ERVAND KOGBETLIANTZ

Sur la sommation des séries divergentes par les moyennes simples et doubles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 42 (1925), p. 193-216
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1925_3_42__193_0>

SUR

LA SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES

PAR

LES MOYENNES SIMPLES ET DOUBLES

PAR M. KOGBETLIANTZ

(Paris)

Le germe de la théorie de sommation des séries divergentes qui a pris, ces derniers vingt ans, un si rapide et si vaste développement, et qui est devenue maintenant une branche importante de l'Analyse, se trouve déjà dans les travaux de d'Alembert, qui datent de 1768.

On y trouve notamment (1) le calcul de la moyenne ordinaire des sommes partielles de la série divergente bien connue

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos n\theta + \ldots$$

et la réflexion suivante qui suit le calcul : « En effet, cette somme $-\frac{1}{2}$, moyenne entre toutes les sommes partielles, n'est pas pour cela la vraie somme de la suite; c'est seulement la quantité moyenne entre toutes les sommes que la suite peut avoir. »

La même valeur $-\frac{1}{2}$ pour la moyenne de toutes les sommes possibles que peut avoir la série en question, a été retrouvée 136 ans plus tard par M. L. Féjèr, qui l'a prise comme point de départ de ses belles recherches sur la sommation des séries trigonométriques de Fourier (2).

(1) *Opusc. mathém.*, t. 4, 1768 (25e Mémoire), p. 151-160.

(2) *Math. Annalen*, t. 58, 1904, p. 51-69.

Ainsi le génie de d'Alembert posa d'une façon nette la question qui ne devait être reprise que plus d'un siècle après.

Ce fait intéressant s'explique sans aucun doute par la claire distinction que faisait d'Alembert entre les séries divergentes et convergentes, devançant en cela aussi ses contemporains. Il dit par exemple [1] : « Pour moi, j'avoue que tous les raisonnements et les calculs fondés sur des séries qui ne sont pas convergentes ou qu'on peut supposer ne pas l'être, me paroîtront toujours très suspects. »

Cette idée de formation de la moyenne des sommes partielles des séries divergentes paraît être complètement oubliée après d'Alembert et ne réapparaît qu'en 1879 chez G. Frobenius [2] qui considéra le premier

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}}{n}$$

et a fait voir que, si elle existe, elle ne diffère pas de la limite

$$\lim_{x=1} \sum_0^\infty u_n x^n.$$

Mais bientôt après, en 1882, cette idée fut reprise et développée par M. O. Hölder [3] et indépendamment de lui par M. Cesàro qui, le premier, a proclamé l'utilité des séries divergentes sommables dans les termes suivants [4] : « On peut parfaitement bien se servir des séries indéterminées dans les calculs, quoi qu'en pensent la plupart des géomètres. Après tout, n'est-ce pas en vertu d'une convention que les séries convergentes, prises sous leur forme indéfinie, interviennent dans les calculs ? »

M. O. Hölder définit les moyennes arithmétiques d'ordre entier ainsi :

$$h_n^{(1)} = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

et en général

$$h_n^{(K+1)} = \frac{h_0^{(K)} + h_1^{(K)} + \ldots + h_n^{(K)}}{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

(1) *Opusc. Mathém.*, t. 5, 1768 (35e Mémoire), p. 183.
(2) *Journal für Math.*, t. 89, 1880, p. 262-264.
(3) *Math. Annalen*, t. 20, 1882, p. 535-549.
(4) *Bulletin des Sciences math.*, 2e série, t. 14, 1890, p. 114-120.

La série est dite sommable par les moyennes d'ordre $k = E(k)$ de M. Hölder, bref sommable (H, k) avec la somme s, si la limite

$$\lim_{n=\infty} h_n^{(k)} = s$$

existe. Dans son Mémoire cité plus haut, M. Hölder a sommé ([1]) à titre d'exemple la série divergente

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{4} \sim 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 \ldots + (-1)^n (n+1) + \ldots$$

pour laquelle il a obtenu $\lim\limits_{n=\infty} h_n^{(2)} = \frac{1}{4}$.

La définition de M. E. Cesàro ([2]) est un peu différente de celle de M. Hölder. Désignons ses moyennes par $s_n^{(k)}$. On a $s_n^{(1)} = h_n^{(1)}$, mais pour former les moyennes d'ordre supérieur, M. Cesàro introduit les σ — sommes suivantes :

$$\sigma_n^{(0)} = s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

et en général

$$\sigma_n^{(k+1)} = \sigma_0^{(k)} + \sigma_1^{(k)} + \sigma_2^{(k)} + \ldots + \sigma_n^{(k)}.$$

La $n^{\text{ième}}$ σ — somme d'ordre k — $\sigma_n^{(k)}$ — contient $\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}{1.2.3\ldots k}$ sommes partielles de la série, d'où la définition

$$s_n^{(k)} = \frac{1.2.3\ldots k.\sigma_n^{(k)}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} = \frac{\sigma_n^{(k)}}{A_n^{(k)}}.$$

$A_n^{(\delta)}$ désigne le coefficient de z^n dans la série de Maclaurin de la fonction $(1-z)^{-(1+\delta)}$. Si l'on pose $S(z) = \sum\limits_0^\infty s_n z^n$, on a

$$\sum_0^\infty \sigma_n^{(k)} z^n = \frac{S(z)}{(1-z)^k} = \left[\sum_0^\infty s_n z^n\right]\left[\sum_0^\infty A_n^{(k-1)} z^n\right] = \left[\sum_0^\infty u_n z^n\right]\left[\sum_0^\infty A_n^{(k)} z^n\right],$$

d'où aussi

$$\text{(2)} \quad \sigma_n^{(k)} = \sum_{m=0}^n A_{n-m}^{(k-1)}.s_m = A_n^{(k-1)}.s_0 + A_{n-1}^{(k-1)}.s_1 + \ldots + A_1^{(k-1)}.s_{n-1} + A_0^{(k-1)}.s_n$$

([1]) *Math. Annalen*, t. 20, 1882, p. 548, § 17.
([2]) *Loc. cit.*

ou bien

$$(3)\quad \sigma_n^{(k)} = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(k)} . u_m = A_n^{(k)} . u_0 + A_{n-1}^{(k-1)} . u_1 + \ldots + A_k^{(k)} . u_{n-1} + A_0^{(k)} . u_n.$$

La série est dite sommable par les moyennes d'ordre k de M. Cesàro, bref sommable (C, k) avec la somme s, si la limite $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(k)} = s$ existe.

Il est bien connu que ces deux définitions de la sommabilité d'une série divergente par les moyennes arithmétiques d'ordre entier k, (H, k) et (C, k), sont équivalentes en ce sens qu'une série sommable (C, k) avec la somme s l'est aussi (H, k) avec la même somme et *vice versa*. Il existe plusieurs démonstrations de ce théorème d'équivalence [1] que nous exprimons ainsi :

$$(4)\qquad (\mathrm{H}, k) \sim (\mathrm{C}, k) \qquad [k = \mathrm{E}(k)].$$

La méthode (H, k) n'est que l'application de la méthode (C, 1) répétée k fois de suite. Donc $(\mathrm{H}, k) = (\mathrm{C}, 1)^k$, et (4) n'exprime en réalité que la propriété suivante des moyennes de Cesàro d'ordre entier

$$(5)\qquad (\mathrm{C}, 1)^k \sim (\mathrm{C}, k) \qquad [k = \mathrm{E}(k)].$$

On trouve ci-dessous une nouvelle démonstration de ce théorème d'équivalence qui le rattache à une propriété beaucoup plus générale des moyennes de Cesàro d'ordre quelconque, entier ou non entier.

