Annales scientifiques de l'É.N.S.

GASTON JULIA

Sur une classe d'équations fonctionnelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 40 (1923), p. 97-150
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1923_3_40__97_0>

SUR

UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

PAR M. GASTON JULIA.

INTRODUCTION.

Le but du présent Mémoire est d'étudier les solutions d'une classe d'équations fonctionnelles qui généralise l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(sz) = R[\Gamma(z)] \qquad [|s| > 1] \tag{1}$$

que Poincaré a étudiée et pour laquelle il a prouvé l'existence de solutions méromorphes dans tout le plan. Ayant défini une solution de (1) holomorphe au voisinage de l'origine, un procédé classique d'extension définit la solution comme fonction méromorphe dans tout le plan. Si l'on essaie d'appliquer la même méthode au type d'équations

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)], \tag{3}$$

R_1 et R_2 rationnelles, R_1 ayant un point double *répulsif à l'origine*

$$[R_1(0) = 0 \,|\, R'_1(0)| > 1],$$

on voit aussitôt apparaître une différence profonde. Alors qu'un petit cercle c de centre O soumis à l'itération indéfinie de $[z|sz]$ finit par recouvrir *une et une seule fois* tout le plan des z, sauf l'∞, un petit cercle C de centre O soumis à l'itération indéfinie de $[Z|R_1(Z)]$ recouvrira une *infinité de fois* le plan Z, sauf peut-être deux points exceptionnels; d'une façon précise l'itération indéfinie de C par $[Z|R_1(Z)]$ engendrera, à la limite, la surface de Riemann Σ_1 sur laquelle la fonction inverse de la fonction méromorphe $Z = \Gamma_1(z)$ satisfaisant à

$$\Gamma_1(s_1 z) = R_1[\Gamma_1(z)] \quad [|s_1 = R'_1(0)| > 1],$$

est uniforme. Cette surface de Riemann Σ_1 est le *domaine des valeurs* que $\Gamma_1(z)$ prend dans le plan z.

De cette différence capitale résulte que : tandis que la solution de (1) est *uniforme dans le plan* z, celle de (3), supposée holomorphe dans C, se trouve définie, par l'extension classique, comme *fonction uniforme sur la surface de Riemann* Σ_1, *et non comme fonction uniforme de* Z.

J'ai étudié ici les solutions de (3) qui n'admettent pas tous les points d'un certain ensemble pour points singuliers essentiels. Cet ensemble parfait E'_{R_1}, est celui que j'ai appelé ailleurs « ensemble des singularités de l'itération de $[Z|R_1(Z)]$. » Il joue ici un rôle essentiel et s'introduit naturellement. Les solutions étudiées sont bien uniformes sur Σ_1 : j'en donne l'expression générale.

Puis (Chap. II) j'étudie celles de ces solutions qui sont uniformes dans tout le plan et je prouve qu'elles ne peuvent alors admettre pour points singuliers essentiels que les deux points exceptionnels possibles de l'itération $[Z|R_1(Z)]$. Cela me conduit dans certains cas, lorsque l'itération $[Z|R_1(Z)]$ se ramène à celle d'un polynome, ou de $[Z|Z^k]$, à reconnaître l'existence de solutions méromorphes avec soit l'∞, soit o et l'infini pour seuls points essentiels. J'en donne des exemples. Puis je montre comment la symétrie de Σ_1, dans le cas où $[Z|R_1(Z)]$ est à cercle fondamental, entraîne l'uniformité de la solution G dans tout le plan Z, lorsque cette uniformité est admise dans le cercle fondamental.

Enfin (Chap. IV) j'étudie d'une manière plus précise les solutions *uniformes*; je montre d'abord qu'elles ne peuvent être méromorphes dans tout le plan Z, hors un ou deux points, que si la structure de E'_{R_2} [ensemble des singularités de l'itération $[Z|R_2(Z)]$] est plus complexe que celle de E'_{R_1} : ceci s'applique en particulier à l'équation de Schrœder où $R_2(Z) = SZ$ (dont on retrouve ainsi la propriété de n'avoir pas de solution uniforme non rationnelle qui ne soit essentiellement singulière en tout point de E'_{R_1}) ainsi qu'à l'équation d'Abel où $R_2(Z) = Z + a$. Une étude assez serrée me montre enfin que l'équation (3) *ne peut admettre de solution méromorphe* (non rationnelle) *que si l'ensemble* E'_{R_2} *recouvre tout le plan.* Les exemples qu'on a donnés au Chapitre II satisfont bien à cette condition.

Cela fait désirer une détermination complète de toutes les fractions rationnelles $R_2(Z)$ pour lesquelles l'ensemble E'_{R_2} recouvre tout le plan. Jusqu'ici on ne connaît que celles qui naissent de la multiplication des fonctions elliptiques (et les exemples donnés au Chapitre II sont tirés de fonctions elliptiques). Il serait intéressant, soit d'en trouver d'autres, soit de démontrer que seule la multiplication des fonctions elliptiques peut conduire à de pareilles fonctions.

CHAPITRE I.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)]$, R_1 ET R_2 ÉTANT DEUX FRACTIONS RATIONNELLES.

1. Je rappelle qu'étant donnée une fonction rationnelle quelconque $R(Z)$ de degré > 1, dont α soit un point double répulsif,

$$\alpha = R(\alpha), \qquad R'(\alpha) = s \qquad |s| > 1,$$

il existe [1] une fonction méromorphe $\Gamma(z)$ satisfaisant aux deux conditions

$$\Gamma(0) = \alpha, \qquad \Gamma'(0) = 1$$

et à l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(sz) = R[\Gamma(z)]. \tag{1}$$

Cette fonction méromorphe devient entière si R est un polynome.

Dans tous les cas, elle est unique pour le point α. On l'appelle quelquefois fonction de Poincaré pour le point double α. C'est ainsi que je l'appellerai dans la suite de ce Mémoire.

$\Gamma(z)$ n'a de valeurs exceptionnelles que dans deux cas.

1° Si la relation $Z_1 = R(Z)$ peut, par une même substitution linéaire $\left(Z \middle| \dfrac{aZ+b}{cZ+d}\right)$ sur Z et Z_1, se ramener à la forme canonique

$$Z_1 = Z^k,$$

K entier positif ou négatif.

---

(1) *Voir* POINCARÉ, *Sur une classe nouvelle des transcendantes uniformes* (*Journal de Jordan*, 1890).

Alors $\Gamma(z)$ est la fonction exponentielle e^z ou une transformée homographique de cette fonction exponentielle. Elle admet deux valeurs exceptionnelles.

2° Si la relation $Z_1 = R(Z)$ peut, par une même substitution linéaire sur Z et Z_1, se ramener à un polynome $Z_1 = P(Z)$. Alors $\Gamma(z)$ devient par cette transformation une fonction entière dont l'∞ est valeur exceptionnelle. La fonction $\Gamma(z)$ initiale est alors la transformée homographique d'une fonction entière. Elle admet une valeur exceptionnelle provenant de la valeur ∞, exceptionnelle pour la fraction entière.

3° Dans tout autre cas $\Gamma(z)$ n'a pas de valeur exceptionnelle.

2. Ces propriétés sont corrélatives des propriétés suivantes de l'itération de $R(Z)$. Soit γ une petite aire plane, par exemple circulaire, entourant α. Lorsque Z décrit γ, $Z_1 = R(Z)$ décrit une aire γ_1, simple si γ est assez petite, $Z_2 = R[R(Z)] = R^{(2)}(Z)$ décrit une aire γ_2, etc.

J'appellerai $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ les aires que décrivent respectivement $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ conséquents d'ordre 1, 2, 3, ... de Z dans l'itération par $R(Z)$, lorsque Z décrit Γ. J'ai montré [1] que les aires $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ sont contenues chacune dans la suivante, et que trois cas sont possibles :

1° Il y a deux points du plan Z et deux seulement qui restent extérieurs à toutes les aires γ_n. Alors $Z_1 = R(Z)$ se ramène, par l'homographie signalée au 1° du n° 1, à $Z_1 = Z^k$. Si l'on exclut ces deux points par des petits cercles, la portion restante du plan sera recouverte par une certaine aire γ_n. Ces deux points sont les valeurs exceptionnelles de $\Gamma(z)$.

2° Il y a un point seulement qui reste extérieur à toutes les γ_n. On est dans le deuxième cas du n° 1. $Z_1 = R_1(Z)$ se ramène par homographie à un polynome $Z_1 = R(Z)$. Excluant le point exceptionnel par un petit cercle, γ_n recouvre la partie restante du plan pour n convenable. Le point exceptionnel est la valeur exceptionnelle de $\Gamma(z)$.

3° Il n'y a pas de point qui reste extérieur à toutes les γ_n. Pour n assez grand, γ_n recouvre tout le plan y compris le point à l'infini.

---

(1) *Voir* G. JULIA, *Sur l'itération des fractions rationnelles* (*Journal de Jordan*, 1918).

3. L'équation fonctionnelle (1)

$$\Gamma(sz) = R[\Gamma(z)]$$

peut s'écrire

$$(2) \qquad \Gamma[\rho(z)] = R[\Gamma(z)];$$

$\rho(z) = sz$ est fonction rationnelle et du premier degré de z pour laquelle $z = 0$ est un point double répulsif.

Elle peut s'interpréter en un sens en disant que le signe Γ est semi-permutable avec le signe ρ de la fonction rationnelle $\rho(z)$ en ce sens que $\Gamma[\rho(z)]$, s'il n'est pas identiquement égal à $\rho[\Gamma(z)]$, est du moins identique à une *fraction rationnelle* de $\Gamma(z)$.

J'ai montré ailleurs, que $\Gamma(z)$ effectivement méromorphe ne pouvait être effectivement permutable à une fraction rationnelle de premier degré, car

$$\Gamma[\rho(z)] = \rho[\Gamma(z)]$$

entraîne, si l'on suppose Γ holomorphe à l'origine, que Γ *est rationnel et du premier degré*.

Il ne peut donc pas être question d'échanger les signes ρ et Γ, ρ étant homographique et Γ méromorphe. Mais on peut essayer d'une semi-permutabilité au sens expliqué par l'équation

$$(2) \qquad \Gamma[\rho(z)] = R[\Gamma(z)],$$

R étant une autre fraction rationnelle.

Si R est du premier degré il est facile de montrer (¹) que Γ ne peut être méromorphe et doit être nécessairement homographique en g.

Mais si R est de degré > 1, l'existence de Γ satisfaisant à (2) est un fait classique rappelé au n° 1.

Nous nous proposons ici d'étudier les solutions de l'équation

$$(3) \qquad G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)],$$

R_1 et R_2 étant des fractions rationnelles de degré > 1. Autrement dit nous cherchons les *fonctions semi-permutables aux fonctions rationnelles*.

(¹) *Mémoire sur la permutabilité des substitutions rationnelles* (*A. E. N. S.*, 1922).

4. *On peut, sans restreindre la généralité, supposer que l'origine* $Z = 0$ *est un point double répulsif commun à* R_1 *et* R_2 *en remplaçant au besoin* R_1 *et* R_2 *par des itérées convenables* $R_1^{(n)}$ *et* $R_2^{(n)}$ *et* $G(z)$ *par* $\alpha + G(z)$, *α étant une certaine constante.*

En effet,

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)]$$

entraîne

$$G[R_1[R_1(Z)]] = R_2[G[R_1(Z)]] = R_2[R_2[G(Z)]] = R_2^{(2)}[G(Z)],$$

c'est-à-dire

$$G[R_1^{(2)}(Z)] = R_2^{(2)}[G(Z)],$$

et, de même,

$$G[R_1^{(p)}(Z)] = R_2^{(p)}[G(Z)],$$

quel que soit l'entier positif p.

On sait (¹) que les cycles de l'itération de $[Z|R_1(Z)]$ sont à partir d'un certain ordre *tous répulsifs*. C'est un fait gros de conséquences remarquables au point de vue de l'itération que *le nombre de cycles de* $[Z|R_1(Z)]$ *à multiplicateur* $\leqq 1$ *est fini*. Il existe donc toujours un point θ tel que

$$\theta = R_1^{(p)}(\theta)$$

et tel que

$$\left[\frac{dR_1^{(p)}}{dZ}\right]_{Z=\theta} = s, \qquad |s| > 1.$$

On peut, sans restreindre la généralité, supposer que θ est l'origine du plan Z et aussi, en remplaçant au besoin $R_1^{(p)}$ et $R_2^{(p)}$ par $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, supposer $p = 1$.

