ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERTRAND GAMBIER

Théorème du reste de Brill et Noether. Systèmes linéaires de courbes algébriques et groupes des points surabondants

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 42 (1925), p. 217-291

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1925_3_42__217_0>

THÉORÈME DU RESTE DE BRILL ET NŒTHER

SYSTÈMES LINÉAIRES DE COURBES ALGÉBRIQUES

ET

GROUPES DE POINTS SURABONDANTS

PAR M. BERTRAND GAMBIER

Introduction.

1. J'ai étudié aux *Annales de l'École Normale* (3^e série, t. 41, 1924, p. 147-264) les systèmes linéaires de courbes algébriques de degré donné m, admettant un groupe donné de points bases, chaque point base étant simple soit sur chaque courbe, soit dans l'intersection.

Ici je généraliserai; il est naturel de réunir aux points bases effectivement donnés les points bases *virtuels* éventuels, de forcer pour chaque point base la multiplicité, primitivement donnée, pour obtenir la multiplicité *virtuelle* éventuelle; cela fait, on a un groupe *complet* de points bases; l'étude peut donc se borner à celle des groupes complets. Je désigne par la lettre Π les points bases multiples, $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ où k est, dans ce nouveau travail, un entier *positif non nul*, et par la lettre P les points bases simples, $P_1, P_2, \ldots, P_h$ où h est un entier positif ou nul; Π_1 est d'ordre *effectif* ε_1 sur la courbe *générale* du système, compte pour $\varepsilon_1^2 + \eta_1$ unités dans l'intersection de deux courbes arbitraires du système ($\varepsilon_1 \geqq 2$, $\eta_1 \geqq 0$); le point simple P_1 compte pour $1 + j_1$ ($j_1 \geqq 0$) dans l'intersection. Quand l'un des nombres η ou j est différent de zéro, cela signifie que l'on a, pour un point simple P par exemple, donné une courbe auxiliaire passant en P, avec laquelle chaque courbe du système admet $1+j$ points communs réunis en P ; conditions analogues pour un point multiple. On sait que, par une suite de transformations birationnelles quadratiques, on peut transformer le système linéaire proposé de courbes C_m en un autre système linéaire, où le degré m' n'est peut-être plus égal à m, mais où chaque nombre η, j est nul : cette disposition étant commode, nous nous y bornerons; néanmoins certaines constructions auxiliaires nous conduiront à étudier des contacts d'ordre arbitrairement élevé, en nombre lui-même arbitrairement élevé.

2. La difficulté du nouveau problème tient uniquement à la présence des points multiples. Or la théorie classique de la résiduation n'est pas présentée sous une forme commode pour ce problème. J'ai été amené à indiquer trois perfectionnements successifs du célèbre théorème du reste, de Brill et Nœther. Ce sera le but du premier Chapitre, suffisamment court pour que je ne le résume pas ici.

J'indiquerai seulement que ce Chapitre spécial constitue à lui seul un travail d'ensemble, que l'on peut se proposer de développer, indépendamment de tout autre application (systèmes linéaires de courbes ou autre application). Je montre que l'on peut généraliser la géométrie algébrique sur une courbe donnée C, en la coupant par des courbes ayant en chaque point multiple de C une multiplicité soit *supérieure*, soit même *inférieure* à la multiplicité adoptée pour les *adjointes* ordinaires. On peut en particulier employer des courbes évitant systématiquement certains points multiples de C, ayant aux autres le caractère *adjoint* classique et cela permet d'attribuer à une courbe donnée C de genre p, inférieur au maximum $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, un *genre apparent* supérieur à p, pouvant prendre les valeurs correspondant aux points multiples non négligés, pouvant en particulier prendre la valeur apparente $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$. La théorie des séries complètes, des séries spéciales ou non spéciales, le théorème de Riemann-Roch, la loi de réciprocité de Brill et Nœther subissent ainsi une extension précieuse pour de nouvelles études et le théorème d'Abel lui-même se trouve avoir son expression analytique généralisée par l'adjonction aux intégrales de première espèce d'intégrales de seconde et troisième espèce convenablement choisies.

3. Le second et dernier Chapitre est consacré à l'étude des groupes surabondants *complets*. Le cas où le groupe comprend un nombre *infini* de points correspond soit au cas d'une seule C_m, soit au cas de courbes toutes décomposées en une portion fixe et une autre portion variable qui décrit un système linéaire. Je me bornerai à de très rapides indications sur ce cas, mais en fin du Chapitre indiquerai les dispositions remarquables que présentent les points multiples d'une courbe algébrique. Le seul cas vraiment intéressant à étudier est celui du groupe complet formé d'un nombre *fini* de points : le problème revient alors à étudier la structure du groupe formé par les points bases d'un *faisceau* et à chercher dans quel cas ce groupe complet, au lieu d'être irréductible, c'est-à-dire de ne contenir aucun groupe *anormal complet*, contient à son intérieur un groupe anormal complet (lequel peut à son tour être réductible, etc.). Ce problème se subdivise encore en deux, suivant que le total des points multiples peut être choisi arbitrairement ou non : on épuise complètement la première hypothèse en utilisant une première courbe C_m circonscrite aux points multiples et des adjointes d'ordre $m-3$ au plus ayant un certain nombre de points fixes sur la courbe C_m adoptée. Les résultats essentiels sont les suivants :

a. Le genre *effectif* de la courbe *générale* circonscrite à un groupe de points bases donnés (*groupe complet*) est celui qui est indiqué par le degré de la courbe et la multiplicité des divers points multiples.

b. Il n'existe, pour le genre 0, aucun groupe anormal complet composé d'un nombre fini de points; pour le genre 1 il n'en existe qu'un, à savoir celui formé par les points bases d'un faisceau et ce groupe a la surabondance 1.

c. Pour le genre p, la surabondance du total des points bases d'un faisceau est p. Tout groupe partiel, *complet ou incomplet*, contenu à l'intérieur a une surabondance s, nulle ou positive, *toujours inférieure sans égalité à p* ; pour obtenir cette surabondance, il suffit de compter le nombre d'adjointes linéairement indépendantes contenant les points bases complémentaires du faisceau.

CHAPITRE I.

THÉORÈME DU RESTE DE BRILL ET NOETHER.

1. *Première extension du théorème du reste.* — Π_1 étant un point multiple d'ordre i_1 d'une courbe algébrique donnée C, Brill et Nœther appellent *adjointe* de C toute courbe A admettant Π_1 avec la multiplicité $i_1 - 1$ au moins (et conditions analogues pour chaque point multiple); mais au fond, ils se bornent plus ou moins implicitement à la multiplicité *exacte* $i_1 - 1$. Or, c'est un progrès important de spécifier l'ordre exact de Π_1 sur l'adjointe A : soit $i_1 - 1 + \omega_1$ cet ordre, où ω_1 est un entier positif ou nul, que j'appellerai *excès de multiplicité*, ou simplement *excès* de Π_1 pour l'adjointe A ; on définira de même l'excès ω en chaque point Π.

Je sépare le total G des points, autres que les Π, communs à C et A en deux groupes G′ et G″ (dont l'un peut se composer de zéro point); je conviens d'appeler G′ *et* G″ *résiduels l'un de l'autre, avec les excès respectifs* ω_1 *en* Π_1, ω_2 *en* Π_2, ...; nous verrons, un peu plus bas, la différence de cette définition et de la définition classique. Par G′ et G″ je fais passer les adjointes A′ et A″ pour lesquelles les excès respectifs sont ω'_1 et ω''_1 en Π_1, ω'_2 et ω''_2 en Π_2, .. ; A′ donne le résiduel γ' de G′, d'excès ω'_1 en Π_1, ω'_2 en Π_2, ..., et A″ le résiduel γ'' de G″, d'excès ....

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que γ' *et* γ'' *soient résiduels l'un de l'autre* (*suivant la nouvelle définition*) *sont exprimées par l'ensemble des inégalités*

$$\omega_1 \leqq \omega'_1 + \omega''_1, \qquad \omega_2 \leqq \omega'_2 + \omega''_2, \qquad \ldots.$$

Je reprends la démonstration classique, celle par exemple du Traité de MM. Picard et Simart (t. II, p. 16) et nous verrons qu'il n'y a *aucune modification* à lui apporter, sinon que de spécifier chaque excès. Il est commode de désigner par la même lettre une courbe ou le premier membre de son équation algébrique entière. Le polynome A′A″ s'annule en tous les points G′ et G″; il admet Π_1 avec la multiplicité

$$(i_1 - 1 + \omega'_1) + (i_1 - 1 + \omega''_1) = i_1 + (i_1 - 1 + \omega_1) - 1 + (\omega'_1 + \omega''_1 - \omega_1),$$

supérieure ou égale à

$$i_1 + (i_1 - 1 + \omega_1) - 1.$$

Donc, d'après les principes classiques, on peut écrire une identité

$$A'A'' \equiv C\Gamma + A\mathcal{A},$$

où Γ et $\mathcal{A}$ sont des polynomes entiers. Transportons l'origine en Π_1 et écrivons les divers polynomes ordonnés par groupes de termes homogènes de degré croissant

$$\begin{aligned}
C &= c_{i_1} + c_{i_1+1} + \ldots, & & \\
A &= a_{i_1-1+\omega_1} + a_{i_1+\omega_1} + \ldots, & \mathcal{A} &= a_{i_1-1+\Omega_1} + a_{i_1+\Omega_1} + \ldots, \\
A' &= a_{i_1-1+\omega'_1} + a_{i_1+\omega'_1} + \ldots, & \Gamma &= \gamma_\lambda + \gamma_{\lambda+1} + \ldots. \\
A'' &= a_{i_1-1+\omega''_1} + a_{i_1+\omega''_1} + \ldots, & &
\end{aligned}$$

Nous supposons que A et C n'ont aucune branche tangente en Π_1, donc que c_{i_1} et $a_{i_1-1+\omega_1}$ n'ont aucun facteur commun, donc on a *nécessairement*

$$\omega_1 + \Omega_1 = \omega'_1 + \omega''_1, \qquad \lambda = \omega'_1 + \omega''_1 + i_1 - 2,$$
$$\gamma_\lambda c_{i_1} + a_{i_1-1+\omega_1} a_{i_1-1+\Omega_1} = a'_{i_1-1+\omega'_1} a''_{i_1-1+\omega''_1}.$$

Précisons la différence entre cet énoncé et l'énoncé classique : dans ce dernier, G′ et G″ ne sont résiduels que *si tous les excès sont nuls :* si l'on suppose $\omega_1 > 0$, l'intersection complète de C et A contient $i_1\omega_1 + i_1(i_1 - 1)$ fois le point Π_1 et l'énoncé classique ne retire Π_1 que $i_1(i_1 - 1)$ fois, de sorte que, dans l'intersection ultérieure de C et A, on a, outre G′ et G″, encore $i_1\omega_1$ fois Π_1, $i_2\omega_2$ fois $\Pi_2, \ldots$; il faudrait donc séparer les $i_1\omega_1$ points réunis en Π_1 en deux portions dont l'une serait ajoutée à G′ et l'autre à G″ ; on sent le vague de telles conventions; même précisées, elles offrent l'inconvénient de ne pas offrir de groupes G′ et G″ purs de toute compromission avec les points multiples.

2. Les conventions adoptées ici permettent de tracer sur la courbe C le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
G' & A & G'' \\
A' & & A'' \\
\gamma' & \mathcal{A} & \gamma''
\end{array}$$

$\mathcal{A}$ est elle-même une adjointe; la somme des degrés de A *et* $\mathcal{A}$, *la somme des excès de* A *et* $\mathcal{A}$ *en chaque* Π *est égale à la somme analogue relative à* A′ *et* A″.

Indépendamment de l'étude des systèmes linéaires de courbes, il est bon de donner quelques applications.

Si ω_1 surpasse $\omega'_1 + \omega''_1$, on peut compléter A′ par une courbe $\overline{A'}$ (non plus nécessairement adjointe) admettant Π_1 avec la multiplicité $\omega_1 - (\omega'_1 + \omega''_1)$, ou supérieure; $\overline{A'}$ peut se dispenser de passer en ceux des points Π pour lesquels on a $\omega \leqq \omega' + \omega''$. On raisonne alors sur l'adjointe $(A' + \overline{A'})$ et l'adjointe A″, ce qui revient à compléter γ' par le groupe $\overline{\gamma'}$ provenant de $\overline{A'}$.

Premier exemple. — C, A cubiques ayant Π pour point double, $(i = 2,\ \omega = 1)$, se coupant encore en V_1, V_2, V_3, V_4 et V_5; V_1 et V_2 déterminent ∞^2 adjointes de degré 2, dont l'une A′ fournit le résiduel X, Y de V_1, V_2; de même V_3, V_4, V_5 déterminent ∞^1 coniques adjointes dont l'une A″ fournit Z; on a $\omega' = \omega'' = 0$. Chacun des 3 points X, Y, Z peut être pris arbitrairement, de sorte que le procédé signalé ne pourra rien donner. En effet on prendra pour $\overline{A'}$ une droite fournissant un point T arbitraire : X, Y, Z, T sont sur une même conique adjointe, résultat banal. L'insuccès dans ce cas particulier tient à une raison profonde, à savoir que la courbe étudiée est unicursale.

Deuxième exemple. — C, A quartiques ayant Π pour point double, $(i = 2,\ \omega = 1)$, se coupant en Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 et $R_1, R_2, \ldots, R_8$. Supposons que les Q ne soient pas en ligne droite, ou encore ne présentent pas la configuration suivante : Q_1, Q_2 alignés avec Π, de même Q_3, Q_4 alignés avec Π. Supposons que les 8 R ne soient pas avec Π bases d'un faisceau de cubiques, ou encore ne soient pas avec Π sur une même cubique dont Π serait point double (¹). Donc Π et les Q déterminent une seule conique adjointe A′ et le résiduel q_1, q_2;

(¹) Si l'une des dispositions signalées était vérifiée, il suffirait d'un changement de nom pour les 12 points Q, R pour éviter cette disposition. Nous verrons, comme application des perfectionnements ultérieurs du théorème du reste, les propriétés spéciales aux dispositions critiques ainsi écartées.

on a $\omega' = 0$. De même II et les R déterminent une seule cubique adjointe A″ et le résiduel r_1, r_2; on a $\omega'' = 0$. Choisissons pour $\overline{A'}$ une droite issue de II, donnant deux points s_1, s_2. Le théorème du reste nous prouve que q_1, q_2, r_1, r_2, s_1, s_2 sont sur une même conique $\mathcal{A}$ adjointe, avec $\Omega = 0$; II, s_1, s_2 étant en ligne droite, cette conique $\mathcal{A}$ se décompose, et puisque II$s_1 s_2$ est une droite *arbitraire* issue de II tandis que q_1, q_2, r_1, r_2 sont *fixes*, les quatre points q_1, q_2, r_1, r_2 sont sur une même droite : c'est une propriété importante qui ne fait intervenir que les deux groupes γ' et γ'' de l'énoncé général.

Troisième exemple. — C et A septiques ayant $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{11}$ pour points doubles, ($i = 2$, $\omega = 1$), se coupant en V_1, V_2, V_3, V_4, V_5. Les points II, V_1, V_2 définissent ∞^1 quartiques (j'écarte le cas du réseau); l'une, A′, fournit le résiduel Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 dont l'un des points, au moins, est variable ; les II et V_3, V_4, V_5 définissent *une* quartique A″ (j'écarte le cas du faisceau) et le résiduel R_1, R_2, R_3. On a $\omega' = \omega'' = 0$; $\overline{A'}$ sera, par exemple, une quartique du système linéaire ∞^3 défini par les II; elle coupe C en $U_1, U_2, \ldots, U_6$. Les 13 points Q, R, U sont sur une même quintique adjointe, avec $\Omega = 0$; en faisant varier les U qui engendrent une série g_6^3, on voit que les 18 points simples Q, R, II définissent ∞^3 quintiques et par suite forment un groupe de surabondance 1 pour le degré 5. Cette propriété, si intéressante qu'elle soit, est moins intuitive que précédemment et ici on utilise non seulement les groupes γ', γ'' de l'énoncé général, mais encore le groupe des points multiples.

3. Dès maintenant remarquons que si C est de genre 0, elle n'a aucune adjointe d'ordre $m - 3$ ou inférieur et c'est pour cela que les courbes unicursales ne pourront fournir de groupe surabondant (j'entends par là qu'il s'agit de points bases définissant un système de courbes toutes unicursales : par exemple donner, pour le degré m, un point II multiple d'ordre $m - 1$, et un certain nombre de points simples). Si C est de genre 1, elle n'admet, au degré $m - 3$, qu'*une* adjointe α, ne la coupant qu'aux points multiples; si G′, G″, γ', γ'' sont les groupes définis plus haut, γ' et γ'' sont *toujours résiduels l'un de l'autre :* en effet au cas où il y a des différences $\omega - (\omega' + \omega'')$ qui

sont positives, si M est la plus grande, il n'y a qu'à prendre pour $\overline{A'}$ la courbe α comptée M fois, et cela fixe les *excès* en chaque point multiple Π pour les groupes *résiduels* γ', γ''.

4. *Deuxième extension du théorème du reste.* — Supposons que la courbe A ait en un ou plusieurs point Π une multiplicité *déficitaire*, à la rigueur nulle : la multiplicité de Π_1 est, par exemple, $i_1 - 1 + \omega_1$, où ω_1 est cette fois négatif ($\omega_1 \geqq 1 - i_1$). Il est commode de conserver le nom d'excès pour cet entier ω_1; chaque excès pourra donc être positif ou négatif; dès qu'un seul est négatif, la courbe A n'est plus une adjointe. Nous opérons comme plus haut pour le total G des points, autres que les Π, communs à C et A; on opère la séparation $G = G' + G''$ et l'on utilise des courbes A', A'' adjointes ou non, issues de G' ou G'', donnant les groupes γ' et γ''; nous considérons encore les excès ω, ω', ω'' des courbes A, A', A'' en un même point Π.

Les inégalités

$$\omega_1 \leqq \omega'_1 + \omega''_1, \qquad \omega_2 \leqq \omega'_2 + \omega''_2, \qquad \ldots$$

expriment encore les conditions nécessaires et suffisantes pour que les groupes γ', γ'' soient sur une même adjointe $\mathcal{A}$: le degré et les excès de $\mathcal{A}$ s'obtiennent par la même règle que plus haut.

La démonstration ne subit aucune modification, car elle est basée sur ce fait que, si en chaque point commun à C et A on a

$$(i_1 - 1 + \omega'_1) + (i_1 - 1 + \omega''_1) \geqq i_1 + (i_1 - 1 + \omega_1) - 1,$$

on peut écrire

$$(1) \qquad A'A'' \equiv \Gamma C + A\mathcal{A}, \qquad \omega_1 + \Omega_1 = \omega'_1 + \omega''_1,$$

et alors non seulement Γ et $\mathcal{A}$ existent, mais $\mathcal{A}$ *est une adjointe.*

5. *Troisième extension du théorème du reste.* — Cette extension sera très utile pour l'étude des groupes surabondants. Supposons qu'en Π_1 le déficit de A soit égal au maximum : $\omega_1 = 1 - i_1$, et A ne passe pas en Π_1; dans ce cas, pour pouvoir écrire l'identité (1) on n'a pas besoin de l'inégalité $\omega_1 = 1 - i_1 \leqq \omega'_1 + \omega''_1$; on peut avoir l'inégalité de sens contraire (mais ceci empêche alors $\mathcal{A}$ d'être une adjointe).

Pour que la courbe $\mathcal{A}$ *existe (sans être peut-être une adjointe) et coupe* C, *en dehors de certains points multiples, uniquement suivant le total* $\gamma' + \gamma''$, *il est nécessaire et suffisant qu'en chaque point multiple* Π *effectivement situé sur* A *on ait l'inégalité* $\omega \leqq \omega' + \omega''$; *le degré de* $\mathcal{A}$ *et les excès de* $\mathcal{A}$ *se calculent comme plus haut, soit aux points* Π *situés sur* A, *soit aux points* Π *non situés sur* A.

Ainsi si C est une quartique avec un point double Π unique, coupons-la par une droite C_1 ne passant pas en Π ($\omega = -1$) et soient q_1, q_2, r_1, r_2 les points d'intersection; par $q_1 q_2$ faisons passer une conique C_2 évitant $\Pi(\omega' = -1)$, donnant les points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$; par $r_1 r_2$ faisons passer une cubique C_3 évitant $\Pi(\omega'' = -1)$, donnant les points $R_1, \ldots, R_{10}$: les points Q, R sont sur une quartique C_4 ne contenant pas Π. Si au contraire C_2 et C_3 contiennent Π comme point simple, $\omega' = \omega'' = 0$, on a 4 points Q et 8 points R seulement situés sur une quartique C_4 ayant Π pour point double. C'est la réciproque du second exemple du paragraphe 2.

6. Autre application : parmi les mp points communs à une C_m et une C_p données, supposons que qp, supposés d'abord simples, soient sur une C_q, où $q < m$; les $(m-q)p$ restants sont sur une courbe C_{m-q}. Cette proposition demande, quand C_m, C_p, C_q ont des points multiples communs, certaines précautions. La démonstration résulte de l'identité, assurée par les hypothèses,

$$C_m \equiv C_p C_{m-p} + C_q C_{m-q}$$

(si p est supérieur à m on doit remplacer C_{m-p} par zéro et si $p = m$, C_{m-p} est une constante). La courbe C_{m-q} doit admettre comme point multiple d'ordre i tout point multiple commun à C_m et C_p et d'ordre i sur chacune, non situé sur C_q; si C_q contient ce point comme point simple, C_{m-q} ne l'admet plus qu'avec la multiplicité $i - 1$. Mais si C_p et C_q ont un point multiple commun d'ordre i sur C_p, j sur C_q, il faudra que C_m admette ce point au moins au degré $i + j - 1$ pour être certain de pouvoir, *quel que soit le cas*, appliquer le théorème sans erreur.

