ , c'est construire une équation linéaire du second ordre  $(E_n)$  possédant  $n + 3$  singularités régulières données  $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = 0, t_{n+2} = 1, t_{n+3} = \infty$  et admettant  $G_n$  pour groupe de monodromie: Afin que le problème soit possible,  $(E_n)$  devra posséder des points apparemment singuliers <sup>(2)</sup>, sinon le

(1) En pratique, nous adopterons pour paramètres de  $G_n$  les invariants  $A + D$  de  $3n + 3$  substitutions convenablement choisies dans  $G_n$  (cf. n° 56).

(2) Pour une équation linéaire quelconque du second ordre,  $\mathcal{C}$ , un point apparemment singulier est un point singulier régulier qui introduit dans le groupe de monodromie  $G$  une substitution  $(A, 0, 0, A)$ ; une telle substitution est permutable à toutes

coefficient  $p(x)$  de  $y$  serait de la forme

$$\sum_{k=1}^{n+2} \left[ \frac{c_k}{(x-t_k)^2} + \frac{c'_k}{x-t_k} \right] \quad \left( \sum_{k=1}^{n+2} c'_k = 0 \right);$$

d'ailleurs  $(E_n)$  doit être dépourvue de terme en  $y'$  puisque  $G_n$  est spécial : elle ne dépendrait donc que de  $2n+3$  paramètres (et des  $n$  points  $t_1, \dots, t_n$ ) ; le problème de Riemann ne pourrait alors être résolu que pour des positions particulières des points  $t_1, \dots, t_n$ .

Ainsi  $(E_n)$  devra posséder  $n$  points apparemment singuliers (simples)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ; d'ailleurs dans le voisinage de  $\lambda_j$ ,  $(E_n)$  est de la forme

$$y'' = \left[ \frac{3}{4(x-\lambda_j)^2} + \frac{c''_j}{x-\lambda_j} + c'''_j + \dots \right] y;$$

le point  $x = \lambda_j$  ne pouvant être logarithmique pour  $y$ , il faut que l'on ait  $c''_j = c'''_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). En vertu de l'existence de ces  $n$  relations ( $e_j$ ) l'équation linéaire (où les  $t_k$  sont donnés) dépendra bien de  $3n+3$  paramètres : si on l'écrit sous la forme  $(E_n)$  du n° 8, ces paramètres seront

$$c_1, \dots, c_{n+3}, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \quad (1).$$

Or, parmi les  $3n+3$  paramètres de  $(E_n)$  il en est  $n+3$  que l'on

les substitutions de  $G$ . On peut toujours supposer  $G$  spécial et  $\mathcal{E}$  dépourvue de terme en  $y'$  ; la substitution est alors de la forme  $(\varepsilon, 0, 0, \varepsilon)$ , ( $\varepsilon = \pm 1$ ). Les racines de l'équation déterminante relative au point sont  $1 + \frac{m}{2}$  et  $-\frac{m}{2}$ , l'entier  $m$  étant l'ordre du point apparemment singulier. Un point d'ordre  $m$  peut être considéré comme provenant de la fusion de  $m$  points simples : ce fait résulte aussitôt de l'introduction des points apparemment singuliers à partir des systèmes canoniques (voir la note suivante).

(1) A l'équation  $(E_n)$  substituons le système canonique  $S$  (n° 8), où les coefficients satisfont aux relations  $A_{11}^k + A_{22}^k = 1$  ;  $G$  est alors spécial ; les coefficients distincts de  $S$  (et autres que les  $t_k$ ) sont au nombre de  $3n+6$  ; mais comme on l'a vu (n° 9, note de la page 190) on peut effectuer sur les inconnues  $y_1, y_2$  de  $S$  une substitution linéaire quelconque dépendant de trois paramètres arbitraires ; en général (n° 9) on peut ainsi annuler les résidus de  $a_{21}$  et  $a_{12}$  pour  $x = \infty$  ; un tel système réduit dépend de  $3n+4$  paramètres, mais n'est défini qu'à la transformation près  $y_1 | ky_1$ . Le passage du système à l'équation  $(E_n)$  vérifiée par  $y_1$  introduit précisément  $n$  points apparemment singuliers : les zéros de  $a_{21}(x)$ . Un zéro d'ordre  $m$  de  $a_{21}$  est un point apparemment singulier d'ordre  $m$  (au sens de la note précédente).

connaît immédiatement. Tout d'abord, les racines de l'équation fondamentale déterminante relative au point régulier  $x = t_k$  étant

$$\frac{1 \pm \sqrt{4c_k + 1}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{d_k}}{2},$$

on aura

$$(199)_k \quad A_k + D_k = -2 \cos \pi \sqrt{d_k} \quad (k = 1, \dots, n+2),$$

ce qui détermine  $\frac{1}{2} \sqrt{d_k}$  à une unité près <sup>(1)</sup>. D'ailleurs, si l'on écrit que la substitution  $S_{n+3}$  correspondant à un lacet autour de  $x = \infty$  est le produit des substitutions  $S_1, \dots, S_{n+2}$ , son invariant, qui est  $-2 \cos \pi \sqrt{D}$  d'après (21), sera une fonction rationnelle  $(199)_{n+3}$  des  $3n+3$  paramètres de  $\mathcal{G}_n$ ;  $D$  (ou  $c_{n+3}$ ) est donc déterminé (au même titre que  $d_k$ ).