On a depuis longtemps généralisé la méthode (C, k) en envisageant [2] aussi les moyennes $s_n^{(\delta)}$ d'ordre non entier δ quelconque mais supérieur à -1. Pour les définir, il suffit de remplacer k par δ dans (2) ou (3) et de poser $s_n^{(\delta)} = \dfrac{\sigma_n^{(\delta)}}{A_n^{(\delta)}}$ quel que soit $\delta > -1$.

---

(1) K. Knopp, *Dissertation*, Berlin, 1907. — W. Schnee, *Math. Ann.*, t. 67, 1909, p. 110-125. — W.-B. Ford, *Amer. Jour. of Math.*, t. 32, 1910, p. 315-326. — B. Otto-Lenghi, Padua, 1911. — G. Faber, *Münch. Ber.*, t. 43, 1913, p. 519-531. — J. Schur et K. Knopp, *Math. Ann.*, t. 74, 1913, p. 447-461. — M. Watanabe, *Tôhoku Math. Journ.*, t. 5, 1914, p. 21-28.

(2) J. Hadamard, *Journ. de Math.*, 4e série, t. 8, 1892, p. 101-186. — K. Knopp, *Dissertation*, Berlin, 1907. Aussi *Sitzber. Berl. Mat. Ges.*, 1907, et *Archiv. f. Math. und Ph.*, t. 12. — S. Chapman, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2e série, t. 9, 1910, p. 369-409.

La propriété des moyennes $s_n^{(\delta)}$ qui généralise le théorème (5) peut être exprimée ainsi :

$$(6) \qquad (C, \delta).(C, \gamma) \sim (C, \gamma+\delta) \sim (C, \gamma).(C, \delta),$$

où $(C, \delta).(C, \gamma)$ désigne le procédé de sommation à l'aide des moyennes doubles, c'est-à-dire à l'aide des moyennes d'ordre γ formées des moyennes d'ordre δ.

Il est facile d'établir (5), si l'on suppose démontré le cas particulier $\delta = k = E(k)$ et $\gamma = 1$ de (6). Soit donc

$$(7) \qquad (C, k)(C, 1) \sim (C, k+1) \sim (C, 1)(C, k)$$

valable. On a pour $k=1$ $(C, 2) \sim (C, 1)^2$; puis on en déduit

$$(C, 3) \sim (C, 1)(C, 2) \sim (C, 1)(C, 1)^2 = (C, 1)^3$$

et *vice versa :*

$$(C, 1)^3 = (C, 1)(C, 1)^2 \sim (C, 1)(C, 2) \sim (C, 3).$$

Supposons (5) vérifiée pour $k \leqq m$; alors on a, en s'appuyant toujours sur (7) :

$$(C, 1)^{m+1} = (C, 1)(C, 1)^m \sim (C, 1)(C, m) \sim (C, m+1)$$

et *vice versa*. Or (5) est vérifiée pour $k \leqq 3$, donc le théorème d'équivalence se trouve démontré, si l'on suppose (7) établi. La conclusion inverse serait inexacte : on ne peut déduire de (5) que le corollaire suivant :

$$(C, m+1) \sim (C, 1)(C, m),$$

mais les équivalences

$$(C, m+1) \sim (C, m)(C, 1)$$

ou bien

$$(C, 1)(C, m) \sim (C, m)(C, 1)$$

ne peuvent pas être déduites du théorème V.

Donc (7) et *a fortiori* (6) expriment une propriété plus générale des moyennes de Cesàro que celle exprimée par le théorème d'équivalence. Cette propriété peut être formulée ainsi [1] :

Théorème I. — « *La série divergente sommable* $(C, \gamma+\delta)$, *où* $\delta > 0$

[1] E. Kogbetliantz, *Comptes rendus*, t. 176, 1923, p. 224-227.

et $\gamma > 0$, *est aussi sommable avec la même somme par l'application du procédé* (C, δ) *aux moyennes arithmétiques d'ordre* γ [*ou du procédé* (C, γ) *aux moyennes d'ordre* δ] *et* vice versa : *la série sommable par la double application du procédé de Cesàro d'ordre* $\delta > 0$ *et puis d'ordre* $\gamma > 0$ *est aussi sommable* $(C, \gamma + \delta)$ *avec la même somme.* »

Le théorème énoncé est démontré au paragraphe 1. On sait que les moyennes de Cesàro sont équivalentes aux moyennes typiques de M. Riesz du type particulier $\lambda(x) \equiv x$. Il est naturel de demander si le théorème I a son analogue dans le domaine des moyennes de M. Riesz du type $\lambda(x) \equiv x$ ou même du type général λ quelconque ?

M. Riesz définit [1] les moyennes typiques à l'aide des σ — sommes typiques ainsi : soit $\lambda(x)$ une fonction constamment croissante, positive et telle que $\lim\limits_{x=\infty} \lambda(x) = \infty$. Désignons $\lambda(m) = \lambda_m$ et posons

$$\sigma_\lambda^{(\delta)}(\omega) = \sum_{m=0}^{\lambda_m < \omega} (\omega - \lambda_m)^\delta u_m,$$

où le paramètre discontinu n est remplacé par le paramètre continu ω et où la sommation s'étend à toutes les valeurs de m pour lesquelles λ_m reste inférieur à ω. Dans cette définition $(\omega - \lambda_m)^\delta$, qui croît avec ω comme

$$\frac{\Gamma(\omega - \lambda_m + \delta + 1)}{\Gamma(\omega - \lambda_m + 1)},$$

remplace le facteur

$$\Gamma(1 + \delta) A_{n-m}^{(\delta)} = \frac{\Gamma(n - m + \delta + 1)}{\Gamma(n - m + 1)}$$

qu'on rencontre dans l'expression (3) des σ — sommes ordinaires d'ordre δ. La moyenne typique $s_\lambda^{(\delta)}(\omega)$ est par définition le produit $s_\lambda^{(\delta)}(\omega) = \omega^{-\delta} \sigma_\lambda^{(\delta)}(\omega)$ et si sa limite $\lim\limits_{\omega=\infty} s_\lambda^{(\delta)}(\omega) = s$ existe la série est dite sommable par les moyennes typiques de M. Riesz du type λ et de l'ordre δ, bref sommable (R, λ, δ) avec la somme s.

M. Riesz a établi [2] l'équivalence complète de ses moyennes de

---

(1) M. Riesz, *Comptes rendus*, t. 149, séance du 22 novembre 1909, p. 909-912.

(2) M. Riesz, *Comptes rendus*, t. 152, séance du 12 juin 1911, p. 1651-1654.

type $\lambda_n = n[\lambda(x) \equiv x]$ avec les moyennes arithmétiques de Cesàro :

$$(\mathrm{R}, n, \delta) \sim (\mathrm{C}, \delta).$$

La question posée plus haut, à savoir si l'on a

$$(\mathrm{R}, \lambda, \gamma)(\mathrm{R}, \lambda, \delta) \sim (\mathrm{R}, \lambda, \gamma+\delta) \sim (\mathrm{R}, \lambda, \delta)(\mathrm{R}, \lambda, \gamma) \tag{8}$$

est résolue (¹) affirmativement et le théorème :

Théorème II. — « *La série divergente sommable* $(\mathrm{R}, \lambda, \gamma+\delta)$ *où* δ *et* γ *sont positifs, est aussi sommable avec la même somme par l'application du procédé* $(\mathrm{R}, \lambda, \delta)$ *aux moyennes typiques d'ordre* γ [*ou du procédé* $(\mathrm{R}, \lambda, \gamma)$ *aux moyennes d'ordre* δ] *et* vice versa : *la série sommable* $(\mathrm{R}, \lambda, \delta)(\mathrm{R}, \lambda, \gamma)$ *l'est aussi* $(\mathrm{R}, \lambda, \gamma+\delta)$ *avec la même somme* », est démontré au paragraphe 3. Il est facile d'en déduire le corollaire suivant qui se rapporte aux moyennes typiques d'ordre entier k :

$$(\mathrm{R}, \lambda, 1)^k \sim (\mathrm{R}, \lambda, k) \qquad [k = \mathrm{E}(k)]. \tag{9}$$

En effet,

$$(\mathrm{R}, \lambda, 1)^2 \sim (\mathrm{R}, \lambda, 2) \sim (\mathrm{R}, \lambda, 1)^2.$$

Supposons (9) vérifiée pour $k = m$. On a

$$(\mathrm{R}, \lambda, m+1) \sim (\mathrm{R}, \lambda, 1)(\mathrm{R}, \lambda, m) \sim (\mathrm{R}, \lambda, 1)(\mathrm{R}, \lambda, 1)^m = (\mathrm{R}, \lambda, 1)^{m+1}$$

et *vice versa*, ce qui prouve (9) pour $k = m+1$. Or l'équivalence (9) est vérifiée pour $k = 2$; donc elle est valable quel que soit k.