Ainsi plus haut, nous avons rencontré cette proposition : si deux quartiques C_4, A ont un point double commun Π et quatre autres points Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 simples communs, alignés sur une droite C_1, les huit autres points communs $R_1, R_2, \ldots, R_8$ sont sur une cubique C_3 ayant Π pour point double : cela résulte de la propriété démontrée à l'instant. La réciproque est vraie, mais, en quelque sorte, *accidentellement :* si C_4 et C_3 sont une quartique et une cubique ayant un point double Π commun et huit autres points simples $R_1, R_2, \ldots, R_8$ communs, toute quartique A, contenant $R_1, R_2, \ldots, R_8$ comme points simples et Π pour point double, coupe encore C_4 en quatre points Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 en ligne droite. Nous constatons bien que sur les 16 points communs à C_4 et A, il y en a 12 situés sur C_3 et A, mais 4 sur ces 12 proviennent d'un point multiple d'ordre 2 sur C_3 et A, que C_4 contient au degré 2 et non 3; il y a donc lieu d'une démonstration directe : nous menons par Π une droite Δ arbitraire et traçons sur C_4 le diagramme

$R_1 R_2 \ldots R_8$	cubique C_3 ($\omega = 1$)	o
A ($\omega' = 1$)		droite ($\omega'' = 0$)
$Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$	conique ($\Omega = 0$)	$r_1 r_2$

Le théorème du reste (première extension) nous prouve l'existence d'une conique, contenant Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 et les 3 points Π, r_1, r_2 situés sur une droite *variable :* donc les 4 points Q sont bien sur une droite.

Supposons maintenant que les deux quartiques C_4, A, qui ont Π comme point double commun, se coupent en 8 points $R_1, R_2, \ldots, R_8$ bases avec Π d'un faisceau de cubiques : le théorème de la résiduation appliqué à deux cubiques C_3, C'_3 de ce faisceau et à la courbe C_4, qui contient leurs 9 points communs, prouve que les 3 nouveaux points Π, r_1, r_2 communs à C_4 et C_3 sont en ligne droite; le diagramme tracé sur C_4

$R_1 R_2 \ldots R_8$	cubique C_3 ($\omega = 0$)	$r_1 r_2$
quartique A ($\omega' = 1$)		droite adjointe ($\omega'' = 0$)
$Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$	conique ($\Omega = 1$)	o

prouve, en vertu de la première extension du théorème du reste que les 4 Q sont sur une conique ayant Π pour point double : Q_1 et Q_2, par exemple, sont alignés avec Π et de même Q_3 et Q_4. Si maintenant on part de l'hypothèse : C_4 et la quartique A ont le point double Π

commun, deux points Q_1 et Q_2 communs alignés avec Π, deux autres points Q_3 et Q_4 alignés avec Π, on aboutit à la conclusion que $R_1, \ldots, R_8$ sont, avec Π, bases d'un faisceau de cubiques : en effet on mène par Π une droite arbitraire, et le diagramme précédent, lu de bas en haut, prouve, toujours en vertu de la première extension du théorème du reste, que $R_1, \ldots, R_8$ sont avec Π sur une cubique contenant $r_1 r_2$; en faisant pivoter la droite $\Pi r_1 r_2$ autour de Π on prouve l'existence du faisceau de cubiques.

7. Je cite un exemple propre avec le précédent à bien montrer le sens qu'il faut attribuer au mot *nécessaire* dans les extensions du théorème du reste : la configuration annoncée peut se produire, *dans certains cas*, même si les conditions prétendues *nécessaires* ne sont pas réalisées; mais il est néanmoins nécessaire que ces conditions soient réalisées si l'on veut pouvoir affirmer, *sauf vérification spéciale*, que la configuration est réalisée.

Ainsi deux quintiques C_5 et C'_5 sont supposées avoir en commun cinq points doubles; la conique circonscrite à ces cinq points, comptée deux fois, peut être considérée comme une quartique, dégénérée, contenant 20 intersections de C_5 et C'_5. Mais on ne peut en conclure que les cinq points complémentaires de l'intersection sont en ligne droite; d'ailleurs on peut prendre *arbitrairement* quatre des points complémentaires, et l'on a ainsi un faisceau de quintiques mettant la proposition en défaut.

8. Voici une autre application : 4 points doubles $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ pris au hasard, 5 points simples P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 en ligne droite déterminent ∞^3 quintiques Deux d'entre elles se coupent encore en 4 points Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 situés, d'après la théorie de la résiduation, sur une quartique ayant les Π comme points doubles : cette quartique se décompose donc en deux coniques : Q_1 et Q_2 par exemple sont sur une même conique avec les Π, Q_3 et Q_4 sur une autre.

De même deux quartiques C_4, C'_4 ayant un point double commun Π et deux points simples P_1, P_2 sur une droite D avec Π réalisent les conditions voulues pour écrire

$$C_4 = C_0 C'_4 + DC_3$$

de sorte que les 10 points complémentaires de l'intersection sont sur une cubique C_3 contenant Π comme point simple : avec le langage un peu vague cité plus haut on peut dire que D n'enlève Π que deux fois dans l'intersection de C_4 et C'_4 et que C_3 l'enlève les deux fois complémentaires.

9. *Genre apparent d'une courbe. Séries complètes, spéciales ou non. Théorème de Riemann-Roch ; loi de réciprocité de Brill et Noether. Théorème d'Abel.* — Une courbe C de genre *effectif* p peut se comporter au point de vue des séries g_n^r découpées sur elle par les courbes d'un système linéaire comme une courbe de genre *apparent* supérieur à p. Si les courbes du système linéaire n'ont aucun point fixe coïncidant avec un point multiple de C, le genre apparent de C sera $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$; dans tous les cas le genre apparent de C se réduira à celui fixé par les points multiples de C par lesquels passeront toutes les courbes du système linéaire. Le théorème du reste, généralisé pour les multiplicités déficitaires permet de recommencer une théorie des séries linéaires de groupes de points, spéciales ou non spéciales, complètes ou non, où ne figure que le genre apparent : il suffit en effet de raisonner avec les courbes que l'on pourrait appeler *quasi adjointes*, se comportant, pour les points multiples conservés, comme les adjointes proprement dites, tandis qu'elles évitent les points multiples délaissés. D'ailleurs pour les points multiples conservés, il y aurait lieu, le cas échéant, d'appliquer les trois généralisations du théorème du reste.

Le théorème de Riemann-Roch et la loi de réciprocité de Brill et Nœther s'appliqueraient donc aux quasi adjointes, pour les points multiples conservés.

Je ne veux pas développer davantage ces indications, car elles n'auront pas à intervenir pour l'étude des groupes de points surabondants. Je citerai un cas classique d'application des propriétés énoncées ici :

Le théorème d'Abel fournit, pour une courbe algébrique C de genre *effectif* p, p relations transcendantes entre les points qui constituent l'intersection complète de cette courbe C avec une courbe mobile Γ; ces relations font intervenir les p intégrales de première espèce attachées à la courbe. Quand la courbe mobile Γ évite de passer par certains points multiples, on peut obtenir non seulement ces p relations transcendantes, mais en réalité $p' - p$ complémentaires, où p' est le genre apparent calculé avec les points multiples de C que Γ, au cours de sa variation, doit contenir; ces relations font intervenir des intégrales abéliennes de seconde et troisième espèce.

Ainsi Sophus Lie a remarqué que, pour l'espace à trois dimensions, les surfaces de translation, qui portent son nom, ont leur existence assurée par l'application du théorème d'Abel aux 4 points variables où une quartique plane *donnée* est coupée par une droite *mobile :* on obtient en effet *trois* relations, dont une est surabondante, entre les 4 points d'intersection; ce nombre *trois* est le genre soit effectif, soit apparent de la quartique. Si la quartique n'a aucun point double, les relations s'obtiennent avec les intégrales de première espèce; si la quartique a deux points doubles, il faut prendre l'intégrale unique de première espèce, l'intégrale de seconde espèce et une intégrale de troisième espèce; le fait remarquable d'ailleurs est que, si $f(x, y) = 0$ est l'équation de la quartique, il suffit de poser

$$X = \int \frac{x\,dx}{f'_y}, \qquad Y = \int \frac{y\,dx}{f'_y}, \qquad Z = \int \frac{dx}{f'_y},$$

pour que les équations suivantes (où les intégrales ont pour limite supérieure les points d'intersection avec une droite variable, pour limite inférieure les points d'intersection avec une droite fixe).

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &= 0, \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 &= 0, \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 &= 0 \end{aligned}$$

traduisent les deux modes de génération de la surface, sans avoir besoin de spécifier le *genre effectif* de l'équation $f(x, y) = 0$; les genres effectifs 3, 2, 1 donnent des surfaces toutes transcendantes et le genre 0 permet d'obtenir des surfaces algébriques.

CHAPITRE II.

SYSTÈMES LINÉAIRES DE COURBES ALGÉBRIQUES.

1. *Groupes complets formés d'un nombre infini ou fini de points.* — Nous avons convenu d'opérer éventuellement certaines transformations

quadratiques birationnelles de façon que chaque point simple ne compte plus que pour *un* dans l'intersection et chaque point multiple pour i^2, carré de sa multiplicité i sur chaque courbe du système.

Un groupe de points bases donné fournit un certain nombre de conditions linéaires entre les coefficients de l'équation ponctuelle de la courbe C_m; on sait évaluer le nombre de conditions *distinctes :* si ce nombre est supérieur à $\frac{m(m+3)}{2}$, il y a impossibilité; s'il est égal à $\frac{m(m+3)}{2}$, il y a une seule courbe; s'il est égal à $\frac{m(m+3)}{2} - r - 1$, il y a un système ∞^{r+1}, linéaire, de courbes C_m circonscrites aux points bases; on saura trouver tous les points, virtuels, s'il y en a, communs aux courbes du système et la multiplicité exacte, des points bases; on est donc ramené à un groupe *complet,* formé de points multiples $H_1, H_2, \ldots, H_k$, d'ordre respectif $i_1, i_2, \ldots, i_k$, et de points simples $P_1, P_2, \ldots, P_h$. Un nombre *infini* de points correspond au cas d'une seule C_m ou d'un système linéaire dont toutes les courbes ont une partie fixe commune de décomposition. Nous nous attacherons surtout aux groupes complets formés d'un nombre *fini* de points.

La différence

$$s = h + \sum \frac{i(i+1)}{2} - \left[\frac{m(m+3)}{2} - r - 1\right]$$

est la surabondance, positive ou nulle, du groupe de points, supposé définissant un système ∞^{r+1}.

Si l'on n'est pas dans le cas d'impossibilité ou d'une seule C_m, et si le total $h + \Sigma i^2$ du groupe (complet ou non) est égal à m^2, on ne peut avoir qu'un *faisceau,* sauf le cas où toutes les courbes du système se décomposeraient, *avec une portion fixe ou sans portion fixe.* En effet, nous supposons qu'il y a au moins deux courbes C_m, C'_m linéairement distinctes, de sorte que le *faisceau*

$$C_m + \lambda C'_m = 0 \tag{1}$$

donne bien des courbes admettant chaque point avec la multiplicité voulue : si c'est l'équation générale, la discussion est terminée et l'on a bien un faisceau; si ce n'est pas l'équation générale, on a un système linéaire

$$\lambda C_m + \lambda_1 C'_m + \ldots + \lambda_\mu C_m^{(\mu)} = 0, \tag{2}$$

où μ est un entier $\geqq 2$: mais alors *toutes* les courbes du système se décomposent; sur l'une quelconque Γ, prenons un point A arbitraire : il existe $\infty^{\mu-1}$ courbes du système passant en A et, puisqu'elles ont un total d'intersections déjà connues égal à m^2+1, elles se décomposent avec une partie commune, donc Γ est bien une courbe décomposée. Deux circonstances distinctes peuvent se produire : ou bien toutes les courbes du système ∞^μ étudié ont une partie fixe commune, circonstance que l'on peut prévoir plus ou moins aisément *a priori* comme je l'ai expliqué dans mon précédent Mémoire et que je me contente de signaler ici, ou bien l'équation (2) est de la forme

$$\lambda\gamma^\mu + \lambda_1\gamma^{\mu-1}\gamma_1 + \ldots + \lambda_\mu\gamma_1^\mu = 0, \tag{3}$$

où γ et γ_1 sont deux courbes données de degré $\frac{m}{\mu}$; l'équation (3) représente donc une courbe formée de μ courbes distinctes de degré $\frac{m}{\mu}$ dont chacune appartient au faisceau (γ, γ_1). On constate aisément que si un système linéaire ∞^μ de courbes C_m se compose de courbes toutes décomposables, sans qu'il y ait une portion fixe commune à toutes les courbes du système, l'équation de ce système est de la forme (3).

Ainsi supposons que deux courbes C_p, C_m données, avec $p < m$ sans égalité, se coupent en mp points simples; donner ces mp points comme points bases d'ordre 2 pour le degré $m+p$ livre le système linéaire à $\frac{(m-p+1)(m-p+2)}{2}$ paramètres non homogènes

$$C_p(C_pC_{m-p} + C_m) = 0,$$

C_{m-p} étant une courbe arbitraire de degré $m-p$; en effet la courbe C_p a, avec chaque courbe inconnue, $2pm$ intersections, nombre surpassant $p(m+p)$; la surabondance du groupe est, pour le degré $m+p$, égale à $p(m-3)+1$, en supposant $m \geqq 3$.

Prenons les m^2 points, supposés simples, communs à deux courbes C_m, C'_m donnés et imposons-les, avec la multiplicité p, à des courbes inconnues de degré mp : toutes ces courbes se décomposent en p courbes du faisceau (C_m, C'_m); car si l'on considère sur l'une d'elles un point A, la courbe du faisceau (C_m, C'_m) passant en A a déjà

m^2p+1 intersections avec elle. La surabondance se calculera donc par la relation

$$p+m^2\frac{p(p+1)}{2}=\frac{mp(mp+3)}{2}+s,$$

d'où

$$s=p\frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Ainsi en supposant $m=4$, $p=2$, les 16 points d'intersection, simples, de deux C_4 et C'_4 définissent des octiques, les admettant comme points doubles, toutes décomposées en deux quartiques arbitraires du faisceau (C_4, C'_4); la surabondance étant 6, *en général*, toutes les octiques, qui admettent 14 d'entre eux comme points doubles, admettent aussi les deux derniers comme points doubles et se décomposent; mais il y a un cas d'exception, c'est celui où les 14 points prélevés, pris avec la multiplicité 2 au degré 8, au lieu de former un groupe *normal incomplet* forment un groupe *anormal complet :* nous verrons plus tard qu'en prenant sur une droite C_1 deux points P′, P″ arbitraires, puis en construisant une première quartique Γ_4 tangente à C_1 en P′ et P″, et ensuite une seconde quartique Γ'_4 issue de P′ et P″ sans y toucher C_1, les 14 points d'intersection complémentaires $P_1, P_2, \ldots, P_{14}$ du faisceau (Γ_4, Γ'_4) ont la surabondance 1 pour les octiques dont ils sont points doubles; ces octiques forment donc un système linéaire ∞^3 contenant en particulier les octiques décomposées du système ∞^2 d'équation $\Gamma_4^2+\lambda\Gamma_4\Gamma'_4+\mu\Gamma'^2_4=0$, mais en contenant d'autres non décomposées, ne passant ni en P′ ni en P″.

2. *Structure des points bases d'un faisceau.* — J'écarte désormais le cas d'une C_m unique, d'un système linéaire de C_m toutes décomposées (que les morceaux de décomposition soient tous variables ou que l'un soit fixe).

Nous nous rappellerons que la courbe *générale* d'un système linéaire irréductible ne peut avoir de point singulier *mobile*, de sorte que le *genre effectif* de cette courbe est celui qui est fixé par les points multiples du groupe de points bases, groupe supposé *complet*.

Les groupes complets que nous étudions maintenant sont donc contenus dans le groupe complet formé par tous les points bases d'un *faisceau* et tout revient à déterminer la surabondance de ce groupe fondamental et à chercher ensuite dans quel cas particulier ce groupe contient lui-même des groupes anormaux *complets*. Je dois renvoyer le lecteur à mon précédent Mémoire (début du Chapitre I) pour tout ce qui concerne cette notion philosophique de structure et d'emboîtement successif de groupes *anormaux complets* les uns dans les autres.

Pour le total des points bases d'un faisceau on a

$$h + \Sigma i^2 = m^2,$$
$$h + \sum \frac{i(i+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2} - 1 + s,$$

d'où par sa soustraction

$$s = \frac{m^2 - 3m + 2}{2} - \sum \frac{i(i-1)}{2}.$$

La surabondance, pour le degré m, d'un groupe de points bases d'un faisceau est égale au genre de la courbe la plus générale de ce faisceau.

Un groupe partiel, complet ou non, contenu dans celui-là, a une surabondance, positive ou nulle, inférieure, sans égalité au genre.

Pour les courbes unicursales, il n'y pas de groupe anormal (sinon les groupes définissant *une seule* courbe unicursale, mais nous ne nous occupons plus de tels groupes). De même, avec la même restriction, *pour les courbes de genre 1 il n'y a qu'un groupe anormal, d'ailleurs complet, formé par les points bases d'un faisceau.*

3. Pour chaque degré et chaque genre, il y a deux cas à distinguer suivant que le total des points multiples $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ peut être ou non pris arbitrairement; s'il le peut, il est normal complet; dans ce cas, les points d'intersection $P_1, P_2, \ldots, P_H$ de deux courbes C_m, C'_m admettant les Π avec la multiplicité indiquée forment, avec les Π, un groupe de surabondance p; si les deux courbes C_m, C'_m sont prises au hasard, les p points surabondants peuvent être pris au hasard parmi $P_1, P_2, \ldots, P_H$, c'est-à-dire qu'en retirant *au hasard* successivement $1, 2, \ldots, p-1$ points on obtient un groupe anormal *incomplet* de surabondance décroissante $p-1, p-2, \ldots, 1$; en reti-

rant, encore au hasard, un $p^{\text{ième}}$ point il reste un groupe normal *incomplet* et jamais il n'arrive qu'au cours de ces opérations successives on obtienne un groupe *complet*. Nous allons maintenant opérer de façon à obtenir un faisceau (C_m, C'_m) où le choix des p points surabondants ne peut être fait qu'avec *tact* et où l'on peut trouver un groupe anormal *complet* $P_2, P_1, \ldots, P_h$ (toujours associé aux Π) compris à l'intérieur de $P_1, P_2, \ldots, P_{\Pi}$. Je rappelle qu'on a supposé pouvoir choisir les Π arbitrairement, de sorte que h n'est pas nul et est même suffisamment supérieur à la surabondance du groupe $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k, P_1, P_2, \ldots, P_h$. Les courbes circonscrites à ce groupe forment un système ∞^{r+1} et l'on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} r+1 &= \frac{m(m+3)}{2} - \sum \frac{i(i+1)}{2} - h + s, \\ v &= m^2 - \Sigma i^2 - h, \end{aligned}\right.$$

v étant le nombre des points variables communs à deux courbes du système. Nous choisissons une courbe C_m, *quelconque*, de ce système, donc de genre

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{\Sigma i(i-1)}{2}:$$

les autres courbes du système découpent sur C_m une série linéaire de groupes de points g_v^r et l'on a, d'après (1), l'égalité fondamentale

$$(2)\qquad v - r = p - s.$$

Le théorème de Riemann-Roch nous apprend aussitôt que *la surabondance* $s (s \geqq 0)$ *est le nombre d'adjointes linéairement indépendantes d'ordre* $m-3$ *passant par un groupe de la série.*

Cette égalité (2) permettrait d'ailleurs de reconstituer tout ce qui a été dit pour $p=0$ ou $p=1$.

4. *Construction des groupes anormaux.* — Nous savons que $p=0$, $p=1$ n'ont pas à être étudiés. Nous supposons $p \geqq 2$, $s > 0$. La série g_v^r peut être découpée sur C_m par un système linéaire d'adjointes γ_d d'ordre $m-3$ au plus, soit exactement $d = m - 3 - \delta$, ayant exactement f points fixes situés sur C_m (si ces adjointes ont des points fixes en dehors de la courbe C_m, ces points n'ont pas à intervenir dans nos

raisonnements). On a

$$(3)\qquad \begin{cases} m(m-3-\delta)=\Sigma i(i-1)+f+v, \\ m^2-3m+2-2p=\Sigma i(i-1), \end{cases}$$

d'où, par soustraction,

$$(4)\qquad 2p-2=f+v+m\,\delta.$$

La première égalité (3) prouve que l'on a

$$0 \leqq v \leqq m\,d-\Sigma\, i(i-1),$$

de sorte que l'égalité

$$h=m^2-\Sigma i^2-v$$

donne

$$(5)\qquad 3m-\Sigma i \leqq m(m-d)-\Sigma i \leqq h \leqq m^2-\Sigma i^2.$$

Ici, puisque les points Π peuvent être pris arbitrairement, on a $0<s<h$, donc *a fortiori* $\Sigma i^2<m^2$.