Ainsi, les  $n+3$  constantes  $c_k$  figurant dans  $(E_n)$  sont connues dès que l'on s'est donné  $\mathcal{G}_n$  <sup>(2)</sup>; il reste alors <sup>(3)</sup> à écrire  $2n$  relations entre les  $3n$  coefficients  $\alpha_i, \beta_j, \lambda_j$ , de  $(E_n)$ , liés par les  $n$  relations  $(e_j)$ . Or le groupe  $\mathcal{G}_n$  étant indépendant des  $t_k$  nous savons que  $\beta_j, \gamma_i [= \alpha_i : t_i(t_i - 1)]$  et  $\lambda_j$  sont donnés par les formules (195), (29) et (192), les  $z_k$  satisfaisant à un système  $(g_n, G_n)$ ; l'intégrale générale de ce système (dont les coefficients  $d_k, D$  sont actuellement connus) dépend précisément de  $2n$  constantes arbitraires : la résolution du problème de Riemann revient donc à choisir dans la multiplicité  $\infty^{2n}$  des intégrales de  $(g_n, G_n)$  celle qui fournit, comme il vient d'être indiqué, les coefficients de l'équation linéaire  $(E_n)$  admettant  $\mathcal{G}_n$  pour groupe de monodromie.

56. *Détermination de la constante  $s$  en fonction des invariants de  $\mathcal{G}_n$ .*  
— Pour résoudre le problème ainsi posé, nous utiliserons encore la

(1) Il existe ainsi une infinité d'équations  $(E_n)$  de la même « espèce », possédant un même groupe  $\mathcal{G}_n$ ; nous n'envisageons ici qu'une seule équation de cette espèce sans nous préoccuper des relations existant entre les systèmes  $(g_n, G_n)$  correspondant aux équations de la même espèce.

(2) C'est le « leichte Teil » du problème d'après M. Schlesinger. Cf. *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*, Leipzig et Berlin, 1908, p. 236.

(3) C'est le « schwierige Teil »; *loc cit.*, p. 236.

méthode de récurrence, comme dans la troisième Partie. Riemann a montré comment on peut résoudre le problème pour  $n = 0$ ; nous admettrons donc qu'on sait résoudre le problème pour une équation  $(E_{n-1})$  à  $n + 2$  points singuliers, soient

$$x = t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n, t_{n+1} = 0, t_{n+2} = 1, t_{n+3} = \infty,$$

et nous allons montrer comment on le résoudrait alors pour une équation  $(E_n)$  possédant un point singulier de plus,  $x = t_i$ .

Le groupe de monodromie  $G_n$  de  $(E_n)$  dérive de la substitution  $S_i$  et des substitutions fondamentales de  $G_{n-1}$ , groupe de monodromie de  $(E_{n-1})$ ; les paramètres de  $G_n$  sont donc d'abord les  $3n$  paramètres de  $G_{n-1}$  et les quatre coefficients de  $A_i, B_i, C_i, D_i$  de  $S_i$  liés par la relation

$$(200) \quad A_i D_i - B_i C_i = 1;$$

et, de plus, on connaît la valeur

$$(201) \quad A_i + D_i = J,$$

de l'invariant de la substitution  $S_i$ .

Or, soit  $\mathcal{L}_0$  un lacet fermé, tracé dans le plan  $x$  à partir d'un point fixe  $x_0$ , et enveloppant les points  $x = 0$  et  $x = t_i$ ; la substitution  $s_0$  subie le long de  $\mathcal{L}_0$  par le système fondamental  $(Y_1, Y_2)$  (n° 55) aura pour invariant

$$(202) \quad A_i A_{n+1} + D_i A_{n+1}^{-1} = J_0.$$

De même, au lacet  $\mathcal{L}_1$  enveloppant  $x = 1$  et  $x = t_i$  correspond une substitution  $s_1$  d'invariant

$$(203) \quad A_i A_{n+2} + B_i C_{n+2} + C_i + D_i D_{n+2} = J_1.$$

Réciproquement, si  $J, J_0$  et  $J_1$  sont donnés, on voit aussitôt que les équations (200), (201), (202), (203) déterminent (1) un seul système de constantes  $A_i, D_i$  et deux systèmes de constantes  $B_i, C_i$ ; il y a donc deux groupes  $G_n$  qui admettent les  $3n$  paramètres de  $G_{n-1}$  et possèdent en outre trois invariants donnés,  $J, J_0, J_1$ .