En comparant (6) et (8) on voit qu'on a aussi les corollaires suivants :

$$\begin{aligned}(\mathrm{R}, n, \gamma)(\mathrm{R}, n, \delta) &\sim (\mathrm{C}, \gamma)(\mathrm{C}, \delta) \sim (\mathrm{R}, n, \gamma)(\mathrm{C}, \delta)\\ &\sim (\mathrm{C}, \delta)(\mathrm{R}, n, \gamma) \sim (\mathrm{C}, \gamma)(\mathrm{R}, n, \delta) \sim (\mathrm{R}, n, \delta)(\mathrm{C}, \gamma).\end{aligned}$$

1. Pour démontrer le théorème I, nous développons la moyenne double d'ordres δ, γ — $\mathrm{S}_{\mathrm{N}}^{(\gamma,\delta)}$ — suivant les moyennes simples d'ordres non inférieurs à $\gamma+\delta$ et inversement la moyenne simple $s_{\mathrm{N}}^{(\gamma+\delta)}$ suivant les moyennes doubles d'ordres δ et $n+\gamma$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$.

La moyenne double d'ordre γ — $\mathrm{S}_{\mathrm{N}}^{(\gamma,\delta)}$ — est définie à l'aide de σ — somme double d'ordre γ — $\sigma_{\mathrm{N}}^{(\gamma,\delta)}$ — formée des moyennes simples

(¹) E. Kogbetliantz, *Comptes rendus*, t. 168, séance du 2 juin 1919, p. 1090.

d'ordre δ :

$$\sigma_N^{(\gamma,\delta)} = \sum_{m=0}^{N} A_{N-m}^{(\gamma-1)} s_m^{(\delta)} = \sum_{m=0}^{N} \sum_{i=0}^{m} \frac{A_{N-m}^{(\gamma-1)} A_{m-i}^{(\delta-1)}}{A_m^{(\delta)}} s_i$$

$$S_N^{(\gamma,\delta)} = \frac{\sigma_N^{(\gamma,\delta)}}{A_N^{(\gamma)}}.$$

Posons

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n, \qquad S^{(\delta)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(\delta)} z^n \qquad \text{et} \qquad S^{(\gamma,\delta)}(z) = \sum_{N=0}^{\infty} S_N^{(\gamma,\delta)} z^N.$$

On a

$$\frac{S(z)}{(1-z)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(\lambda)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\lambda)} s_n^{(\lambda)} z^n.$$

Prenons la dérivée d'ordre $-\lambda$ de deux membres, la dérivation à indice quelconque $-\lambda$ ($\lambda > 0$) étant définie par

$$\Gamma(\lambda)\, D^{-\lambda} f(z) = \int_0^z f(\alpha)(z-\alpha)^{\lambda-1}\, d\alpha \qquad (\lambda > 0).$$

L'opération $D^{-\lambda}$ transforme z^n en $\dfrac{z^{n+\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)\, A_n^{(\lambda)}}$ et l'on obtient

$$\frac{z^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(\lambda)} z^n = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z \frac{S(\alpha)(z-\alpha)^{\lambda-1}\, d\alpha}{(1-\alpha)^\lambda},$$

d'où la relation

$$S^{(\lambda)}(z) = \lambda z^{-\lambda} \int_0^z \frac{S(\alpha)(z-\alpha)^{\lambda-1}\, d\alpha}{(1-\alpha)^\lambda} \qquad (\lambda > 0). \tag{10}$$

De même en appliquant l'opération $D^{-\gamma}$ à la fonction

$$\frac{S^{(\delta)}(z)}{(1-z)^\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(\gamma,\delta)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\gamma)} S_n^{(\gamma,\delta)} z^n,$$

on obtient

$$S^{(\gamma,\delta)}(z) = \gamma z^{-\gamma} \int_0^z \frac{S^{(\delta)}(x)(z-x)^{\gamma-1}\, dx}{(1-x)^\gamma} \qquad (\gamma > 0). \tag{11}$$

En y substituant à la place de $S^{(\delta)}(x)$ son expression (10), on a

$$S^{(\gamma,\delta)}(z) = \gamma\delta z^{-\gamma}\int_0^z \frac{(z-x)^{\gamma-1}\,dx}{x^{\delta}(1-x)^{\gamma}}\int_0^x \frac{S(\alpha)(x-\alpha)^{\delta-1}\,d\alpha}{(1-\alpha)^{\delta}}$$
$$= \gamma\delta z^{-\gamma}\int_0^z \frac{S(\alpha)\,d\alpha}{(1-\alpha)^{\delta}}\int_\alpha^z \frac{(z-x)^{\gamma-1}(x-\alpha)^{\delta-1}\,dx}{x^{\delta}(1-x)^{\gamma}}.$$

Or

$$\frac{1}{(1-x)^{\gamma}} = [1-\alpha-(x-\alpha)]^{-\gamma} = (1-\alpha)^{-\gamma}\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(\gamma-1)}\left(\frac{x-\alpha}{1-\alpha}\right)^m,$$
$$\frac{1}{x^{\delta}} = [z-(z-x)]^{-\delta} = z^{-\delta}\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\delta-1)}\left(\frac{z-x}{z}\right)^n,$$

donc

$$\int_\alpha^z \frac{(z-x)^{\gamma-1}(x-\alpha)^{\delta-1}\,dx}{x^{\delta}(1-x)^{\gamma}}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_m^{(\gamma-1)} A_n^{(\delta-1)} z^{-(n+\delta)}(1-\alpha)^{-(m+\gamma)}\int_\alpha^z (z-x)^{n+\gamma-1}(x-\alpha)^{m+\delta-1}\,dx$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+\gamma)\,\Gamma(n+\delta)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(\delta)}$$
$$\times\left(\frac{z-\alpha}{z}\right)^{n+\delta}\left(\frac{z-\alpha}{1-\alpha}\right)^{m+\gamma}\frac{1}{z-\alpha}\int_0^1 (1-t)^{n+\gamma-1}t^{m+\delta-1}\,dt,$$

comme on le voit, en substituant $x = \alpha + t(z-\alpha)$.