On a alors

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)]$$

avec le développement suivant autour de l'origine,

$$R_1(Z) = s_1 Z + \lambda_2 Z^2 + \ldots, \qquad |s_1| > 1.$$

J'ai longuement étudié dans le Mémoire sur l'itération des frac-

(¹) *Voir* Mémoire *Sur l'itération des fractions rationnelles* (*Journal de Jordan*, 1918).

tions rationnelles du *Journal de Mathématiques* [1] l'ensemble E_{R_1} formé par tous les points appartenant à des *cycles répulsifs* de $R_1(Z)$. Cet ensemble a un dérivé E'_{R_1} parfait, remarquable à plus d'un titre. Si $G(Z)$ n'admet pas tout point de E'_{R_1} pour point singulier essentiel, on peut toujours supposer qu'à l'origine, point double répulsif de $R_1^{(p)}(Z)$, $G(Z)$ est holomorphe : il n'y a pour cela qu'à choisir le point θ, dont il a été question plus haut, au voisinage d'un point de E'_{R_1} qui ne soit pas singulier essentiel pour $G(Z)$.

Reprenons alors

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)].$$

Avec le développement

$$R_1(Z) = s_1 Z + \lambda_2 Z^2 + \ldots$$

et

$$G(Z) = \alpha + g_1 Z + g_2 Z^2 + \ldots,$$

on a évidemment

$$G(o) = R_2[G(o)] \qquad \text{ou} \qquad \alpha = R_2(\alpha),$$

ce qui prouve que α est point double de R_2, puisque l'origine l'est pour R_1. Je vais montrer que α est répulsif pour R_2 comme o l'est pour R_1.

Mais auparavant un simple changement de notation nous permet de poser

$$R_2(Z) = \alpha + \mathcal{R}_2(Z - \alpha),$$

$\mathcal{R}_2$ étant une fonction rationnelle de $Z - \alpha$ qui s'annule pour $Z = \alpha$, et aussi

$$G(Z) = \alpha + \mathcal{G}(Z),$$

ce qui donne à partir de (3)

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)],$$
$$\alpha + \mathcal{G}[R_1(Z)] = \alpha + \mathcal{R}_2[\mathcal{G}(Z)]$$

ou bien

(4) $$\mathcal{G}[R_1(Z)] = \mathcal{R}_2[\mathcal{G}(Z)],$$

---

[1] N^{os} 8 à 26.

en supposant cette fois que l'on a les développements suivants à l'origine

$$R_1(Z) = s_1 Z + \lambda_2 Z^2 + \ldots,$$
$$\mathcal{R}_2(Z) = s_2 Z + \mu_2 Z^2 + \ldots,$$
$$\mathcal{G}(Z) = g_1 Z + g_2 Z^2 + \ldots,$$

avec, on le sait, $|s_1| > 1$.

En identifiant dans (4) il vient

$$g_1 s_1 = s_2 g_1.$$

Donc $s_1 = s_2$ si $g_1 \neq 0$.

Dans le cas général où

$$\mathcal{G}(Z) = g_k Z^k + \ldots, \qquad g_k \neq 0, \qquad k > 1,$$

on aurait en identifiant dans les développements des deux membres de (4), les termes en Z^k

$$g_k s_1^k = g_k s_2,$$

c'est-à-dire

$$s_2 = s_1^k.$$

Donc $|s_2| > 1$ si l'on suppose $|s_1| > 1$.

Si l'on a une fonction $G(Z)$ *holomorphe en un point de* E'_{R_1} *et satisfaisant à*

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)], \tag{3}$$

R_1 et R_2 *rationnelles, de degré* > 1, *on peut toujours supposer, sans restreindre la généralité, que l'origine est un point double répulsif commun aux deux substitutions* $[Z \mid R_1(Z)]$ *et* $[Z \mid R_2(Z)]$.

5. Nous le supposerons dorénavant. De plus, le choix qu'on a fait dans le précédent numéro, du point double θ de $[Z \mid R_1^{(p)}(Z)]$, pour l'amener à l'origine prouve aussi que l'on a pu s'arranger pour que $G'(\theta)$ soit $\neq 0$. En effet, les points limites des zéros de $G'(Z)$ sont des points singuliers essentiels de $G(Z)$; or, il y a des points θ' de E'_{R_1} non singuliers essentiels pour G, et si l'on a choisi θ au voisinage d'un

pareil point θ', distinct des zéros de $G'(Z)$, en nombre fini situés dans un petit cercle de centre θ', il est clair que $G'(\theta)$ sera $\neq 0$.

On peut donc, sans restreindre la généralité, supposer $G'(0) \neq 0$ dans l'équation (3).

6. Le raisonnement que je viens d'employer suggère une généralisation immédiate.

Considérons une *fonction* $G(Z)$ *pour laquelle l'ensemble des singularités essentielles ne comprenne pas tous les points de l'ensemble parfait* E'_{R_1} *qui correspond à l'itération de* R_1, $G(Z)$ *satisfaisant d'ailleurs à*

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)].$$

Il existera, d'après l'hypothèse, au moins un point θ' de E'_{R_1} qui ne soit ni point singulier essentiel ni pôle de $G(Z)$ et tel que dans un cercle convenable de centre θ', $G'(Z)$ n'ait qu'un nombre fini de zéros. Il existera, dans ce cercle, un point θ qui sera pour $R_1^{(p)}(Z)$ un point double répulsif. Ce point θ rendra les mêmes services que le point θ essayé au n° 4. On pourra toujours le choisir tel que $G'(\theta) \neq 0$. En remplaçant alors au besoin R_1 et R_2 par leurs itérées d'ordre p et $G(Z)$ par $\alpha + \mathcal{G}(Z)$ comme on l'a fait au n° 4, on voit donc que l'on peut toujours, dans les hypothèses très larges faites au début du n° 6, supposer que $G(Z)$ *est holomorphe à l'origine, supposée point double répulsif commun à* R_1 et R_2, *avec en plus la condition* $G'(0) \neq 0$. *Cela ne restreint pas la généralité des hypothèses du n°* 6.

7. Reprenons donc (3)

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)]$$

avec les développements

$$(5)\qquad \begin{cases} R_1(Z) = sZ + \lambda_2 Z^2 + \dots, \\ R_2(Z) = sZ + \mu_2 Z^2 + \dots \end{cases}$$

[on a $s = R'_2(0) = R'_1(0)$, car on a vu au n° 4 que $s_1 = s_2$ lorsque $g_1 = G'(0) \neq 0$], et

$$(6)\qquad G(Z) = g_1 Z + g_2 Z^2 + \dots.$$

Si l'on identifie les développements des deux membres de (3), on voit que tous les coefficients g_2, g_3, ... se déterminent sans ambiguïté à partir de g_1 (qui reste arbitraire) lorsqu'on se donne R_1 et R_2. On pourrait aisément montrer la convergence du développement de $G(Z)$ par la méthode des majorantes. La méthode suivante est plus instructive pour démontrer *l'existence d'une solution de* (3) *définie par le développement* (6), *solution holomorphe à l'origine*.

8. Il existe en effet une fonction méromorphe fondamentale Γ_1 pour R_1 et une Γ_2 pour R_2 définies respectivement par

$$(7)\qquad \Gamma_1(sz) = R_1[\Gamma_1(z)], \qquad \Gamma_1(0) = 0, \qquad \Gamma_1'(0) = 1;$$

$$(8)\qquad \Gamma_2(sz) = R_2[\Gamma_2(z)], \qquad \Gamma_2(0) = 0, \qquad \Gamma_2'(0) = 1.$$

S'il existe une solution (6) de (3), on aura

$$G[R_1[\Gamma_1(z)]] = R_2[G[\Gamma_1(z)]]$$

ou bien

$$(9)\qquad G[\Gamma_1(sz)] = R_2[G[\Gamma_1(z)]].$$

Si G est holomorphe à l'origine, on aura

$$\mathcal{G}(z) = G[\Gamma_1(z)] = g_1 z + \ldots,$$

$\mathcal{G}(z)$ sera holomorphe à l'origine et vérifiera

$$(8')\qquad \mathcal{G}(sz) = R_2[\mathcal{G}(z)],$$

qui n'est autre que l'équation (8).

Il est alors immédiat que

$$\mathcal{G}(z) = \Gamma_2(g_1 z).$$

En effet : 1° Il est visible que $\Gamma_2(g_1 z)$ se développe autour de l'origine par

$$\Gamma_2(g_1 z) = g_1 z + \ldots;$$

2° Il est visible que $\Gamma_2(z)$ comme $\Gamma_2(g_1 z)$ satisfait à l'équation (8);

3° Si l'on cherche une série entière en z satisfaisant à (8), les coefficients de z^2, z^3, ... sont déterminés sans ambiguïté à partir du coefficient de z,

$\mathcal{G}(z)$ et $\Gamma_2(g_1 z)$ ont le même terme en z et satisfont à l'équation (8) tous deux, ils sont donc identiques; on a par conséquent

$$\Gamma_2(g_1 z) = \mathcal{G}(z) = G[\Gamma_1(z)].$$

Si donc on pose

$$Z = \Gamma_1(z) \tag{10}$$

et si l'on désigne par

$$z = \gamma_1(Z), \tag{10'}$$

la fonction inverse de $\Gamma_1(z)$, la fonction $G(Z)$ que nous cherchons, pour satisfaire à (3) et au développement (6), ne peut différer de

$$G(Z) = \Gamma_2[g_1 \gamma_1(Z)]. \tag{11}$$

9. Réciproquement, (11) définit bien une fonction holomorphe en O satisfaisant à (3) et se développant par la formule (6).

En effet, $z = \gamma_1(Z)$ se développe, autour de O, par la formule

$$z = \gamma_1(Z) = Z + \ldots$$

et cette fonction $\gamma_1(Z)$, holomorphe en O, satisfait à l'équation dite de Schrœder

$$\gamma_1[R_1(Z)] = s\gamma_1(Z). \tag{12}$$

Donc $\Gamma_2[g_1\gamma_1(Z)]$ est holomorphe en O et a un développement en Z commençant par

$$g_1 Z + \ldots;$$

de plus, on a

$$G[R_1(Z)] = \Gamma_2\big[g_1\gamma_1[R_1(Z)]\big] = \Gamma_2[g_1 s\gamma_1(Z)],$$

à cause de (12).

Or

$$\Gamma_2(s\zeta) = R_2[\Gamma_2(\zeta)]$$

et, en posant

$$\zeta = g_1\gamma_1(Z),$$

on aura

$$\Gamma_2[sg_1\gamma_1(Z)] = R_2\big[\Gamma_2[g_1\gamma_1(Z)]\big] = R_2[G(Z)]$$

puisque

$$G(Z) = \Gamma_2[g_1\gamma_1(Z)].$$

Donc

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)].$$

Ainsi est prouvée l'existence de la solution holomorphe (6) de (3), et l'on a son expression

$$\boxed{G(Z) = \Gamma_2[g_1\gamma_1(Z)]} \tag{13}$$

avec

$$Z \equiv \Gamma_1[\gamma_1(Z)]$$

pour marquer que $\gamma_1(Z)$ est l'inverse de $\Gamma_1(z)$. On peut encore écrire (13)

$$\Gamma_2[g_1\gamma_1(Z)] = G[\Gamma_1[\gamma_1(Z)]]$$

ou bien

$$\boxed{\Gamma_2(g_1 z) = G[\Gamma_1(z)]}. \tag{14}$$

Une fois prouvée l'existence d'une solution holomorphe en O pour l'équation (3), pour chaque valeur de g_1, on pourra supposer que $g_1 = 1$, pour étudier G.

En effet, si l'on désigne par G_{g_1} la solution de (3) qui se développe par

$$G_{g_1} = g_1 Z + \ldots,$$

la relation (14) montre que

$$\Gamma_2(g_1 z) = G_{g_1}[\Gamma_1(z)],$$

en sorte que toutes les fonctions G_{g_1} dérivent bien simplement des fonctions de Poincaré $\Gamma_1(z)$ et $\Gamma_2(z)$.

10. Avant d'étudier dans tout le plan la fonction $G(Z)$, revenons sur un cas que nous avons écarté au n° 5 parce qu'on peut toujours choisir le point θ, qu'on amène à l'origine de façon que $G'(\theta) = 0$.

Supposons ici que $R_1(Z)$ et $R_2(Z)$ ayant toujours l'origine pour point double répulsif, on veuille chercher une solution $G(Z)$, holomorphe à l'origine, de l'équation (3)

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)],$$

telle que

$$G(Z) = g_p Z^p + g_{p+1} Z^{p+1} + \ldots \qquad (g_p \neq 0). \tag{14'}$$

Cela revient à supposer

$$G(o) = G'(o) = \ldots = G^{(p-1)}(o) = o \qquad [G^{(p)}(o) \neq o].$$

On aura

$$R_1 = sZ + \lambda_2 Z^2 + \ldots$$

et l'identification des développements des deux membres de (3) prouve que le développement de R_2 commence nécessairement par $s^p Z$ (*voir* d'ailleurs le calcul du n° 4)

$$R_2 = s^p Z + \mu_2 Z^2 + \ldots.$$

On voit que g_p peut être pris arbitraire $\neq o$ et qu'alors tous les coefficients suivants de $G(Z)$ se déterminent, sans ambiguïté, à partir de g_p.