---

(1) Sauf si l'on avait  $A_{n+1} = \pm 1$ ; mais alors  $x = 0$  ne serait plus qu'apparemment singulier (note (2) de la page 295), et l'on n'aurait affaire qu'à un groupe  $G_{n-1}$ .

Or la connaissance de  $J$  entraîne, comme nous l'avons dit, celle de  $\sqrt{d_i}$  <sup>(1)</sup>; voyons maintenant quel parti on peut tirer de la donnée de  $J_0$  et  $J_1$ .

Supposons que l'on connaisse l'intégrale  $[z]$  de  $(g_n, G_n)$  répondant au problème; *dans le voisinage de  $t_i = 0$  cette intégrale est sûrement représentable par caractéristiques* (en vertu du théorème fondamental de la troisième Partie). On pourra donc faire tendre  $t_i$  vers zéro sur un chemin  $\mathfrak{C}$ , et cela à partir d'une position initiale intérieure à  $\mathfrak{C}_0$  de telle manière, par exemple, que le chemin  $\mathfrak{C}'$  décrit par  $\text{Log} t_i$  ne soit pas parallèle à une médiane de première espèce. Pendant l'opération les paramètres de  $g_n$  restent constants; d'autre part, sur  $\mathfrak{C}_0$ , un système fondamental quelconque  $(Y_1, Y_2)$  défini à l'origine  $x_0$  du lacet par des conditions initiales indépendantes de  $t_i$  reste, sur tout le lacet, continu par rapport à  $t_i$ . Or il résulte de l'analyse du n° 54 que,  $x$  variant le long de  $\mathfrak{C}$  et  $t_i$  ayant une valeur non nulle (mais de module assez petit), le coefficient  $p(x)$  de  $y$  dans l'équation  $(E_n)$  sera arbitrairement voisin du coefficient de  $y^0$  dans l'équation-limite

$$(E_{n-1}) \quad \frac{d^2 y^0}{dx^2} = \left[ \frac{s^2 - 1}{4x^2} + \frac{\omega(t_k)}{x} + \omega_0(t_k) + \dots + \omega_r(t_k) x^r + \dots \right] y^0,$$

les  $\omega_r(t_k)$  étant des fonctions analytiques bien déterminées de  $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$ . Après circulation de  $x$  le long de  $\mathfrak{C}$ , le système fondamental  $(Y_1, Y_2)$  reprendra donc en  $x_0$  des valeurs arbitrairement voisines de celles qui sont prises en  $x_0$ , dans les mêmes conditions, par un système fondamental  $(Y_1^0, Y_2^0)$  de  $(E_{n-1})$  répondant aux mêmes données initiales que le premier système. Or l'invariant de la substitution subie par  $(Y_1^0, Y_2^0)$  est  $-2 \cos \pi s$ ; celui de la substitution fixe subie par  $(Y_1, Y_2)$  a précisément la même valeur. Ainsi  $s$  est connu à un entier pair près; l'ensemble des secteurs du plan  $T$  est pleinement déterminé et l'on peut fixer le chemin  $\mathfrak{C}$ .

Mais il y a plus : quand  $T$  tend vers l'infini sur un chemin non

---

<sup>(1)</sup> La valeur de  $d_i$  dépendra d'un entier arbitraire (n° 53). Répétons encore (cf. note <sup>(1)</sup> de la page 297) que, dans tout ce qui suit, cet entier a été fixé une fois pour toutes.



parallèle à une médiane de première espèce,  $z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n$ ,  $z_i + z_{n+1}$  et  $z_{n+2}$  tendent (n° 38) vers des limites

$$(204) \quad z_1^0, \dots, z_{i-1}^0, z_{i+1}^0, \dots, z_n^0, Z^0 = \alpha, z_{n+2}^0,$$

qui satisfont à un système  $(g_{n-1}, G_{n-1})$  aux variables  $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$ , et aux constantes  $d_1, \dots, d_{i-1}, d_{i+1}, \dots, d_n, \dot{s}^2, d_{n+2}$  (et D) : c'est donc précisément le système  $(g_{n-1}, G_{n-1})$  attaché à l'équation  $(E_{n-1})$ ,

aux constantes  $c_i = \frac{d_i - 1}{4}, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n, \frac{\dot{s}^2 - 1}{4}, c_{n+2}$  [et D<sup>(1)</sup>] :

ainsi, *l'apparition simultanée de  $\dot{s}^2$  dans  $(E_{n-1})$  et dans  $(g_{n-1}, G_{n-1})$ , résultat des analyses bien différentes des n°s 54 et 38, trouve ici son explication naturelle.*

57. *Réduction du problème de Riemann à un problème (A), relatif à la détermination d'une intégrale de  $(g_n, G_n)$  par des conditions aux limites.* Cela étant, nous savons résoudre par hypothèse le problème de Riemann pour le groupe  $g_{n-1}$  : nous savons donc construire, en fonction de  $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$  toutes les limites (204). Ce n'est pas tout : comme nous l'avons vu au n° 41, on peut écrire

$$s = \sum'' \rho_k = \frac{\sum'' z_k^0}{z_n^0} \rho_n + \sum'' \frac{t_k - t_n}{z_n^0} \frac{\partial z_k^0}{\partial t_n}.$$