Supposons marqués sur C_m les f points fixes $F_1, F_2, \ldots, F_f$; ces points simples, joints à Π_1 d'ordre i_1-1, Π_2 d'ordre $i_2-1, \ldots$, sont supposés définir un système linéaire ∞^r de courbes γ_d *variables* (d entier fixe au plus égal à $m-3$), coupant C_m en v points *tous variables* (sinon les points fixes seraient réunis aux F); par un groupe $V_1, V_2, \ldots, V_v$ de cette série (points simples) et les Π (avec la multiplicité donnée pour C_m) passe déjà une courbe de degré m, à savoir C_m : *supposons qu'il y en ait une autre, ne contenant aucun* F; cette courbe détermine sur C_m un groupe de points $P_1, P_2, \ldots, P_h$ résiduels des V (le raisonnement fait ici subsiste même au cas où h serait nul, c'est-à-dire où les Π à eux seuls formeraient un groupe anormal complet; les Π n'auraient pu être choisis arbitrairement, mais une fois obtenu un tel groupe, le raisonnement fait en ce moment s'appliquerait, même pour $h=0$). Il s'agit de montrer que le groupe P, Π est surabondant pour le degré m. En effet, γ'_d étant une autre adjointe issue des F, nous aurons sur C_m le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F & \gamma_d & V \\ \gamma'_d & & C'_m \\ V' & C''_m & P \end{array}$$

et les conditions voulues pour appliquer le théorème du reste (première extension) sont remplies : γ_d et γ'_d donnent pour chaque II un excès nul et C'_m l'excès 1. Les courbes C'_m forment donc bien un système ∞^{r+1} et l'on a

$$(6)\qquad \begin{cases} h+r+1+\sum\dfrac{i(i+1)}{2}=\dfrac{m(m+3)}{2}+s, \\ f+r \qquad +\sum\dfrac{(i-1)i}{2}=\dfrac{d(d+3)}{2}+\sigma, \end{cases}$$

puis

$$(7)\qquad \begin{cases} h+v+\Sigma i^2 \qquad =m^2, \\ f+v+\Sigma i(i-1)=m\,d, \end{cases}$$

σ désignant la surabondance du groupe (F, II) pour le degré d (les F étant simples et chaque II ayant pour γ_d la multiplicité $i-1$ au lieu de i sur C_m). Deux soustractions évidentes donnent

$$(8)\qquad \begin{cases} h-f+1+\Sigma i=\dfrac{m(m+3)}{2}-\dfrac{d(d+3)}{2}+s-\sigma, \\ h-f \qquad +\Sigma i=m(m-d), \end{cases}$$

d'où résulte, par une nouvelle soustraction,

$$(9)\qquad s=\sigma+\frac{(m-d-1)(m-d-2)}{2}.$$

Le groupe (P, II) *est donc effectivement surabondant et la formule est la même que dans le cas des points bases tous simples.* Tout est donc ramené à déterminer des courbes γ_d *variables* et l'on doit se rappeler l'inégalité

$$0\leqq f\leqq 2p-2-m\delta.$$

Les constructions à effectuer conduisent à de nombreuses remarques, analogues à celles que j'ai données au précédent Mémoire : mais il y a deux difficultés spéciales au cas des points bases multiples; la première est la suivante : *a-t-on pu marquer les* II *arbitrairement dans le plan vierge?* La seconde est la suivante : les II ayant été marqués (arbitrairement si c'est possible, avec certaines précautions si c'est nécessaire), la construction de ce paragraphe réussit *pourvu que le groupe* V, II (V *simples,* II *multiples comme sur* C_m) *définisse une courbe* C'_m *distincte de* C_m, *ne contenant pas tous les* F.

5. *Exemple* $m = 4$, $p = 2$. *Étude d'une surface unicursale de degré* 4. — L'exemple le plus simple s'obtient pour $p = 2$, $m = 4$; on a nécessairement $d = 1$, $f = 0$, d'où le tableau

	$m = 4$		$p = 2$		II double	
	F	σ	V	P	r	s
droite	0	0	2	10	1	1

Ici la théorie de la résiduation prouve que les 10 points P et le point II sont sur une même cubique C_3, dont II est point simple, car II et V_1, V_2 sont sur une même droite C_1 (Chap. I, 6). Un procédé commode pour retrouver un tel résultat consiste à remarquer que le système II, P, V (II double) détermine un faisceau de quartiques : la quartique qui passe en un point de la droite $\mathrm{II}V_1V_2$ se décompose nécessairement en la droite $\mathrm{II}V_1V_2$ et une cubique C_3 admettant II comme point simple.

Il suffit donc pour obtenir le groupe P, II de couper une cubique C_3 arbitraire par une quartique C_4 ayant un point II de C_3 pour point double. Ceci prouve aussi que l'on peut se donner *arbitrairement* II, P_1, P_2, ..., P_8; ils déterminent, en général, une seule cubique C_3 et sur cette cubique C_3, les quartiques du système linéaire ∞^3 définies par II double et P_1, ..., P_8 simples découpent une série linéaire g_2^1 de couples de points P', P'' que l'on peut associer aux précédents pour obtenir notre groupe surabondant.

Le cas $m = 4$, $p = 2$ ne donne absolument rien autre que ce groupe. Appliquons ce résultat à l'étude de la surface Σ, unicursale, dont les sections planes ont pour images les quartiques circonscrites à un point II double et à 8 points simples P_1, P_2, ..., P_8.

Je me débarrasse immédiatement du cas singulier où II, P_1, ..., P_8 sont bases d'un faisceau de cubiques : le raisonnement qui a été fait à l'instant prouve que sur n'importe quelle cubique de ce faisceau les quartiques découpent une série g_2^1, de sorte qu'imposer un point P' *arbitraire* à l'une de ces quartiques l'oblige à passer par le point P'' homologue de P' sur la cubique du faisceau passant en P'. La correspondance entre P' et P'' est alors une correspondance involutive birationnelle et la surface Σ est de degré 2. On le voit d'ailleurs très simplement en prenant Π pour origine et prenant deux cubiques quelconques C_3, C'_3 passant à l'origine; le système ∞^3 de quartiques admettra comme quartiques de bases

$$x C_3, \qquad x C'_3, \qquad y C_3, \qquad y C'_3,$$

et les équations paramétriques de Σ

$$\frac{X}{x C_3} = \frac{Y}{y C_3} = \frac{Z}{x C'_3} = \frac{T}{y C'_3}$$

donnent l'équation de Σ

$$XT = YZ.$$

Cette quadrique se trouve représentée d'une façon impropre sur le plan (x, y); au point $(1, \lambda, \mu, \lambda\mu)$ de la quadrique correspond le couple P', P'' défini par les équations

$$\frac{y}{x} = \lambda, \qquad \frac{C'_3}{C_3} = \mu.$$

Cela revient à couper les cubiques d'un faisceau par une sécante arbitraire issue de l'un des points bases. Ce genre de représentation impropre revient souvent dans l'étude des groupes surabondants possédant des points multiples.

6. Soit maintenant le cas normal où Π, P_1, ..., P_8 définissent une seule cubique C_3, que nous supposons non dégénérée. Nous mettons l'origine en Π; les quartiques de base seront $x C_3$, $y C_3$, C_4, C'_4. La surface Σ, de degré 4, a pour équations paramétriques

$$\frac{X}{x C_3} = \frac{Y}{y C_3} = \frac{Z}{C_4} = \frac{T}{C'_4}, \tag{1}$$

et à la cubique C_3 correspond sur Σ une droite double $\Delta (X = Y = 0)$. La surface en question a été étudiée par Clebsch, *Mathematische Annalen*, t. I, 1869, p. 253-316. Le procédé par lequel je démontrerai qu'inversement toute surface Σ_1 de degré 4 possédant une droite double Δ est unicursale et susceptible de la représentation (1) est plus simple que celui de Clebsch.

En effet la surface la plus générale Σ_1, de degré 4, ayant une droite Δ double unique, a pour équation en prenant Δ comme axe OZ

$$X^2 f(X, Y, Z) + XY\varphi(X, Y, Z) + Y^2\psi(X, Y, Z) = 0, \tag{2}$$

où f, φ, ψ sont les premiers membres des équations de trois quadriques; les 4 termes contenant Y en facteur dans f, ou X en facteur dans ψ peuvent rentrer dans $XY\varphi$; il reste 21 coefficients arbitraires non homogènes; la transformation homographique la plus générale conservant O_z contient 11 paramètres non homogènes dont on peut profiter pour réduire à 10 les coefficients essentiels entrant dans (2).

Or pour Σ on peut, par une transformation homographique du plan (xy) donner aux points Π, P_1, P_2, P_3 une configuration donnée *a priori* : il reste donc 10 paramètres essentiels pour fixer P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 et par suite Σ, à une transformation homographique près dans l'espace (X, Y, Z, T) : ceci suffit pour montrer que Σ, surface définie par (1), ou Σ_1 surface définie par (2) sont des êtres identiques.

7. Le point $\Pi(x = 0, y = 0)$ est l'image d'une conique γ, correspondant homographiquement, point par point, à chaque élément de contact issu de Π; la quartique Γ_4 ayant Π pour point triple, $P_1, \ldots$, P_8 pour points simples est *unique* (pour une courbe *unicursale* un groupe quelconque est *normal*); elle est l'image d'une conique γ' située avec γ dans un même plan, coupant γ aux trois points, simples de Σ, où le plan (γ, γ') est tangent à Σ; ces points correspondent aux tangentes au point Π à γ'. Sur la cubique C_3 les droites $P'P''$, joignant les images d'un même point de Δ, passent en un point fixe F de C_3 [1]; donc la droite $F\Pi$ coupe C_3 en un point Π' et l'on voit que

---

[1] Pour construire le point F, il suffit de déterminer sur C_3 le tangentiel π de Π et le point de base b complémentaire des cubiques circonscrites à $P_1, P_2, \ldots, P_8$. La droite πb coupe C_3 au point F. En effet on peut traduire cela par les égalités symboliques

$$2\Pi + P_1 + P_2 + \ldots + P_8 + P' + P'' = 0, \tag{1}$$

$$2\Pi + \pi = 0, \tag{2}$$

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_8 + b = 0, \tag{3}$$

$$F + \pi + b = 0. \tag{4}$$

La combinaison symbolique (1) + (4) − (2) − (3) donne en effet $F + P' + P'' = 0$, ce qui démontre la propriété.

Γ_4 passe en Π', de sorte que γ et γ' se croisent sur Δ au point (Π, Π') de cette droite.

Chaque point P_i est l'image d'une droite Δ_i rencontrant γ' mais non γ; chaque droite ΠP_i est l'image d'une droite Δ'_i rencontrant γ mais non γ' ; Δ_i et Δ'_i se rencontrent hors de Δ et chacune rencontre Δ en un point unique. *Nous avons ainsi, en dehors de la droite double* Δ, *les* 16 *seules droites de* Σ.

Coniques. — D'abord un système ∞^1 par les plans pivotant autour de Δ : l'image est une droite issue de Π, et cette droite, jointe à C_3 forme bien une quartique image de section plane.

La droite P_iP_j donne une conique (P_iP_j) rencontrant Δ au point dont l'image s'obtient en coupant C_3 par P_iP_j; la cubique plane *unique*, Π double, P_k simple ($k \neq i$ ou j), forme avec P_iP_j une quartique image de section plane : c'est l'image d'une conique $(P_iP_j)'$ coplanaire avec (P_iP_j), rencontrant Δ au même point que (P_iP_j). On a ainsi 28 couples de coniques.

La conique $\Pi P_1P_2P_3P_4$ jointe à la conique $\Pi P_5P_6P_7P_8$ forme aussi une quartique image de section plane : on a ainsi 35 nouveaux couples de coniques coplanaires, les coniques d'un couple perçant Δ au même point. En réunissant à ces $28 + 35$ couples, le couple γ et γ' on a les 128 *coniques de la surface*, non situées dans un même plan avec Δ. On constate aisément que (P_1P_2) rencontre $\Delta_1, \Delta_2, \Delta'_3, \Delta'_4, \ldots, \Delta'_8$, mais non $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta_3, \Delta_4, \ldots, \Delta_8$ et l'inverse a lieu pour $(P_1P_2)'$.

Cubiques planes de genre 1. — Les plans pivotant autour des Δ_i ou Δ'_i donnent 16 systèmes de cubiques planes de genre 1; pour Δ_1 l'image est une quartique du système ∞^3 ayant P_1 pour point double; pour Δ'_1 l'image est une cubique du faisceau $(\Pi, P_2, \ldots, P_8)$, points bases tous simples.

Cubiques gauches unicursales. — Une droite issue de P_i est l'image d'une cubique gauche unicursale, on a ainsi 8 faisceaux de cubiques gauches rencontrant toutes Δ en deux points; une quartique ayant Π pour point triple et circonscrite à 7 des points P_i donne de même une cubique gauche rencontrant Δ en deux points : cela fait 8 nouveaux faisceaux.

Une conique ayant Π pour point simple et passant par 3 points P_i

donne de même une cubique gauche rencontrant Δ en deux points; on a ainsi 56 faisceaux. De même une cubique ayant un point double en Π et passant en 5 des points P_i donne encore une cubique gauche rencontrant Δ en deux points : on a encore 56 faisceaux. Les cubiques de ces 128 faisceaux se distinguent les unes des autres par le nombre de droites Δ_i, Δ'_i qu'elles rencontrent, ou le nombre de leurs points communs avec une des 128 coniques isolées.

On obtient ensuite des cubiques gauches *isolées :* une conique circonscrite à 5 points P_i, soit 56 courbes. Une cubique admettant Π simple, 5 P_i simples et un autre double : on a ainsi 56×3 ou 168 cubiques. Une quartique admettant Π double, P_1 et P_2 doubles, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 simples donne encore une cubique gauche; il y en a 168 de cette espèce.

Quartiques gauches unicursales. — Une droite du plan (x, y), ne passant ni en Π, ni en un point P_i, ni au point F précédemment défini sur C_3, est l'image d'une quartique gauche unicursale située sur une quadrique Q, et une seule, contenant Δ; le reste de l'intersection de Q et Σ est une conique, qui est γ'. En effet chaque sécante triple de la quartique rencontre Σ en un point *unique*, engendrant cette portion complémentaire qui est donc *indécomposable;* Δ_i perce Q en deux points dont l'un est sur Δ et l'autre en dehors de la quartique gauche : la portion complémentaire rencontre donc Δ_i en un point unique et son image admet P_i pour point simple; la conique γ perce Q en quatre points dont un seul est sur Δ, aucun des trois autres points n'étant sur la quartique : donc l'image étudiée admet Π pour point triple et par suite coïncide avec Γ_4, image de γ'. Chacune des 128 coniques définit donc avec A un réseau de quadriques Q donnant chacune une quartique gauche, sans point double, unicursale : à chacun de ces 128 réseaux correspond, dans le plan (x, y), un réseau de courbes unicursales qu'il serait facile de caractériser.

Une droite issue du point F donne sur Σ une quartique unicursale ayant un point double sur Δ; chacune de ces quartiques définit cette fois un faisceau de quadriques Q_1, et en faisant pivoter la droite autour de F on obtient ∞^2 quadriques Q_1, qui, cette fois, ne forment plus un système linéaire. Une quadrique Q_1 coupe Σ suivant une nouvelle courbe gauche d'ordre 4 coupant Δ_i en deux points et γ en quatre points, puisque la droite issue de F ne passe ni en P_i ni en Π; l'image de cette courbe gauche admet donc P_i pour point double, Π pour point quadruple et le degré m est donné par la relation

$$4m = 2.4 + 8.2 + 4, \qquad \text{d'où} \qquad m = 7.$$

Or les septiques en question ne sont assujetties qu'à 34 conditions indépendantes, car les Π et les P_i sont *quelconques*, donc forment un *faisceau* et non un *réseau :* il n'y a pas contradiction, car la quadrique Q_1 s'obtiendra en associant une droite issue de F avec une septique du faisceau. Une septique du faisceau définit donc une biquadratique gauche, laquelle définit un faisceau de quadriques Q_1 contenu dans le système ∞^2 non linéaire étudié ; le fait que le système Q_1 n'est pas linéaire résulte de ce que l'image de la section de Q_1 par Σ ne contient pas deux paramètres *linéairement*.

Les septiques ont un nouveau point simple commun qu'il est facile de déterminer : l'une d'elles se réduit en effet à la cubique C_3 jointe à Γ_4; or chaque septique perce Γ_4 en 28 points déjà connus (Π et les P_i); les 21 points communs à C_3 et une septique comprennent Π et les P_i comptant pour 20; le point cherché est donc sur C_3 et c'est le point φ où la tangente à C_3 en F perce de nouveau C_3 : en effet, F et φ sont les deux images d'un point (F, φ) de Δ et toutes les quartiques gauches unicursales à point double étudiées ici passent en (F, φ); l'intersection de Q_1 avec Σ présente en (F, φ) un point double, l'un des arcs est la quartique unicursale, l'autre est la biquadratique : les images des deux courbes passent l'une en F, l'autre en φ (1). Il reste à définir (F, φ) sur Δ : les droites issues de F donnent des quartiques à point double,

(1) On retrouve cette propriété par des égalités symboliques que nous emploierons systématiquement un peu plus loin ; on peut, en coupant C_3 par une quartique image d'une section plane, par la droite issue de F et par la septique, écrire

$$2\Pi + P_1 + P_2 + \ldots + P_8 + P' + P'' = 0. \tag{1}$$

$$F + P' + P'' = 0. \tag{2}$$

$$4\Pi + 2P_1 + 2P_2 + \ldots + 2P_8 + \varphi = 0. \tag{3}$$

La combinaison symbolique (3) + 2(2) − 2(1) donne $2F + \varphi = 0$, ce qui établit la propriété.

situé sur Δ, au point dont les images s'obtiennent en coupant C_3 par la droite issue de F, et ce point double est sommet d'un cône du second degré ayant la quartique pour directrice et contenant aussi la conique γ'. Si l'on prend la droite FII, on a une quartique dégénérée formée de γ et d'une seconde conique dont le plan contient Δ; le sommet du cône est venu se placer au point où Δ perce γ et γ', de sorte que le cône est devenu un ensemble de deux plans : le plan (γ, γ'), l'autre plan étant celui qui contient Δ et la tangente en γ' en son pied sur Δ; ce dernier plan donne la conique d'image FII et cette conique perce A en deux points : l'un (II, II') pied de γ ou γ' sur Δ, l'autre est le point (F, φ). On remarquera que toutes les quartiques, circonscrites à II double et $P_1, \ldots, P_8$, qui passent en l'un des points de contact avec C_3 d'une tangente issue de F, sont tangentes à C_3 en ce point et forment un système ∞^2. Parmi elle il y en a ∞^1 qui admettent ce point comme nouveau point double. On a ainsi sur Δ quatre points où les deux plans tangents sont confondus.

Chacune des coniques, autres que γ', donne un faisceau linéaire de quartiques gauches unicursales à point double.

8. On remarquera qu'il suffit d'effectuer dans le plan une transformation quadratique birationnelle dont $\text{II}P_iP_j$ est triangle fondamental pour échanger le rôle des 128 coniques de Σ dans la représentation plane.

Clebsch a d'ailleurs signalé que si l'on considère Δ et l'une des 128 coniques qui rencontrent Δ en un point, il passe par chaque point M de Σ une droite et une seule s'appuyant sur la droite Δ et sur la conique; si l'on prend la trace m de cette droite sur un point fixe, on voit que m donne une représentation plane de Σ; si l'on raisonne sur γ', on retrouve précisément la représentation étudiée ici, où chaque droite Δ_i a pour image un point et où γ aussi a pour image un point.

Les cas de dégénérescence de Σ s'obtiennent aisément, en supposant que trois points P se placent en ligne droite, ou six sur une conique, etc.

Je signale un cas particulier intéressant : dans le plan (x, y), si les points II, $P_1, \ldots, P_8$ sont pris quelconques, il n'y a pas de sextique, autre que C_3 comptée deux fois, ayant ces 9 points comme points doubles; mais si l'on a choisi les 9 points de façon qu'ils déterminent un *faisceau* de telles sextiques indécomposables, chacune est l'image d'une biquadratique gauche de genre 1; on a ainsi pour chaque biquadratique un faisceau de quadriques Q_2 et pour l'ensemble des ∞^1 biquadratiques un système ∞^2 non linéaire de quadriques Q_2 n'existant pas dans le cas général, coupant Σ suivant l'une de ces biquadratiques particulières et suivant une portion complémentaire qui est de degré 4. Or la biquadratique ne coupe pas Δ, donc Δ coupe Q_2 en deux points sur la portion complémentaire, qui a ainsi deux points doubles et se *décompose;* Δ_i coupe la biquadratique en deux points, donc Δ_i ne coupe plus la partie complémentaire; la conique γ coupe la biquadratique en deux points, Q_2 en quatre points, donc la partie complémentaire en deux points : la partie complémentaire se compose donc de deux coniques de Σ; le plan de chacune contient Δ; les droites images s'obtiennent ainsi : de Π on mène une droite Πuv arbitraire coupant C_3 en u, v ; les droites Fu, Fv coupent C_3 en u' et v' respectivement, et les trois points Π, u', v' sont en ligne droite; les deux droites Πuv, $\Pi u'v'$ se correspondent involutivement; leur ensemble contient un paramètre au premier degré; en réunissant un de ces couples avec une sextique aux 9 points doubles, on a précisément les ∞^2 quadriques Q_2. La vérification se fait aisément au moyen des égalités symboliques sur C_3

$$2\Pi + 2P_1 + 2P_2 + \ldots + 2P_8 = 0 \tag{1}$$

avec

$$\Pi + P_1 + P_2 + \ldots P_8 \neq 0, \tag{2}$$

qui expriment que l'on a sur C_3 l'intersection complète avec une courbe algébrique. Une quartique image d'une section plane de Σ donne

$$2\Pi + P_1 + \ldots + P_8 + P' + P'' = 0 \tag{3}$$

et la combinaison $2(3)-(1)$ donne

$$2\Pi + 2P' + 2P'' = 0. \tag{4}$$

On doit supposer

$$\Pi + P' + P'' \neq 0, \tag{5}$$

sinon l'égalité (3) entraînerait, au lieu de l'inégalité (2), une égalité. La relation

$$(6) \qquad F + P' + P'' = 0$$

montre donc que F et Π sont distincts; la combinaison (6) + (1) − (3) donne

$$(7) \qquad F + P_1 + P_2 + \ldots + P_8 = 0,$$

ce qui prouve que F est le neuvième point de base des cubiques du faisceau (P_1, P_2, ..., P_8). Nous avons défini le point φ comme tangentiel de F par

$$(8) \qquad 2F + \varphi = 0.$$

Donc la combinaison (4) + (8) − 2(6) donne

$$(9) \qquad 2\Pi + \varphi = 0,$$

qui montre que le point Π est l'un des autres points de contact des tangentes issues de φ à C_3 : c'est la propriété caractéristique signalée par Halphen. La droite Πuv étant tracée, nous construisons les droites Fuu', Fvv', d'où les égalités

$$(10) \qquad \Pi + u + v = 0,$$

$$(11) \qquad F + u + u' = 0,$$

$$(12) \qquad F + v + v' = 0.$$

La combinaison (11) + (12) + (9) − (8) — (10) donne

$$(13) \qquad \Pi + u' + v' = 0,$$

ce qui prouve bien que les points Π, u', v' sont en ligne droite.