La convergence absolue et uniforme de la série double est assurée, si $0 \leqq z < 1$ puisque alors on a $\frac{z-\alpha}{1-\alpha} < 1$, $\frac{z-\alpha}{z} < 1$ et elle converge uniformément dans l'intervalle $0 \leqq \alpha \leqq z$. Par conséquent,

$$S^{(\gamma,\delta)}(z) = \gamma\delta\sum_0^{\infty}\sum_0^{\infty} c_{mn}^{(\gamma,\delta)} z^{-(n+\gamma+\delta)}\int_0^z \frac{S(\alpha)(z-\alpha)^{m+n+\gamma+\delta-1}\,d\alpha}{(1-\alpha)^{m+\gamma+\delta}},$$

où

$$c_{mn}^{(\gamma,\delta)}\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\delta)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+n+\gamma+\delta)$$
$$= \Gamma(m+\gamma)\,\Gamma(m+\delta)\,\Gamma(n+\gamma)\,\Gamma(n+\delta).$$

En appliquant aux deux membres de l'identité

$$\frac{S(z)}{(1-z)^{m+\gamma+\delta}} = \sum_{i=0}^{\infty}\sigma_i^{(m+\gamma+\delta)} z^i = \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(m+\gamma+\delta)} s_i^{(m+\gamma+\delta)}.z^i$$

l'opération $D^{-\lambda}$ pour $\lambda = m + n + \gamma + \delta$, on obtient

$$(m+n+\gamma+\delta)\, z^{-(n+\gamma+\delta)} \int_0^z \frac{S(\alpha)\,(z-\alpha)^{m+n+\gamma+\delta-1}\,d\alpha}{(1-\alpha)^{m+\gamma+\delta}}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_i^{(m+\gamma+\delta)} S_i^{(m+\gamma+\delta)}}{A_i^{(m+n+\gamma+\delta)}} z^{m+i}$$

et par conséquent

$$S^{(\gamma,\delta)}(z) = \gamma\delta \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}$$
$$\times \frac{\Gamma(m+\gamma)\,\Gamma(m+\delta)\,\Gamma(n+\gamma)\,\Gamma(n+\delta)\,\Gamma(m+i+\gamma+\delta+1)\, s_i^{(m+\gamma+\delta)}}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\delta)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\gamma+\delta+1)\,\Gamma(m+n+i+\gamma+\delta+1)} z^{m+i}$$

En faisant la sommation par rapport à n on trouve facilement

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\gamma)\,\Gamma(n+\delta)\,\Gamma(m+i+\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\delta)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+m+i+\gamma+\delta+1)} = F(\gamma,\delta, m+i+\gamma+\delta+1, 1)$$

où F désigne la fonction hypergéométrique. Donc on a

$$S^{(\gamma,\delta)}(z) = \gamma\delta \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(\gamma,\delta, m+i+\gamma+\delta+1, 1)}{F(\gamma,\delta, m+\gamma+\delta+1, 1)} \frac{s_i^{(m+\gamma+\delta)}}{(m+\gamma)(m+\delta)} z^{m+i}$$

vu que

$$\frac{\Gamma(m+\gamma)\,\Gamma(m+\delta)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\gamma+\delta+1)} = \frac{1}{(m+\gamma)(m+\delta)} \frac{1}{F(\gamma,\delta, m+\gamma+\delta+1, 1)}.$$

En groupant les termes avec le même exposant $N = m + i$ de z, on obtient finalement

$$\sum_{=0}^{\infty} z^N S_N^{(\gamma,\delta)} = S^{(\gamma,\delta)}(z) = \gamma\delta \sum_{N=0}^{\infty} z^N \left\{ \sum_{m=0}^{N} \frac{F(\gamma,\delta, N+\gamma+\delta+1, 1)}{F(\gamma,\delta, m+\gamma+\delta+1, 1)} \frac{s_{N-m}^{(m+\gamma+\delta)}}{(m+\gamma)(m+\delta)} \right\},$$

d'où le développement cherché

$$(12)\qquad S_N^{(\gamma,\delta)} = \gamma\delta \sum_{m=}^{N} \frac{F(\gamma,\delta, N+\gamma+\delta+1, 1)}{F(\gamma,\delta, m+\gamma+\delta+1, 1)} \frac{s_{N-m}^{(m+\gamma+\delta)}}{(m+\gamma)(m+\delta)}.$$

On remarque que le second membre est symétrique en γ et δ, ce qui prouve que $S_N^{(\gamma,\delta)}$ ne diffère pas de $S_N^{(\delta,\gamma)}$, c'est-à-dire *les moyennes arithmétiques d'ordre γ des moyennes d'ordre δ sont exactement les mêmes que les moyennes d'ordre δ des moyennes d'ordre γ*. Fait curieux et qui n'est nullement évident *a priori*.

Passons maintenant au développement de la moyenne simple $s_N^{(\gamma+\delta)}$ suivant les moyennes doubles $S_N^{(n+\gamma,\delta)}$ d'ordre $n+\gamma$ $(n=0,\ 1,\ \ldots,\ \infty)$ formées des moyennes d'ordre δ. La formule (10) nous donne pour $\lambda=\gamma+\delta$

$$(13)\qquad S^{(\gamma+\delta)}(z)=(\gamma+\delta)\,z^{-(\gamma+\delta)}\int_0^z\frac{S(\alpha)\,(z-\alpha)^{\gamma+\delta-1}\,d\alpha}{(1-\alpha)^{\gamma+\delta}}\qquad(\gamma+\delta>0).$$

Supposons d'abord $\gamma>0>\delta>-1$ et $\gamma+\delta>0$ et appliquons l'opération D^δ à l'identité

$$z^\delta\,S^{(\delta)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}s_n^{(\delta)}\,z^{n+\delta}\qquad(-1<\delta<0).$$

L'opération D^δ transforme $z^{n+\delta}$ en $\Gamma(1+\delta)\,A_n^{(\delta)}z^n$ et l'on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1+\delta)}\,\frac{1}{\Gamma(-\delta)}\int_0^z\frac{\alpha^\delta\,S^{(\delta)}(\alpha)\,d\alpha}{(z-\alpha)^{1+\delta}}&=\frac{1}{\Gamma(1+\delta)}\,D^\delta\{z^\delta\,S^{(\delta)}(z)\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(\delta)}\,S_n^{(\delta)}\,z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(\delta)}.z^n,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{S(z)}{(1-z)^\delta}=\frac{1}{\Gamma(1+\delta)\,\Gamma(-\delta)}\int_0^z\frac{\alpha^\delta\,S^{(\delta)}(\alpha)\,d\alpha}{(z-\alpha)^{1+\delta}}\qquad(-1<\delta<0).$$

En substituant cette expression de $(1-\alpha)^{-\delta}S(\alpha)$ dans (13), on obtient

$$\begin{aligned}S^{(\gamma+\delta)}(z)&=\frac{(\gamma+\delta)\,z^{-(\gamma+\delta)}}{\Gamma(1+\delta)\,\Gamma(-\delta)}\int_0^z\frac{(z-\alpha)^{\gamma+\delta-1}\,d\alpha}{(1-\alpha)^\gamma}\int_0^\alpha\frac{x^\delta S^{(\delta)}(x)\,dx}{(\alpha-x)^{1+\delta}}\\&=\frac{(\gamma+\delta)\,z^{-(\delta+\delta)}}{\Gamma(1+\delta)\,\Gamma(-\delta)}\int_0^z x^\delta S^{(\delta)}(x)\,dx\int_x^z\frac{(z-\alpha)^{\gamma+\delta-1}\,d\alpha}{(1-\alpha)^\gamma\,(\alpha-x)^{1+\delta}}.\end{aligned}$$

Or la substitution $\alpha = x + t(z - x)$ donne

$$\frac{1}{\Gamma(-\delta)}\int_x^z \frac{(z-\alpha)^{\gamma+\delta-1}\,d\alpha}{(1-\alpha)^\gamma(\alpha-x)^{1+\delta}} = \frac{\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\gamma)}\frac{(z-x)^{\gamma-1}}{(1-x)^\gamma}\left(1-\frac{z-x}{1-x}\right)^\delta$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\gamma)}\frac{(1-z)^\delta(z-x)^{\gamma-1}}{(1-x)^{\gamma+\delta}} \qquad (-1<\delta<0),$$

d'où la formule, établie jusqu'ici seulement pour $\gamma+\delta>0$ et $\gamma>0>\delta>-1$:

$$(14)\qquad S^{(\gamma+\delta)}(z) = \frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1+\delta)}z^{-(\gamma+\delta)}(1-z)^\delta\int_0^z \frac{x^\delta S^{(\delta)}(x)\,(z-x)^{\gamma-1}\,dx}{(1-x)^{\gamma+\delta}}.$$