Le point  $(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$  peut être choisi de telle sorte que

$$\sum'' z_k^0 = -Z^0$$

n'y soit pas nul ; d'autre part, suivant que le chemin  $\mathfrak{C}'$  appartient à un demi-secteur supérieur ou inférieur (de deuxième espèce), on a  $s = \dot{s} - 1$  ou  $\dot{s} + 1$  ; on sait donc calculer  $\rho_n$  et les  $\rho_k$  d'après (169), c'est-à-dire, d'après (167), les limites des  $U_k$  quand  $t_i$  tend vers zéro sur  $\mathfrak{C}$ . En définitive, *on saurait calculer l'intégrale  $[z]$  résolvant le pro-*

(1) On entend par là que D a la même valeur pour  $(E_n)$  et pour  $(E_{n-1})$  ; ainsi, d'après (21), si  $c'$  est le coefficient de  $1 : x(x-1)$  dans  $(E_{n-1})$ , on aura

$$c_i + c_{n+1} = \frac{\dot{s}^2 - 3}{4} + c'.$$

blème de Riemann pour  $(g_n)$  si l'on connaissait la valeur  $z_{n+1}^0$  à adopter pour  $z_{n+1}$  au point  $t_i^0$  dans les approximations successives du n° 29. Nous fixerons une fois pour toutes  $t_i^0$  et nous dirons que toutes les intégrales qui répondent aux mêmes conditions-limites relatives à l'origine, tandis que  $z_{n+1}^0$  prend une valeur variable, constituent un faisceau  $|z|$ .

Tout le problème consiste donc à déterminer  $z_{n+1}^0$  de telle manière que l'invariant  $J_1$  correspondant au lacet  $\gamma_1$  ait une valeur donnée [problème (A)]. Or, d'après les résultats du n° 53 (transposés pour la singularité  $x = 1$ ), tout revient à déterminer  $z_{n+1}^0$  de manière que,  $t_i$  tendant vers 1 le long d'un chemin  $\Gamma$  [qui, au voisinage de 1, est le transformé d'un rayon intérieur d'un secteur de première espèce <sup>(1)</sup>],  $(t_i - 1)\gamma_i = \alpha_i$  — c'est-à-dire  $\alpha_i$  — tende vers

$$z \equiv \frac{s_1^2 - 1}{4} - c_i - c_{n+2} \quad \text{avec} \quad -2 \cos \pi s_1 = J_1;$$

l'équation même que l'on vient d'écrire montre que  $s_1$  sera défini à un nombre pair près : les médianes de première espèce du point  $x = 1$  seront donc connues et par suite le chemin  $\Gamma$  décrit par  $t_i$  sera parfaitement défini.

Nous diviserons en trois parties la solution du problème précédent : nous commencerons par montrer comment on peut déterminer  $z_{n+1}^0$  de manière qu'en un point  $t_i$ , situé dans le voisinage de  $x = 0$ ,  $\alpha_i$  prenne la valeur  $\alpha$ ; nous établirons ensuite que,  $t_i$  s'éloignant de  $x = 0$  vers  $x = 1$  le long de  $\Gamma$ , la valeur  $z_{n+1}^0(t_i)$  qu'il faut adopter pour que l'on ait  $\alpha_i(t_i) = \alpha$  reste toujours bien déterminée; nous verrons enfin que  $t_i$  tendant vers 1,  $z_{n+1}^0(t_i)$  possède une limite bien déterminée qui constitue la solution cherchée.

58. *Résolution du problème (A) pour  $t_i$  voisin de zéro. Les deux groupes  $g_n$ .* — Or, pour  $|t_i|$  suffisamment petit, la solution du problème (A) est une conséquence des résultats du n° 47. En effet, considérons une intégrale quelconque  $[z]$  du faisceau  $|z|$ ; on a vu au n° 54

<sup>(1)</sup> On supposera en outre que le chemin  $\Gamma$  ne passe par aucun point singulier  $t_h$ . Ici et plus loin (n° 60), on entend par rayon intérieur d'un secteur de première espèce tout secteur qui fait avec les frontières un angle  $\geq \eta$ .

qu'au voisinage de  $t_i = 0$  et sur une médiane de deuxième espèce (par exemple)  $2\alpha_i$  est très voisin de  $-2(\Sigma'' A_k + A_{n+1})$ , c'est-à-dire de

$$\frac{t_i}{z_i} \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_i} + \frac{z_{n+1}}{z_i} + S.$$