9. Cet exemple de groupe (Π, P_1, ..., P_8, P_9, P_{10}) définissant un *réseau*, au lieu d'un *faisceau* de quartiques, suggère une méthode intéressante pour rendre l'une des équations surabondantes; il y a à écrire d'abord que la quartique contient P_1, ..., P_{10} comme points simples; écrivons ensuite les conditions, au nombre de 3, pour le point double Π

de la façon suivante : opérons comme si H était simple, *avec une tangente donnée,* cela fait 2 conditions à ajouter aux 10 précédentes, et supposons que ces 12 équations aient la surabondance 1, quand on a choisi convenablement les points $P_1, \ldots, P_{10}$, H et la tangente en H; quand on transporte l'origine en H et que l'on prend la tangente en H comme axe des y, il y a une nouvelle équation unique à écrire pour que H soit double : c'est d'annuler le terme en y et alors il est bien clair que les 13 équations ont bien été écrites et se sont réduites à 12. Or la disposition cherchée résulte du travail précédent : il suffit de prendre les points communs à une C_3 et une C_4 qui se touchent en un point : H est le point de contact et $P_1, \ldots, P_{10}$ les autres points communs. Dans beaucoup de cas cette méthode réussit; si elle ne donne pas toujours des conditions *nécessaires*, elle donne en tout cas des conditions *suffisantes*.

10. Le groupe de surabondance 1 pour le degré 4 formé par H, $P_1, \ldots, P_{10}$ donne, par des transformations quadratiques birationnelles, des groupes de surabondance 1, relatifs toujours au genre 2, mais à un degré différent.

$P_1P_2P_3$ étant triangle fondamental, on aura des quintiques à 4 points doubles H, P_1, P_2, P_3 et 7 points simples $P_4, P_5, \ldots, P_{10}$. En continuant avec HP_4P_5, on a des sextiques admettant H triple, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, doubles, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10} simples; puis avec HP_6P_7, on a des septiques ayant H quadruple, $P_1, P_2, \ldots, P_7$ doubles, P_8, P_9, P_{10} simples; avec le triangle HP_8P_9, des octiques ayant H quintuple, $P_1, \ldots, P_9$ doubles et P_{10} simple; enfin avec le triangle $P_8P_9P_{10}$ on a des courbes de degré 11 ayant H, P_8, P_9 quintuples, P_{10} quadruple et $P_1, P_2, \ldots, P_7$ doubles. Dans tous ces exemples, sauf le dernier, tous les points multiples peuvent être pris arbitrairement; l'ensemble des 11 points est toujours sur une cubique C_3 : le théorème d'Abel, ou, si l'on préfère, les équations symboliques employées plus haut, donnent sur C_3 la disposition nécessaire et suffisante de l'ensemble des 11 points.

11. *Étude du degré* $m = 5$. — Le cas $m = 4$ a été étudié complètement; avant de continuer, rappelons-nous que le cas m^2 intersections

(écartant les cas d'impossibilité ou d'une seule C_m ou de courbes toutes décomposées) conduit à un *faisceau;* que le cas de $m^2 - 1$ intersections relatives à un groupe *complet* ne peut donner qu'un *réseau de courbes unicursales :* en effet, si le groupe n'est pas complet, on a une $m^{\text{ième}}$ intersection, donc un faisceau; si le groupe est complet, il ne peut correspondre à un faisceau, on a donc un réseau et chaque point se trouve sur chaque courbe, *individuellement*, déterminé par deux équations

$$C_m = 0, \qquad C_m^{(1)} + \mu C_m^{(2)} =$$

donc toutes les courbes du système sont unicursales; un tel réseau est toujours réductible par des transformations quadratiques birationnelles à un réseau de droites.

Cela posé, $m = 5$, $p = 0$ ou $p = 1$ ne sont pas à étudier; le cas $p = 2$ donne soit quatre points doubles distincts, soit un point triple et un point double; le premier cas se ramène par une transformation quadratique birationnelle aux quartiques à un seul point double, cas déjà étudié; le second, en adjoignant à Π_1 triple, Π_2 double un, point P_1 simple se réduit encore au degré 4 par la transformation quadratique birationnelle de triangle fondamental $\Pi_1 \Pi_2 P_1$,

Le cas $m = 5$, $p = 3$ donne soit trois points doubles, soit un point triple; le premier cas, par une transformation quadratique, se ramène au degré 4, sans point double, et alors il suffit de se reporter au Mémoire précédent; le cas du point triple donne

$$2p - 2 = 4 = f + \nu + 5\delta, \qquad \delta = 0, \qquad f + \nu = 4.$$

Les adjointes sont formées par un faisceau de deux droites issues du point triple, donc on peut avoir $f = 0$ ou $f = 2$, à condition, dans ce dernier cas, que les deux points fixes soient alignés avec le point triple. J'écris donc

	$m = 5$		$p = 3$	Π triple	
	F	σ	V	P	r	s
conique	0	0	4	12	2	1
	2*	1	2	14	1	2

L'astérisque est employé pour rappeler la position particulière des deux points fixes.

A la première ligne j'emploie l'artifice déjà signalé : dans le faisceau de quintiques (H triple, P et V simples) je prends celle qui passe en un point de la droite HV_1V_2 : elle se décompose en cette droite et une quartique C_4 ayant H double, contenant les 12 points P plus V_3 et V_4; on trouve de même une quartique C'_4 ayant H double, contenant les 12 points P plus V_1 et V_2; on obtient donc plus simplement le total (H, P) en prenant deux quartiques ayant un point double commun. Ce point double étant à l'origine, on s'aperçoit aussitôt que l'équation générale de C_5 est

$$(1) \qquad C_5 \equiv C_4(ux+vy) + C'_4(u'x+v'y),$$

de sorte que toute quintique contenant un nouveau point P′ contient encore le point P″ aligné avec H et P′ défini par les deux égalités

$$(1) \qquad \frac{y}{x} = \lambda, \qquad \frac{C'_4}{C_4} = \mu,$$

P′ et P″ se correspondent birationnellement dans le plan; deux quintiques du système (1) se coupent donc en 4 points deux à deux alignés avec H; on a encore une représentation impropre de quadrique. On remarquera, comme dans le précédent Mémoire, les groupes anormaux complets :

$$\begin{array}{ll} H & P_1, \ldots, P_{12}, \\ H & P_1, \ldots, P_{12}, V_1, V_2, \\ H & P_1, \ldots, P_{12}, V_1, V_2, V_3, V_4, \end{array}$$

contenus les uns dans les autres, de surabondance respective 1, 2, 3.

L'artifice déjà employé montre encore que, pour la seconde ligne du tableau, les 14 points P sont une quartique unique ayant H pour point double : il suffit donc d'associer une quintique et une quartique ayant un point multiple H commun, d'ordre 3, sur la première et d'ordre 2 sur la seconde; si même on fait passer la C_4 par deux points V_1, V_2 de C_5 alignés avec H, on retrouve une disposition particulière étudiée à propos de la première ligne du tableau.

12. Le cas $m = 5$, $p = 4$ donne le tableau

	$m = 5$		$p = 4$	Π_1, Π_2 doubles		
	F	σ	V	P	r	s
conique	0	0	6	11	3	1
	1	0	5	12	2	1
	2	0	4	13	1	1
	3*	1	3	14	1	2

Pour la première ligne, l'artifice déjà signalé prouve que les 11 points P sont sur une cubique dont Π_1 et Π_2 sont points simples.

Pour la seconde ligne, si F n'est pas en ligne droite avec $\Pi_1 \Pi_2$, le degré le plus faible d'une courbe admettant $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ pour points simples et Π_1, Π_2 pour points doubles est 5; si F est le point où $\Pi_1 \Pi_2$ perce de nouveau C_5, il y a une quartique unique admettant les points en question avec la multiplicité indiquée; la première extension du théorème du reste démontre la réciproque, à savoir que deux courbes C_5 et C_4, ayant deux points doubles communs, $\Pi_1 \Pi_2$ se coupent encore en 12 points P formant avec Π_1 et Π_2 un groupe surabondant de l'espèce indiquée; on voit aisément qu'on peut encore simplifier la construction en prenant une quartique arbitraire C_4 ayant deux points doubles Π_1, Π_2 puis la coupant par une quartique *arbitraire*, sans point double, passant en Π_1 et Π_2.

Pour la seconde ligne remarquons encore, en supposant F non en ligne droite avec $\Pi_1 \Pi_2$, que le choix de telle conique circonscrite à F, Π_1, Π_2, plutôt que telle autre, est indifférent; prenons donc la droite Π_1F, coupant C_5 en F′ et F″, et une droite arbitraire $\Pi_2 V_1 V_2 V_3$; l'artifice déjà utilisé sur le faisceau (Π_1, Π_2, $P_1, \ldots, P_{12}$, V_1, V_2, V_3, F′, F″) permet, en prenant un point de la droite $\Pi_2 V_1 V_2 V_3$, de montrer qu'il y a une quartique C_4 et une seule, admettant Π_1 double, Π_2 simple, contenant P_1, $P_2, \ldots, P_{12}$ (et même F′, F″), De même en échangeant les rôles de Π_1 et Π_2 il y a une quartique et une seule C'_4 contenant Π_1 simple, Π_2 double, et P_1, P_2, $\ldots$, P_{12} simples, mais alors C_4 et C'_4 déterminent un *faisceau* de quartiques ayant toutes, sauf deux, les 14 points $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$, Π_1, Π_2 comme points simples, et tangentes entre elles en Π_1 et en Π_2. Il y a à rapprocher cette remarque de celle faite au paragraphe 9 : nous aurions pu chercher simplement des quintiques ayant 16 points communs, simples sur elles, formant un groupe de surabondance 1, avec la particularité que 2 points du groupe soient confondus en Π_1 et 2 points encore en Π_2; on retrouve les points bases d'un faisceau de quartique (même remarque pour la première ligne (prendre une cubique et une quintique qui lui soit tangente en deux points). Cela posé, on remarquera que le système ∞^3 de quintiques

$$(1)\quad C_4[u(x-x_2)+v(y-y_2)]+C'_4[u'(x-x_1)+v'(y-y_1)]=0,$$

où x_1, y_1 sont les coordonnées de Π_1, x_2, y_2 celles de Π_2, fournit des courbes coupant toutes C_4 en deux points alignés avec Π_1 : la donnée de l'un, F', entraîne la connaissance de F''. Par suite nous avons la représentation plane d'une surface Σ de degré 5, admettant deux droites doubles Δ_1, Δ_2 distinctes, d'image C_4 ou C'_4. Clebsch a étudié cette surface au Mémoire déjà cité, et il est facile de voir que réciproquement toute surface Σ_1 de degré 5, ayant deux droites doubles distinctes Δ_1, Δ_2 non sécantes, est unicursale et susceptible de la représentation indiquée ici. En effet, par chaque point M de Σ_1 passe une droite et une seule s'appuyant sur les deux droites doubles : la trace de cette droite sur un plan fixe donne une représentation unicursale de la surface. Pour le reste je renvoie au Mémoire de Clebsch.

Enfin le cas $m=5, p=5$ donne le tableau que je donne sans explication :

$m=5$ $\quad p=5$ $\quad$ Π double

	F	σ	V	P	r	s
droite	0	0	3	18	1	3
conique	0	0	8	13	4	1
	1	0	7	14	3	1
	2	0	6	15	2	1
	3	0	5	16	1	1
	3*	1	5	16	2	2
	4*	1	4	17	1	2

L'astérisque de la dernière ligne sert à prévenir que, sur les 4 points F, trois sont alignés avec Π : remarque semblable pour l'avant-dernière.

13. Il est intéressant de comparer ce tableau, ou les précédents, au tableau $m = 5$, $p = 6$ déjà donné dans le précédent Mémoire et que je recopie ici :

	$m = 5$		$p = 6$			
	F	σ	V	P	r	s
droite	0	0	5	20	2	3
	1	0	4	21	1	3
conique	0	0	10	15	5	1
	1	0	9	16	4	1
	2	0	8	17	3	1
	3	0	7	18	2	1
	4	0	6	19	1	1

On voit qu'il suffit dans ce tableau de supposer deux points P confondus pour avoir un groupe du tableau $m = 5$, $p = 5$ où les deux points confondus sont remplacés par un point double II, de sorte que le nombre inscrit dans la colonne P est diminué de deux unités, le nombre r d'une unité; les valeurs $r = 1$ du dernier tableau ne sont donc pas utilisées, puisqu'elles conduiraient au cas, pour l'avant-dernier tableau, d'un faisceau. C'est l'application de la remarque faite au paragraphe 9, puis au paragraphe 12, sur la possibilité de remplacer un point double par un contact simple. Le tableau $m = 5$, $p = 4$ dérive aussi, en partie, du tableau $m = 5$, $p = 6$ par réunion de deux points comme à l'instant, puis encore de deux autres. Mais nous voyons que le procédé échoue pour les deux dernières lignes du tableau $m = 5$, $p = 5$ ou pour la dernière du tableau $m = 5$, $p = 4$: cela tient à ce que, pour le groupe II, $P_1, \ldots, P_{17}$ de la dernière ligne, si l'on imagine le système ∞^3 de quintiques circonscrites aux points simples $P_1, P_2, \ldots, P_{17}$, celles d'entre elles, formant un système ∞^2, qui passent par le point II l'admettent toujours pour point double; on ne peut donc passer par l'intermédiaire de quintiques admettant II pour point simple avec même tangente en ce point. Mais alors l'avant-dernière ligne du tableau $m = 5$, $p = 5$ permet de passer à la dernière ligne du tableau $m = 5$, $p = 4$.

14. *Remarques générales.* — J'indique quelques remarques générales, analogues à celles du précédent Mémoire. Je les expose sur des exemples particuliers.

Ainsi pour $m=6$, $p=9$, H double, en nous bornant à l'article cubique, on a

$$\boxed{m=6 \qquad p=9 \qquad \text{H double}}$$

	F	σ	V	P	r	s
cubique	0	0	16	16	8	1
	1	0				
	2	0	14	18	6	1

La ligne $F=1$ n'est pas remplie, non qu'il soit incorrect de la remplir, mais parce que c'est inutile : toute sextique C'_6 contenant déjà 17 points communs à la cubique adjointe γ_3 et à C_6 (H comptant pour 2 et 15 points V simples) contient, sans *exception*, le dix-huitième, à savoir F; or il est bien clair que si l'on prend le groupe H, $P_1, \ldots, P_{16}$ de la première ligne, puisqu'il définit un système linéaire ∞^9 de sextiques (surabondance 1), en adjoignant successivement 1, 2, ..., 7 points *arbitraires*, on aura toujours des groupes complets de surabondance 1, à structure dissymétrique, définissant des systèmes respectivement ∞^8, ∞^7, ..., ∞^2 qu'il est inutile, au fond, d'expliciter. La ligne $F=1$ non remplie livre nécessairement un tel groupe (système ∞^8); pour les lignes $F=2, 3, \ldots, 7$ on doit éviter de faire passer la sextique C'_6 par la totalité ou une partie des F, afin d'éviter cette structure dissymétrique, facultative de $F=2$ à $F=7$, mais obligatoire pour $F=1$.

Cette remarque, à partir de $m=6$, concerne le début de chaque article d, $d \geqq 3$, tant que le nombre F est inférieur ou égal au genre p de l'adjointe γ_d employée $\left(\text{si } C_m \text{ n'a que des points doubles,}\right.$

$$\left. p' = \frac{(d-1)(d-2)}{2}\right).$$

La règle à observer est la suivante; si F est inférieur ou égal à p', on doit ne conserver que les lignes suivantes : on se reporte au tableau analogue pour le degré d et où chaque H a sa multiplité diminuée d'une unité; on y relève dans la colonne V tous les nombres V, tels que

$$1 \leqq V \leqq p'.$$

Par chaque groupe V ainsi obtenu sur une courbe C_d on fait passer une courbe C_m, et sur cette courbe C_m on fait jouer au groupe en jeu le rôle F et à C_d le rôle de γ_d; appelons sur cette courbe C_d ou γ_d, φ et F les groupes qui, au tableau T pour le degré d s'appelaient F et V, et soit δ le degré de la courbe employée pour découper sur γ_d ces groupes F et V. On peut figurer sur C_d ou γ_d le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi & \gamma_\delta & F \\ \gamma'_\delta & & C'_m \\ F' & C'_m & V \end{array}$$

légitime en vertu de l'extension du théorème du reste, et qui prouve bien que les courbes C'_m issues de V et des points II n'ont plus de raison de contenir automatiquement le groupe F.

A ce même point de vue, dans le tableau T relatif à m, la fin de l'article d pour $d \geqq 3$ exige que l'on ait fait le recensement de tous les groupes anormaux, complets ou incomplets pour le degré d et vérifié quelle est leur surabondance pour le degré m. Ainsi pour $m = 10$, $p = 35$, II double, on a

	$m = 10$		$p = 35$		II double	
	F	δ	V	P	r	s
septique	45*	12	23	73	1	13
	46	13				
	47*	14	21	75	1	15

On sait que toute courbe de degré 10, contenant 46 points bases d'un faisceau de septiques, contient automatiquement les 3 autres, s'ils ne sont pas en ligne droite : il faudra donc, pour que la ligne 45* soit correcte, partir de deux septiques issues de 3 points φ_1, φ_2, φ_3 en ligne droite, se coupant aux points complémentaires $F_1, F_2, \ldots, F_{45}$, II; par ces 46 derniers points passent ∞^{20} courbes de degré 10 les admettant comme points simples, ne contenant pas φ_1, φ_2, φ_3 : il existe dans ce système ∞^{18} courbes où II est double; on prendra C_{10} parmi elles. Remplir la ligne 46 est incorrect, et conduirait à un groupe anormal incomplet; pour la ligne 47* l'astérisque sert simplement à rappeler qu'on est parti de deux courbes C_7, C'_7 tangentes entre elles en Π et se coupant encore en $F_1, F_2, \ldots, F_{47}$.

15. Si nous lisons le tableau

$m=7$	$p=14$	Π double

	F	σ	V	P	r	s
cubique	7	0	12	33	1	3
quartique	14	2	12	33	1	3

nous constatons que les deux groupes P correspondants ne pourraient coïncider que si les 12 points V étaient à la fois sur une cubique et une quartique, *adjointes*, donc ayant encore en commun le point Π; il faudrait que la quartique se décompose et contienne une droite non issue de Π; or nous pouvons admettre des courbes γ_d issues d'un groupe F, obligatoirement décomposées, pourvu que le morceau de décomposition fixe passe par les points multiples ou une portion des points multiples; la condition n'est pas remplie ici. Par Π et les 12 points V de la première ligne passent ∞^2 quartiques, décomposées en φ_3 et une droite *arbitraire;* par les 12 points V de la seconde ligne et Π passent encore ∞^2 quartiques, mais aucune ne se réduit à une cubique. Il y a donc bien différence essentielle entre les deux groupes P, bien qu'ils aient même surabondance.

Si on lit au contraire

$m=7$	$p=14$	Π double

	F	σ	V	P	r	s
cubique	8	1	11	34	1	4
quartique	15	3	11	34	1	4

il y a coïncidence, car toute septique circonscrite à $F_1, F_2, \ldots, F_8$ et Π, bases d'un faisceau de cubiques (C_3, C'_3), a son équation de la forme $C_3\Gamma_4 + C'_3\Gamma'_4 = 0$ et admet Π pour point double si Γ_4 et Γ'_4 passent au point Π; mais alors l'intersection de C_7 avec C_3 se compose des points $C_3 = C'_3 = 0$ et des points $C_3 = \Gamma'_4 = 0$ qui forment le groupe V;

en première ligne on a donc pris l'adjointe C_3, en seconde l'adjointe Γ'_4.

Je réédite donc la remarque faite au précédent Mémoire, en sous-entendant que le groupe II sera associé d'une part au groupe F (multiplicité de chaque point II abaissée d'une unité), de l'autre au groupe P :

Tout groupe P *provenant d'un groupe* F *normal pour le degré d ne figure qu'une fois au tableau* T.