Mais il est facile de vérifier que cette formule est valable quels que soient $\delta>-1$ et $\gamma>0$. On a

$$x^\delta S^{(\delta)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i^{(\delta)}\,x^{i+\delta},$$

donc

$$(1-z)^\delta\int_0^z \frac{x^\delta S^{(\delta)}(x)(z-x)^{\gamma-1}\,dx}{(1-x)^{\gamma+\delta}} = \sum_{i=0}^{\infty} s_i^{(\delta)}(1-z)^\delta\int_0^z\frac{x^{i+\delta}(z-x)^{\gamma-1}\,dx}{(1-x)^{\gamma+\delta}}.$$

Or, en posant $x = tz$, on a

$$(1-z)^\delta\int_0^z\frac{x^{i+\delta}(z-x)^{\gamma-1}\,dx}{(1-x)^{\gamma+\delta}} = z^{i+\gamma+\delta}(i-z)^\delta\int_0^1\frac{t^{i+\delta}(1-t)^{\gamma-1}\,dt}{(1-zt)^{\gamma+\delta}}$$
$$= \frac{\Gamma(i+\delta+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(i+\gamma+\delta+1)}z^{i+\gamma+\delta}(1-z)^\delta F(\gamma+\delta,\, i+\delta+1,\, i+\gamma+\delta+1,\, z)$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\delta)\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\gamma+\delta+1)}A_i^{(\delta)}z^{i+\gamma+\delta}F(i+1,\,\gamma,\, i+\gamma+\delta+1,\, z).$$

Il vient par conséquent en désignant le second membre de (14) par $\Psi(z)$ et en développant la fonction hypergéométrique en série

$$\Psi(z) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\gamma+\delta+1)}A_i^{(\delta)}s_i^{(\delta)}z^i F(i+1,\,\gamma,\, i+\gamma+\delta+1,\, z)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)\,\Gamma(i+j+1)\,\Gamma(j+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(i+j+\gamma+\delta+1)\,\Gamma(j+1)}\sigma_i^{(\delta)}z^{i+j}.$$

Or $\dfrac{\Gamma(j+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(j+1)} = A_j^{(\gamma-1)}$ et en groupant les termes avec le même exposant $n = i + j$ de z, on obtient

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\gamma+\delta+1)} \sum_{i=0}^{n} A_{n-i}^{(\gamma-1)} \sigma_i^{(\delta)}.$$

Mais

$$\sum_{i=0}^{n} A_{n-i}^{(\gamma-1)} \sigma_i^{(\delta)} = \sigma_n^{(\gamma+\delta)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\gamma+\delta+1)} = \frac{1}{A_n^{(\gamma+\delta)}};$$

donc

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\sigma_n^{(\gamma+\delta)}}{A_n^{(\gamma+\delta)}} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(\gamma+\delta)} z^n = S^{(\gamma+\delta)}(z).$$

C. Q. F. D.

Écrivons maintenant la formule (14) ainsi :

$$S^{(\gamma+\delta)}(z) = \frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\delta+1)} z^{-\gamma} \int_0^z \left\{ \frac{x(1-z)}{z(1-x)} \right\}^{\delta} \frac{S^{(\delta)}(x)\,(z-x)^{\gamma-1}\,dx}{(1-x)^{\gamma}}$$

et développons $\left\{ \frac{x(1-z)}{z(1-x)} \right\}^{\delta}$ en série

$$\left\{ \frac{x(1-z)}{z(1-x)} \right\}^{\delta} = \left\{ 1 - \frac{1}{z}\,\frac{z-x}{1-x} \right\}^{\delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(-\delta)\,\Gamma(n+1)} \left[\frac{z-x}{z(1-x)} \right]^n,$$

ce qui nous fournit le développement

$$S^{(\gamma+\delta)}(z) = \frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(-\delta)\,\Gamma(\delta+1)} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\gamma} \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n+1)} (n+\gamma) z^{-(n+\gamma)} \int_0^z \frac{S^{(\delta)}(x)\,(z-x)^{n+\gamma-1}\,dx}{(1-x)^{n+\gamma}}.$$

Or la formule (11) nous donne en y remplaçant γ par $n+\gamma$:

$$(n+\gamma) z^{-(n+\gamma)} \int_0^z \frac{S^{(\delta)}(x)\,(z-x)^{n+\gamma-1}\,dx}{(1-x)^{n+\gamma}} = S^{(n+\gamma,\delta)}(z),$$

d'où la relation

$$S^{(\gamma+\delta)}(z) = \frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(-\delta)\,\Gamma(\delta+1)} \sum_{n=0} \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n+1)} \frac{S^{(n+\gamma,\delta)}(z)}{n+\gamma}.$$

et le développement cherché

$$(15) \qquad S_N^{(\gamma+\delta)} = \frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(-\delta)\Gamma(\delta+1)} \sum_{n=0} \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n+1)} \frac{S_N^{(n+\gamma,\delta)}}{n+\gamma} \qquad [\delta \neq E(\delta)],$$

qu'on obtient en comparant les coefficients de z^N dans les deux membres du développement précédent.

La convergence absolue et uniforme de toutes les séries employées dans nos calculs est assurée, si l'on suppose $z < 1$ et la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

sommable $(C, \gamma+\delta)$ dans le cas du développement (12) et sommable $(C, \gamma).(C, \delta)$ dans le cas du développement (15). Le dernier n'est valable que pour $\delta \neq E(\delta)$ et pour δ entier il doit être remplacé par la somme d'un nombre fini de termes :

$$(15') \qquad S_N^{(\gamma+\delta)} = \frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta+1)} \times \sum_{n=0}^{n=\delta} (-1)^n \frac{\delta(\delta-1)\ldots(\delta-n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)n} \frac{S_N^{(n+\gamma,\delta)}}{n+\gamma} \qquad [\delta = E(\delta)].$$

Les développements (12) et (15) permettent facilement d'établir le théorème I. Supposons d'abord la série $u_0 + u_1 + \ldots + u_n \ldots$ sommable $(C, \gamma+\delta)$ avec la somme s et posons pour $h \geqq 0$

$$s_n^{(\gamma+\delta+h)} = s + \varepsilon_n^{(h)},$$

où $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n^{(h)} = 0$ quel que soit $h \geqq 0$, vu que la sommabilité (C, ρ_0) entraîne aussi celle $(C, \rho > \rho_0)$.

En appliquant la formule (12) à la série particulière

$$1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots,$$

pour laquelle toutes les moyennes simples et doubles sont égales à l'unité, on obtient le corollaire de (12)

$$(16) \qquad \gamma\delta \sum_{m=0}^{N} \frac{F(\gamma, \delta, N+\gamma+\delta+1, 1)}{F(\gamma, \delta, m-\gamma+\delta+1, 1)} \frac{1}{(m+\gamma)(m+\delta)} = 1.$$

Les formules (12) et (16) nous donnent

$$S_N^{(\gamma,\delta)} - s = \gamma\delta \sum_{m=0}^{N} \frac{F(\gamma, \delta, N+\gamma+\delta+1, 1)}{F(\gamma, \delta, m+\gamma+\delta+1, 1)} \frac{\varepsilon_{N-m}^{(m)}}{(m+\gamma)(m+\delta)};$$

donc

$$|S_N^{(\gamma,\delta)} - s| \leqq \gamma\delta \sum_{m=0}^{N} \frac{|\varepsilon_{N-m}^{(m)}|}{(m+\gamma)(m+\delta)}.$$