Mais la méthode employée pour l'équation VI et qui nous a permis d'énoncer les résultats du n° 47 nous assure également que l'équation  $\alpha_i = \alpha$  admet parallèlement à la médiane de deuxième espèce une double infinité <sup>(1)</sup> de racines  $t'_\mu, t''_\nu$  ( $\mu, \nu = 1, 2, \dots$ ); d'ailleurs, si l'on a asymptotiquement  $z_{n+1} \sim at_i^s + bt_i^{-s} + c$ , ces racines se rapprochent indéfiniment des deux séries de racines de l'équation

$$(205) \quad S_0 - \frac{(\overset{*}{s} + 1)at_i^{\overset{*}{s}} - (\overset{*}{s} - 1)bt_i^{-\overset{*}{s}} + c}{at_i^{\overset{*}{s}} + bt_i^{-\overset{*}{s}} + \Sigma'' z_k^0 + c} = \alpha.$$

Rappelons encore que d'après le n° 29 la valeur asymptotique  $z_{n+1,0}$  de  $z_n$  a pour expression

$$(206) \quad \frac{h' + h''}{2} + \left( z_{n+1}^0 - \frac{h' + h''}{2} \right) \operatorname{ch} \left( \overset{*}{s} \operatorname{Log} \frac{t_i}{t_i^0} \right) + \sqrt{(z_{n+1}^0 - h')(z_{n+1}^0 - h'')} \operatorname{sh} \left( \overset{*}{s} \operatorname{Log} \frac{t_i}{t_i^0} \right);$$

or, pour l'instant, la valeur  $z_{n+1}^0$  est arbitraire; on voit donc que les coefficients  $a$  et  $b$  de (205) peuvent toujours être supposés différents de zéro; de plus, en remplaçant au besoin le secteur de deuxième espèce qui contient le chemin  $\mathfrak{E}'$  par un secteur adjacent, on peut toujours supposer  $S_0 - \overset{*}{s} \pm 1 \neq \alpha$ : ainsi, les deux séries de racines  $t'_\mu, t''_\nu$  existeront certainement.

Ceci posé, désignons par  $\zeta$  la valeur qu'on vient d'attribuer à  $z_{n+1}^0$ , et faisons varier  $z_{n+1}^0$  par continuité à partir de  $\zeta$  de manière que l'équation  $\alpha_i = \alpha$  présente une racine qui parte de  $t'_\mu$  ou  $t''_\nu$  et décrive un chemin  $\Gamma$  tendant vers le point  $x = 1$ ; au début tout au moins,  $z_{n+1}^0$  sera une fonction holomorphe bien déterminée de la variable  $t_i$ ; nous allons

<sup>(1)</sup> Si  $\overset{*}{s}$  est réel, nous ne sommes plus sûrs de l'existence d'une double infinité de racines dans la région  $(\mathbf{R})$ ; mais nous avons vu que ce cas est un cas-limite de celui où  $\overset{*}{s}$  est complexe (n° 48);  $(\mathbf{R})$  contiendra au moins deux séries (finies de racines) et cela nous suffit.

voir que le choix de la série ( $t'$  ou  $t''$ ) à laquelle appartient la valeur initiale de  $t_i$  n'est pas indifférent <sup>(1)</sup> : suivant qu'on choisit une série ou l'autre,  $z_{n+1}^0(t_i)$  aura deux valeurs, en général bien distinctes.

En effet, dans l'expression (206), faisons

$$z_{n+1}^0 = \frac{h' + h''}{2} + \frac{h'' - h'}{2} \frac{\varpi^2 + 1}{2\varpi};$$

d'après (205) et (206) l'équation  $\alpha_i = \alpha$  sera asymptotiquement équivalente aux deux suivantes :

$$\varpi \left( \frac{t_i}{t_i^0} \right)^{\frac{1}{s}} = \tau', \quad \varpi \left( \frac{t_i}{t_i^0} \right)^{\frac{1}{s}} = \tau'',$$

où  $\tau'$ ,  $\tau''$  ne dépendent que de  $h'$ ,  $h''$ ,  $z_k^0$ ,  $S_0$ ,  $\alpha$ , c'est-à-dire, de  $d_i$ ,  $d_{n+1}$ ,  $s$ ,  $z_k^0$  et  $\alpha$ . Si l'on fait varier  $t_i$  depuis un point  $t'_\mu$ , soit  $t'$  (correspondant à  $\tau'$ ) jusqu'à un point  $t'' = t''_\mu$  (correspondant à  $\tau''$ ),  $\varpi$  variera depuis  $\varpi_0 = \tau'(t' : t_i^0)^{\frac{1}{s}}$  jusqu'à  $\tau''(t'' : t_i^0)^{\frac{1}{s}} \neq \tau''(t' : t_i^0)^{\frac{1}{s}} = \varpi_0$ . Ces résultats, valables en première approximation, restent exacts pour les intégrales de  $(G_n)$  à une erreur relative près de l'ordre de  $\varepsilon'$  (ou de  $r_0$ ; n° 30, *ad fin.*) : cela suffit pour qu'on puisse affirmer que  $t_i$  allant de  $t'$  à  $t''$  l'intégrale  $[z]$  ne coïncide pas à la fin avec l'intégrale initiale.