11. Si donc (3) a une solution holomorphe (14′), cette solution est unique lorsque g_p est déterminé.

Un calcul analogue à celui du n° 8 donne

$$G[R_1[\Gamma_1(z)]] = R_2[G[\Gamma_1(z)]]$$

et, en posant

$$\mathcal{G}(z) = G[\Gamma_1(z)]$$

et se rappelant que

$$\Gamma_1(sz) = R_1[\Gamma_1(z)],$$

il vient

$$G[\Gamma_1(sz)] = R_2[\mathcal{G}(z)]$$

ou bien

(15) $$\mathcal{G}(sz) = R_2[\mathcal{G}(z)].$$

La fonction de Poincaré $\Gamma_2(z)$, $\Gamma_2(z) = z + \ldots$, relative à R_2 et à O, satisfait à

(16) $$\Gamma_2[s^p z] = R_2[\Gamma_2(z)].$$

$\mathcal{G}(z) = G[\Gamma_2(z)]$ a un développement $= g_p z^p + \ldots$.

Considérons

$$\mathcal{G}_2(z) = \Gamma_2[g_p z^p],$$

son développement sera

$$\mathcal{G}_2(z) = g_p z^p + \ldots.$$

On aura aussi

$$\mathcal{G}_2(sz) = \Gamma_2[g_p s^p z^p].$$

Dans (16), on a, en remplaçant z par $g_p z^p$,

$$\Gamma_2[g_p s^p z^p] = R_2[\Gamma_2(g_p z^p)];$$

par conséquent

$$(17) \qquad \mathcal{G}_2(sz) = R_2[\mathcal{G}_2(z)].$$

Comparant (15) et (17), on verra que $\mathcal{G}_2(z)$ et $\mathcal{G}(z)$ satisfont à la même équation fonctionnelle (15) et débutent par le même terme $g_p z^p$. Si l'on calcule les coefficients successifs d'une solution de (15) dont le développement en O débute par $g_p z^p$, on voit que tous ces coefficients sont déterminés, sans ambiguïté, par le premier coefficient g_p.

On en conclut par un raisonnement connu

$$\mathcal{G}_2(z) = \mathcal{G}(z)$$

ou enfin

$$(18) \qquad G[\Gamma_1(z)] = \Gamma_2(g_p z^p).$$

Pour marquer que $G(z)$ débute par $g_p z^p$, j'écrirai $G_{g_p}[Z]$.

On voit que la seule solution holomorphe $G_{g_p}(Z)$, possible pour (3), est

$$(19) \qquad \boxed{G_{g_p}(Z) = \Gamma_2[g_p[\gamma_1(Z)]^p]},$$

$z = \gamma_1(Z)$ étant, comme d'habitude, la fonction inverse de $Z = \Gamma_1(z)$. On a

$$\gamma_1[R_1(Z)] = s\gamma_1(Z),$$

équation de Schrœder, et l'on en déduit

$$G_{g_p}[R_1(Z)] = \Gamma_2\big[g_p[\gamma_1[R_1(Z)]]^p\big] = \Gamma_2\big[g_p s^p[\gamma_1(Z)]^p\big].$$

D'ailleurs

$$\Gamma_2(s^p z) = R_2[\Gamma_2(z)]$$

ou encore

$$\Gamma_2(s^p g_p z^p) = R_2[\Gamma_2(g_p z^p)].$$

Donc

$$G_{g_p}[R_1(Z)] = \Gamma_2\big[g_p s^p \{\gamma_1(Z)\}^p\big] = R_2\big[\Gamma_2(g_p\{\gamma_1(Z)\}^p)\big] = R_2[G_{g_p}(Z)].$$

On a donc bien en (19) la solution, débutant par $g_p Z^p$, de l'équation (3). Cette formule (19) contient d'ailleurs la formule (13) trouvée précédemment.

12. Nous n'avons jusqu'ici résolu qu'un problème *local*, à savoir : trouver une fonction holomorphe à l'origine supposée point double répulsif, commun à $R_1(Z)$ et $R_2(Z)$, de façon que cette fonction G satisfasse à

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)].$$

Mais les propriétés connues de l'itération de R_1, rappelés aux n^os^ 1 et 2, vont nous servir à trouver *tout le domaine d'existence de* G *et ses singularités*.

Ces conclusions se tirent de l'expression de G :

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{lcl} G_{g_1}(Z) = \Gamma_2[g_1\gamma_1(Z)] & \text{ou} & \Gamma_2[g_1 z] = G_{g_1}[\Gamma_1(z)] \\ & \text{en posant } Z = \Gamma_1(z); & \\ G_{g_p}(Z) = \Gamma_2[g_p\{\gamma_1(Z)\}^p] & \text{ou} & \Gamma_2[g_p z^p] = G_{g_p}[\Gamma_1(z)] \\ & \text{avec } Z = \Gamma_1(z). & \end{array}\right.$$

En effet, $Z = \Gamma_1(z)$ étant une fonction méromorphe, son inverse $z = \gamma_1(Z)$ est une fonction dont les singularités sont connues (*voir* IVERSEN, Thèse *Sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, Helsingfors, 1914).

Elles sont de deux sortes :

1° Des points *critiques algébriques* Z_i qui s'obtiennent en prenant toutes les racines z_i de $\Gamma'_1(z) = 0$ et en les transformant par $Z_i = \Gamma_1(z_i)$.

2° Des points *critiques transcendants* qui *coïncident avec les valeurs asymptotiques de la fonction* $\Gamma_1(z)$.

Il peut arriver qu'un même point ζ soit critique algébrique pour certaines branches de $\gamma_1(Z)$ et critique transcendant pour d'autres branches de cette fonction.

En vertu de l'expression

$$G\ \ (Z) = \Gamma_2[g_1\gamma_1(Z)]$$

ou

$$G_{g_p}(Z) = \Gamma_2[g_1\{\gamma_1(Z)\}^p],$$

puisque la fonction $\Gamma_2(z)$ est méromorphe, la fonction G sera uniforme et méromorphe sur la surface de Riemann du plan Z, sur laquelle $\gamma_1(Z)$ est elle-même uniforme. Les points critiques algébriques de

$\gamma_1(Z)$ seront, en général, des points critiques algébriques de $G_{g_p}(Z)$, pouvant aussi quelquefois être des pôles.

Je dis, en général, parce qu'il pourrait arriver qu'une branche de $\gamma_1(Z)$ ayant un point critique algébrique en Z_i donnât naissance à une branche de $G_{g_p}(Z)$ n'ayant plus de point critique. Mais il ne pourra pas arriver que la branche de $G_{g_p}(Z)$, correspondant à la branche considérée de $\gamma_1(Z)$, ait en Z_i un point transcendant.

De même, si une branche de $\gamma_1(Z)$ a en ζ un point critique transcendant, la branche de $G_{g_p}(Z)$ correspondante sera, en général, transcendante en ζ. $G_{g_p}(Z)$ est uniforme sur la surface de Riemann de $\gamma_1(Z)$ et méromorphe en tout point de cette surface qui n'est pas un point de ramification.

Donc, en général, c'est-à-dire si les fractions rationnelles R_1 et R_2, auxquelles correspondent $\Gamma_1(z)$ et $\Gamma_2(z)$, n'ont pas de relation particulière, la fonction $G_{g_p}(Z)$ *ou* $G_{g_1}(Z)$, *que l'on a définie au voisinage de l'origine, sera définie dans tout le plan* Z *par la relation* (20) : *elle sera multiforme à une infinité de branches. Sa surface de Riemann est celle de* $\gamma_1(Z)$, *inverse de* $Z = \Gamma_1(Z)$. *Ses singularités, points critiques algébriques ou transcendants, seront celles de* $\gamma_1(Z)$.

Dans tous les cas, *les singularités critiques de* $G_{g_p}(Z)$ *ne pourront jamais figurer que parmi celles de* $\gamma_1(Z)$.

J'ajoute, en passant, que si R_1 se ramène par homographie à

$$Z_i = R_1(Z) = Z^{\pm k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \infty),$$

$\gamma_1(Z)$ est définie en tout point du plan, sauf aux *deux* points exceptionnels (signalés aux n^os 1 et 2) de l'itération de $R_1(Z)$. Ces deux points sont transcendants pour toute branche de $\gamma_1(Z)$ qui y devient nécessairement infinie (*voir* Iversen). Ils seront, en général, transcendants pour G_{g_p}. En tout autre point Z, G_{g_p} a, au moins, une branche méromorphe.

Si $Z_1 = R_1(Z)$ se ramène par homographie à $Z_1 =$ un polynome en Z, il n'y a qu'*un* point exceptionnel ζ pour l'itération de R_1. Ce point, critique transcendant pour toute branche de $\gamma_1(Z)$, le sera pour G_{g_p} en général.

En tout autre point, G_{g_p} aura, au moins, une branche méromorphe.

Enfin, si $Z_1 = R_1(Z)$ ne se ramène pas à un polynome ou à $Z_1 = Z^{\pm k}$,

$G_{g_p}(Z)$ aura au moins une branche méromorphe en tout point Z du plan.

13. Il y a toutefois, relativement aux points critiques transcendants de $G(Z)$, une remarque importante à faire. On sait que, si ζ est critique transcendant pour une branche de $\gamma_1(Z)$, cette branche *tend vers l'infini* quand Z tend vers ζ par un chemin convenable. Cela revient presque à dire que les points critiques transcendants de $\gamma_1(Z)$ sont les valeurs asymptotiques de $\Gamma_1(z)$, valeurs limites déterminées atteintes par $\Gamma_1(z)$ sur des chemins convenables allant à l'infini dans le plan z. Cependant, il faut du soin pour l'établir, ainsi que l'a montré M. Iversen. z tendant vers l'infini de façon que Z tende vers ζ, *il pourra arriver que* $\Gamma_2(z)$ *ne tende vers aucune limite déterminée*, en sorte que ζ *se trouvera être pour* G *à la fois point critique et point d'indétermination. Ce fait sera même à considérer comme le fait général.* Car si les fractions R_1 et R_2 n'ont pas de propriété commune autre qu'un point double commun répulsif, les chemins allant à l'infini sur lesquels $\Gamma_1(z)$ et $\Gamma_2(z)$ tendent vers des limites déterminées ne seront pas les mêmes.

En voici un exemple bien simple.

Prenons

$$R_1(Z) = Z^4$$

et

$$R_2(Z) = 2Z^2 - 1.$$

Il y a un point double répulsif commun qui est $Z = 1$. Les multiplicateurs sont égaux à 4.

La fonction de Poincaré correspondante est

$$\Gamma_1 = e^z$$

pour la première, et

$$\Gamma_2 = \cos i\sqrt{2z}$$

pour la seconde.

Si l'on cherche une solution de

$$G(Z^4) = 2[G(Z)]^2 - 1, \tag{21}$$

on posera, comme nous l'avons vu plus haut,

$$G_{g_1}(Z) = 1 + g_1(Z-1) + g_2(Z-1)^2 + \ldots,$$

puisque ici les multiplicateurs des deux fractions R_1 et R_2 pour le point double $Z = 1$ sont égaux.

Prenons seulement $g_1 = 1$

$$G(Z) = 1 + (Z - 1) + \ldots,$$

alors on aura

$$G(Z) = \Gamma_2[\gamma_1(Z)] = \cos i\sqrt{2\gamma_1(Z)},$$

$\gamma_1(Z)$ étant la fonction inverse de

$$Z = e^z, \qquad \gamma_1(Z) = \log Z.$$

Donc

$$G(Z) = \cos i\sqrt{2 \log Z}$$

qui, évidemment, satisfait (21) et se trouve bien être holomorphe pour $Z = 1$.

o et ∞ sont valeurs exceptionnelles de e^z et, corrélativement, points critiques transcendants de $\log Z$.

Sur tout chemin du plan Z qui tend vers zéro, $\log Z$ tend vers l'infini. Supposons que Z tende vers l'origine *sur l'axe réel positif*, $\log Z$ tend alors vers l'infini sur l'axe réel négatif; $i\sqrt{2\log Z}$, suivant la détermination de $\sqrt{\log Z}$ choisie, tendra vers l'infini sur l'axe réel positif ou sur l'axe réel négatif et $\cos i\sqrt{2\log Z}$ oscille sur ces axes entre les valeurs $+1$ et -1. L'origine est donc à la fois point critique transcendant et point d'indétermination de $G(Z)$. C'est même un point d'indétermination complète.

Car à la région $|Z| \leqq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ et très petit, correspond, dans le plan $z = \log Z$, le demi-plan

$$\mathcal{R}(z) \leqq \log\varepsilon,$$

$\log\varepsilon$ est négatif.