Désignons par μ la borne supérieure de valeurs absolues des quantités $\varepsilon_n^{(0)} = s_n^{(\gamma+\delta)} - s\,(n = 0, 1, 2, \ldots \infty)$. Cette borne μ sera aussi la borne supérieure de toutes les quantités $|\varepsilon_n^{(m)}|$ quels que soient $m, n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Puisque la série $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\gamma)(m+\delta)}$ converge on peut choisir M assez grand pour qu'on ait

$$\gamma\delta \sum_{M+1}^{N} \frac{1}{(m+\gamma)(m+\delta)} < \frac{1}{2}\frac{\eta}{\mu},$$

où η est aussi petit qu'on veut. Il est clair qu'on a

$$\gamma\delta \sum_{M+1}^{N} \frac{|\varepsilon_{N-m}^{(m)}|}{(m+\gamma)(m+\delta)} < \frac{\eta}{2}.$$

Quant à la somme de $M+1$ premiers termes, elle tend vers zéro avec $\frac{1}{N}$ puisque le nombre des termes est fini et chaque terme séparément tend vers zéro. Donc en choisissant $\mathfrak{N}_0$ assez grand on a

$$\gamma\delta \sum_{m=0}^{N} \frac{|\varepsilon_{N-m}^{(m)}|}{(m+\gamma)(m+\delta)} < \frac{\eta}{2} \qquad (N > \mathfrak{N}_0),$$

d'où le résultat voulu

$$|S_N^{(\gamma,\delta)} - s| < \eta \text{ pour } N > \mathfrak{N}_0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{N=\infty} S_N^{(\gamma,\delta)} = s.$$

Supposons maintenant qu'on a $\lim\limits_{N=\infty} S_N^{(\gamma,\delta)} = s$. Cette hypothèse entraîne comme conséquence

$$\lim_{N=\infty} S_N^{(n+\gamma,\delta)} = s \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty).$$

La borne supérieure de toutes les quantités $|S_m^{(\gamma,\delta)}|$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ sera aussi la borne supérieure des quantités $|S_m^{(n+\gamma,\delta)}|$ quels que soient n, $m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Donc la série (15) converge absolument et uniformément en $\mathfrak{N}$ et en passant à la limite pour $N = \infty$ on obtient la conclusion

$$\lim_{N=\infty} S_N^{(\gamma+\delta)} = \frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(-\delta)\Gamma(1+\delta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n+1)} \frac{\lim\limits_{N=\infty} S_N^{(n+\gamma,\delta)}}{n+\gamma} = s \qquad [\delta \neq E(\delta)],$$

puisqu'on a $\lim\limits_{N=\infty} S_N^{(n+\gamma,\delta)} = s$ et aussi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{n+\gamma} = \frac{\Gamma(-\delta)}{\gamma} F(-\delta,\ \gamma,\ \gamma+1,\ 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(-\delta)\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(\gamma+\delta+1)}.$$

Enfin pour $\delta = E(\delta)$ la même conclusion $\lim\limits_{N=\infty} s_N^{(\gamma+\delta)} = s$ est fournie par le développement (15′). Ainsi le théorème I est démontré. Il est très probable que les restrictions $\delta > 0$ et $\gamma > 0$ ne sont pas nécessaires et que le théorème subsiste aussi quand l'un des deux nombres γ et δ ou tous les deux sont négatifs et supérieurs à -1, leur somme $\gamma + \delta$ étant aussi supérieure à -1.

2. Pour donner un exemple appliquons à la série divergente (1)

$$(1) \qquad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots + (-1)^n(n+1) + \ldots$$

le procédé de sommation à l'aide des moyennes doubles.

Cette série n'est pas sommable (C, 1) puisque la limite du rapport

$$\frac{(-1)^n(n+1)}{n}$$

n'existe pas, tandis que la condition $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_n}{n^\delta} = 0$ est nécessaire pour la sommabilité (C, δ) de la série Σu_n. En effet les moyennes du premier ordre $s_n^{(1)}$ ne tendent pas vers une limite déterminée puisqu'on a

$$S_{2n+1}^{(1)} = 0 \qquad \text{et} \qquad S_{2n}^{(1)} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

On voit qu'elles sont bornées : $|s_n^{(1)}| \leqq 1$ ($n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$). Appliquons à la série (1) le procédé de sommation (C, 1)(C, δ), c'est-à-dire calculons les moyennes d'ordre positif δ des moyennes du premier ordre. On a

$$\psi(z) = \sum_0^\infty S_n^{(1)} z^n = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{4z}\log\frac{1+z}{1-z};$$

donc

$$\sum_0^\infty \overline{\sigma}_n^{(1,\delta)} z^n = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1+z)(1-z)^{1+\delta}} + \frac{1}{4z}\,\frac{\log\dfrac{1+z}{1-z}}{(1-z)^\delta}.$$

En appliquant la méthode de Stieltjes ([1]), on obtient facilement la formule approximative

$$\overline{\sigma}_n^{(1,\delta)} = \frac{1}{4} A_n^{(\delta)} + O(1) + O\left(\frac{\log n}{n^{1-\delta}}\right),$$

d'où la conclusion :

$$S_n^{(1,\delta)} = \frac{\overline{\sigma}_n^{(1,\delta)}}{A_n^{(\delta)}} = \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{n^\delta}\right) + O\left(\frac{\log n}{n}\right),$$

et le résultat cherché : $\lim\limits_{n=\infty} S_n^{(1,\delta)} = \frac{1}{4}$ pour $\delta > 0$.

Le théorème I dit que la série (1) est aussi sommable (C, $1+\delta$) quelque petit que soit $\delta > 0$ et a pour somme $\frac{1}{4}$. On peut du reste le vérifier directement. On a

$$\sum_0^\infty u_n z^n = \sum_0^\infty (-1)^n (n+1) z^n = \frac{1}{(1+z)^2},$$

donc

$$\sum_0^\infty \sigma_n^{(\rho)} z^n = \frac{1}{(1+z)^2 (1-z)^{1+\rho}}.$$

La méthode de Darboux va nous fournir la formule approximative pour $\sigma_n^{(\rho)}$. Dans l'application de cette méthode il faut distinguer trois

(1) *Annales de Toulouse*, 1re série, t. 4, 1890, p. G.1-G.17.

(2) *Journal de Math.*, 3e série, t. 4, 1878, p. 5-56 et 377-416.

cas : $\rho < 1$, $\rho = 1$ et $\rho > 1$. Dans le premier cas, $\rho < 1$, on doit développer en série de Maclaurin la fonction auxiliaire

$$\frac{2^{-\rho}}{(1+z)^2} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n (n+1)}{2^\rho} z^n,$$

d'où les formules approximatives

$$\sigma_n^{(\rho)} = 2^{-\rho}(-1)^n (n+1)[1+\varepsilon_n] \qquad (\varepsilon_n \to 0,\ \rho < 1),$$
$$s_n^{(\rho)} = (-1)^n 2^{-\rho}\Gamma(1+\rho)(n+1)^{1-\rho}\{1+\varepsilon'_n\} \qquad (\varepsilon'_n \to 0,\ \rho < 1).$$

On voit que les moyennes simples d'ordre $\rho < 1$ oscillent pour $n \to \infty$ entre $-\infty$ et $+\infty$. Les moyennes d'ordre $\rho = 1$ restent bornées et positives, mais oscillent sans tendre vers une limite déterminée. Enfin, si l'on a $\rho > 1$, on peut négliger le pôle $z = -1$ et il suffit de développer la fonction auxiliaire

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{(1-z)^{1+\rho}} = \frac{1}{4}\sum_0^\infty A_n^{(\rho)} z^n$$

pour avoir la formule approximative $\sigma_n^{(\rho)} = \frac{1}{4}A_n^{(\rho)}.[1+\varepsilon_n]$ qui prouve que l'on a

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(\rho)} = \frac{1}{4} \qquad (\rho > 1)$$

conformément à notre théorème.