Pour montrer que la coïncidence a lieu au contraire quand  $t_i$  va de  $t'$  à l'un quelconque des points de la même série, imaginons qu'on déplace  $t_i$  depuis l'un quelconque des points  $t'$  (*arbitrairement voisin de zéro*) jusqu'au point  $t'$  consécutif; le raisonnement de tout à l'heure montre que, si  $z_{n+1}^0$  ne revient pas à sa valeur initiale  $\zeta$ , il doit pénétrer dans un cercle dont le centre est  $\zeta$  et dont le rayon est de l'ordre de grandeur de  $\varepsilon'$ . Ce cercle contient donc un point d'accumulation des points précédents; mais alors on pourrait trouver deux tels points arbitrairement voisins, soient  $z_{n+1}^1$  et  $z_{n+2}^2$  tels que pour les intégrales du faisceau  $|z|$  définies par les conditions initiales  $(t_i^0, z_{n+1}^1)$  et  $(t_i^0, z_{n+2}^2)$  les équations  $\alpha_i(t_i) = \alpha$  présenteraient les mêmes files de zéros,  $t_i = t'_\mu$ , ce qui est absurde.

En définitive, si l'on fait varier l'intégrale dans  $|z|$  de manière que l'équation  $\alpha_i(t_i) = \alpha$  soit vérifiée en un point  $t_i$  variable par continuité

(1) On peut toujours supposer que le chemin  $\Gamma$  contient un point  $t'$  au moins et un point  $t''$  au moins.

sur la sphère à partir de  $t'$  sur  $\Gamma$ , la valeur prise au point fixe  $t_i^0$  par  $z_{n+1}^0$  variera par continuité sur la sphère complexe  $\Sigma$  pour  $|t_i|$  assez petit; elle restera la même si l'on remplace le point de départ  $t'$  par un point quelconque de la même série; elle changera en général si l'on remplace le point de départ par un point de la seconde série <sup>(1)</sup>: si donc nous parvenons à prouver l'existence d'une limite pour  $z_{n+1}^0$  lorsque  $t_i$  tend vers 1, le problème (A) aura deux solutions distinctes.

*Mais ceci pouvait être prévu, car nous savons qu'il existe deux groupes  $G_n$  admettant pour paramètres ceux de  $G_{n-1}$  et les trois invariants  $J_0, J_1, J_2$ ; si l'on se borne à résoudre le problème de Riemann pour l'un des groupes, il ne faudra retenir que l'une des valeurs-limites obtenues pour  $z_{n+1}^0$  en  $t_i = 1$ ; nous nous bornerons donc à l'étude de l'une seule des fonctions  $z_{n+1}^0(t_i)$ .*

59. *Résolution du problème (A) pour  $t_i$  quelconque.* — Nous montrons d'abord que lorsque  $t_i$  tend vers un point quelconque du chemin  $\Gamma$ , le point  $z_{n+1}^0$  tend vers une position limite bien déterminée. Supposons, en effet, que le théorème soit inexact; on pourra marquer sur  $\Gamma$  un arc ouvert  $O\theta$  tel qu'en tout point de  $O\theta$   $z_{n+1}^0(t_i)$  tende vers une limite bien déterminée, le même fait cessant d'être exact soit en  $\theta$ , soit au delà de  $\theta$ : je dis que cette hypothèse est absurde.

Effectivement la fonction  $\alpha(t_i, z_{n+1}^0)$  est méromorphe en  $t_i$  pour tout point de  $\Gamma$  ( $t_i = 0$  et  $t_i = 1$  exclus); d'après un théorème de M. Painlevé <sup>(2)</sup>  $\alpha(t_i, z_{n+1}^0)$  est aussi méromorphe en  $z_{n+1}^0$ , sauf peut-être pour les valeurs  $z_{n+1}^0 = 0$  et  $z_{n+1}^0 = \infty$ . Sur la sphère complexe  $\Sigma$  représentative de  $z_{n+1}^0$ , entourons ces deux points de cercles  $\gamma_0$  et  $\gamma_\infty$  de rayon  $\rho$  très petit, et soit  $\Sigma'$  la partie restante de la sphère. Soit alors  $\lambda$  un petit arc de  $\Gamma$ , comprenant  $t_i = \theta$  à son intérieur (au sens strict); pour chaque point  $t_i$  de  $\lambda$   $\alpha(t_i, z_{n+1}^0)$  possédera dans  $\Sigma'$  un nombre fini de pôles qui se déplaceront dans des aires  $\omega$  arbitrairement petites si  $\lambda$  a été pris assez petit: ces aires seront donc extérieures les unes aux autres et intérieures à  $\Sigma'$ . Sur la portion  $\Sigma''$  de  $\Sigma'$  extérieure aux  $\omega$ , marquons encore les points (en nombre fini) qui annulent  $\frac{\partial \alpha}{\partial z_{n+1}^0}$  pour une valeur

<sup>(1)</sup> Voir la note de la page 303.