Tout groupe P *figurant plusieurs fois dans le tableau* T *au degré d, $d+d'$, ... correspond pour chacun de ces degrés à un groupe* F, F', ... *anormal pour ce degré respectif.*

Tout groupe P *provenant d'un groupe* F *anormal pour le degré d figure au moins une seconde fois dans le tableau* T *à moins que $d = m-3$.*

La condition nécessaire et suffisante pour que les courbes de degré $d+1$, $d+2$, ..., $m-3$ contenant un groupe V *aient toutes une partie commune est que le groupe* F *soit normal pour le degré d.*

16. *Difficulté spéciale aux groupes contenant des points multiples.*

Nous avons signalé au paragraphe 4 les deux difficultés suivantes :

a. *Peut-on marquer dans le plan vierge les points multiples* II?

b. *Le total* V *(simples),* II *(multiples) définit-il une courbe C'_m distincte de C_m, ne contenant pas tous les* F?

Nous avons indiqué au paragraphe 14 comment se lève, partiellement tout au moins, cette dernière difficulté si le nombre des points F est inférieur ou égal au genre de l'adjointe, mais la règle nécessite précisément la construction effective des tableaux pour les degrés égaux ou inférieurs à $m-3$. Nous avons vu aussi qu'on est amené à résoudre le problème suivant : étant donné des points avec un certain ordre de multiplicité, ayant une urabondance s pour le degré d, dire quelle est leur surabondance pour les degrés $d+1$, $d+2$, ..., en forçant d'une unité la multiplicité de chacun d'eux.

Quand le décompte des conditions donne un nombre au plus égal à

$$\frac{m(m+3)}{2}-1,$$

que ce nombre doive ou non s'abaisser, les difficultés signalées n'existent pas. Mais quand le décompte donne un nombre supérieur ou égal à $\frac{m(m+3)}{2}$, on retombe sur un problème de surabondance : outre le procédé indiqué à l'instant, d'après le paragraphe 14, on peut continuer *à titre d'essai* la construction du tableau, pour trouver des conditions *nécessaires*. Cette difficulté spéciale se présente, à partir de $m=7$, pour des valeurs du genre suffisamment faible : elle tient, au fond, à ce que les points multiples ne peuvent être choisis arbitrairement quand les points simples du groupe complet sont en nombre trop petit (nul ou non) relativement à la surabondance du groupe complet.

Supposons, par exemple, que la courbe C_m, de genre p, n'ait que des points doubles et que l'on commence l'article γ_d en prenant $d=m-3-\delta, f=0$; ceci suppose en particulier $\nu=2p-2-m\delta \geqq 0$; on constate alors que C_m et C'_m ont avec γ_d la disposition voulue pour pouvoir écrire l'identité

$$C'_m = \gamma_d C_{m-d} + \lambda C_m,$$

où λ est une constante ; donc les points doubles sont simples à la fois sur γ_d et sur C_{m-d} : si donc $d > \frac{m}{2}$, on a $m-d < \frac{m}{2}$ et la construction du groupe P n'est possible que si les points Π sont sur une courbe de degré $m-d$; cette condition est de plus suffisante et le groupe P s'obtient alors en coupant C_m par une courbe C_{m-d} quelconque issue des points Π. C'est ce qui arrive pour le tableau

$m=7$	$p=5$	$\Pi_1 \ldots \Pi_{10}$ doubles				
	F	σ	V	P	r	s
quartique	0*	0	8	1	4	1

l'astérisque sert à rappeler que les 10 points doubles Π doivent être sur une cubique (qui est d'ailleurs unique).

Si la multiplicité de l'un des points Π est au moins égale à 3, ce raisonnement échoue, pour $f=0$, à l'article γ_d. On opère alors suivant la méthode employée plusieurs fois déjà : si C'_m existe, le total Π, V, P détermine un faisceau de courbes de degré m, coupant une adjointe quelconque de C_m en $2p-2-m\delta$ points, c'est-à-dire seulement aux points V (en dehors des Π); la courbe de ce faisceau passant en un point A de γ_d doit donc avoir avec γ_d une partie commune qui est soit γ_d, si γ_d est indécomposable, soit une portion de γ_d si γ_d est décomposable. Dans le premier cas, nous retrouvons la construction des points P au moyen d'une courbe C_{m-d} admettant chaque Π *comme point simple;* dans le second, si γ_d admet des morceaux de décomposition $\gamma_{d'}, \gamma_{d''}, \ldots$ en faisant venir le point A successivement sur $\gamma_{d'}, \gamma_{d''}, \ldots$, on voit que les P seront communs à des courbes $C_{m-d'}, C_{m-d''}, \ldots$ admettant chaque point Π avec une multiplicité facile à obtenir; d'ailleurs la courbe γ_d circonscrite aux Π peut, sans changer P, être remplacée par une autre; il y aura donc lieu de trouver toutes celles qui sont décomposables. Ce procédé a été employé plus haut, au paragraphe 11, pour $m = 5$, $p = 3$.

17. Continuons l'étude de conditions *nécessaires* dans le cas de cette difficulté. Nous supposons maintenant le nombre f des points F non nul, mais au plus égal à p', p' étant le genre de l'adjointe γ_d; sur γ_d les courbes de degré m du faisceau (Π, V, P), supposé existant, découpent une série linéaire g_f^1 et par hypothèse $f - 1 \leqq p' - 1$, de sorte que, d'après Riemann-Roch, les points F sont sur une adjointe (ou plusieurs) de γ_d (c'est le résultat indiqué au paragraphe 14 pour que C'_m ne contienne aucun des points F); soit $\gamma_{d-3-\lambda}$ l'adjointe de γ_d en question; on a sur C_m le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{F} & \gamma_d(\omega = 0) & \mathrm{V} \\ \gamma_{d-3-\lambda}(\omega' = -1) & & C'_m(\omega'' = +1) \\ \Phi & C_{m-3-\lambda}(\Omega = 0) & \mathrm{P} \end{array}$$

La courbe $\gamma_{d-3-\lambda}$ admet chaque point Π à la multiplicité $i - 2$ et le théorème du reste, tel que je l'ai étendu, assure les indications du diagramme : on voit que, *si* λ *n'est pas nul*, la courbe C_m admet, parmi ses adjointes d'excès nul et de degré $m - 3$, une particulière de degré $m - 3 - \lambda$ seulement.

On peut approfondir encore : supposons que les Π soient tous doubles et que les Φ forment l'intersection complète de $C_{m-3-\lambda}$ et $\gamma_{d-3-\lambda}$: autrement dit, si φ est le nombre des points Φ on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} f + \varphi = m(d - 3 - \lambda), \\ \varphi = (m - 3 - \lambda)(d - 3 - \lambda), \end{cases}$$

d'où résulte

$$f = (3+\lambda)(d-3-\lambda). \tag{2}$$

La théorie de la résiduation prouve alors que le groupe P, Π forme l'intersection de $C_{m-3-\lambda}$ avec une courbe nouvelle $C_{m-d+3+\lambda}$ qui admet chaque Π comme point simple; cela résulte de l'identité

$$C_m \equiv \gamma_{d-3-\lambda} C_{m-d+3+\lambda} + C_{m-3-\lambda} C_{3+\lambda}, \tag{3}$$

et comme chaque Π compte pour 2 dans l'intersection de $C_{m-3-\lambda}$ avec C_m, on voit que $C_{m-3-\lambda}$ et $C_{m-d+3+\lambda}$ sont tangentes en chaque point Π. On remarquera que si $i \geqq 3$, $\gamma_{d-3-\lambda}$ admet un point Π avec la multiplicité $i-2$, et $C_{m-3-\lambda}$ avec la multiplicité $i-1$, de sorte que l'on ne peut garantir l'identité (3) et la conclusion échoue. Si chaque i est égal à 2, on a ainsi obtenu une propriété intéressante du groupe (P, Π): *les points* Π *sont points de contact de deux courbes de degré m et m* $-$ 3 *au plus, et les* P *sont le reste de l'intersection.*

Le diagramme que nous étudions suppose, si tous les Π sont doubles,

$$\varphi \leqq (m-3-\lambda)(d-3-\lambda) \qquad f \geqq (3+\lambda)(d-3-\lambda).$$

Nous venons donc d'élucider le cas où f a sa valeur minimum; le genre p' de γ_d est $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$, quand tous les Π sont doubles; le diagramme suppose $f \leqq p'$; supposons que f ne soit pas égal à p', d'où

$$(3+\lambda)(d-3-\lambda) \leqq f < \frac{(d-1)(d-2)}{2}. \tag{4}$$

Le théorème de Riemann-Roch nous apprend qu'il y a au moins *deux* courbes γ_{d-3} issues du groupe F; supposons qu'il y ait même deux courbes $\gamma_{d-3-\lambda}$, au moins, issues de F. Si laissant les groupes F, V, P fixes dans le diagramme on fait varier la courbe $\gamma_{d-3-\lambda}$ et Φ, on a un système linéaire de courbes $C_{m-3-\lambda}$ issues du groupe (P, Π) et *toutes ces courbes sont tangentes entre elles aux points* Π. On a en effet une identité

$$\gamma_{d-3-\lambda} C'_m \equiv C_m \gamma'_{d-3-\lambda} + \gamma_d C_{m-3-\lambda} \tag{5}$$

d'après le raisonnement qui a servi à étendre le théorème du reste;

en mettant l'origine en l'un des points Π, on en conclut

$$(6)\quad \mu(A'x^2+2B'xy+C'y^2)\equiv\mu'(Ax^2+2Bxy+Cy^2)+(\alpha x+\beta y)(\nu x+\rho y)$$

où la variation de $\gamma_{d-3-\lambda}$ n'affecte que les termes constants μ, μ' et *éventuellement* ν, ρ; or ceci prouve que les rayons $\alpha x+\beta y=0$ (tangente à γ_d) et $\nu x+\rho y=0$ (tangente à $C_{m-3-\lambda}$) sont conjugués dans l'involution déterminée par $A'x^2+2B'xy+C'y^2=0$ (tangentes à C'_m) et $Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$ (tangentes à C_m) : donc le rayon $\nu x+\rho y=0$ est *fixe*, et cela prouve la propriété. Cela fait déjà une propriété intéressante des points Π : *ils font partie, comme points simples de contact, des points-bases d'un système linéaire de courbes* $C_{m-3-\lambda}$, *dont les points* P *sont les points-bases complémentaires où il n'y a plus contact*, ce système Π, P peut d'ailleurs être *complet ou non* pour le degré $m-3-\lambda$ (nous verrons plus loin un exemple où le groupe est effectivement incomplet). D'autre part, *deux courbes* $C_{m-3-\lambda}$ et $C'_{m-3-\lambda}$ *du système se coupent encore suivant un groupe* $p_1, p_2, \ldots$ *qui jouit d'une propriété importante, à savoir d'être sur une courbe de degré* $d-2(3+\lambda)$. Traçons en effet sur la courbe $C_{m-3-\lambda}$ le diagramme suivant, démontrant la propriété :

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{ccc} \Phi & C_m & P,\Pi \\ \gamma_{d-3-\lambda} & & C'_{m-3-\lambda} \\ \Phi' & C_{d-2(3+\lambda)} & p_1, p_2, \ldots \end{array}\right.$$

On est donc ramené à étudier des contacts : il est commode d'utiliser des égalités symboliques, telles que celles utilisées au paragraphe 8, pour exprimer que certains points forment l'intersection complète d'une courbe donnée C avec une courbe algébrique; la théorie de la résiduation permet d'ajouter plusieurs égalités symboliques de cette espèce, de multiplier (mais non diviser) une telle égalité par un entier positif, de supprimer dans une égalité symbolique une somme partielle nulle. D'ailleurs si l'on emploie le théorème d'Abel, on voit que chaque égalité symbolique de cette espèce équivaut en réalité à p égalités entre les intégrales de première espèce prises à partir d'une origine donnée sur C jusqu'à une limite supérieure coïncidant successivement avec chaque point d'intersection; on peut d'ailleurs, comme je l'ai montré au Chapitre I à propos des surfaces de Sophus Lie, faire intervenir le genre apparent au lieu du genre effectif, et certaines intégrales de seconde ou troisième espèce. Mais nous n'aurons pas besoin de cette traduction analytique.

Les considérations qui précèdent n'épuisent pas toute la question mais permettent de donner de nombreux exemples et aussi d'étudier la disposition de points multiples donnant *une seule* C_m. Au paragraphe 27 nous retrouverons ces propositions.

18. *Exemples où les points singuliers sont remplacés par des contacts : cas d'une courbe unique ou d'un faisceau.* — Halphen a posé et résolu le problème : *déterminer une sextique admettant neuf points doubles, ne se réduisant pas à une cubique comptée deux fois* (Œuvres complètes, t. 2, p. 547-557).

J'indique comment les considérations employées ici résolvent la question et d'autres semblables : la sextique, *si elle est indécomposable, est de genre* 1, donc il y a une seule cubique circonscrite à $\Pi_1, \ldots, \Pi_9$.

Si les Π sont pris *au hasard*, on a 27 équations de condition pour 27 coefficients non homogènes, donc une seule solution impropre, $C_3^2 = 0$, C_3 étant la cubique (unique) circonscrite aux Π.

Si les Π sont bases d'un faisceau de cubiques (C_3, C'_3), l'équation $C_3^2 + \lambda C_3 C'_3 + \mu C'^2_3 = 0$ donne un réseau de sextiques formées de deux cubiques du faisceau.

Si les sextiques sont effectivement indécomposables, les principes établis ici prouvent que la surabondance du groupe Π sera exactement 1, puisque le genre est 1 ; C_6 étant l'une des solutions, l'équation générale sera $C_6 + \lambda C_3^2 = 0$. D'autre part, l'équation

$$C_3 \Gamma_3 + C_6 = 0, \tag{1}$$

où Γ_3 est une cubique arbitraire, donne un système linéaire ∞^{10} de sextiques Γ_6 toutes tangentes à C_3 en $\Pi_1, \ldots, \Pi_9$ points simples sur elles (sauf sur C_6 où ils sont devenus *tous* doubles). Réciproquement, si C_3 et Γ_6 sont une cubique et une sextique tangentes en 9 points, l'équation

$$\lambda \Gamma_6 - C_3 \Gamma_3 = 0 \tag{2}$$

est l'équation générale des sextiques circonscrites à C_3 aux 9 points et l'on peut profiter des 11 paramètres homogènes de (2) pour rendre chaque point Π successivement double, ce qui donne exactement 9 équations : la solution contient au *moins deux paramètres homogènes*, et, d'après les principes établis plus haut, *exactement deux*.

On est donc ramené à trouver une C_3 et une Γ_6 tangentes en 9 points : sur C_3 on a l'égalité symbolique

$$(3) \qquad 2(\Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_9) = 0$$

avec l'inégalité

$$(4) \qquad \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_9 \neq 0.$$

Donc par l'ensemble des Π on ne peut, en dehors de C_3, mener que des courbes de degré 4 au moins : l'une d'elles, C_4, donne

$$(5) \qquad \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_9 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 0,$$

où les trois points π ne sont pas en ligne droite. La combinaison symbolique $2(5) - (3)$ donne

$$(6) \qquad 2(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) = 0, \qquad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \neq 0$$

et réciproquement (5) et (6) entraînent (3).

L'égalité (6) exprime qu'il suffit de tracer une conique C_2 tritangente à C_3 et par les trois points de contact de mener une quartique; or, au lieu d'opérer sur une C_3 donnée, au fond, nous opérons sur un plan vierge : donnons-nous donc C_2 et nous prendrons trois points arbitraires sur C_2; C_3 sera ensuite une cubique circonscrite à C_2 en ces 3 points. On peut d'ailleurs remarquer encore que si Π' est le neuvième point de base du faisceau de cubiques déterminées par Π_1, $\Pi_2, \ldots, \Pi_8$, on aura en coupant C_3 par la tangente en Π' un point π' avec

$$(7) \qquad \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_8 + \Pi' = 0,$$

$$(8) \qquad 2\Pi' + \pi' = 0,$$

la combinaison $(3) + (8) - 2(7)$ donne

$$(9) \qquad \pi' + 2\Pi_9 = 0,$$

ce qui permet, sur une cubique C_3 *donnée*, connaissant $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_8$

d'obtenir Π' et π' qui ont une seule détermination, puis, Π_9 qui en a *trois*.

Il est intéressant de remarquer que le système ∞^3 de sextiques admettant $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_8$ comme points doubles donne une représentation unicursale impropre d'un cône du second degré. En effet on peut prendre comme sextiques de base C_3^2, $C_3 C_3'$, $C_3'^2$ et une sextique non dégénérée C_6, d'où les équations

$$(10) \qquad \frac{X}{C_3^2} = \frac{Y}{C_3 C_3'} = \frac{Z}{C_3'^2} = \frac{T}{C_6}$$

donnant une représentation impropre du cône $Y^2 - XZ = 0$; les sextiques du système ∞^3 donnent les sections planes; une cubique du faisceau (C_3, C_3') donne une génératrice du cône. Le point $\Pi'(C_3 = C_3' = 0)$ est l'image, *unique*, du sommet; chaque point autre que Π', soit $P'(x', y')$, a un homologue (x'', y'') défini par les équations

$$(11) \qquad \frac{C_3'(x', y')}{C_3(x', y')} = \frac{C_3'(x'', y'')}{C_3(x'', y'')}, \qquad \frac{C_6(x', y')}{C_3^2(x', y')} = \frac{C_6(x'', y'')}{C_3^2(x'', y'')}.$$

La correspondance entre P' et P'' est birationnelle; toute sextique passant en P' passe en P''; dans cette correspondance, chaque cubique du faisceau (C_3, C_3') se correspond à elle-même et de même chaque sextique.

Le lieu du point Π_9 est le lieu des points, autres que Π', coïncidant avec leur homologue; c'est une courbe γ de degré 9 admettant $\Pi_1, \ldots, \Pi_8$ comme points triples : nous allons retrouver très simplement par des considérations de géométrie dans l'espace ces résultats, dus à Halphen, et bien d'autres encore.

Chaque point du cône a deux images, sauf le sommet dont les deux images sont confondues en Π' et sauf les points d'une courbe Γ dont l'image est γ; chaque cubique du faisceau (C_3, C_3') coupe γ en 3 points, donc chaque génératrice du cône coupe Γ en 3 points, et Γ est de degré 6 (γ ne passe pas en Π', donc Γ ne passe pas au sommet du cône). Au point Π_1 correspond une conique (Π_1) du cône et chaque point de (Π_1) a deux images dont l'une est fixe, à savoir Π_1, tandis que la seconde image décrit une sextique ω_1 du système ∞^3 étudié ici, sextique ayant Π_1 pour point triple; la sextique ω_1 est unicursale et est parfaitement déterminée par la connaissance de Π_1 triple, $\Pi_2, \ldots, \Pi_8$ doubles.

Soient m le degré de γ, h la multiplicité de chaque point $\Pi_1, \ldots, \Pi_8$ sur γ; en coupant par C_3 on a

$$3m = 8h + 3, \tag{12}$$

d'où $m = 1 + 8\lambda$, $h = 3\lambda$, en désignant par λ un entier indéterminé; à chaque branche de γ issue de Π_1 correspond un point commun à Γ et (Π_1), donc $h \leqq 6$ et $\lambda = 1$ ou 2; d'autre part, γ ne peut avoir, avec ω_1, d'autre point commun que Π_1 (ou que les autres points $\Pi_2, \ldots, \Pi_8$), cela résulte de ce que ω_1 est le lieu des transformés de Π_1 et γ le lieu des points dont les deux images coïncident; si γ admet en Π_1 une tangente non tangente à ω_1, cet élément de contact fournirait sur ω_1 un point associé autre que Π_1 et ceci est en contradiction avec la propriété caractéristique de γ; donc $\lambda = 1$, $h = 3$ et la courbe Γ est tangente en 3 points à chaque conique (Π_i); la courbe γ est de degré 9, admet chaque point Π_i comme point triple et y admet les tangentes de ω_i, ce qui fait un théorème de géométrie intéressant non signalé par Halphen :

Étant donnés 8 points quelconques du plan, il existe une cubique unicursale admettant 7 d'entre eux pour points doubles et le dernier pour point triple; en échangeant le rôle des points, on obtient 8 cubiques. Il existe une courbe de degré 9 et une seule admettant ces points pour points triples, les tangentes en chacun étant précisément les mêmes que pour la cubique dont ce point est triple: cette courbe de degré 9 est le lieu du neuvième point double des sextiques admettant déjà les 8 points donnés comme points doubles.

On aurait pu obtenir ces résultats sans intervention de la géométrie dans l'espace : appelons α le degré de la courbe transformée d'une droite dans la transformation (11); une courbe *arbitraire* de degré μ (ne passant ni en $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_8$) a pour transformée une courbe de degré $\mu\alpha$, comme on le voit en supposant que la courbe dégénère en μ droites. Soit β le degré de la courbe unicursale transformée du point fondamental Π_1; le degré m de la courbe γ satisfait à (12), et comme la courbe γ est à elle-même sa transformée, sauf h fois chaque courbe transformée de Π_i, on a

$$(13)\qquad m\alpha = 8h\beta + m.$$

La courbe C_3 est à elle-même sa transformée, donc

$$(14)\qquad 3\alpha = 8\beta + 3.$$

Maintenant une courbe de degré μ (arbitraire) et une droite se coupent en μ points qui ont pour transformés les points d'intersection d'une courbe de degré $\mu\alpha$ et d'une courbe de degré α : sur la première Π_1 est d'ordre $\mu\beta$, car il correspond aux points d'intersection avec ω_1 de la courbe de degré μ; de même sur la seconde Π_1 est d'ordre β, on a donc

$$(15)\qquad \mu\alpha^2 = \mu + 8\mu\beta^2$$

ou simplement

$$(15')\qquad \alpha^2 = 8\beta^2 + 1.$$

Les équations (14) et (15′) ont une solution $\alpha = 1$, $\beta = 0$ à rejeter; il reste $\alpha = 17$, $\beta = 6$ et alors (12) et (13) donnent $m = 9$, $h = 3$. On a retrouvé les résultats; d'autre part sur chaque cubique du faisceau (C_3, C'_3) il y a ∞^1 couples correspondants P′, P″ et la droite P′, P″ sur C_3 passe au point π' précédemment construit, de sorte que, sur C_3, Π_1 a un seul homologue : donc si ω_1 admet Π_1 avec la multiplicité k et Π_2, $\Pi_3, \ldots, \Pi_8$ avec la multiplicité l, on a, en comptant les points communs à C_3 et à ω_1,

$$18 = k + 7l + 1;$$

k étant inférieur à 6, on a nécessairement $k = 3$, $l = 2$.