La série (1) fournit la preuve facile d'inexactitude du théorème suivant de M. S. Chapman. On sait que la sommabilité $(C, \delta - 1)$ de la série

$$u_0 + \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{3} + \ldots + \frac{u_n}{n+1} + \ldots$$

est la conséquence (¹) de la sommabilité (C, δ) de la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots.$$

M. S. Chapman a affirmé qu'il n'était pas nécessaire pour la sommabilité $(C, \delta - 1)$ de la série $\sum \frac{u_n}{n+1}$ que la série Σu_n soit sommable (C, δ).

(¹) H. Bohr, *Comptes rendus*, t. 148, séance du 11 janvier 1909, p. 78. Aussi M. Riesz, *Comptes rendus*, t. 148, séance du 21 juin 1909, p. 1658.

Il suffirait d'après l'énoncé de son théorème ([1]) que les moyennes d'ordre δ de la série Σu_n soient seulement bornées. Or on a vu que les moyennes du premier ordre de la série (1) sont bornées tandis que la série $\sum \frac{u_n}{n+1}$ correspondante, c'est-à-dire la série divergente

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots,$$

n'est pas sommable (C, o) contrairement à l'assertion de M. S. Chapman, ce qui prouve l'inexactitude du théorème en question. Ce théorème est récemment reproduit par M. L. Bieberbach dans l'*Encyclopédie der Mathem. Wissenschaften* ([2]), qui le cite sans s'apercevoir de son inexactitude.

Il est facile de voir d'où provient l'erreur : M. Chapman ayant obtenu pour la $n^{\text{ième}}$ moyenne d'ordre $\delta - 1$ de la série $\sum \frac{u_n}{n+1}$ désignée par $\frac{T_n}{A_n^{(\delta-1)}}$, le développement suivant :

$$\frac{T_n}{A_n^{(\delta-1)}} = (\delta+1)\frac{A_{n+1}^{(\delta-1)}}{A_n^{(\delta-1)}}\sum_{r=0}^{n-2}\frac{1}{(\delta+r+1)(\delta+r+2)}\frac{S_r^{(\delta)}}{A_r^{(\delta)}}$$
$$+\frac{\delta-n}{n(n+1)}\frac{S_{n-1}^{(\delta)}}{A_n^{(\delta-1)}}+\frac{1}{n+1}\frac{S_n^{(\delta)}}{A_n^{(\delta-1)}},$$

où $S_r^{(\delta)}$ désignent les σ — sommes d'ordre δ de la série Σu_n, observe tout simplement : « The sum of the last two terms is readily seen to tend to zéro », tandis qu'en réalité cette somme ne tend vers zéro que si $u_n = o(n^\delta)$, ce qui arrive par exemple quand la série Σu_n est sommable (C, δ). Tout ce qu'on peut conclure de ce développement de M. Chapman dans le cas, où les moyennes d'ordre δ de la série Σu_n restent bornées sans tendre pour $n \to \infty$ vers une limite déterminée, c'est que dans ce cas les moyennes d'ordre $\delta - 1$ de la série $\sum \frac{u_n}{n+1}$ restent aussi bornées. Dans cet ordre d'idées, un théorème de MM. Hardy et Littlewood ([3]) éclaircit la question complètement : la série $\sum \frac{u_n}{n^r}$ converge si les moyennes d'ordre r de la série Σu_n sont bornées et si, de plus, $u_n = o(n^r)$.

([1]) *Proceed. Lond. Math. Soc.*, 2e série, t. 9, 1910, p. 388.

([2]) B. II, Heft, 3, 4, 1921, p. 479.

([3]) *Proceed. Lond. Math. Soc.*, 2e série, t. 11, 1913, p. 436, th. 18. Cas où $\alpha = r$, $k = 0$.

3. La démonstration du théorème II est basée sur les développements analogues aux développements (12) et (15) mais qui se rapportent aux moyennes typiques de M. Riesz.

Désignons la moyenne typique d'ordre γ formée des moyennes typiques d'ordre δ par $S_\lambda^{(\gamma,\delta)}(\omega)$ et supposons la série sommable $(R, \lambda, \gamma+\delta)$. Pour obtenir le développement de la moyenne double $S_\lambda^{(\gamma,\delta)}(\omega)$ suivant les moyennes typiques simples d'ordres non inférieurs à $\gamma+\delta$ nous employons l'expression suivante de la moyenne typique simple d'ordre γ [1] :

$$s_\lambda^{(\gamma)}(\omega) = \gamma\,\omega^{-\gamma}\int_0^\omega s_\lambda(u)(\omega-u)^{\gamma-1}\,du \qquad (\gamma > 0), \tag{17}$$

où

$$s_\lambda(u) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \text{ pour } \lambda_n \leqq u < \lambda_{n+1}.$$

En remplaçant dans (17) $s_\lambda(u)$ par la moyenne typique $s_\lambda^{(\delta)}(\omega)$ d'ordre δ, on obtient la moyenne double $S_\lambda^{(\gamma,\delta)}(\omega)$:

$$S_\lambda^{(\gamma,\delta)}(\omega) = \gamma\,\omega^{-\gamma}\int_0^\omega s_\lambda^{(\delta)}(u)(\omega-u)^{\gamma-1}\,du. \tag{18}$$

En y substituant à la place de $s_\lambda^{(\delta)}(u)$ son expression (17), on a

$$\begin{aligned}
S_\lambda^{(\gamma,\delta)}(\omega) &= \gamma\delta\,\omega^{-\gamma}\int_0^\omega u^{-\delta}(\omega-u)^{\gamma-1}\,du\int_0^u s_\lambda(\xi)(u-\xi)^{\delta-1}\,d\xi \\
&= \gamma\delta\,\omega^{-\gamma}\int_0^\omega s_\lambda(\xi)\,d\xi\int_0^\omega u^{-\delta}(u-\xi)^{\delta-1}(\omega-u)^{\gamma-1}\,du.
\end{aligned}$$

La substitution $u = \omega - \eta(\omega-\xi)$ nous donne

$$\begin{aligned}
&\omega^{-\gamma}\int_\xi^\omega u^{-\delta}(u-\xi)^{\delta-1}(\omega-u)^{\gamma-1}\,du \\
&\quad = \omega^{-(\gamma+\delta)}(\omega-\xi)^{\gamma+\delta-1}\int_0^1 \frac{\eta^{\gamma-1}(1-\eta)^{\delta-1}\,d\eta}{\left(1-\dfrac{\omega-\xi}{\omega}\eta\right)^\delta} \\
&\quad = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\gamma+\delta)}\,\omega^{-(\gamma+\delta)}(\omega-\xi)^{\gamma+\delta-1}\,F\left(\gamma, \delta, \gamma+\delta, \frac{\omega-\xi}{\omega}\right) \\
&\quad = \frac{1}{\omega-\xi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m+\gamma)\Gamma(m+\delta)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\gamma+\delta)}\left(\frac{\omega-\xi}{\omega}\right)^{m+\gamma+\delta}.
\end{aligned}$$

---

[1] M. Riesz, *Comptes rendus*, t. 149, séance du 22 novembre 1909, p. 910, form. (2).