<sup>(2)</sup> Voir la note <sup>(3)</sup> de la page 262.

déterminée de  $t_i$ ; quand  $t_i$  décrira  $\lambda$ , ces points resteront dans des aires  $\omega'$  infiniment petites que nous exclurons encore de  $\Sigma''$ . Soit  $\Sigma'''$  l'aire restante;  $t_i$  appartenant à  $\lambda$  et  $z_{n+1}^0$  à  $\Sigma'''$ ,  $\alpha_i(t_i, z_{n+1}^0)$  sera une fonction holomorphe des deux variables  $t_i$  et  $z_{n+1}^0$ , et l'on aura  $\left| \frac{\partial \alpha}{\partial z_{n+1}^0} \right| \geq m > 0$ .

Ceci posé, faisons tendre  $t_i$  vers  $\theta$  le long de l'arc  $O\theta$  de  $\Gamma$ ; ou bien  $z_{n+1}^0$  sortira de  $\Sigma'''$  pour ne plus y rentrer, et cela si petite que soit la région complémentaire de  $\Sigma'''$  par rapport à  $\Sigma$  (c'est-à-dire si petits que soient  $\rho$  et le diamètre de  $\lambda$ ): dans ce cas,  $z_{n+1}^0$  tendra vers une limite bien déterminée et le théorème sera démontré pour  $t_i = \theta$ ; ou bien il n'en sera rien. Donnons alors à  $t_i$ ,  $z_{n+1}^0$  un système de valeurs quelconques,  $t$ ,  $z$ , appartenant respectivement à  $\lambda$  et  $\Sigma'''$ ;  $\alpha_i(t_i, z_{n+1}^0)$  prendra une valeur  $a$  et d'après le théorème des fonctions implicites il existera une branche de fonction  $z_{n+1}^0(t_i)$  telle que l'équation  $\alpha_i(t_i, z_{n+1}^0) = a$  admette une solution identique à la branche précédente et se réduisant à  $z$  pour  $t_i = t$ , cette solution étant d'ailleurs holomorphe pour  $|t_i - t| < \bar{\eta}$ .

Or, lorsque  $t$  et  $z$  varient de toutes les manières possibles dans leurs domaines respectifs, un raisonnement bien connu (par exemple, l'application du lemme de Borel-Lebesgue) montre que  $\bar{\eta}(t, z)$  présentera un minimum non nul  $\eta_0$ . Prenons alors pour  $t_i$  un point  $t'$  de  $O\theta$  à une distance de  $\theta$  inférieure à  $\eta_0$ ; soit  $z'$  la valeur correspondante prise en ce point par notre fonction  $z_{n+1}^0(t_i)$ ; il suffit de remplacer  $t$  par  $t'$ ,  $z$  par  $z'$  et  $a$  par  $\alpha$  pour constater que  $z_{n+1}^0(t_i)$  est holomorphe sur  $\Gamma$  pour  $t_i = \theta$ .

C. Q. F. D.

D'ailleurs, dans le cas où la limite de  $z_{n+1}^0$  en  $\theta$  serait 0 ou  $\infty$ , ou encore un pôle de  $\alpha_i$  ou un zéro de  $\frac{\partial \alpha_i}{\partial z_{n+1}^0}$ , il suffirait de déformer arbitrairement peu  $\Gamma$  dans le voisinage de  $\theta$  pour faire cesser la particularité précédente.

60. *Résolution du problème (A) pour  $t_i = 1$ .* — Il ne nous reste plus qu'à établir que,  $t_i$  tendant vers 1,  $z_{n+1}^0(t_i)$  tend vers une limite bien déterminée.

Or, quand on fait varier  $z_{n+1}^0$  d'une manière quelconque sur la sphère complexe  $\Sigma$ , toute intégrale  $[z]$  du faisceau  $|z|$  peut être représentée

dans le voisinage du point  $t_i = 1$  par des caractéristiques convenablement choisies. En particulier, soit  $\Delta$  un rayon parallèle à une médiane de première espèce (pour le point singulier  $t_i = 1$  et pour l'intégrale  $[z]$ ); lorsque  $[z]$  variera dans  $|z|$  assujettissons le secteur auquel appartient  $\Delta$  à rester dans la région  $(R_i)$  <sup>(1)</sup> :

$$|\cos \arg \operatorname{Log}(1 - t_i)| \geq \eta > 0.$$

A l'infini sur  $\Delta$ ,  $\alpha_i(t_i)$  tendra vers une limite finie  $\alpha_i^0$  (n° 53), variable avec  $z_{n+1}^0$ ; mais si  $z_{n+1}^0$  décrit toute la sphère complexe  $\Sigma$  et que  $\Delta$  reste assujetti à la condition précédente, on voit aisément <sup>(2)</sup> que  $|\alpha_i^0|$  restera uniformément borné et qu'à chaque nombre positif arbitrairement petit  $\varepsilon$ , on pourra associer un nombre positif  $A$  tel que pour toute intégrale du faisceau, et sur tout rayon  $\Delta$  intérieur <sup>(3)</sup> à un secteur première espèce de  $(R_i)$  on ait [avec  $\bar{\alpha} \equiv \alpha_i(t_i)$ ]

$$(207) \quad |\bar{\alpha} - \alpha_i^0| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \alpha_i^0} - 1 \right| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad -\Re[\operatorname{Log}(1 - t_i)] \geq A.$$