On a vu qu'une droite (arbitraire, ne passant ni en $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_8$) a pour transformée une courbe de degré 17, ayant chaque point Π_i pour point sextuple : d'après la théorie générale des transformations de Cremona, ces courbes doivent être unicursales et former un réseau; c'est aussi conforme aux principes généraux que nous avons obtenu au paragraphe 2. Si la droite passe en Π_1, il faut retrancher la courbe ω_1 et il reste une courbe unicursale de degré 11, ayant Π_1 triple, $\Pi_2, \ldots, \Pi_8$ quadruples, et cette courbe engendre un faisceau; si l'on prend

$\Pi_1 \Pi_2$, elle a pour transformée une courbe unicursale de degré 5, admettant Π_1 et Π_2 simples, $\Pi_3, \ldots, \Pi_8$ pour points doubles.

L'interprétation géométrique des sextiques ayant un neuvième point double Π_9 est immédiate : Π_9 est l'image d'un point de Γ, les plans pivotant autour de la tangente à Γ en ce point donnent sur le cône un faisceau de coniques ayant pour image les sextiques ayant un point double complémentaire en Π_9 ; et si le plan devient bitangent à Γ, on obtient une sextique unicursale : Π_9 étant fixé, on a 12 sextiques unicursales; on voit qu'il suffit de chercher deux tangentes à Γ se rencontrant en un point différent du sommet du cône : l'une des tangentes étant donnée, il faut prendre l'intersection de cette tangente avec la ligne double de la développable engendrée par les tangentes à Γ; la courbe Γ admet ∞^1 plans bitangents et il en passe 12 par chaque tangente à Γ; la courbe Γ admet 8 plans tritangents qui donnent les 8 coniques (Π_i); enfin du sommet du cône, on peut mener 12 génératrices tangentes à Γ, ce qui donne 12 cubiques unicursales dans le faisceau (C_3, C'_3). Les 12 points doubles qu'elles fournissent sont sur la courbe γ, comme l'a d'ailleurs signalé Halphen.

On remarquera qu'une courbe prise au hasard sur le cône a deux images analytiquement distinctes; mais pour certaines courbes, telles que les génératrices ou les sections planes, ces images sont deux portions d'une même courbe : si cela arrive, il est nécessaire, si la courbe C du cône n'est pas tangente en A à la courbe Γ, que l'image c soit tangente en a à la cubique du faisceau (C_3, C'_3) qui passe en a ; si C est tangente à Γ en A, l'image a un point double en a.

19. Élucidons complètement un autre cas où l'on ne trouve qu'une courbe : cherchons comment disposer 12 points pour qu'ils soient doubles sur une C_7 ; on a 36 équations de condition, linéaires, à 36 inconnues homogènes. Pour avoir une solution *unique*, on égale le déterminant à zéro; en transportant l'origine en Π_1, de façon à n'avoir plus que 33 équations à 33 inconnues, on voit que si $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{11}$ sont donnés, le dernier Π_{12} décrit une courbe de degré 18 admettant $\Pi_1, \ldots, \Pi_{11}$ comme point quintuple : on le voit en développant le déterminant par la règle de Laplace.

Remarquons que C_4 étant l'une quelconque des ∞^2 quartiques circonscrites à $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{12}$ [1], cette quartique coupe encore C_7 en 4 points formant une série linéaire g_4^2; écrire que ces 4 points sont en ligne droite fournit deux équations qui, *en général*, déterminent la quartique C_4. Mais alors, si C_1 est la droite portant les 4 points complémentaires, on aura

$$(1) \qquad C_7 \equiv C_4 \Gamma_3 + C_1 C_6,$$

et, puisque chaque intersection Π de C_4 avec C_7 compte, sur C_4, pour 2 unités, on voit que C_4 et C_6 sont tangentes aux 12 points Π.

Réciproquement, nous savons construire une C_4 et une C_6 tangentes en 12 points; l'équation (1) représente alors, en laissant Γ_3 et C_1 indéterminées, ∞^{12} septiques tangentes à C_4 et C_6 aux 12 points; chacun peut être rendu double moyennant une condition, et comme on a 12 équations linéaires entre 13 inconnues homogènes, en général on aura une septique C_7 et une seule.

La méthode des égalités symboliques réussit pour trouver les ensembles $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{12}$ en jeu ici. En effet, sur C_4 on écrit :

$$(2) \qquad 2(\Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_{12}) = 0,$$

et puisque les Π ne sont pas sur une cubique, une quartique nouvelle donne

$$(3) \qquad \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_{12} + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 0,$$

les 4 points π n'étant pas sur une droite. La combinaison 2 (3) — 2 donne

$$(4) \qquad 2(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4) = 0,$$

et réciproquement (3) et (4) entraînent (2); on prendra donc une

---

[1] Les 12 points Π ne pourraient avoir la surabondance 1 pour le degré 4 que s'ils étaient obtenus en coupant une cubique C_3 par une quartique C_4; mais alors les C_7 cherchées se décomposeraient et auraient pour équation $C_3(C_3 C_1 + C_4) = 0$ où C_1 est une droite *arbitraire;* la surabondance des Π serait alors 4 et non pas 1. D'autre part, si la surabondance du groupe Π pour le degré 7 est supérieure à 1, comme ces points représentent 48 intersections pour deux courbes C_7, C_7' qui les contiennent, les principes du paragraphe 11 nous prouvent qu'il ne peut exister qu'un *faisceau*, car les courbes C_7 sont de genre *trois* exactement; la surabondance des Π serait donc 2.

conique C_2 arbitraire, on lui circonscrira en 4 points arbitraires une quartique C_4 et par les quatre points de contact on fera passer une quartique C'_4 arbitraire.

La méthode prouve même ceci : étant donnée une conique arbitraire, quadritangente à C_4, obtenue par quelque procédé que ce soit, (4) et (3) entraînent (2); donc on pourra prendre $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_9$ arbitrairement sur C_4; réunis à π_1, π_2, π_3, π_4 ils déterminent un faisceau de quartiques et par suite les 3 derniers points Π_{10}, Π_{11}, Π_{12}; sur une quartique C_4 donnée, circonscrite à $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_9$ il y a donc autant de groupes (Π_{10}, Π_{11}, Π_{12}) complémentaires qu'il y a de familles de coniques quadritangentes. Ce raisonnement ne remplace pas la théorie de la division des fonctions abéliennes, mais il a l'avantage de montrer clairement que le problème est ramené à un problème de même nature et plus simple; sur C_4 on pourra même se donner π_1.

Le même raisonnement prouve bien aussi que si l'on considère 11 points donnés $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{11}$ et les ∞^3 quartiques circonscrites, sur l'une d'elle, C_4, il n'y aura pas de point complémentaire Π_{12}, puisque sur celle-là la connaissance de $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_9$, suffit pour donner un nombre fini de points complémentaires (Π'_{10}, Π'_{11}, Π'_{12}) : il faut *deux* conditions pour que $\Pi_{10} = \Pi'_{10}$, $\Pi_{11} = \Pi'_{11}$, on a donc ∞^1 quartiques privilégiées et chacune fournit un point Π_{12}, de sorte que l'on retrouve, sans considération de déterminants, l'existence du lieu pour Π_{12}.

20. On constate de même que $\frac{(\mu+1)(3\mu+2)}{2}$ points peuvent, moyennant une *seule* condition, être doubles pour une courbe de degré $3\mu+1$; le dernier, quand les autres sont donnés, décrit une courbe de degré 9μ admettant ceux-là pour points quintuples.

De même pour le degré $3\mu+2$ et $\frac{(\mu+1)(3\mu+4)}{2}$ points doubles : lieu de degré $9\mu+2$ pour l'un des points doubles quand les autres sont donnés.

Ces problèmes reviennent tous à des questions de contact, mais la découverte de ces conditions peut devenir pénible. Ainsi pour $\mu = 3$, $m = 3\mu + 1 = 10$, 22 points doubles, nous allons chercher 44 points de surabondance 1 pour le degré 10; on les supposera d'abord simples et distincts, puis simples et confondus deux à deux. On a donc

$$(1)\qquad \text{septique}\left\{\begin{array}{cccccc} \multicolumn{6}{c}{\boxed{m=10 \qquad p=36}} \\ F & \sigma & V & P & r & s \\ 14^* & 0 & 56 & 44 & 21 & 1 \end{array}\right.$$

On peut réduire la septique à une quartique issue des 14 points fixes F, de sorte que les 44 points P peuvent être obtenus par l'intersection d'une courbe C_{10} avec une septique C_7 issue de 26 points $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{26}$ de C_{10} situés sur une même C_4 : on a donc le droit d'écrire sur cette courbe C_7 le diagramme

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ccc} \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_{26} & C_{10} & P_1P_2\ldots P_{44} \\ C_4 & & C'_7 \\ \psi_1\psi_2 & C_1 & p_1p_2p_3p_4p_5 \end{array}\right.$$

autrement dit, les 44 points P sont les points communs à deux septiques C_7, C'_7 ayant 5 points communs en ligne droite; ce résultat prouve que par les 14 F on peut faire passer deux quartiques et non une seule; l'astérisque a servi à rappeler ce résultat; sans ce résultat, la courbe C'_{10} issue de V et contenant 56 points communs à C_7 et C_{10} aurait contenu les 14 autres. Le groupe $P_1, P_2, \ldots, P_{44}$ est *incomplet*, mais de surabondance 10 pour le degré 7, *complet* et de surabondance 1 pour le degré 10; supposons ces 44 points confondus deux à deux les courbes Γ_{10} issues de ce groupe ont pour équation générale :

$$(3)\qquad C_7\Gamma_3 + C'_7\Gamma'_3 + \lambda_1\gamma_{10}^{(1)} + \lambda_2\gamma_{10}^{(2)} + \lambda_3\gamma_{10}^{(3)} = 0$$

et contiennent 23 paramètres homogènes; elles sont tangentes à C_7 et C'_7 aux points $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{12}$; moyennant 22 conditions on rend chaque point double et il reste, en général, une seule courbe C_{10}. Nous n'avons fait, sous une forme légèrement différente, que rééditer les déductions du paragraphe 17, mais ici nous avons pris un diagramme sur C_7, tandis que le paragraphe 17 nous aurait fait employer un diagramme sur C_{10}, mais les conclusions sont les mêmes : *les courbes* C_7, C'_7 *sont tangentes aux points* $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{12}$, *et leurs points complémentaires* p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 *communs sont en ligne droite.*

Indiquons maintenant comment réaliser la disposition des points Π et p. Écrivons sur C_7 les deux égalités

$$(4)\qquad 2\Pi_1 + 2\Pi_2 + \ldots + 2\Pi_{22} + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0,$$
$$(5)\qquad \psi_1 + \psi_2 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0.$$

Supposons que les Π soient sur une courbe de degré minimum 6; on écrit :

$$(6)\qquad \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_{22} + \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_{20} = 0.$$

La combinaison $2(6) + (5) - (4)$ donne

$$(7)\qquad 2(\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_{20}) + \psi_1 + \psi_2 = 0.$$

Inversement, (5), (6), (7) seront nécessaires et suffisantes. Sur la courbe inconnue C_6 qui est donc tangente à C_7 en $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{20}$ on pourra écrire l'égalité symbolique (7), *ce qui est un transfert sur* C_6 *au lieu de* C_7, puis

$$(8)\qquad \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_{20} + \pi'_1 + \pi'_2 + \ldots + \pi'_{10} = 0,$$
$$(9)\qquad \psi_1 + \psi_2 + \psi'_1 + \psi'_2 + \psi'_3 + \psi'_4 = 0.$$

La combinaison $2(8) + (9) - (7)$, sur la sextique C_6, donne

$$(10)\qquad 2(\pi'_1 + \pi'_2 + \ldots + \pi'_{10}) + \psi'_1 + \psi'_2 + \psi'_3 + \psi'_4 = 0,$$

et *il est nécessaire et suffisant de trouver une* C_4 *et une* C_6 *tangentes entre elles en* 10 *points, tandis que les* 4 *autres points sont en ligne droite :* cela revient à trouver une C_4 et une C_5 tangentes entre elles en 10 points : on en déduit ensuite C_4 et C_6, et les égalités symboliques permettent ensuite de remonter sans difficulté à la configuration primitive, sans avoir besoin de recourir au théorème d'Abel ni à la division des fonctions abéliennes. D'ailleurs le procédé ramène la détermination de C_4 et C_5 à celle de C_4 et d'une C_3 tangentes en 6 points; puis, de cette cubique C_3 et d'une conique C_2 tangentes en 3 points, toujours par transfert d'identités symboliques sur des courbes de degré décroissant; on est donc certain, à partir de C_3 et C_2, d'obtenir, par de pures opérations algébriques, la configuration demandée sur un plan vierge, tandis que la réaliser sur une C_7 donnée est un problème beaucoup plus délicat.

Si les points Π sont sur une courbe de degré minimum 5 (le degré 4 exigerait que C_{10} se décompose en la C_4 circonscrite aux 22 points Π et une sextique), il est plus avantageux de remplacer les égalités (6) et suivantes par

$$\Pi_1 + \ldots + \Pi_{22} + \pi_1 + \ldots + \pi_{13} = 0, \tag{6'}$$

$$2(\pi_1 + \ldots + \pi_{13}) + \psi_1 + \psi_2 = 0. \tag{7'}$$

Il faudra donc déterminer une courbe C_4 tangente à C_7 en $\pi_1, \ldots, \pi_{13}$; on fait le transfert de l'égalité (7′) sur C_4 et l'on a, avec une nouvelle courbe C'_4 :

$$\pi_1 + \ldots + \pi_{13} + \pi'_1 + \pi'_2 + \pi'_3 = 0, \tag{8'}$$

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi'_1 + \psi'_2 = 0, \tag{9'}$$

$$2(\pi'_1 + \pi'_2 + \pi'_3) + \psi'_1 + \psi'_2 = 0. \tag{10'}$$

Il suffit de trouver une courbe C_2 et une nouvelle courbe C_4 tangentes en 3 points, ce qui est possible en partant d'une C_2 arbitraire.

21. *Exemples où les points multiples ne peuvent être choisis arbitrairement.* — La difficulté signalée, à savoir quand les points multiples du groupe anormal définissant au moins 3 C_m ne peuvent être choisis arbitrairement, se présente à partir de $m = 7$, $p = 5$; étudions ce cas; *écrivons à titre d'essai :*

$m = 7$	$p = 5$	$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{10}$ doubles				
	F	σ	V	P	r	s
quartique	0*	0	8	1	4	1
	3*	0	5	4	1	1
	3*	1	5	4	2	2
	4	1	4	5	1	2
	5	2	3	6	1	3
	6	3	2	7	1	4

D'après un principe général établi plus haut, la première ligne ne peut exister que si les 10 points Π sont sur une cubique, et l'on a simplement cette proposition bien connue que toutes les septiques coupant une C_3 en 20 points fixes contiennent encore un 21[e] point fixe de C_3. L'astérisque rappelle cette disposition des Π. Nous remarquerons d'ailleurs que si la cubique, unique, contenant les Π admet un point double, ce point ne peut coïncider avec un des points Π.

Les lignes $F = 1$, $F = 2$ conduiraient simplement à adjoindre, au groupe précédemment obtenu, 1 ou 2 points P *arbitraires* du plan,

La première ligne 3* exige d'abord que les 3 points F soient en ligne droite; puis, par 10 points Π doubles et 5 points V simples, on doit pouvoir faire passer au moins *deux* septiques, de sorte que les 35 conditions obtenues doivent avoir une surabondance au moins égale à 1. Les principes du paragraphe 17 nous font écrire sur C_7 le diagramme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} F_1F_2F_3 & \gamma_4(\omega = 0) & V_1V_2V_3V_4V_5 \\ C_1(\omega' = -1) & & C'_7(\omega'' = +1) \\ F'_1F'_2F'_3F'_4 & \gamma'_4(\Omega = 0) & P_1P_2P_3P_4 \end{array} \right.$$

et montrent l'existence d'une identité

$$(2) \qquad C_7 \equiv \gamma'_4\gamma_3 + C_1\gamma_6,$$

de sorte que la quartique γ'_4 et la quartique γ_6 sont tangentes aux 10 points $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{10}$ et se coupent en P_1, P_2, P_3, P_4; la réciproque est vraie d'après les principes déjà établis. Pour réaliser sur une courbe γ'_4 la disposition voulue, on écrit :

$$(3) \qquad 2\Pi_1 + 2\Pi_2 + \ldots + 2\Pi_{10} + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0$$

et, ici, du moment que $\sigma = 0$, les 10 points Π ne sont pas sur une cubique; on pourra donc choisir sur γ'_4 les points $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{10}$, P_1 arbitrairement; P_2, P_3, P_4, en résulteront. Ici, finalement, les 10 points Π (et même P_1) ont pu être choisis arbitrairement; on peut encore tracer arbitrairement une quartique γ'_4 circonscrite à ces points; γ'_4 dépend de trois paramètres; on peut donc se demander en quoi consiste la restriction prévue en reconstruisant le tableau T : la septique C_7 étant construite, la droite F'_1, F'_2, F'_3, F'_4 est *unique* et détermine un groupe *unique* $F_1F_2F_3$ permettant la construction du groupe : cela tient à ce qu'il n'y a qu'une quartique γ'_4 coupant γ_6 aux points simples P_1, P_2, P_3, P_4 et $\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$ dont les derniers comptent pour deux.

Pour la seconde ligne 3*, puisque les points $\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$, F_1, F_2 F_3 déterminent un *réseau* de quartiques, deux d'entre elles ont encore 3 points communs φ_1, φ_2, φ_3 en ligne droite et F_1, F_2, F_3, φ_1, φ_2, φ_3 déterminent une conique : on en déduit que $\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$ sont sur une cubique (¹), et réciproquement. Donc le diagramme (1), qui réussit encore, prouve que l'on doit déterminer une quartique γ'_4 et une sextique γ_6 se touchant en 10 points, *situés cette fois sur une cubique* C_3. Prenons donc arbitrairement une quartique γ'_4, coupons-la par une cubique arbitraire C_3 et prenons pour $\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$ au hasard 10 sur 12 des points communs : prenons P_1 arbitrairement sur γ'_4, d'où résultent P_2, P_3, P_4 : *nous constatons que nous n'obtenons pas un groupe complet;* cet exemple précis justifie la minutie avec laquelle j'ai cru devoir présenter la discussion et le choix des nombreux exemples que j'ai fournis; en effet, les courbes d'équation

$$\gamma'_4\gamma_3 + C_1\gamma_6 = 0$$

contiennent 13 paramètres arbitraires homogènes : 10 provenant de γ_3 et 3 de C_1; on peut, par 10 équations seulement, rendre $\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$ doubles; si les équations de condition sont distinctes, il reste trois paramètres homogènes (autrement dit un système ∞^2, donc $r=1$). Or, les septiques qui coupent C_3 en 20 points ($\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$ comptés chacun pour 2) coupent encore C_3 en un même point φ; donc nous obtenons par notre procédé des septiques ayant toutes en commun les 10 points doubles $\Pi_3, \ldots, \Pi_{10}$, les quatre points P_1, P_2,

(¹) Ceci est une conséquence générale de la théorie de la résiduation; les égalités symboliques que nous avons systématiquement employées manifestent d'ailleurs cette propriété par des opérations purement mécaniques; on écrit, en effet, pour deux quartiques, C_4, C'_4 :

$$(1) \qquad \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_{10} + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 0,$$

puis sur C_4 :

$$(2) \qquad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p'_1 + p'_2 = 0,$$

$$(3) \qquad p'_1 + p'_2 + p''_1 + p''_2 = 0.$$

On en déduit

$$(4) \qquad \Pi_1 + \Pi_2 \ldots + \Pi_{10} + p''_1 + p''_2 = 0.$$

P_3, P_4 et le point φ; en regardant le tableau, nous voyons que la seule façon de concilier les résultats est de supposer r effectivement égal à 1, mais de remarquer que $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{10}$ (doubles), P_1, P_2, P_3, P_4 (simples) forment un groupe *incomplet* de surabondance 1, et que l'adjonction de φ fournit le groupe anormal complet de surabondance 2; la quartique γ'_4 coupe C_7 en F'_1, F'_2, F'_3, F'_4 qui donnent la droite C_1 et F_1, F_2, F_3, conformément au diagramme 1 ; pour le degré 4, les 13 points $\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$, F_1, F_2, F_3 ont la surabondance un, définissent un réseau de quartiques dont nous ne pouvons utiliser que celles qui passent en φ et forment un faisceau. Le groupe $\Pi_1 \ldots \Pi_{10}$, φ est donc l'un de ceux que fournit la première ligne (surabondance 1), et les quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 qui lui sont ajoutés fournissent la surabondance 2 : on a ainsi un cas particulier de la ligne $F = 4$ du tableau.