Par conséquent,

$$S_\lambda^{(\gamma,\delta)}(\omega) = \gamma\delta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+\gamma)\Gamma(m+\delta)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\gamma+\delta+1)} (m+\gamma+\delta)\,\omega^{-(m+\gamma+\delta)}$$
$$\times \int_0^\omega s_\lambda(\xi)(\omega-\xi)^{m+\gamma+\delta-1}\,d\xi$$

et enfin grâce à la formule (17)

$$(19)\qquad S_\lambda^{(\gamma,\delta)}(\omega) = \gamma\delta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+\gamma)\Gamma(m+\delta)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\gamma+\delta+1)} s_\lambda^{(m+\gamma+\delta)}(\omega).$$

Le développement obtenu converge absolument et uniformément par rapport à ω, si la série est supposée sommable $(R, \lambda, \gamma+\delta)$. En effet, la formule [1]

$$(20)\qquad \sigma_\lambda^{(\rho+\varepsilon)}(\omega) = \frac{\Gamma(\rho+\varepsilon+1)}{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(\rho+1)} \int_0^\omega \sigma_\lambda^{(\rho)}(u)(\omega-u)^{\varepsilon-1}\,du \qquad (\varepsilon > 0)$$

démontre que toutes les moyennes $s_\lambda^{(\rho+\varepsilon)}$ d'ordres supérieurs à ρ sont en valeur absolue inférieures à H, si la moyenne $s_\lambda^{(\rho)}(\omega)$ satisfait à la condition $|s_\lambda^{(\rho)}(\omega)| < H$ quel que soit ω.

Or la série proposée étant sommable $(R, \lambda, \gamma+\delta)$, on a

$$|s_\lambda^{(m+\gamma+\delta)}(\omega)| < K$$

quels que soient ω et $m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, ce qui suffit pour garantir la convergence absolue et uniforme du développement (19) puisque la série à termes positifs

$$\gamma\delta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+\gamma)\Gamma(m+\delta)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\gamma+\delta+1)} = \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\gamma+\delta+1)} F(\gamma, \delta, \gamma+\delta+1) = 1$$

converge, sa somme étant égale à l'unité.

L'existence de la limite

$$\lim_{\omega=\infty} s_\lambda^{(\gamma+\delta)}(\omega) = s$$

---

(1) G. HARDY and M. RIESZ, *The General Theory of Dirichlet's Series* (*Cambridge Tracts*, n° 18, 1915, p. 27, lemme 6).

entraîne aussi [1] :

$$\lim_{\omega=\infty} s_\lambda^{(m+\gamma+\delta)}(\omega) = s$$

quel que soit $m = 1, 2, 3, \ldots, \infty$. En passant dans (19) à la limite pour $\omega = \infty$ on a le résultat voulu :

$$\lim_{\omega=\infty} S_\lambda^{(\gamma,\delta)}(\omega) = \gamma\delta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+\gamma)\,\Gamma(m+\delta)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\gamma+\delta+1)}\, s = s,$$

ce qui prouve la première partie du théorème II.

Pour compléter la démonstration il faut maintenant prouver l'inverse et déduire l'existence de la limite

$$\lim_{\omega=\infty} s_\lambda^{(\gamma+\delta)}(\omega) = s$$

de l'hypothèse

$$\lim_{\omega=\infty} S_\lambda^{(\gamma,\delta)}(\omega) = s.$$

On le prouve à l'aide du développement de la moyenne simple $s_\lambda^{(\gamma+\delta)}(\omega)$ suivant les moyennes doubles d'ordres non inférieurs à γ formées des moyennes d'ordre δ. La formule (20) donne en y remplaçant les σ — sommes typiques par les moyennes et en posant $\rho = \delta$ et $\varepsilon = \gamma$:

$$s_\lambda^{(\gamma+\delta)}(\omega) = \frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\delta+1)}\,\omega^{-\gamma} \int_0^\omega \left(\frac{u}{\omega}\right)^\delta s_\lambda^{(\delta)}(u)\,(\omega-u)^{\gamma-1}\,du.$$

Envisageons d'abord le cas général $\delta \neq E(\delta)$. Alors on a

$$\left(\frac{u}{\omega}\right)^\delta = \left(1 - \frac{\omega-u}{\omega}\right)^\delta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(-\delta)\,\Gamma(n+1)} \left(\frac{\omega-u}{\omega}\right)^n,$$

d'où

$$s_\lambda^{(\gamma+\delta)}(\omega) = \frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(-\delta)\,\Gamma(\delta+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n+1)}\,\omega^{-(n+\gamma)} \times \int_0^\omega s_\lambda^{(\delta)}(u)\,(\omega-u)^{n+\gamma-1}\,du.$$

---

[1] G. HARDY and M. RIESZ, *The General Theory of Dirichlet's Series* (*Cambridge Tracts*, n° 18, 1915, p. 29, théor. XVI).

Or, d'après (18), on a

$$\omega^{-(n+\gamma)}\int_0^\omega s_\lambda^{(\delta)}(u)(\omega-u)^{n+\gamma-1}\,du=\frac{1}{n+\gamma}S_\lambda^{(n+\gamma,\delta)}(\omega)$$

et enfin

$$(21)\qquad s_\lambda^{(\gamma+\delta)}(\omega)=\frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(-\delta)\Gamma(\delta+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n+1)}\frac{S_\lambda^{(n+\gamma,\delta)}(\omega)}{n+\gamma}\qquad[\delta\neq E(\delta)].$$

L'existence de la limite $\lim S_\lambda^{(\gamma,\delta)}(\omega)=s$ entraine aussi

$$\lim_{\omega=\infty} S_\lambda^{(n+\gamma,\delta)}(\omega)=s\qquad(n=1,2,3,\ldots,\infty)$$

et garantit la convergence absolue et uniforme du développement (21). Le passage à la limite pour $\omega=\infty$ nous donne

$$\lim_{\omega=\infty} s_\lambda^{(\gamma+\delta)}(\omega)=\frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(-\delta)\Gamma(\delta+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n+1)}\frac{\lim\limits_{\omega=\infty} S_\lambda^{(n+\gamma,\delta)}(\omega)}{n+\gamma}=s$$

puisqu'on a

$$\frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(-\delta)\Gamma(\delta+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n-\delta)}{\Gamma(n+1)}\frac{1}{n+\gamma}$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\gamma+1)}F(-\delta,\gamma,\gamma+1,1)=1.$$

Dans le cas particulier $\delta=E(\delta)$ le développement (21) est remplacé par la somme d'un nombre fini de termes :

$$S_\lambda^{(\gamma+\delta)}(\omega)=\frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)}\sum_{n=0}^{n=\delta}\frac{S_\lambda^{(n+\gamma,\delta)}(\omega)}{(n+\gamma)\Gamma(n+1)\Gamma(\delta-n+1)}\qquad[\delta=E(\delta)],$$

qui nous fournit la même conclusion.

Ainsi le théorème II, à savoir le théorème

$$(8)\qquad (R,\lambda,\gamma)(R,\lambda,\delta)\sim(R,\lambda,\gamma+\delta)\sim(R,\lambda,\delta)(R,\lambda,\gamma)$$

est établi pour γ et δ positifs. Le cas où l'un d'eux est nul ne présente aucun intérêt, mais il serait très intéressant de lever les restrictions $\gamma>0$, $\delta>0$ et de démontrer la validité de (8) dans le cas où l'un des deux nombres γ, δ est négatif et supérieur à -1 et aussi dans le cas où tous les deux sont négatifs et supérieurs à -1, leur somme $\gamma + \delta$ étant aussi supérieure à -1. Il est très probable que le théorème II subsiste aussi dans ces cas.

Observons pour finir que la symétrie du second membre du développement (19) de la moyenne double $S_\lambda^{(\gamma,\delta)}(\omega)$ prouve qu'on a comme pour les moyennes de Cesàro

$$S_\lambda^{(\gamma,\delta)}(\omega) \equiv S_\lambda^{(\delta,\gamma)}(\omega),$$

fait bien curieux en lui-même et qui n'est nullement évident *a priori*. Observons aussi que le corollaire du théorème démontré concernant les moyennes typiques d'ordre entier k qui s'exprime ainsi

$$(R, \lambda, k) \sim (R, \lambda, 1)^k$$

et qui a été signalé plus haut prouve *que les moyennes typiques d'ordre k formées d'après Hölder sont équivalentes aux moyennes typiques du même ordre entier k formées d'après Cesàro.*