Or nous avons vu aux n°s 58 et 59 que dans le faisceau  $|z|$  on peut encore définir une intégrale quelconque au moyen de la valeur  $\bar{\alpha}$  prise par  $\alpha_i$  en  $t_i$  sur  $\Gamma$ ; mais, si  $|t_i - 1|$  est assez petit,  $\bar{\alpha}$  est une fonction de  $\alpha_i^0$  vérifiant les conditions (207); si  $|t_i - 1|$  est pris assez petit, il existera donc sûrement une intégrale du faisceau (et une seule) pour laquelle la valeur-limite de  $\alpha_i$  à l'infini sur  $\Delta$  sera un nombre fini arbitrairement donné  $\alpha$ ; ce sera l'intégrale qui résoudra le problème de Riemann pour  $\mathcal{G}_n$ ; elle constituera d'ailleurs, d'après (207), la limite, pour  $t_i$  tendant vers 1, de l'intégrale définie par  $\alpha_i(t_i) = \alpha$ .

Ainsi, sous réserve des restrictions faites plus haut [n° 55, note <sup>(1)</sup>,

<sup>(1)</sup> Pour certaines valeurs de  $z_{n+1}^0$  cette condition pourra obliger à remplacer un secteur par un secteur adjacent; mais ces discontinuités ne présentent aucun inconvénient pour le problème actuel.

<sup>(2)</sup> Par exemple, en appliquant le lemme de Borel-Lebesgue. D'ailleurs, afin de pouvoir appliquer ce lemme, il faut être sûr de pouvoir écrire des inégalités de la forme (207) pour une intégrale déterminée de  $|z|$ . Or la première est une conséquence immédiate de la théorie des caractéristiques de première espèce; la seconde s'établit comme pour VI ([VI], n°s 23 et 36).

<sup>(3)</sup> Voir la note de la page 301.

p. 297; n° 56, note (1), p. 299; n° 57, p. 301] à propos de la détermination de  $d_i, s, s_1$  par  $J, J_0, J_1$ , on peut dire que *la solution du problème de Riemann est unique une fois qu'on s'est donné le chemin  $\Gamma$* . D'ailleurs, *pour deux chemins  $\Gamma$  qui peuvent se réduire l'un à l'autre par une déformation continue, sans rencontrer les points singuliers, les solutions obtenues ne sauraient être différentes* (1). Ainsi donc, sous réserve des restrictions précédentes, la solution du problème de Riemann est unique, ce qui concorde bien avec le *Fundamentallemma* de M. Schlesinger (2). Ajoutons enfin que l'équation linéaire  $(E_n)$  correspondant à cette solution sera toujours bien déterminée sauf pour les valeurs particulières des  $t_i$  qui rendent infinis les coefficients  $\alpha_i$  ou  $\beta_j$ .

Il résulte enfin de notre méthode même de résolution que *deux équations  $(E_{n+1})$  admettant le même groupe  $G_{n-1}$  mais différant l'une de l'autre par la valeur du coefficient  $(s^2 - 1) : 4$  de  $x^{-2}$  peuvent être considérées comme provenant d'une même équation  $(E_n)$  par deux passages à la limite différents*; chaque fois le point singulier  $x = t_i$  [qui appartient à  $(E_n)$  mais non à  $(E_{n-1})$ ] tend vers le point  $x = 0$ , mais dans les deux cas suivant des chemins différents : suivant deux spirales logarithmiques transformées par  $T = \text{Log} t_i$  de deux rayons intérieurs au sens strict à deux secteurs de deuxième espèce différents du plan  $T$  (3).

---

(1) On le voit par la méthode de décomposition en régions successives appliquée à l'aire comprise entre les deux chemins; on appliquera au point critique hypothétique défini par la décomposition les résultats du n° 59. En reprenant les considérations des n°s 55 et 56, on verrait que si les deux chemins  $\Gamma$ , qui doivent donner à  $\alpha_i$  en  $t_i = 0$  et  $t_i = 1$  les deux valeurs-limites que nous avons déduites de  $J_0$  et  $J_1$ , comprennent entre eux un point  $t_k$ , les deux groupes  $G_n$  qui leur correspondraient ne seraient pas identiques (on suppose, bien entendu, que pour définir les substitutions des groupes on a tracé dans les plans  $x$ , chaque fois, le même système de coupures).

(2) *Vorlesungen...*, p. 234.

(3) Les développements donnés à propos de  $VI_0$  ([VI], n° 57, p. 343-348) permettent de résoudre en termes finis de la manière la plus simple le problème de Riemann pour l'équation du second ordre, à quatre points singuliers logarithmiques (les racines des équations fondamentales déterminantes sont égales entre elles pour chaque équation).