La région que décrit $\sqrt{2z} = \sqrt{2\log Z}$ est une portion de plan limitée par l'hyperbole équilatère

$$\frac{u^2 - v^2}{2} = \log\varepsilon.$$

C'est la région où

$$\frac{u^2 - v^2}{2} < \log\varepsilon.$$

C'est la région ne contenant pas l'origine.

Le point $i\sqrt{2z}$ décrira la région où

$$\frac{v^2 - u^2}{2} < \log \varepsilon,$$

limitée par l'hyperbole conjuguée de la précédente et contenant les parties à l'infini de l'axe réel (axe des u) positif et négatif. L'angle des asymptotes étant 45° et la fonction cosinus étant périodique, de période 2π, on voit qu'*elle prendra toutes les valeurs finies sans exception dans la région précédente.*

14. Tout ce qu'on a dit jusqu'ici suppose une seule condition : à savoir que *la solution considérée* G(Z) *de*

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)]$$

soit holomorphe en un certain point A *de l'ensemble parfait* E'_{R_1} *qui correspond à l'itération de* $R_1(Z)$.

Car, sous cette seule supposition, on peut déterminer un point θ de E'_{R_1} (suffisamment voisin de A) qui soit point double répulsif pour une certaine itérée $R_1^{(k)}(Z)$ de $R_1(Z)$ et de façon que G(Z) soit holomorphe en θ [avec au besoin $G'(\theta) \neq 0$, ce qui, à vrai dire, n'est qu'accessoire].

En posant

$$\mathcal{R}_1(Z) = R_1^{(k)} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_2(Z) = R_2^{(k)},$$

on aura

$$G[\mathcal{R}_1] = \mathcal{R}_2[G]$$

et l'on verra que G se trouve définie dans tout le plan Z, fonction multiforme, à partir de ses valeurs au voisinage de θ, les points critiques algébriques ou transcendants étant ceux de de la fonction inverse de la fonction de Poincaré relative au point double répulsif θ et à la fonction $\mathcal{R}_1$.

CHAPITRE II.

SOLUTIONS UNIFORMES DE $G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)]$.

CARACTÈRES GÉNÉRAUX.

15. Nous allons maintenant particulariser le problème proposé au début : trouver les solutions de G(Z) de (3) qui soient *uniformes dans*

tout le plan Z et méromorphes en un certain point A *de l'ensemble* E'_{R_1} *relatif à* $R_1(Z)$.

La solution considérée n'admettra plus pour points critiques algébriques les points critiques algébriques de $\gamma_1(Z)$, mais il pourra arriver que les points critiques transcendants de $\gamma_1(Z)$ demeurent des points singuliers essentiels de $G(Z)$. Reprenons l'expression

$$G_{g_p}(Z) = \Gamma_2[g_p\{\gamma_1(Z)\}^p].$$

Supposons qu'au point Z_0 considéré une branche au moins de $\gamma_1(Z)$ soit régulière ou n'ait qu'un point critique algébrique. Ceci arrivera toujours si Z_0 n'est pas une des deux valeurs exceptionnelles possibles de la fonction $\Gamma_1(z)$.

La branche holomorphe ou algébroïde en Z_0 de $\gamma_1(Z)$ donnera pour $\Gamma_2[g_p\{\gamma_1(Z)\}^p]$ une branche méromorphe ou algébroïde en Z_0 et, comme $G_{g_p} = \Gamma_2[g_p\{\gamma_1(Z)\}^p]$ est uniforme, ce sera une *fonction méromorphe en* Z_0.

On voit que si G_{g_p} est supposée uniforme, ses seuls points singuliers essentiels possibles à distance finie ou infinie ne pourront être que les deux valeurs exceptionnelles de la fonction $\Gamma_1(z)$, dès l'instant que G est supposée méromorphe en un point de E'_{R_1} ensemble parfait défini par l'itération de R_1.

Or, les valeurs exceptionnelles possibles de $\Gamma_1(z)$ ne sont autres, comme on l'a rappelé aux n^{os} 1 et 2, que les points exceptionnels de l'itération de la substitution $[Z|R_1(Z)]$. Suivant qu'il n'y a pas de ces points exceptionnels ou qu'il y en a un ou deux, on a trois cas à envisager.

16. *Premier cas.* — La substitution $[Z|R_1(Z)]$ n'a pas de point exceptionnel : elle ne peut se ramener ni à un polynome, ni à $Z_1 = Z^{\pm k}$ par une même transformation homographique sur Z et sur $Z_1 = R_1(Z)$.

Alors G_{g_p} ne peut avoir de point singulier essentiel. *C'est une fonction rationnelle*, dès l'instant qu'on la suppose uniforme dans tout le plan et méromorphe en un point au moins de E'_{R_1} ensemble parfait relatif à R_1.

On peut encore dire que toute solution uniforme et *non rationnelle* de l'équation

$$G[R_1(Z) = R_2[G(Z)]$$

admet nécessairement pour points singuliers essentiels tous les points de l'ensemble parfait E'_{R_1} *que définit l'itération de* $[Z|R_1(Z)]$, *lorsqu'on suppose que cette substitution ne se ramène par homographie ni à* $Z_1 =$ *polynome en* Z, *ni à* $Z_1 = Z^{\pm k}$. En particulier, *toute solution méromorphe de cette équation se réduit à une fonction rationnelle.*

Un cas particulier de cette proposition a été donnée par M. Fatou dans le cas où $[Z|R_1(Z)]$ est une substitution à cercle fondamental (voir *Bull. Soc. math.*, t. XLVIII, n° 40, p. 216).

17. *Deuxième cas.* — Si la substitution $Z|R_1(Z)$ se ramène par homographie à

$$Z_1 = Z^{\pm k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \infty),$$

toute solution *uniforme* de

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)]$$

n'aura dans tout le plan que deux points singuliers essentiels possibles qui seront 0 et ∞ lorsque $R_1(Z)$ aura été ramenée à $Z_1 = Z^{\pm k}$ et, de toute façon, qui seront les deux points exceptionnels de l'itération de $[Z|R_1(Z)]$. Supposons la réduction canonique faite par une même substitution sur Z et $R_1(Z)$; $G(Z)$ uniforme et satisfaisant à

$$G[Z^k] = R_2[G(Z)]$$

ne pourra avoir d'autre point singulier essentiel que 0 et ∞. La fonction $\Gamma_1(z)$ relative à $Z_1 = Z^k$ étant e^z, on aura

$$z = \gamma_1(Z) = \log Z \qquad \text{et} \qquad G_{g_p}(Z) = \Gamma_2[g^p(\log Z)^p) = \mathcal{G}(\log Z),$$

$\mathcal{G}(z)$ étant une fonction méromorphe de z.

Lorsque Z décrira un cercle autour de l'origine, $\log Z$ augmentera de $2\pi i$, et pour que $G_{g_p}(Z)$ soit uniforme, il faudra que $\mathcal{G}(z)$ admette la période $2\pi i$.

On pourra encore écrire

$$\Gamma_2[g_p z^p] = G_{g_p}[e^z],$$

$G_{g_p}(Z)$ n'ayant d'autres points singuliers essentiels que 0 et ∞.

18. Donnons ici un exemple simple et remarquable du cas précédent.

Prenons $Z = Z^k$, k entier positif, et supposons que la substitution $Z | R_2(Z)$ ait le point double répulsif $Z = 1$ commun avec $[Z | Z^k]$. Le multiplicateur, pour cette dernière, est $s = k$. Je chercherai une solution

$$G(Z) = 1 + g_2(Z-1)^2 + \ldots$$

correspondant à $p = 2$.

Alors, il faudra que le multiplicateur de R_2 pour $Z = 1$ soit égal à k^2, carré du multiplicateur de R_1 pour $Z = 1$.

Considérons alors la fonction méromorphe, doublement périodique, $\Gamma(z)$ suivante, aux périodes $(2\pi i, a)$ (a réel positif)

$$\Gamma(z) = \wp(z + \pi i),$$

$\wp(u)$ étant la fonction classique de Weierstrass relative aux périodes fondamentales $2\pi i$, a.

$\Gamma(z)$ est holomorphe à l'origine, et c'est une fonction *paire elliptique d'ordre* 2. λ étant un entier quelconque, $\Gamma(\lambda z)$ sera donc une fonction rationnelle de $\Gamma(z)$, à cause de cette parité de $\Gamma(z)$ que respecte la multiplication de l'argument par un entier.

On aura

$$\Gamma(z) = A_0 + A_1 z^2 + \ldots \qquad [A_0 = \wp(\pi i)].$$

Donc

$$\gamma(z) = \frac{\Gamma(z)}{A_0} = 1 + \mu z^2 + \ldots$$

sera une fonction paire de z et évidemment $\gamma(\lambda z)$ sera fonction rationnelle de $\gamma(z)$, puisque $\Gamma(\lambda z)$ l'est de $\Gamma(z)$, toutes les fois que λ sera entier positif.

Considérons

$$\Gamma_2(z) = \gamma\left[\sqrt{\frac{z}{\mu}}\right];$$

son développement autour de l'origine est

$$\Gamma_2(z) = 1 + z + \ldots$$

et c'est une fonction méromorphe puisque γ est paire

On aura

$$\Gamma_2(z\lambda^2) = \gamma\left[\lambda\sqrt{\frac{z}{\mu}}\right].$$

Donc $\Gamma_2(z\lambda^2)$ sera fonction rationnelle de $\Gamma_2(z) = \gamma\left[\sqrt{\frac{z}{\mu}}\right]$ pour toute valeur entière positive λ. Je prends $\lambda = k^2$,

$$\Gamma_2(zk^2) = R_2[\Gamma_2(z)],$$

$[Z \mid R_2(Z)]$ sera une substitution rationnelle admettant $Z = 1$ pour point double répulsif de multiplicateur k^2 ; $\Gamma_2(z)$ *est la fonction de Poincaré correspondante.*

Si, dès lors, je choisis $g_2 = \mu$, $p = 2$, la solution de l'équation

$$G[Z^k] = R_2[G(Z)],$$

qui sera de la forme

$$G(Z) = 1 + g_2(Z-1)^2 + g_3(Z-1)^3 + \ldots,$$

s'obtient par la formule

$$G(Z) = \Gamma_2[g_2(\log Z)^2] = \Gamma_2[\mu(\log Z)^2].$$

Or

$$\Gamma_2(z) = \gamma\left[\sqrt{\frac{z}{\mu}}\right] = \frac{1}{A_0}\Gamma\left[\sqrt{\frac{z}{\mu}}\right].$$

Donc

$$G(Z) = \frac{1}{A_0}\Gamma[\log Z).$$

Or $\Gamma(u)$ est une fonction elliptique aux périodes $2\pi i$, a; en posant

$$u = \log Z,$$

la fonction $\Gamma(\log Z)$ sera méromorphe en Z, sauf peut-être aux points $Z = 0$ et $Z = \infty$.

Or, ces deux points *sont effectivement des points singuliers essentiels de* $\Gamma(\log Z)$, puisque, en effet, l'existence, pour $\Gamma(z)$, de la période a entraîne

$$G(Z) = G(Ze^a),$$

ce qui prouve que les racines de toute équation

$$G(Z) = \alpha$$

admettent o et ∞ pour points limites.

La solution $G(Z)$ trouvée est donc bien uniforme en Z et avec les deux points singuliers essentiels isolés o et ∞. On verrait aussitôt que $G(Z)$ est d'ordre nul au voisinage du point à l'infini, comme au voisinage de zéro [c'est-à-dire que la suite des racines de $G(Z) = \alpha$ qui tendent vers $+\infty$ est d'ordre nul].

19. Ce dernier phénomène est d'ailleurs général. Reprenons la formule générale

$$\Gamma_2(g_p z^p) = G_{g_p}(e^z),$$

G_{g_p} étant la solution méromorphe considérée de

$$G(z^k) = R_2[G(Z)].$$

C'est un résultat connu que $\Gamma_2(z)$, fonction de Poincaré de R_2 pour le point double répulsif considéré, est une fonction d'*ordre fini* et *non nul* (voir par exemple Valiron, Thèse *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini*, n° 48).

$\Gamma_2(g_p z^p)$ est aussi d'ordre fini et non nul.

Or, si G_{g_p} est méromorphe et d'ordre *non nul*, on montre aussitôt que $G_{g_p}(e^z)$ est d'ordre infini, d'où une contradiction.

En effet, $Z_1, Z_2, \ldots$ étant les zéros de $G(Z) - a$ [a, valeur non exceptionnelle de $G(Z)$] dont les modules sont $r_1, r_2, \ldots$, les zéros de $G(e^z) - a$ seront tous les points

$$\log r_n + 2k\pi i + i\theta_n \qquad [Z_n = r_n e^{i\theta_n}]$$
$$(r = 1, 2, \ldots, \infty;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty).$$

Si G est d'ordre non nul, la série

$$\sum \frac{1}{r_n^k},$$

pour k positif et bien choisi, est divergente; il suffit de prendre k inférieur à l'ordre de G.