Une discussion minutieuse et assez longue prouve que la seconde ligne 3* proprement dite ne peut pas exister; il faudrait en effet essayer de faire coïncider P_4 avec φ, et de faire passer γ'_4 par φ. Les égalités symboliques écrites soit sur C_3, soit sur γ'_4 conduisent au résultat négatif annoncé.

La ligne $F = 4$ ne présente aucune difficulté : on peut en effet prendre deux quartiques au hasard, choisir au hasard 14 de leurs points communs pour les appeler $\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$, F_1, F_2, F_3, F_4 : il existe ∞^1 (au moins) septiques ayant $\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$ comme points doubles, F_1, F_2, F_3, F_4 comme points simples, et non décomposées, si les 10 points Π ne sont pas sur une cubique : on continue sans difficulté la construction de l'une de ces courbes C_7.

Pour la ligne $F = 5$, même construction : on peut tracer une C_7 (au moins) circonscrite à $\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 (choisis sur les 16 points-bases d'un faisceau de quartiques). Le reste s'achève sans difficulté.

Nous allons voir que la dernière ligne est impossible; en effet, sur l'une des quartiques du faisceau ($\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$, $F_1, \ldots, F_6$) écrivons :

$$\begin{aligned} 2\Pi_1 + 2\Pi_2 + \ldots + 2\Pi_{10} + F_1 + F_2 + \ldots + F_6 + V_1 + V_2 &= 0, \\ \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_{10} + F_1 + F_2 + \ldots + F_6 &= 0. \end{aligned}$$

La comparaison donne

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_{10} + V_1 + V_2 = 0,$$

donc les 10 points H seraient sur une cubique; d'autre part, nous supposons les points V_1 et V_2 *variables*, donc la cubique C_3 coupe C_7 en 22 points et fait partie de C_7 qui se décompose; on aurait pu faire le raisonnement suivant, qui conduit au même résultat : si la dernière ligne existe, il existe *quatre* quartiques adjointes passant par $H_1, \ldots, H_{10}$, V_1, V_2; donc ces points sont à l'intersection d'une quartique et d'une cubique. Cela justifie l'emploi de nos égalités symboliques, qui ont l'avantage de ramener beaucoup de propriétés à un simple mécanisme de calcul.

22. Élucidons de même le cas :

$$m = 7, \qquad p = 4, \qquad 11 \text{ points doubles } H_1, H_2, \ldots, H_{11}.$$

Ici on a

$$2p - 2 = 6 = v + f + 7\delta, \qquad 5 = v + h.$$

On a donc

$$\delta = 0, \qquad v \leqq 5, \qquad f \geqq 1.$$

Ceci suffit à démontrer que 11 points doubles pris au hasard déterminent exactement ∞^2 septiques et jamais ∞^3; d'autre part, f, quand il prend la valeur 1, 2, ne donne, d'après les remarques générales, rien d'autre que $f = 0$; donc il n'y a pas à essayer $f = 0, 1, 2$. On commence à $f = 3$, en supposant dans ce cas les 3 points en ligne droite.

Écrivons à titre d'essai :

$m = 7$	$p = 4$	$H_1, H_2, \ldots, H_{11}$ doubles				
	F	σ	V	P	r	s
quartique	3*	1	3	2	1	2
	4	2	2	3	1	3
	5	3	1	4	1	4

La dernière ligne ne peut exister, car elle donnerait un réseau de courbes *non unicursales* avec une *seule* intersection *mobile*.

Pour la première ligne, la méthode du paragraphe 17 conduirait au diagramme sur C_7 :

$$\begin{array}{ccc} F_1F_2F_3 & \gamma_4(\omega=0) & V_1V_2V_3 \\ C_1(\omega'=-1) & & C'_7(\omega''=+1) \\ F'_1F'_2F'_3F'_4 & C'_4(\Omega=0) & P_1P_2 \end{array}$$

et à la conclusion qu'il existe une sextique C_6 tangente à C'_4 en Π_1, Π_2, ..., Π_{11} et la coupant encore en P_1, P_2. Ceci ne suffit pas pour entraîner une relation entre les 11 points $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{11}$; car on peut imaginer que Γ_4 est l'une des ∞^3 quartiques issues de Π_1, Π_2, ..., Π_{11} et qu'on la coupe par une sextique la touchant en $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{10}$ et la rencontrant simplement en Π_{11}, ce qui donne l'égalité symbolique déterminant sur Γ_4 le système Q_1, Q_2, Q_3 :

$$2\Pi_1 + 2\Pi_2 + \ldots + 2\Pi_{10} + \Pi_{11} + Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0.$$

On peut, en écrivant que Q_1 coïncide avec Π_{11}, obtenir ∞^2 quartiques. Ceci suffit à peu près pour rendre vraisemblable l'impossibilité de la première ligne du tableau, car Π_1, Π_2, ..., Π_{11} devraient former un groupe *normal*, mais *incomplet :* or, si Π_1, ..., Π_{11} sont pris au hasard, ils forment, en tant que points doubles, un groupe *normal complet*. Du reste, l'équation générale des courbes de degré 7, passant par les points Π_1, ..., Π_{10}, Π_{11} de contact de C_4 et C'_6 et les deux autres points simples de l'intersection, P_1, P_2, est

$$C'_4 C_3 + C_1 C_6 = 0$$

et contient les 13 paramètres homogènes qui entrent dans C_1 et C_3 ; en écrivant que Π_1, Π_2, ..., Π_{11} sont doubles, on doit, *en général*, obtenir un *faisceau* ($r = 0$) avec 5 points d'intersection complémentaires. Toutefois les résultats généraux, indiqués au paragraphe 17, sont insuffisants pour trancher la question.

Or, dans mon précédent Mémoire, au début du Chapitre III, j'ai étudié en détail les surfaces unicursales de degré 5 possédant une cubique gauche double Γ; elles admettent une représentation plane où les sections planes ont pour image les quartiques circonscrites à 11 points $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{11}$; l'image de Γ est une septique particulière C du système ∞^2 défini par $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{11}$ doubles; C est du type hyperelliptique; la droite joignant sur C les images d'un même point de Γ enveloppe une conique C_2 touchant C en 7 points; si C_7 est l'une quelconque des autres septiques ayant les Π pour points doubles, C_7 coupe C en 5 points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 tels que leurs associés $a'_1, a'_2, a_3, a'_4, a'_5$ sur C, dans la correspondance hyperelliptique, soient sur une même tangente à C_2. Il y a donc impossibilité à trouver deux points P_1, P_2 tels que toutes les septiques (en particulier C) circonscrites aux Π (doubles) passent toutes en P_1 et P_2; en effet, P_1 et P_2 auraient deux associés fixes, P'_1, P'_2 sur C, et si a_1, a_2, a_3 sont les trois points variables communs à C et une autre septique, la droite $a'_1 a'_2 a'_3$ serait *variable* et devrait contenir les deux points fixes P'_1, P'_2.

Ce raisonnement, basé sur la géométrie dans l'espace, démontre aussi que le cas $f = 4$ conduit à une impossibilité.

La méthode du paragraphe 17 suppose les points Π tous *doubles;* pour le premier cas de difficulté ($m = 7$, 10 points doubles) elle nous a permis de traiter la question complètement; pour le second cas ($m = 7$, 11 points doubles) elle n'a donné que des indications, et ceci nous suffit pour montrer la difficulté du problème; il y aurait lieu de perfectionner encore considérablement la méthode que j'ai indiquée, afin d'éviter une démonstration particulière pour chaque cas. Les considérations données plus loin, paragraphe 27., permettent d'aller plus loin et de ne plus supposer les points Π doubles.

La construction des tableaux T serait donc extrêmement longue, et au fond nous ne l'avons complètement indiquée que si tous les points multiples peuvent être tous pris arbitrairement, ou si une transformation birationnelle a ramené à un tel cas : ce dernier procédé a réussi au paragraphe 10.

23. Je dis quelques mots du cas où l'on considère les octiques admettant 14 points $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{14}$ pour points doubles : on a $p = 7$ et en général on a un *réseau*. Cherchons la condition pour obtenir un système linéaire ∞^3 d'octiques n'ayant pas d'autres points communs que $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{14}$; on a donc

$$2p - 2 = 12 = f + \nu + 8\delta, \qquad \nu = 8, \qquad \delta = 0, \qquad f = 4;$$

d'où

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l|cccccc} & \multicolumn{6}{|c|}{m=8 \qquad p=7 \qquad \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{14} \text{ doubles}} \\ & F & \sigma & V & P & r & s \\ \text{quintique} & 4 & 0 \text{ ou } 1 & 8 & 0 & 2 \text{ ou } 3 & 1 \text{ ou } 2 \end{array}\right.$$

Le faisceau des octiques Π, V découpe, sur la quintique γ_5, une série g_4^1, ce qui, d'après Riemann-Roch, exige qu'il y ait 3 coniques linéairement indépendantes issues de $F_1 F_2 F_3 F_4$: ces quatre points sont en ligne droite et l'on trace sur C_8 le diagramme :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ccc} F_1 F_2 F_3 F_4 & \gamma_5 (\omega = 0) & V_1 V_2 \ldots V_8, \\ C_1 \omega' = -1 & & (C'_8 (\omega'' = +1), \\ F_1 F'_2 F'_3 F'_4 & \text{quartique } (\Omega = 0) & 0 \end{array}\right.$$

On en déduit que $\Pi_1, \ldots, \Pi_{14}$ sont points de contact d'une quartique C_4 et d'une septique C_7 ; réciproquement un tel groupe définira ∞^3 octiques ayant ces points doubles ($s = 1$).

Pour déterminer les points de contact, on écrit sur C_4 :

$$(3)\qquad 2(\Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_{14}) = 0,$$

et si les Π sont sur une seule quartique :

$$(4)\qquad \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_{14} + p_1 + p_2 + \ldots + p_6 = 0.$$

On déduit par comparaison :

$$(5)\qquad 2(p_1 + p_2 + \ldots + p_6) = 0,$$

on est ramené à trouver une C_3 et une C_4 tangentes en 6 points, puis, par procédé déjà employé, à trouver une C_2 et une C_3 triplement tangentes.

Si, au contraire, les Π sont bases d'un faisceau de quartiques, on écrit :

$$(4')\qquad \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_{14} + p_1 + p_2 = 0,$$

d'où par comparaison de (3) et (4')

$$(5')\qquad 2(p_1 + p_2) = 0.$$

On est ramené à trouver une droite bitangente à C_4 ; nous nous sommes servis de cette propriété au paragraphe I pour montrer qu'*en général* les octiques contenant, comme points doubles, 14 points-bases d'un faisceau de quartiques se décomposent en deux quartiques du faisceau : *exception* a lieu si la droite, joignant les deux points-bases négligés, est bitangente à une quartique particulière du faisceau.

24. *Exemple de points triples.* — Une courbe de degré 12 contient 90 coefficients, et un point triple donné représente 6 conditions; donc, *en général*, la donnée de 15 points triples suffit pour déterminer *une* C_{12} et *une seule*.

Nous allons, en ramenant la question à un problème de contacts, indiquer un cas où l'on obtient un *faisceau* de C_{12}.

On sait que si par 3 points π_1, π_2, π_3 en ligne droite, on fait passer une C_4 et une C_{12} arbitraires, elles se coupent en 45 points P_1, $P_2, \ldots, P_{45}$ nouveaux qui ont la surabondance 1 pour le degré 12; les courbes de degré 12 circonscrites au P ont pour équation générale :

$$C_4\Gamma_8 + \lambda C_{12} + \mu\Gamma_{12} = 0, \tag{1}$$

où Γ_8 est une courbe arbitraire de degré 8, Γ_{12} une courbe fixe de degré 12, et λ, μ des constantes; cette équation (1) renferme 47 paramètres homogènes. Cela subsiste quand on suppose les 45 points P confondus trois à trois, c'est-à-dire les courbes C_4 et C_{12} osculatrices en 15 points $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{15}$. Si l'on transporte l'origine en Π_1, l'axe des x étant tangent à C_4, et si R_1 est le rayon du cercle osculateur à C_4 en Π_1, l'équation (1), ordonnée suivant les puissances croissantes de x, y, sera de la forme :

$$a\left(y - \frac{x^2}{2R_1}\right) + bxy + cy^2 + dx^3 + \ldots = 0.$$

Il suffira donc de trois équations linéaires entre les paramètres arbitraires entrant dans (1), à savoir $a = b = c = 0$, pour rendre Π_1 triple sur la courbe de degré 12. En opérant ainsi pour les divers points $\Pi_1, \ldots, \Pi_{16}$ on obtient 45 équations linéaires et homogènes à 47 inconnues, donc, *en général*, un faisceau.

Il suffit donc d'indiquer comment nous construisons le total Π_1, $\Pi_2, \ldots, \Pi_{15}, \pi_1, \pi_2, \pi_3$. Sur C_4 on a

$$(2) \qquad 3(\Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_{15}) + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 0,$$

$$(3) \qquad \varphi + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 0,$$

$$(4) \qquad \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_{15} + \pi'_1 + \pi'_2 + \pi'_3 + \pi'_4 + \pi'_5 = 0,$$

en supposant que les Π sont sur une seule quartique.

La combinaison 3 (4) + (3) — (2) donne

$$(5) \qquad 3(\pi'_1 + \pi'_2 + \pi'_3 + \pi'_4 + \pi'_5) + \varphi = 0.$$

On est donc ramené à trouver une nouvelle courbe C'_4 osculatrice à C_4 en 5 points. La même méthode, en menant la conique circonscrite aux π' donne

$$(6) \qquad \pi'_1 + \pi'_2 + \pi'_3 + \pi'_4 + \pi'_5 + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0.$$

La combinaison 3(6) + (3) — (5) donne

$$(7) \qquad 3(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 0.$$

On est donc ramené à trouver une cubique C_3 osculatrice à C_4 en 3 points ψ et la coupant encore en 3 points en ligne droite, mais alors le *transfert sur* C_3 *au lieu de* C_4 *de l'égalité* (7) donne simplement :

$$(8) \qquad 3(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) = 0,$$

et l'on est ramené à trouver deux cubiques C_3, C'_3 osculatrices en 3 points : ceci revient à la division des fonctions elliptiques.

Si l'on avait supposé les Π sur deux quartiques, on conserve (2), (3), mais on écrit :

$$(4') \qquad \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_{15} + \pi' = 0,$$

d'où

$$(5') \qquad 3\pi' + \varphi = 0,$$

ce qui prouve qu'il faut prendre pour point π' un point d'inflexion de C_4 et la couper par une quartique C'_4 quelconque passant en π'_1. Mais on doit remarquer que ce procédé ne fournit *aucune propriété spéciale* pour l'ensemble des points $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{15}$ et π', sauf d'être bases d'un faisceau de quartiques; en effet, dans tout faisceau de courbes il y en a, en général, *trois* qui admettent l'un des points de base pour point d'inflexion. Si nous confrontons avec le paragraphe 1 de ce Chapitre, nous voyons qu'*en général* les 16 points-bases d'un faisceau de quartiques, pris avec le degré 3, forment un système de surabondance 9 pour le degré 12; donc, *en général*, 15 d'entre eux forment un système incomplet de surabondance 3 et donnent une courbe décomposée en 3 quartiques du faisceau.

On voit que la même méthode nous permettrait, de tout groupe anormal complet formé de points tous distincts, de déduire un groupe anormal complet obtenu en réunissant i de ces points et les convertissant en point multiple d'ordre i; mais nous n'obtenons pas ainsi *tous* les groupes avec points multiples : cela a déjà été constaté par $m = 5$ et des points multiples d'ordre 2 seulement.

23. *Problème analogue au problème d'Halphen.* — J'indique un problème analogue à celui qu'Halphen a posé pour les sextiques à neuf points doubles. Supposons qu'il s'agisse de courbes de degré m, admettant k_1 points d'ordre i_1, k_2 points d'ordre i_2, ..., k_α points d'ordre i_α; les i sont des entiers égaux ou supérieurs à 1. Supposons que l'on ait

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &k_1 i_1^2 + \ldots + k_\alpha i_\alpha^2 = m^2, \\ &k_1 \frac{i_1(i_1+1)}{2} + \ldots + k_\alpha \frac{i_\alpha(i_\alpha+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2}, \end{aligned}\right.$$

de sorte que si les points sont tous donnés *arbitrairement* on ait une *seule* courbe d'ordre m. Les relations (1) peuvent prendre la forme plus simple :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &k_1 i_1^2 + \ldots + k_\alpha i_\alpha^2 = m^2, \\ &k_1 i_1 + \ldots + k_\alpha i_\alpha = 3m, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit aussitôt

$$(3)\qquad k_1 \frac{(i_1-1)}{2} + \ldots + k_\alpha \frac{i_\alpha(i_\alpha-1)}{2} = \frac{m(m-3)}{2}.$$

Le genre de la courbe est donc l'unité : si nous écartons le cas de décomposition obligatoire, avec une portion de décomposition fixe ou sans portion fixe, il ne peut donc y avoir que *le cas de la seule courbe* C_m *ou du faisceau.*

On remarquera que les relations (2) sont homogènes en $i_1, i_2, \ldots, i_\alpha$ et m de sorte que si D (supérieur à 1 ou égal à 1) est le plus grand commun diviseur de $i_1, i_2, \ldots, i_\alpha$ et m, et si nous n'avons qu'une solution, cette solution est la courbe de degré $\frac{m}{D}$, admettant les points donnés avec la multiplicité primitive divisée par D, cette courbe étant prise D fois.

Ceci prouve même que si les points donnés, avec la multiplicité divisée par D, définissent un faisceau de courbes de degré $\frac{m}{D}$, la solution du problème au degré m se compose de D courbes arbitraires de ce faisceau : l'analogie avec le problème d'Halphen est manifeste.

On connaît l'inégalité, entre nombres positifs ou nuls,

$$\text{(4)} \qquad K(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_K^2) \geqq (a_1 + a_2 + \ldots + a_K)^2,$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $a_1 = a_2 = \ldots = a_K$. Donc, en posant $K = k_1 + k_2 + \ldots + k_\alpha$, on déduit de (4)

$$\text{(5)} \qquad K(k_1 i_1^2 + k_2 i_2^2 + \ldots + k_\alpha i_\alpha^2) \geqq (k_1 i_1 + k_2 i_2 + \ldots + k_\alpha i_\alpha)^2$$

ou en tenant compte des égalités (2)

$$\text{(6)} \qquad k_1 + k_2 + \ldots + k_\alpha \geqq 9,$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $i_1 = i_2 = \ldots = i_\alpha$ de sorte que l'on retombe sur le problème d'Halphen : déterminer une courbe de degré $3m$ ayant 9 points d'ordre m.

Le cas le plus simple après celui d'Halphen s'obtiendra en prenant $k_1 + k_2 + \ldots + k_\alpha = 10$. Par exemple, 2 points doubles et 8 points simples déterminent en général une quartique de genre 1 et une seule. Nous allons, comme application du problème étudié au paragraphe 5 indiquer quelle disposition ils doivent présenter pour donner un faisceau de quartiques.

Donnons-nous arbitrairement $\Pi_1, P_1, P_2, \ldots, P_8$ et supposons que, pris tous simples, ils ne soient pas bases d'un faisceau de cubiques. Si donc on considère la cubique C_3 qui leur est circonscrite, nous savons que toutes les quartiques admettent Π_1 double, $P_1, P_2, \ldots, P_8$

simples coupent C_3 en deux points P', P'' tels que la droite $P'P''$ passe par un point fixe F de C_3; les quartiques en jeu forment un système ∞^3; celles qui passent en P' forment un système ∞^2 et contiennent automatiquement P''; si donc de F on mène l'une des quatre tangentes à C_3, et si Π_2 est l'un des points de contact, toutes les quartiques admettent Π double, $P_1, P_2, \ldots, P_8$, Π_2 simples sont tangentes à C_3 en Π_2 et forment un système ∞^2; il suffit d'une condition pour rendre Π_2 double et l'on obtient alors un faisceau comme nous le demandions; donc si $\Pi_1, P_1, \ldots, P_8$ ne définissent qu'une cubique C_3, nous avons *quatre* positions du point Π_2 (ce nombre se réduit si la classe de C_3 au lieu d'être 6 n'est que 4 ou 3). Si $\Pi_1, P_1, P_2, \ldots, P_8$ définissent un faisceau de cubiques, tout ce que nous avons dit peut se répéter sur chaque cubique C_3 du faisceau : sur chaque cubique C_3 le point F coïncide avec Π_1 et l'on a encore quatre positions du point Π_2; cette fois le point Π_2 décrit un lieu. Dans le premier cas, les ∞^3 quartiques (Π_1 double, $P_1, P_2, \ldots, P_8$ simples) servent de représentation aux sections planes d'une surface Σ de degré 4 admettant une droite double Δ sur laquelle il y a 4 points où les deux plans tangents sont confondus et ce sont ces points qui ont pour image les points Π_2 obtenus. Dans le second cas, les ∞^3 quartiques donnent une représentation impropre d'une quadrique et il y aurait lieu d'étudier cette représentation, exactement comme nous l'avons fait pour les ∞^3 sextiques ayant 8 points doubles et le cône du second degré qu'elles servent à représenter.