Dès lors, la série

$$\sum \frac{1}{(\log r_n)^\lambda}$$

diverge quel que soit λ, car $\frac{r_n^k}{(\log r_n)^\lambda}$ grandit indéfiniment avec n quel que soit λ.

La série

$$\sum \frac{1}{(\log r_n + i\theta_n)^\lambda}$$

devient aussi divergente, car

$$-\pi \leqq \theta_n \leqq \pi;$$

a fortiori

$$\sum_n \sum_k \frac{1}{(\log r_n + 2k\pi i + i\theta_n)^\lambda}$$

sera divergente pour tout λ.

Donc $G(e^z)$ est d'ordre *infini*. G ne peut donc être d'ordre $\neq 0$.

19 *bis*. On peut cependant montrer que *si* 0 *cesse d'être point singulier essentiel de* $G(Z)$, *l'infini cesse de l'être aussitôt et* $G(Z)$ *devient rationnelle*.

Ce point ayant déjà été démontré avec soin, nous nous contenterons de renvoyer le lecteur au *Bulletin de la Société mathématique de France*, tome XLVIII, n° 41 du Mémoire de M. P. Fatou.

En voici un exemple simple analogue à celui du n° 13.

Reprenons

$$Z_1 = R_1(Z) = Z^2,$$
$$Z_2 = R_2(Z) = 2Z^2 - 1$$

comme au n° 13.

Prenons cette fois, pour point double répulsif commun, $Z = 1$ avec multiplicateur 2 pour la première, 4 pour la seconde.

Nous prendrons

$$G_{g_2}(Z) = 1 + g_2(Z-1)^2 + \ldots \qquad \text{avec} \qquad g_2 = \frac{1}{2}, \qquad p = 2.$$

La fonction de Poincaré pour $Z_2 = R_2(Z)$ et pour $Z = 1$ est

$$\Gamma_2(z) = \cos i\sqrt{2z}.$$

Pour $\Gamma_1(z)$ ce sera

$$Z = \Gamma_1(z) = e^z, \qquad z = \log Z.$$

Donc, on aura ici

$$G_{g_2}(Z) = \cos i\sqrt{2.\frac{1}{2}(\log Z)^2} = \cos(i \log Z) = \operatorname{ch}(\log Z),$$

$$G_{g_2}(Z) = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right)$$

qui n'admet pas $Z = 0$ pour point singulier essentiel et se réduit bien à une fraction rationnelle.

20. *Troisième cas.* — Si la substitution $[Z | R_1(Z)]$ a un point exceptionnel, on enverra ce point à l'infini par une homographie sur Z, $R_1(Z)$. Alors $[Z | R_1(Z)]$ devient un polynome $Z_1 = P(Z)$ et *toute solution uniforme* $G(Z)$ *de*

$$G[P(Z)] = R_2[G(Z)],$$

méromorphe en un point de l'ensemble parfait E'_P *relatif à l'itération de* $P(Z)$, *est méromorphe dans tout le plan.*

En supposant que P et R_2 ont un point double répulsif commun à l'origine, dont Γ_1 et $\Gamma_2(z)$ sont les fonctions de Poincaré, Γ_1 sera ici une fonction *entière* et l'on aura

$$\Gamma_2[g_p z^p] = G_{g_p}[\Gamma_1(z)]$$

si, à l'origine,

$$G_{g_p} = g_p Z^p + \ldots.$$

On peut voir de suite, par la considération des *ordres*, que, *si* G *n'est pas d'ordre nul*, $G[\Gamma_1(z)]$ *sera d'ordre infini.*

21. En effet, partons de $\Gamma_1(sz) = P[\Gamma_1(z)]$, en désignant par s le multiplicateur de P à l'origine,

$$P(Z) = sZ + \ldots.$$

Si l'on ordonne P par puissances décroissantes, on aura

$$P(Z) = A_0 Z^k + \ldots,$$

et si l'on prend $|Z| \geqq r_1^0$, r_1^0 étant assez grand, on aura

$$|P(Z)| > |A_0 - \varepsilon_1| |Z^k| > |Z|^{k-\varepsilon},$$

ε étant un nombre positif assez petit dépendant de r_1^0.

Choisissons, dans le plan z, un cercle de centre O, de rayon r_0 assez grand pour que, dans ce cercle r_0, $\Gamma_1(z)$ prenne toutes les valeurs Z dont le module est $\leqq r_1^0$. Cela est toujours possible.

Alors, dans le cercle $|z| \leqq |s| r_0$, $\Gamma_1(z)$ prendra toutes les valeurs Z en module telles que

$$|Z| \leqq (r_1^0)^{k-\varepsilon},$$

puisque, à une aire du plan Z qui recouvre le cercle $|Z| \leqq r_1^0$, l'itération par $P(Z)$ fait correspondre une aire qui recouvre le cercle $|Z| \leqq (r_1^0)^{k-\varepsilon}$, et puisque

$$\Gamma_1(sz) = P[\Gamma_1(z)].$$

De même, dans le cercle $|z| \leqq r_0 |s|^2$, $\Gamma_1(z)$ prendra toutes les valeurs Z en module telles que

$$|Z| \leqq (r_1^0)^{(k-\varepsilon)^2}.$$

Et généralement, dans le cercle $|z| \leqq r_0 |s|^\lambda$, λ entier et positif quelconque, $\Gamma_1(Z)$ prendra toutes les valeurs Z en module telles que

$$|Z| \leqq (r_1^0)^{(k-\varepsilon)^\lambda}.$$

Ceci posé, soit a une valeur non exceptionnelle quelconque de G, supposée d'ordre non nul. Les racines Z_i de

$$G(Z) = a$$

sont alors telles qu'il existe un nombre positif μ (inférieur à l'ordre) tel que la série

$$\sum_i \frac{1}{R_i^\mu}$$

diverge

$$R_i = |Z_i|.$$

Considérons l'équation

$$\Gamma_1(z) = Z_i,$$

il est clair que si l'on choisit pour λ_i le plus petit entier tel que

$$(r_1^0)^{(k-\varepsilon)^{\lambda_i}} > R_i,$$

la fonction $\Gamma_1(z)$ prendra la valeur Z_i dans le cercle $r_0 s^{\lambda_i}$; λ_i devra être choisi tel que

$$(k-\varepsilon)^{\lambda_i} > \frac{LR_i}{Lr_1^0}$$

ou bien

$$\lambda_i > \frac{LLR_i - LLr_1^0}{L(k-\varepsilon)}.$$

Je désigne par z_i un tel point, où $\Gamma(z) = Z_i$, il y en aura sûrement un de module ρ_i tel que

$$\rho_i \leqq r_0 |s|^{\lambda_i}$$

en posant

$$\lambda_i = \frac{LLR_i - LLr_1^0}{L(k-\varepsilon)} + 1.$$

22. L'équation

$$G[\Gamma_1(z)] = a$$

compte, entre autres racines, toutes les racines z_i qu'on vient de déterminer, de façon que

$$\rho_i < r_0 |s|^{\lambda_i}.$$

Si donc je désigne par ζ_k toutes les racines de $G[\Gamma_1(z)] = a$, la somme $\sum \frac{1}{|\zeta_k|^\alpha}$ est $> \sum \frac{1}{\rho_i^\alpha}$ puisque les ρ_i ne sont qu'une partie des $|\zeta_k|$ (α est positif quelconque) quel que soit α positif fixe. Je dis que la série $\sum \frac{1}{\rho_i^\alpha}$ diverge.

23. En effet,

$$\frac{1}{\rho_i^\alpha} > \frac{1}{r_0^\alpha |s|^{\alpha\lambda_i}},$$

$$\sum \frac{1}{\rho_i^\alpha} > \frac{1}{r_0^\alpha} \sum \frac{1}{|s|^{\alpha\lambda_i}}.$$

Tout revient à démontrer que

$$\sum \frac{1}{|s|^{\alpha\lambda_i}} = \sum \frac{1}{\sigma^{\lambda_i}}$$

diverge. $\sigma = |s|^\alpha$ est > 1 quel que soit α.

Or

$$\sigma^{\lambda_i} = \sigma^{\mathrm{ALLR}_i+\mathrm{B}},$$

A et B étant des constantes $\left(\mathrm{A} = \frac{1}{\mathrm{L}(k-\varepsilon)}\right)$;

$$\sigma^{\lambda_i} = e^{\mathrm{A'LLR}_i+\mathrm{B'}},$$

$$\mathrm{A'} > 0, \qquad \mathrm{A'} = \frac{\mathrm{L}\sigma}{\mathrm{L}(k-\varepsilon)}$$

et la nature de la série $\sum \frac{1}{\sigma^{\lambda_i}}$ est la même que celle de

$$\sum \frac{1}{e^{\mathrm{A'LLR}_i}} = \sum \frac{1}{(\mathrm{LR}_i)}.$$

Or, quel que soit A′ positif, R_i grandissant indéfiniment, il est visible que $\frac{\mathrm{R}_i^{\mu}}{(\mathrm{LR}_i)^{\mathrm{A'}}}$ grandit indéfiniment; par conséquent $\sum \frac{1}{(\mathrm{LR}_i)^{\mathrm{A'}}}$ diverge comme $\sum \frac{1}{\mathrm{R}_i^{\mu}}$.

Il est donc prouvé, que $\mathrm{G}[\Gamma_1(z)]$ est d'ordre infini, si G n'est pas d'ordre nul. Et puisque $\Gamma_2(g_p z^p)$ est, comme $\Gamma_2(z)$, d'ordre fini, il résulte de

$$\Gamma_2[g_p z^p] = \mathrm{G}_{g_p}[\Gamma_1(z)]$$

que G *ne peut être que d'ordre nul si elle est méromorphe.*

Lorsque la substitution $[\mathrm{Z}|\mathrm{R}_1(\mathrm{Z})]$ se ramène à la forme polynomiale $[\mathrm{Z}|\mathrm{P}(\mathrm{Z})]$ par une transformation homographique, toute solution *uniforme* de

$$\mathrm{G}[\mathrm{P}(\mathrm{Z})] = \mathrm{R}_2[\mathrm{G}(\mathrm{Z})]$$

ne peut être qu'une fonction d'ordre nul ou une fraction rationnelle, dès l'instant qu'on la suppose méromorphe en quelque point de l'ensemble parfait E'_{P} *relatif à l'itération de* $[\mathrm{Z}|\mathrm{P}(\mathrm{Z})]$.

Toute solution uniforme qui ne serait *ni rationnelle, ni méromorphe d'ordre nul, admet nécessairement tous les points de* E'_{R} *pour points singuliers essentiels.*

24. G peut-elle être une fonction *méromorphe* d'ordre nul? Oui, en voici un exemple.

Je prends le polynome $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{P}(\mathrm{Z}) = 2\mathrm{Z}^2 - 1$ déjà envisagé précédemment. $Z = 1$ est un point *double répulsif* de multiplicateur 4 pour la substitution $Z_1 = 2Z^2 - 1$. La fonction de Poincaré $\Gamma_1(z)$ correspondante, c'est

$$Z = \Gamma_1(z) = \cos i\sqrt{2z}.$$

La fonction inverse, c'est

$$z = -\frac{1}{2}(\arc\cos Z)^2 = \gamma_1(Z).$$

D'autre part, je considère, suivant une idée déjà utilisée au n° 18, la fonction $p(u)$ doublement périodique de Weierstrass, aux périodes 2π, a (a non réel) qui est paire et d'ordre 2.

Je pose

$$\Gamma(z) = p(z + \pi),$$

Γ est paire, elliptique, d'ordre 2, et holomorphe pour $z = 0$,

$$\Gamma(z) = A_0 + A_1 Z^2 + \ldots.$$

Je considère

$$\gamma(z) = \frac{\Gamma(z)}{A_0},$$

c'est encore une fonction paire, elliptique, d'ordre 2, holomorphe à l'origine :

$$\gamma(z) = 1 + \mu z^2 + \ldots.$$

On sait que $p(u)$ étant paire, $p(\lambda u)$ est fonction rationnelle de $p(u)$ pour tout entier positif λ. Il en est de même de $\Gamma(z)$, à cause de sa parité et de son ordre; $\Gamma(\lambda z)$ est fonction rationnelle de $\Gamma(z)$. Il en est de même de $\gamma(z)$.

Je prends

$$\Gamma_2(z) = \gamma\left[\sqrt{\frac{z}{\mu}}\right].$$

A cause de la parité de γ, Γ_2 est une fonction uniforme et méromorphe de z

$$\Gamma_2(z) = 1 + z + \ldots.$$

On a

$$\Gamma_2(z\lambda^2) = \gamma\left[\lambda\sqrt{\frac{z}{\mu}}\right].$$

Or, pour λ entier, $\gamma(\lambda u)$ est fonction rationnelle de $\gamma(u)$; donc $\gamma\left[\lambda\sqrt{\frac{z}{\mu}}\right]$ sera fonction rationnelle de $\gamma\left[\sqrt{\frac{z}{\mu}}\right]$.

Donc $\Gamma_2(z\lambda^2)$ *est fonction rationnelle de* $\Gamma_2(z)$ *pour tout entier positif* λ.

Je vais prendre $\lambda = 2$; alors

$$\Gamma_2(4z) = R_2[\Gamma_2(z)].$$

La substitution $[Z|R_2(Z)]$ est rationnelle. $Z=1$ est un point double *répulsif de multiplicateur* 4, comme pour $[Z|P(Z)]$. La fonction de Poincaré est évidente : c'est $\Gamma_2(z)$.

25. Je choisis pour l'équation

$$G[P(Z)] = R_2[G(Z)]$$

une solution se développant autour de $Z = 1$ par la formule

$$G(Z) = 1 + g_1(Z-1) + \ldots,$$

c'est-à-dire, dans nos notations habituelles, $p = 1$.

On aura

$$G_{g_1}(Z) = \Gamma_2[g_1\gamma_1(Z)]$$

avec

$$\gamma_1(Z) = -\frac{1}{2}(\operatorname{arc}\cos Z)^2.$$

Donc

$$G_{g_1}(Z) = \Gamma_2\left[-\frac{g_1}{2}(\operatorname{arc}\cos Z)^2\right] = \gamma\left[\operatorname{arc}\cos Z\sqrt{-\frac{g_1}{2\mu}}\right].$$

Je prends maintenant $g_1 = -2\mu$.

Il vient alors

$$G(Z) = \gamma[\operatorname{arc}\cos Z] = \frac{1}{A_0}\Gamma[\operatorname{arc}\cos Z].$$

La fonction Γ est paire et admet la période 2π, donc $G(Z)$ est une fonction qui a toujours la même valeur, quelle que soit la détermination choisie pour $\operatorname{arc}\cos Z$. C'est une fonction uniforme dans tout le plan des Z et méromorphe en tout point à distance finie. Elle est donc méromorphe ou rationnelle.

Or elle n'est pas rationnelle. En effet, on a

$$G(\cos z) = \frac{1}{A_0}\Gamma(z).$$

Partons d'une valeur arbitraire z_0; toutes les valeurs $z_0 + na$ font acquérir à $\Gamma(z)$ la même valeur que z_0, puisque a est une période de $\Gamma(z)$

$$G[\cos(z_0 + na)] = G[\cos z_0].$$

Les points

$$Z_0 = \cos z_0, \qquad Z_1 = \cos(z_1 + a), \qquad \ldots, \qquad Z_n = \cos(z_0 + na)$$

font acquérir à $G(Z)$ la même valeur.

De plus, a n'étant pas réel, la partie imaginaire de $z_0 + na$ tendra vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand n tend vers ∞, suivant le signe de la partie imaginaire de a. On en conclut que Z_n tend vers l'infini si n tend vers l'infini. L'équation $G(Z) = \alpha$ a donc toujours une infinité de racines s'accumulant à l'infini. G est donc réellement méromorphe et non rationnelle.

Si l'on voulait résoudre complètement $G(Z) = \alpha$, on aurait à résoudre

$$\Gamma(\text{arc}\cos Z) = A_0\alpha,$$

ce qui donnerait

$$\text{arc}\cos Z = \pm\zeta + m_1 2\pi + m_2 a,$$

m_1 et m_2 entiers quelconques.

ζ étant une racine de $p(\zeta + \pi) = A_0\alpha$,

$$Z = \cos[\pm\zeta + m_1 2\pi + m_2 a] = \cos(\pm\zeta + m_2 a).$$

Il suffit de prendre

$$Z = \cos(\zeta + m_2 a), \qquad m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty.$$

Ces points n'ont d'autre point limite que le point à l'infini. On peut voir aussi que le module de

$$Z_n = \cos(\zeta + na)$$

est comparable à $e^{|n \mathfrak{I}(a)}$ pour n très grand.

$\mathfrak{J}(a)$ désignant la partie imaginaire de a, qu'on peut supposer > 0, la suite des Z_n est donc évidemment d'*ordre zéro*. G est bien d'ordre nul.

26. *Conclusion générale.* — Considérons l'équation

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)]. \tag{3}$$

1° Si $[Z \mid R_1(Z)]$ est une substitution sans valeurs exceptionnelles, c'est-à-dire ne se ramenant ni à un polynome, ni à $[Z \mid Z^{\pm k}]$, l'équation (3) n'a d'autres solutions méromorphes que des *fonctions rationnelles*.

2° Si $[Z \mid R_1(Z)]$ se ramène à un *polynome* $[Z \mid P(Z)]$, l'équation (3) peut admettre des solutions méromorphes qui ne soient pas des fonctions rationnelles, mais ce sont toujours des fonctions méromorphes d'*ordre nul*.

3° Si $[Z \mid R_1(Z)]$ se ramène à $[Z \mid Z^{\pm k}]$, k entier positif, l'équation (3) peut admettre des solutions uniformes avec deux points singuliers essentiels 0 et ∞. Ces solutions sont d'*ordre nul*. Les deux points singuliers essentiels *existent simultanément ;* si l'un d'eux cesse d'être essentiel, l'autre cesse de l'être aussitôt; autrement dit, l'équation (3) n'admet ici d'autres solutions méromorphes dans tout le plan que des fonctions rationnelles.

4° Dans tous les cas, toute autre solution uniforme de (3) admet tous les points de l'ensemble parfait E'_{R_1} pour points singuliers essentiels.

CHAPITRE III.

UN CRITÉRIUM D'UNIFORMITÉ POUR LES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)]. \tag{3}$$

27. Lorsque la solution G n'admet pas pour points singuliers essentiels tous les points de l'ensemble parfait E'_{R_1} relatifs à l'itération de $Z_1 = R_1(Z)$, on a pu supposer, sans restreindre la généralité, que R_1 et R_2 admettaient toutes deux l'origine pour point double répulsif. G s'est trouvé alors uniforme sur la surface de Riemann correspondant

à la fonction $\gamma_1(Z)$, inverse de la fonction de Poincaré $\Gamma_1(z)$ de R_1 relative à l'origine.

Si $s = R'_1(0)$, $|s| > 1$ et $R_1(0) = 0$, on a

$$\Gamma_1(sz) = R_1[\Gamma_1(z)],$$
$$Z = \Gamma_1(z),$$
$$z = \gamma_1(Z).$$

Pour simplifier la suite de cette exposition, nous supposerons

$$G'(0) \neq 0,$$

c'est-à-dire qu'autour de $Z = 0$ on a

$$G_{g_1}(Z) = g_1 Z + g_2 Z^2 + \ldots, \qquad g_1 \neq 0.$$

On sait alors que, si $\Gamma_2(z)$ est la fonction de Poincaré pour R_2,

$$R_2(0) = 0, \qquad R'_2(0) = R'_1(0) = s, \qquad |s| > 1,$$
$$\Gamma_2(sz) = R_2[\Gamma_2(z)],$$

on aura

$$G_{g_1}(Z) = \Gamma_2[g_1 \gamma_1(Z)].$$

Dans quel cas peut-on affirmer que G_{g_1} est uniforme en Z dans tout le plan? C'est là une question délicate et c'est une pure tautologie que de dire : il faut et il suffit que, pour toutes les racines de l'équation en z,

$$\Gamma_1(z) = Z,$$

$\Gamma_2(g_1 z)$ doit acquérir la même valeur, et ceci quel que soit z.

Il y a un cas très intéressant où l'uniformité de G dans une partie du plan entraîne l'uniformité dans tout le plan : c'est celui où la substitution $[Z | R_1(Z)]$ est *à cercle fondamental.*

M. Fatou (¹) a étudié l'équation (3) en supposant, plus spécialement, que $[Z | R_1(Z)]$ est de *première espèce*, c'est-à-dire que l'ensemble E'_{R_1} se compose de toute la circonférence du cercle fondamental et, en outre, que l'équation (3) admette une solution *méromorphe dans le cercle fondamental et sur ce cercle lui-même.*

(¹) *Bull. Soc. math. Fr.*, 1920, nos 38 et suivants.

Il a alors démontré qu'une pareille solution de (3) était *nécessairement rationnelle*.

Nous pourrons supposer à volonté que le cercle fondamental est le cercle trigonométrique ou le demi-plan supérieur, sa circonférence étant la circonférence de rayon 1 ou l'axe réel, suivant les cas, et nous allons, plus généralement, étudier l'équation (3) dans le cas où $[Z|R_1(Z)]$ est de *première ou de deuxième espèce*. On va voir que si elle admet une solution *uniforme dans le cercle fondamental*, cette solution sera *uniforme dans tout le plan* et cette propriété tient essentiellement à la *symétrie, relativement au cercle fondamental, de la surface de Riemann sur laquelle* $\gamma_1(Z)$ *est uniforme*.

28. Pour le voir aisément, supposons que le cercle fondamental soit le demi-plan supérieur; $R_1(Z)$ est à coefficients réels, $R'_1(0) = s$ est réel, $s > 1$.

L'équation

$$\Gamma_1(sz) = R_1[\Gamma_1(z)]$$

définit une fonction méromorphe $\Gamma_1(z)$ à coefficients réels. Les voisinages de $Z = 0$ et de $z = 0$ se correspondent de façon conforme par

$$Z = \Gamma_1(z),$$

l'axe réel de Z se transformant en l'axe réel de z au voisinage de l'origine. Que R_1 soit de première ou de deuxième espèce, tout E'_{R_1} sera engendré par un nombre fini p d'itérations de la partie de E'_{R_1} situé sur un petit segment AB de l'axe réel entourant l'origine. A la portion de E'_{R_1} située sur AB correspond dans le plan z un ensemble situé sur un petit segment $\alpha\beta$ comprenant l'origine. La multiplication indéfinie de cet ensemble par $s, s^2, \ldots$ engendre un ensemble situé sur l'axe réel du plan z et qui sera parfait discontinu si R_1 est de deuxième espèce, qui sera composé de tout l'axe réel si R_1 est de première espèce. Cet ensemble est l'ensemble $\mathcal{E}_s$, où la famille des $\Gamma_1(s^n z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ n'est pas normale. Il correspond à E'_{R_1} par la transformation $Z = \Gamma_1(z)$. $\mathcal{E}_s$ ne peut contenir aucun point qui ne soit sur l'axe réel.

En effet, si en z_0 non réel on avait $\Gamma_1(z_0) = Z_0$, Z_0 étant réel, on aurait

$$\Gamma_1(z_0) = R_1\left[\Gamma_1\left(\frac{z_0}{s}\right)\right].$$

Or $\Gamma_1(z_0) = Z_0$ étant réel et l'équation en ζ, $R_1(\zeta) = Z_0$ n'ayant que des racines réelles puisque $[Z|R_1(Z)]$ est à cercle fondamental, $\Gamma_1\left(\frac{z_0}{s}\right)$ serait aussi réel, et, plus généralement, tous les $\Gamma_1\left(\frac{z_0}{s^n}\right)$ seraient réels.

Tous les points $z_0, \frac{z_0}{s}, \frac{z_0}{s^2}, \ldots, \frac{z_0}{s^n}$ s'alignent sur une demi-droite Δ issue de o et tendent vers l'origine. Δ est distincte de l'axe réel, si z_0 n'est pas réel. On aurait donc, au voisinage de l'origine des points $\frac{z_0}{s^n}$, où Γ_1 prend une valeur réelle sans que ces points soient sur l'axe réel. Ceci contredit le fait signalé plus haut : $Z = \Gamma_1(z)$ fait correspondre les voisinages des origines dans le plan Z et z de façon que les axes réels se correspondent. Il est donc prouvé que l'équation en z

$$\Gamma_1(z) = Z,$$

Z étant réel, a toutes ses racines réelles.

Si l'on prend Z dans le demi-plan supérieur, toutes les racines z seront dans le demi-plan supérieur. Si Z reçoit des valeurs ζ_1 et ζ_2 symétriques par rapport à l'axe réel, les racines des équations

$$\Gamma_1(z) = \zeta_1,$$
$$\Gamma_1(z) = \zeta_2$$

sont deux à deux symétriques par rapport à l'axe réel du plan z. Tout ceci est immédiat. Comme conséquence, $\mathcal{C}_s$ est tout entier sur l'axe réel.