On remarquera que si l'on procède autrement et si l'on se donne $\Pi_1, \Pi_2, P_1, \ldots, P_7$ on a P_8 sans difficulté dans le cas du faisceau; or une transformation quadratique birationnelle, de triangle fondamental $\Pi_1\Pi_2P_1$, donne des cubiques circonscrites à $\Pi_1, \Pi_2, P_3, \ldots, P_7$ simples; de même si l'on cherche un faisceau avec Π_1, Π_2 multiples d'ordre $2m$, $P_1, P_2, \ldots, P_7, P_8$ d'ordre m, les courbes étant de degré $4m$, la transformation quadratique en question ramène purement et simplement au problème d'Halphen où le degré des courbes est $3m$ et $\Pi_1, \Pi_2, P_3, \ldots, P_8$ sont des points d'ordre m : le lieu de P_8, par exemple, si $\Pi_1, \Pi_2, P_1, \ldots, P_7$ sont donnés, se déduit donc du travail d'Halphen, mais le lieu de Π_2, si $\Pi_1, P_1, P_2, \ldots, P_8$, sont donnés, a besoin d'être étudié spécialement.

Je n'ai pas trouvé de solution du système (2) autres que celles que l'on déduit du problème d'Halphen par une transformation quadratique birationnelle.

26. *Surabondance d'un groupe pour des degrés croissants.* — Si l'on considère un groupe de points $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_h, P_1, P_2, \ldots, P_k$ on peut désigner par m le degré minimum des courbes circonscrites aux points pourvus de la multiplicité donnée; soit s la surabondance pour le degré m, il existe des courbes de degré $m+1, m+2, \ldots,$ sans limitation supérieure, circonscrites au groupe, la multiplicité de chaque point restant la même. On démontre comme dans le précédent Mémoire que les surabondances $s, s_1, s_2, \ldots$ relatives aux degrés successifs $m, m+1, m+2, \ldots$ vont en *décroissant* jusqu'au moment où s_p devient nul et reste définitivement nul : sauf au cas où elles sont nulles toutes deux, deux surabondances successives sont *inégales*. On a

$$0 < s - s_1 \leqq m$$

du moment que s est différent de zéro (m désignant alors le degré d'une courbe circonscrite, même si ce degré n'est pas le degré minimum).

Mais il faut remarquer qu'un groupe qui est incomplet, pour le degré m, peut être complet pour le degré $m+1$: d'ailleurs, cela résulte de la décroissance de la surabondance.

Un groupe peut, pour le degré m, définir des courbes toutes décomposées : mais en continuant dans la suite $m+1, m+2, \ldots,$ il arrive un moment où les courbes ne sont plus nécessairement décomposées. Le lecteur pourra se reporter à mon précédent Mémoire (Chapitre II). Ici il y a une particularité spéciale aux points mnltiples, quand ils sont suffisamment nombreux : ainsi, soit une septique unicursale C_7 à 15 points doubles. Il n'y a qu'une septique les admettant, car toute courbe ayant ces 15 points doubles admet 60 intersections avec C_7 : au degré 8, ces 15 points doubles exigent la décomposition de C_8 en C_7 et une droite; au degré 9, ils n'exigent plus la décomposition.

27. *Proposition de Cayley. Genre apparent.* — Une courbe C_m étant

donnée, p étant son genre *effectif*, on a

$$(1) \qquad p + \sum \frac{i(i-1)}{2} = \frac{m(m-3)}{2} + 1$$

et l'on sait que l'adjointe générale d'ordre $m-3$ (les excès étant tous nuls) dépend exactement de $(p-1)$ paramètres : il y en a en effet p distinctes. Donc, un point multiple d'ordre $(i-1)$ représentant exactement $\frac{i(i-1)}{2}$ conditions pour une courbe, les conditions représentées au degré $m-3$ (ou aux degrés supérieurs), par les points multiples de C_m, mais avec la multiplicité $i-1$ au lieu de i pour chacun, sont *toutes distinctes, soit que l'on prenne tous les points multiples, soit que l'on en néglige certains*. Conservons donc la formule (1) pour définir le genre p, *apparent ou effectif*, suivant que la sommation Σ se rapporte à une portion des points multiples ou à leur ensemble; les adjointes (apparentes ou effectives) sont celles qui passent (avec un excès nul ou positif) par les points multiples conservés. Il y a donc exactement p adjointes (apparentes) linéairement distinctes d'ordre $m-3$, d'excès nul en chaque point multiple conservé de C_m; la formule (1), écrite sous la forme

$$(1') \qquad p + \sum \frac{i(i-1)}{2} = \frac{(m-2)(m+1)}{2} - (m-2),$$

prouve qu'il y a exactement $p+m-2$ paramètres dans l'équation d'une adjointe (apparente) d'ordre $m-2$, d'excès nul en chaque point multiple conservé de C_m.

Si l'on prend, *au hasard*, sur une courbe C_m, p points distincts des points multiples (p étant le genre apparent ou effectif), il n'y a aucune adjointe (apparente ou effective) de degré $m-3$ passant par ces points.

Ces préliminaires suffisent pour établir une proposition importante, qui est l'analogue de la proposition de Cayley : nous ne portons notre attention que sur certains points multiples de C_m pour définir le genre apparent p; nous faisons passer par ces points, chacun d'eux ayant une multiplicité *arbitraire, mais non nulle*, une courbe C_q, coupant encore C_m, en dehors de ces points, aux points $P_1, P_2, \ldots, P_h$: la connaissance de $h-p$ de ces points, prélevés au hasard, entraîne la connaissance des p restants : la proposition est en défaut si les p points restants sont sur une adjointe (apparente) d'ordre $m-3$ ou inférieur.

Il est bien entendu, dans cet énoncé, que la courbe C_q ne passe en aucun des points multiples de C_m négligés.

J'ai fait remarquer, dans mon précédent Mémoire, que cette forme d'énoncé, frappante pour l'imagination, en réalité est remplacée avantageusement par l'étude de la *structure* de l'ensemble $P_1, \ldots, P_h$, $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ pour le degré q : chaque P est simple, chaque Π est l'un des points multiples conservés de C_m et a la multiplicité j ($0 < j$ et $j \gtrless i$) fixée sur C_q. La surabondance de cet ensemble est p, et en général il est irréductible : mais il peut contenir un groupe anormal complet, à son intérieur, dans les cas où la proposition de Cayley est en défaut.

Grâce aux extensions successives du théorème du reste, la proposition en jeu est ramenée, au fond, au cas d'une adjointe (apparente) de degré $m-2$: une telle adjointe C_{m-2} coupe C_m, en dehors des points multiples, en $p+u$ points et l'on a

$$m(m-2) = \Sigma i(i-1) + p + u, \tag{2}$$

d'où, en tenant compte de (1),

$$u + \sum \frac{i(i-1)}{2} = \frac{(m+1)(m-2)}{2} \tag{3}$$

En comparant avec (1') on a

$$u = p + m - 2. \tag{3'}$$

L'égalité (3) montre qu'*en général* u points simples pris au hasard soit dans le plan, soit sur C_m et les points multiples conservés de C_m, chacun avec l'ordre $i-1$, définissent une adjointe apparente C_{m-2} et une seule; ainsi, si u points de C_m définissent non pas *une* mais ∞^r adjointes C_{m-2}, elles coupent C_m suivant une série linéaire de groupes de points g_p^r et il y a exactement, d'après Riemann-Roch, r adjointes (apparentes) de degré $m-3$, linéairement distinctes, passant par un groupe de la série.

Cela posé, séparons $P_1, P_2, \ldots, P_h$ en deux groupes : l'un R composé de p points, l'autre P des $h-p$ restants; *en général*, il n'y a pas d'adjointe (apparente) d'ordre $m-3$ contenant le total R et, s'il en est ainsi, toute courbe C'_q passant aux mêmes points II que C_q avec la même multiplicité et contenant encore les P contient les R : dire le contraire reviendrait en effet à écrire sur C_m le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R & C_q & P \\ C_{m-2} & & C'_q \\ U & C'_{m-2} & R' \end{array}$$

Par les points R passent en effet ∞^{m-2} (ou plus) C_{m-2} adjointes apparentes : C_{m-2} est l'une et donne le groupe U complémentaire; la courbe C'_q a donné le groupe R' non identique à R : les conditions pour le diagramme sont remplies, car en chaque II l'excès de C_q ou C'_q est le même, et celui de C_{m-2} est nul; la courbe C'_{m-2} non seulement existe mais est une adjointe (apparente) : or nous avons vu un peu plus haut que, si les U, qui sont au nombre u, déterminent des adjointes $C_{m-2}, C'_{m-2}, \ldots$ *différentes*, chacune donne un groupe R R',... situé sur une adjointe C_{m-3}, ce qui contredit l'hypothèse.

Si $q<m$, cela entraîne que C_q et C'_q coïncident; si l'on a $q \geqq m$, il est facile de voir que les courbes C_q et C'_q ont ij points communs confondus en chaque point II conservé, si $i \geqq j$, ou j^2 si $i<j$. En effet chaque courbe du faisceau $C_q+\mu C'_q=0$ a en commun avec C_m un total de mq points représentés par les P, R, II où chaque II compte pour ij; il passe une courbe de ce faisceau par chaque point du plan; il suffit de prendre un point nouveau sur C_m pour obtenir une identité

$$C_q \equiv \lambda C'_q + C_m C_{q-m}$$

et d'après cela chaque point II commun à C_q et C'_q compte pour le plus grand des deux nombres ij, j^2.

Si au contraire les R sont sur une courbe C_{m-3}, adjointe apparente, il y a des courbes C'_q contenant les P mais non les R et il n'y a plus aucune raison de contact entre les courbes C_q, C'_q aux points II quand $j<i$.

L'intérêt de la proposition que nous venons d'énoncer est que la courbe C_q, à un degré indéterminé, contient les points II à un degré de multiplicité indéterminé (avec le droit de choisir les points II conservés ou éliminés), et de plus est assujettie, quand les p points R ne sont pas sur une adjointe C_{m-3}, non seulement à contenir les points R mais encore à avoir des *contacts* déterminés aux points II avec d'autres courbes fixes de même espèce, si $j < i$: en effet chaque branche de C_q a $i - j + 1$ points communs avec celle des j branches de C'_q qui lui est tangente, de façon que le point Π compte pour ij et non j^2 dans l'intersection de C_q et C'_q. Il y a lieu de rattacher ce fait aux considérations du paragraphe 17.

Ainsi, supposons que C_m soit une sextique à 9 points doubles : $p = 1$ et les adjointes d'ordre 3 ne coupent plus la courbe C_m; donc, *sans exception possible*, toutes les courbes C_q qui passent aux 9 points doubles de C_6, pris avec la multiplicité 1 sur C_q, et qui coupent C_6 en $6q - 19$ points distincts de $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_9$, non seulement ont un nouveau point commun fixe sur C_6 mais encore sont tangentes entre elles aux points $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_9$: ceci n'a d'intérêt que pour $q \geqq 6$, car $q < 6$ donne une seule courbe C_q. Appliquons à $q = 6$ et opérons de la façon suivante : prenons une cubique γ_3 ne passant en aucun point double de C_6; elle perce C_6 aux points $P_1, P_2, \ldots, P_{17}, P_{18}$. Cherchons les courbes Γ_6 (Γ_6 est mis ici au lieu de C_q) passant aux 26 points *simples* $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_9, P_1, P_2, \ldots, P_{17}$; elles forment un *faisceau;* l'une d'elles se compose de la cubique *unique* C_3 circonscrite à $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_9$ et de la cubique γ_3; donc le nouveau point fixe est P_{18} et d'autre part toutes les sextiques du faisceau sont tangentes entre elles en $\Pi_1, \ldots, \Pi_9$, *donc tangentes à la cubique* C_3 : *les* 9 *points doubles d'une* C_6 *sont donc nécessairement les points de contact d'une cubique et d'une sextique*. Nous avons ainsi rattaché cette proposition d'Halphen à la proposition de Cayley.

28. Nous pouvons encore faire les remarques suivantes : C_m étant donnée, nous avons à notre choix, d'abord les points multiples Π conservés, puis le degré q des courbes à utiliser comme C_q, puis la multiplicité à attribuer en chaque point Π à la courbe C_q. Cette simple remarque permet de généraliser les tableaux T déjà dressés; reprenons par exemple le tableau du paragraphe 12

	$m = 5$		$p = 4$	Π_1, Π_2 doubles		
	F	ϖ	V	P	r	s
conique	0	0	6	11	3	1

Conservons par exemple Π_1 et Π_2 de sorte que le genre et les adjointes de C_m ou C_5 seront le genre effectif, les adjointes effectives. Par V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6 faisons passer en guise de courbe C_q une courbe Γ_5 qui admet Π_1, Π_2 pour points simples; elle coupe C_5 en 15 nouveaux points $P_1, P_2, \ldots, P_{15}$ qui réunis à Π_1, Π_2 comme points simples donnent un groupe de surabondance 1 pour le degré 5 : nous retrouvons l'analogue des applications données au paragraphe 2 du Chapitre I (en particulier de la troisième); si nous considérons les points $P_1, P_2, \ldots, P_{15}$ et V_5, V_6 par exemple, contrairement au cas général de Cayley, les quintiques contenant $P_1, \ldots, P_{15}, V_5, V_6, \Pi_1, \Pi_2$ tous simples ne passent pas en V_1, V_2, V_3, V_4 : c'est cette simple circonstance qui se trouve signalée par Cayley et ses successeurs; je fais remarquer ici, comme dans le précédent Mémoire, qu'il est beaucoup plus intéressant de signaler que si le groupe de points *simples*

$$P_1 \ldots P_{15};\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4,\ V_5,\ V_6;\ \Pi_1,\ \Pi_2 \tag{1}$$

a la surabondance 4 pour le degré 5, le groupe

$$P_1 \ldots P_{15};\ \Pi_1,\ \Pi_2 \tag{2}$$

a la surabondance 1. On remarque d'ailleurs que le groupe (2) est complet, tandis que le groupe (1) est *incomplet :* en effet en Π_1 et Π_2 toutes les quintiques du système ∞^1 obtenu sont tangentes entre elles. Le groupe (2) a été obtenu directement pour $m = 5$, $p = 6$.

29. J'indique, synthétiquement, ce qui arrive quand on étudie les points d'intersection de C_m et C_q, avec les notations précédentes, pour les degrés $q+1$, $q+2$, ...; je suppose d'ailleurs $q \geqq m$. Soit $q+q_1$ le degré étudié : s'il n'existe aucune adjointe (apparente, relative aux points multiples conservés, c'est-à-dire effectivement situés sur C_q) d'ordre $m - q_1 - 3$, le groupe en jeu, formé des points $P_1, P_2, \ldots, P_h$ et des points multiples de C_m conservés, pris avec la multiplicité, qu'ils ont sur C_q, est devenu normal pour le degré $q+q_1$. S'il existe de telles adjointes, d'ordre $m - q_1 - 3$ (ou inférieur) appelons p_1 le nombre de celles qui sont linéairement indépendantes : la surabondance du groupe en jeu est p_1 pour le degré $q+q_1$, de sorte, qu'en général, toute courbe C_{q+q_1} les contenant tous, sauf peut-être p_1 d'entre

eux, contient effectivement même ces p_1 restants. Le seul cas d'exception, où ces p_1 points ne sont pas situés sur C_{q+q_1}, est celui où ces p_1 points sont sur une même adjointe d'ordre $m - q_1 - 3$ (ou inférieur). Il suffit de se reporter au paragraphe 4 du Chapitre II, de mon précédent Mémoire et de considérer le diagramme tracé sur C_m

$$\begin{array}{ccc} P & q & V \\ q+q_1 & & m-q_1-3-\lambda \\ W & m-3-\lambda & F \end{array}$$

Sur la première ligne P et V sont les deux groupes en lesquels sont partagés les points, non multiples, communs à C_q et C_m : on suppose que le groupe V définisse une adjointe $A_{m-q_1-3-\lambda}$, et que, *de plus, le résiduel* F *définisse une adjointe variable* $A_{m-3-\lambda}$; λ est un entier positif ou nul. Le fait que l'adjointe $A_{m-3-\lambda}$ *varie* est essentiel.

Si donc *on suppose que la courbe* C_{q+q_1} *puisse varier de façon qu'elle donne un groupe* W *n'ayant pas de point commun avec* V, on voit que ce *diagramme lu de haut en bas* remplit les conditions voulues pour affirmer que W et F sont sur une même adjointe $A_{m-3-\lambda}$: les excès de C_q et C_{q+q_1} sont en effet égaux en chaque Π et l'excès de $A_{m-q_1-3-\lambda}$ est nul : il est donc *nécessaire* que F définisse une adjointe *variable* $A_{m-3-\lambda}$.

Nous remarquerons, pour la rigueur, que si nous partons de l'hypothèse : *le groupe* V *définit une adjointe* (*fixe ou variable*) $A_{m-q_1-3-\lambda}$ *et le groupe* F *une adjointe variable* $A_{m-3-\lambda}$, nous avons à lire le diagramme précédent de *droite à gauche* et les conditions pour que P et W soient sur une même courbe n'ayant pas d'autre point commun avec C_m en dehors des Π ne sont sûrement remplies que si $j \geqq i - 1$; en effet, on doit prendre l'excès de $A_{m-q_1-3-\lambda}$, c'est-à-dire zéro, et exprimer qu'il est au plus égal à la somme des excès de $A_{m-3-\lambda}$ (c'est-à-dire zéro) et de C_q : il faut donc que l'excès de C_q soit nul ou positif.

La condition trouvée pour l'exception (p_1 points situés sur une adjointe d'ordre $m - q_1 - 3$) est donc *nécessaire* quel que soit j; *elle est nécessaire et suffisante si* $j \geqq i - 1$.

Je cite un exemple simple : $m = 7$, $p = 5$; si la courbe a 10 points doubles seulement, nous les conservons; si la courbe a d'autres points doubles, nous les supprimons. Coupons par une courbe C_q, où q est un entier $\geqq 7$; C_q admet $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{10}$ comme points simples. Il y a

$7q - 20$ points P, dont 5 surabondants pour le degré q : si l'on raisonne sur la courbe C_7, j'entends par là que ces points sont surabondants sur la courbe C_7, mais si l'on porte son attention sur les diverses courbes C_q et non seulement sur leurs intersections avec C_7, on constate que les C_q sont toutes tangentes entre elles aux divers points Π. Maintenant deux hypothèses sont à distinguer pour le degré $q+1$: ou bien les Π ne sont pas sur une cubique, et alors les P forment (avec $\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$) un groupe normal pour le degré $q+1$ ([1]); ou bien les Π sont sur une même cubique et alors les P forment avec $\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$ un groupe anormal de surabondance 1 pour le degré $q+1$; il y a donc cette fois une cubique adjointe, qui perce C_7 en α; il y a deux subdivisions à considérer : le point α n'est pas l'un des P ou α est l'un d'eux. Dans la première hypothèse, il n'y a rien à modifier à la proposition de Cayley : toutes les C_{q+1} qui contiennent tous les P, sauf peut-être l'un d'eux pris au hasard, contiennent effectivement le dernier point P et sont tangentes entre elles aux divers points Π; dans le second cas, il y a des C_{q+1} qui contiennent tous les points P, sauf α, et alors elles ne sont plus tangentes entre elles aux points Π; mais celles qui contiennent tous les P à l'exclusion de l'un, autre que α, continuent à contenir même le dernier et sont tangentes entre elles aux points Π. Dans cet exemple il faut bien remarquer que si nous raisonnons pour le degré q ou $q+1$, abstraction faite de C_7, nous avons un groupe de $7q$ points tous simples, dont 2 sont confondus en Π_1, 2 en Π_2, ..., 2 en Π_{10} : ce groupe a la surabondance 15 pour le degré q et 10 pour le degré $q+1$, et c'est ce qui explique les contacts des courbes C_q ou C_{q+1} aux points Π. La proposition de Cayley ne nous fait considérer que la trace de ce groupe sur C_7, à l'exclusion des Π, et c'est ce qui réduit la surabondance à 5 ou 0.

30. *Détermination de ceux des points d'un groupe surabondant qui peuvent être marqués* a priori. — Lorsque l'on a indiqué la disposition d'un groupe anormal complet $\Pi_1, \ldots, \Pi_k, P_1, \ldots, P_h$ et sa surabon-

---

([1]) Il faut entendre que $\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$ sont donnés comme simples à la fois sur chaque courbe C_{q+1} et dans l'intersection de deux telles courbes : mais alors, pour le degré $q+1$ le groupe est bien normal, mais *incomplet :* les courbes C_{q+1} se trouvent toutes tangentes entre elles aux points $\Pi_1, \ldots, \Pi_{10}$ et même tangentes aux courbes C_q.

dance s, il y a à indiquer ceux de ces points que l'on peut marquer arbitrairement dans le plan vierge. Pour résoudre cette question, il y a d'abord à voir si ce groupe n'est pas anormal pour un degré *inférieur*, auquel cas sa surabondance *augmente effectivement*, en même temps que le groupe a pu devenir *incomplet* : il y a donc lieu de remonter au degré minimum, en complétant le groupe s'il y a lieu. Supposons donc cette opération effectuée; il faut maintenant chercher le degré minimum des courbes contenant le groupe (ce qui est donné d'ailleurs par la recherche indiquée à l'instant); s'il y a une *seule* courbe de degré minimum, on est ramené à un problème de géométrie algébrique sur cette courbe : on trouve en général aisément ceux des points qui peuvent être marqués arbitrairement sur la courbe et les autres ont ou bien un nombre fini ou un nombre infini de configurations; la géométrie dans l'espace rend souvent la discussion aisée : par exemple, l'étude des surfaces de degré 4 avec une droite double, faite au paragraphe 5 et les groupes surabondants pour le degré 4 avec un point Π_1 double et 10 points $P_1, \ldots, P_{10}$ simples. Ou bien il y a ∞^{r+1} courbes de degré minimum : les décomptes analogues à ceux que j'ai expliqués dans mon précédent Mémoire permettent encore de trouver ceux des points que l'on peut marquer arbitrairement et d'étudier les configurations en nombre fini ou infini présentées par les autres.