Il est aussi immédiat que l'équation $R_1'(Z) = 0$ n'a aucune racine réelle si $R_1(Z)$ admet pour cercle fondamental le demi-plan supérieur. Par conséquent les conséquents, dans l'itération $[Z|R_1(Z)]$, de ces racines ne fournissent aucun point réel. Mais les racines de $R_1'(Z) = 0$ étant deux à deux symétriques par rapport à l'axe réel, l'itération de ces racines fournira une suite de points dans le demi-plan supérieur et une suite dans le demi-plan inférieur symétrique de la première par rapport à l'axe réel. On en conclut, par un raisonnement déjà fait (¹), que l'équation $\Gamma'_1(z) = 0$ n'a aucune racine réelle et ses racines sont deux à deux symétriques par rapport à l'axe réel. Ces racines proviennent, par $Z = \Gamma_1(z)$, de la suite des itérées indéfinies des racines de $R'_1(Z) = 0$. Il y a symétrie parfaite dans le plan z et dans le plan Z grâce à la transformation $Z = \Gamma_1(z)$.

Considérons la fonction $z = \gamma_1(Z)$; ses points critiques algébriques sont les conséquents successifs dans l'itération par R_1 des points où $R'_1(Z) = 0$. On connaît la distribution de ces points. Deux cas sont possibles :

1° $[Z \mid R_1(Z)]$ est de *première espèce et ordinaire*. Alors elle admet deux points doubles attractifs symétriques par rapport à l'axe réel vers lesquels tendent respectivement les conséquents de tout point du demi-plan supérieur et du demi-plan inférieur. Ces deux points doubles sont les deux seules valeurs asymptotiques que possède $\Gamma_1(z)$: ce sont deux points critiques transcendants pour $\gamma_1(Z)$; ils sont les points limites vers lesquels tendent les points critiques algébriques.

2° $[Z \mid R_1(Z)]$ est singulière de première espèce, ou bien elle est de deuxième espèce. Alors le point limite unique sur lequel tendent les conséquents de tout point du demi-plan supérieur ou du demi-plan inférieur est sur l'axe réel, et c'est encore un point critique transcendant, *le seul*, de $\gamma_1(Z)$ (²).

29. Ceci posé, supposons que Z, partant d'un point de l'axe réel, décrive un lacet $\mathfrak{L}_1$ dans le demi-plan supérieur, entourant un seul point critique de $\gamma_1(Z)$ et revienne à sa valeur initiale. Le point z qui lui correspond décrira dans le demi-plan supérieur une courbe ouverte C_1 allant d'un point z_1 de l'axe réel à un autre point z_2 de l'axe réel $[\Gamma_1(z_1) = \Gamma_1(z_2)]$.

A cause de la symétrie de la surface de Riemann de $\gamma_1(Z)$ il est clair que, si Z décrit un lacet $\mathfrak{L}_2$ symétrique du précédent par rapport à l'axe réel et si l'on part de Z avec la détermination z_1 de $\gamma_1(Z)$, le

(¹) *Voir* mon Mémoire *Sur la permutabilité des substitutions rationnelles*, nᵒˢ 26 à 32 de la 2ᵉ Partie.

(²) Lorsqu'il existe, on pourra le supposer à l'infini.

point z va décrire une courbe C_2 allant de z_1 à z_2 et symétrique de C_1 par rapport à l'axe réel. On en déduit que, *si Z décrit l'ensemble $\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2$ des deux lacets, z revient à sa valeur initiale.*

Plus généralement, si Z décrit une courbe fermée quelconque symétrique par rapport à l'axe réel, $z=\gamma(Z)$ revient à sa valeur initiale.

Tout ceci est presque intuitif, vu la symétrie de la surface de Riemann.

30. Reprenons alors la relation

$$G_{g_1}(Z)=\Gamma_2[g_1\gamma_1(Z)]$$

et supposons que G_{g_1} soit uniforme dans tout le demi-plan supérieur. G, holomorphe autour de l'origine, sera uniforme et holomorphe sur la surface de Riemann de $\gamma_1(Z)$. Elle sera de plus uniforme dans le plan Z.

En effet, partant d'un point Z_0 de l'axe réel, faisons décrire à Z un lacet quelconque $\mathcal{L}_2$ dans le demi-plan inférieur et considérons le lacet symétrique $\mathcal{L}_1$ dans le demi-plan supérieur. Partant de Z_0 avec $z_1=\gamma_1(Z_0)$, on revient en Z_0 avec z_2 en suivant $\mathcal{L}_2$, et en suivant $\mathcal{L}_1$ on reviendra aussi en Z_0 avec z_2 si l'on est parti avec z_1. Dans le demi-plan supérieur, G étant uniforme, on aura

$$\Gamma_2[g_1z_1]=\Gamma_2[g_1z_2]$$

puisque partant de Z_0 et suivant $\mathcal{L}_1$ on reviendra en Z_0 avec la même valeur de G qu'au départ. Il en sera donc de même si l'on suit $\mathcal{L}_2$, puisque les valeurs initiales et finales de $\gamma_1(Z)$ sont z_1 et z_2 pour $\mathcal{L}_2$ comme pour $\mathcal{L}_1$.

Tout lacet du demi-plan inférieur ramène donc la même valeur de G qu'au départ. G *est uniforme dans tout le plan si elle l'est dans le cercle fondamental, et cela tient essentiellement à la symétrie de la surface de Riemann sur laquelle $\gamma_1(Z)$ est uniforme.*

31. Dans le cas qui nous occupe ici, la substitution $[Z|R_1(Z)]$

n'a de points exceptionnels que si elle peut se ramener à la forme

$$Z_1 = R_1(Z) = Z^k \qquad (k \text{ entier} > 0);$$

le cercle fondamental est le cercle trigonométrique. Dans ce cas particulier, on a vu au n° 18 que G peut admettre les deux points exceptionnels o et ∞ comme points singuliers essentiels isolés. Si l'un de ces deux points cesse d'être essentiel, l'autre cesse de l'être par le fait même (n° 19) et G devient rationnelle.

Si la substitution $[Z \mid R_1(Z)]$, *à cercle fondamental, ne se ramène pas à* $Z_1 = Z^k$, *on est dans le cas général du n°* 16, *toute solution de* (3) *uniforme dans le cercle fondamental et méromorphe en un point de l'ensemble* E'_{R_1} *est nécessairement rationnelle.*

CHAPITRE IV.

ÉTUDE PLUS PRÉCISE DES SOLUTIONS MÉROMORPHES DE

$$(3) \qquad G[R_1] = R_2[G].$$

31 *bis*. Soit G une solution méromorphe ou rationnelle de

$$(3) \qquad G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)].$$

On posera $\zeta = G(Z)$. A tout point de plan Z, non singulier essentiel pour G, correspond un point ζ; les points singuliers essentiels de G sont : 1° ∞ si R_1 est un polynome ou s'y ramène; 2° o et ∞ si $R_2(Z) = Z^k$ ou s'y ramène.

De (3) on déduit aussitôt

$$G[R_1^{(n)}(Z)] = R_2^{(n)}[G(Z)],$$

$R_1^{(n)}$ étant l'itérée d'ordre n de R_1.

Si Z_0 est tel que $Z_0 = R_1^{(n)}(Z_0)$, alors, nécessairement,

$$G(Z_0) = R_2^{(n)}[G(Z_0)].$$

Donc ζ_0, qui correspond à Z_0, appartient à un cycle de R_2.

Le raisonnement fait au n° 4 du présent Mémoire prouve que le cycle de R_1 auquel appartient Z_0 et le cycle de R_2 auquel appartient

$\zeta_0 = G(Z_0)$, sont de même nature, c'est-à dire simultanément répulsifs, attractifs ou indifférents.

Soient E_{R_1} l'ensemble des points appartenant aux cycles répulsifs de R_1, E'_{R_1} son dérivé, E_{R_2} et E'_{R_2} les ensembles analogues pour R_2.

On sait ([1]) qu'un point exceptionnel de l'itération de R_1 n'appartient jamais à E'_{R_1}. Donc à tout point Z de E_{R_1} ou E'_{R_1} correspond par $\zeta = G(Z)$ un point de E_{R_2} ou de E'_{R_2}. Mais, en général, la transformation précédente appliquée à E'_{R_1} ne donnera qu'une partie de E'_{R_2}.

32. En effet, tout point de E'_{R_1} se caractérise par ce fait que la famille des $R_1^{(n)}(Z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ cesse d'y être normale. En un pareil point, la famille des $G[R_1^{(n)}]$ cessera d'être normale, et par suite aussi celle des $R_2^{(n)}[G(Z)]$, ce qui prouve que $G(Z)$ appartient à E'_{R_2}, comme on vient déjà de le voir. Mais si ζ est un point où les $R_2^{(n)}$ cessent d'être normales, en tout point Z_0 qui lui correspond par $G(Z) = \zeta$ on pourra bien affirmer que les $G[R_1^{(n)}]$ ne forment pas une famille normale, mais on ne pourra pas en conclure nécessairement que la famille des $R_1^{(n)}$ n'est pas normale en Z : car il pourrait arriver que la famille des $R_1^{(n)}$ fût normale en Z avec, pour limite, une constante égale à une valeur *qui soit point singulier essentiel de* $G(Z)$; des exemples de ce fait vont se rencontrer plus loin. Mais si $G(Z)$ n'a pas de point singulier essentiel, *si c'est une fonction rationnelle, la circonstance précédente n'est pas possible*, en vertu de ce fait que, dans toute région où les $R_1^{(n)}$ forment une famille normale, la famille des $G[R_1^{(n)}]$ est aussi normale lorsque G est rationnelle.

En définitive, la transformation $\zeta = G(Z)$ transforme E'_{R_1} en E'_{R_2} et réciproquement lorsque G est rationnelle, et transforme E'_{R_1} en une partie de E'_{R_2} lorsque G admet un ou deux points singuliers essentiels.

En effet, dans ce dernier cas, à tout point ζ de E'_{R_2} correspondent une infinité de valeurs Z racines de $G(Z) = \zeta$; ces valeurs s'accumulent autour des points singuliers essentiels de $G(Z)$. En chacun de ces points la famille des $R_2^{(n)}[G(Z)]$ n'étant pas normale, celle des

---

([1]) *Voir* mon Mémoire du *Journal de Jordan*, 1918, n° 19.

$G[R_1^{(n)}(Z)]$ ne l'est pas non plus; or, en vertu de la remarque déjà faite, que les points singuliers ω de $G(Z)$ sont les points exceptionnels dans l'itération de R_1, points qui sont isolés de E'_{R_1} par un domaine qui s'appelle le domaine de convergence immédiat $\mathfrak{D}_\omega$ vers ω, les racines de $G(Z)=\zeta$ tendant vers ω appartiendront au domaine $\mathfrak{D}_\omega$ *et pas à* E'_{R_1}. Ici il y a d'autres points du plan Z que ceux de l'ensemble E'_{R_1}, qui, par $\zeta = G(Z)$, donnent E'_{R_2}. J'appellerai dans ce cas $\mathcal{E}_{R_2}$ l'ensemble des points Z où la famille des $G[R_1^{(n)}(Z)]$ n'est pas normale. $\mathcal{E}_{R_2}$ *contiendra* E'_{R_1} *et* $\mathcal{E}_{R_2}$ correspondra d'une façon biunivoque à E'_{R_2} par la transformation $\zeta = G(Z)$.

33. On déduit de là un critère théorique permettant d'affirmer *l'impossibilité de l'existence de solutions méromorphes ou rationnelles de* (3) *dans certains cas.*

Il est clair en effet que si E'_{R_1} contient un continu, et si E'_{R_2} est partout discontinu, $G(Z)$ ne peut exister, car elle transformerait ce continu de E'_{R_1} en un continu appartenant à E'_{R_2}. Si E'_{R_1} contient une aire plane, auquel cas E'_{R_1} est identique au plan Z complet, $G(Z)$ ne peut exister que si E'_{R_2} est lui aussi identique au plan complet. On peut exprimer ceci brièvement en disant que *l'existence des solutions méromorphes ou rationnelles de* (3) *n'est possible que si la cohésion de* E'_{R_1} *et le nombre de ses dimensions sont moindres que ceux de* E'_{R_2} *ou au plus égaux.* Toutes les fois que cette condition ne sera pas remplie, toute solution de (3) sera multiforme, ou bien elle admettra tous les points de E'_{R_1} pour points singuliers essentiels. Ce fait se produit notamment pour l'équation de Schrœder

$$f[R_1(Z)] = s_2 f(Z).$$

Ici E'_{R_2} se réduit à *l'origine* et E'_{R_1} est parfait. Donc cette équation ne peut avoir de solution méromorphe ou rationnelle. Une solution uniforme de cette équation doit admettre tout point de E'_{R_1} pour point essentiel. C'est ce qui arrive en effet à la solution de cette équation indiquée par M. Kœnigs.

34. L'illustration la plus simple des considérations précédentes, c'est l'étude de la fonction méromorphe de Poincaré correspondant à un

point double répulsif d'une fraction rationnelle

$$f(sz) = R[f(z)].$$

Ici $R_1 = sz$, $R_2 = R$ et f est méromorphe. E'_{R_1} se réduit à *l'origine* du plan z; par $\zeta = f(z)$ on obtient un point du plan ζ, c'est le point double répulsif de R : il appartient bien à E'_R. E'_{R_1} devient une partie de E'_R et par $\zeta = f(z)$ il correspond aux points ζ de E'_R tout un ensemble $\mathcal{E}_R$ du plan z, contenant l'origine, et en tout point de $\mathcal{E}_R$ la famille des $f(s^n z)$ cesse d'être normale; en tout point de $\mathcal{E}_R$ distinct de l'origine, cette famille cesse d'être normale, alors que la famille des $R_1^{(n)} = s^n z$ est encore normale; l'explication est que la limite des $s^n z$ en un pareil point est précisément la constante ∞, point singulier essentiel de $f(z)$.

35. Ce qu'on vient de dire des cycles répulsifs de R_1 et R_2 s'applique-t-il encore aux cycles attractifs ou indifférents? Oui, mais il se produit alors des simplifications parce que *le nombre de ces cycles est fini*.

A cause de $G[R_1^{(n)}] = R_2^{(n)}[G]$ à tout point d'un cycle attractif ou indifférent de R_1 correspond un point d'un cycle attractif ou indifférent de R_2. Inversement, si ζ appartient à un cycle attractif ou indifférent d'ordre n de R_2 $[\zeta = R_2^{(n)}(\zeta)]$, soit Z une racine de $G(Z) = \zeta$, à supposer que ζ ne soit pas valeur exceptionnelle de G, c'est-à-dire ne soit pas un point exceptionnel dans l'itération de R_2. On aura

$$G[R_1^{(n)}(Z)] = \zeta = R_2^{(n)}(\zeta).$$

Donc $R_1^{(n)}$ sera, comme Z, une racine de $G(Z) = \zeta$. Considérons alors les itérées $R_1^{(2n)}(Z)$, $R_1^{(3n)}(Z)$, ... de Z par l'itération de $R_1^{(n)}$. Ils ne pourront, s'ils sont en nombre infini, avoir pour points limites que les points singuliers essentiels de $G(Z)$, puisqu'en tous ces points $G(Z)$ a la même valeur ζ; s'ils sont en nombre fini, Z appartient à un cycle de R_1 ou est antécédent d'un tel cycle.

Conclusion. — Toute racine de $G(Z) = \zeta$, où ζ *est un point d'un cycle attractif ou indifférent de* R_2 : 1° *ou bien appartient à un cycle de* R_1 *attractif ou indifférent, ou bien est antécédent d'un tel cycle;* 2° *ou bien* *appartient au domaine de convergence vers l'un ou l'autre des deux points exceptionnels possibles de l'itération de* R_1.

36. Étudions d'une façon plus précise les deux seuls cas où G possède des points singuliers essentiels : en ramenant à la forme canonique, on aura $R_1(Z) = Z^k$ ou $R_1(Z) =$ polynome en Z. On peut toujours supposer l'entier k positif en substituant au besoin à R_1 et R_2 leurs itérées d'ordre 2. Quelle est alors la structure de $\mathcal{E}_{R_2}$?

Soit Z_0 un point de $\mathcal{E}_{R_2}$; au point $\zeta_0 = G(Z_0)$ la famille des $R_2^{(n)}(\zeta)$ n'est pas normale; donc en Z_0 la famille des $G[R_1^{(n)}(Z_0)]$ ne l'est pas non plus. Écartons le cas où Z_0 ferait partie de E'_{R_1}; alors Z_0 appartient au domaine de convergence vers o ou ∞ si $R_1(Z) = Z^k$, ou au domaine de convergence vers ∞ si $R_1(Z)$ est polynome.

Tout point Z_1 qui possède un conséquent commun avec Z_0 sera évidemment tel que la famille des $G[R_1^{(n)}(Z)]$ cessera d'être normale en Z_1.

Il en résulte d'importantes conséquences et en particulier une limitation assez précise de la classe des fonctions méromorphes $G(Z)$. Étudions d'abord le cas de $R_1 = Z^k$, nous passerons ensuite au cas de $R_1(Z) =$ polynome qui n'est guère plus général.

37. Soit donc $R_1(Z) = Z^k$ et $G(Z)$ une solution de $G(Z^k) = R_2[G(Z)]$ qui admette o et ∞ comme points singuliers essentiels.

Soit Z_0 un point de $\mathcal{E}_{R_2}$: les points du plan Z qui ont avec Z_0 un conséquent commun forment un ensemble partout dense sur le cercle $|Z| = |Z_0|$. Tout ce cercle appartient à $\mathcal{E}_{R_2}$ dès qu'un de ses points lui appartient. $\mathcal{E}_{R_2}$ se compose d'une infinité de cercles de centre O et cet ensemble *fermé* de cercles est invariant par $(Z|Z^k)$ et par son inverse. Comme les racines de $G(Z) = \zeta_0$ ont o et ∞ pour point limite, les cercles de $\mathcal{E}_{R_2}$ admettent o et ∞ pour point limite, et comme tout antécédent d'un point de $\mathcal{E}_{R_2}$ par toute branche de l'inverse de Z^{k^n} appartient à $\mathcal{E}_{R_2}$, les cercles précédents admettent aussi le cercle $|Z| = 1$ pour cercle limite.

En tout cas, E'_{R_2} sera formé d'un *ensemble fermé de courbes analytiques* dérivant par $\zeta = G(Z)$ de l'ensemble des cercles précédents.

Il pourra arriver, si un de ces cercles passe par un zéro de $G'(Z)$, que les courbes analytiques de E'_{R_2} présentent des points de rebroussement. $G(Z)$ ne pourra donc être méromorphe si E'_{R_2} non superficiel possède des continus non analytiques ou est un ensemble parfait partout discontinu.

On va montrer que si $G(Z)$ est *méromorphe*, nécessairement E'_{R_2} *se compose de tout le plan* ζ.

38. D'abord, si $\mathcal{E}_{R_2}$ renferme un cercle *isolé*, E'_{R_2} comportera un arc analytique isolé et la fraction $R_2(\zeta)$ sera une fraction à cercle ou arc de cercle fondamental [1]. Dans ce cas E'_{R_2} sera identique à une circonférence ou un arc de circonférence. Par $\zeta = G(Z)$ on aura un ensemble $\mathcal{E}_{R_2}$ de cercles qui, en aucun cas, ne pourront s'accumuler au voisinage de cercle $|Z| = 1$ puisque sur un tel cercle $G(Z)$ est méromorphe. On n'échappe à la contradiction qu'en supposant que l'équation $\zeta_0 = G(Z)$, ζ_0 étant un point de E'_{R_2}, n'a aucune racine Z_0 dont le module soit $\not\equiv 1$ et cela n'est possible que *si* G *est rationnelle*. Si donc G est méromorphe, *aucun cercle de* $\mathcal{E}_{R_2}$ *n'est isolé*.

39. A partir de maintenant supposons que $\mathcal{E}_{R_2}$, *nulle part superficiel*, ne contient *aucun cercle isolé*. Soit Z_1 ($|Z_1| > 1$) un point n'appartenant pas à $\mathcal{E}_{R_2}$. Il est alors intérieur à une couronne circulaire, limitée par deux cercles de $\mathcal{E}_{R_2}$, dans laquelle la famille des $G[R_1^{(n)}] = G[Z^{k^n}]$ est normale. J'appelle $\mathcal{C}$ cette couronne circulaire, C_1 et C_2 les cercles limites. Lorsque Z décrit $\mathcal{C}$, $\zeta = G(Z)$ décrit un domaine simplement ou doublement connexe du plan ζ, limité par une ou deux courbes analytiques appartenant à E'_{R_2}; soit Γ ce domaine, Γ_1 et Γ_2 les courbes limites (qui peuvent être confondues). Dans Γ la famille des $R_2^{(n)}[\zeta]$ est normale. Extrayons de cette famille une suite convergente $R_2^{(n_i)}(\zeta)$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$. Si cette suite converge vers une fonction limite $f(\zeta)$ qui n'est pas une constante ou même si la limite est une constante α n'appartenant pas à E'_{R_2}, il est visible qu'à partir d'un certain rang, les aires Γ_{n_i} conséquentes de Γ d'ordre $n_1, n_2, \ldots$, dans l'itération de $[\zeta | R_2(\zeta)]$, coïncident. En effet, toutes ces aires sont limitées à l'ensemble E'_{R_2}; si la limite considérée n'est pas constante, les aires Γ_{n_i} ont à partir d'un certain rang des points

[1] V. Fatou, *Bull. Soc. math. Fr.*, 1920, n° 56.

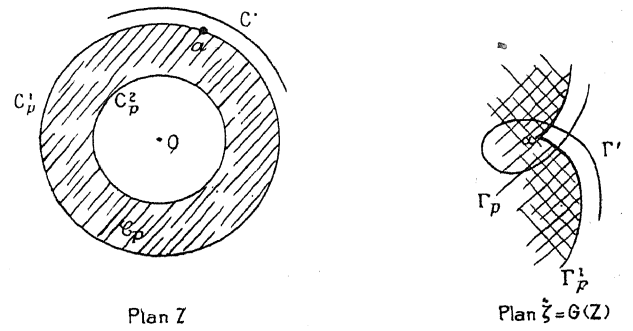
communs entre elles et avec l'aire qui dérive de Γ par $\zeta' = f(\zeta)$, et si la limite est a n'appartenant pas à E'_{R_2}, les Γ_{n_i} coïncident à partir d'un certain rang avec le domaine, délimité par E'_{R_2}, qui contient α. On arrive donc ainsi à une certaine aire Γ_p, limitée par E'_{R_2}, qui reste invariante par une certaine itérée $[Z \mid R_2^{(\lambda)}(Z)]$ et ses puissances. La frontière de Γ_p est constituée par une ou deux courbes analytiques, pouvant, *a priori*, avoir des points de rebroussement *isolés*.

Par $\zeta = G(Z)$ il correspond à Γ_p une aire $\mathcal{E}_p$ du plan Z, limitée par deux cercles et dans laquelle les $G[Z^{k^n}]$ forment une famille normale. Les points de rebroussement de la frontière de Γ_p correspondent aux zéros possibles de $G'(Z)$ sur la frontière de $\mathcal{E}_p$.

Si Γ_p n'est limitée que par une seule courbe, cette courbe ne peut être qu'un cercle ou un arc de cercle (¹) et R_2 est une fraction à cercle ou arc de cercle fondamental. Le raisonnement du n° 38 prouve qu'alors G est rationnel. Ce cas est donc à écarter.

Si Γ_p est limitée par deux courbes analytiques, on voit d'abord que les points de rebroussement sont impossibles. En effet la frontière de $\mathcal{E}_p$ ne comprend pas de cercle isolé ; soit C' un cercle de $\mathcal{E}_{R_2}$ suffisamment voisin du cercle C_p^1 frontière de $\mathcal{E}_p$ qui passe par a, zéro de $G'(Z)$. Il lui correspondra dans le plan de ζ une courbe Γ' *qui fera un ou plu-*

Fig. 1.



sieurs tours autour de $\alpha = G(a)$ (*voir* la figure 1), en vertu des propriétés élémentaires de la représentation conforme autour d'un point

(¹) Cela peut se déduire sans difficulté du théorème énoncé au n° 43 du Mémoire cité dans la note précédente.

où $G'(\alpha) = 0$, Γ' appartient à E'_{R_2} et elle traverserait la partie de Γ_p voisine de α, ce qui est contradictoire puisque Γ_p ne contient à son intérieur aucun point de E'_{R_2}. Les cercles C^1_p et C^2_p frontières de $\mathcal{C}_p$ ne contiennent donc pas de racine de $G'(Z) = 0$ et Γ_p n'a pas de pointe; *ses deux courbes limites* Γ^1_p, Γ^2_p *sont des courbes analytiques et sans point double.* Γ_p reste invariante par $[Z|R_2^{(\lambda)}(Z)]$ et l'on peut supposer, en remplaçant au besoin $R_2^{(\lambda)}$ par $R_2^{(2\lambda)}$, que chacune des courbes limites reste invariante. On peut faire la représentation conforme de Γ_p sur un anneau T du plan t, limité par deux cercles concentriques T_1 et T_2 de centre O; à Z et $Z_1 = R^{(\lambda)}(Z)$ correspondent les points t et t_1, et l'on voit aussitôt que t_1 est une fonction de t holomorphe dans l'anneau T *et sur sa frontière*, par conséquent dans un anneau un peu plus grand que l'anneau T. De plus la substitution $(t|t_1)$ laisse invariant l'anneau T. La fonction $\log\left|\frac{t_1}{t}\right|$, harmonique et régulière dans T, prend la valeur zéro sur les frontières de T, elle est donc identiquement nulle; par suite $t_1 = te^{i\theta}$, θ étant une constante.

La représentation conforme $Z = \varphi(t)$ étant holomorphe *dans un anneau un peu plus grand que* T, il en résulte une contradiction. En effet, si θ est commensurable à 2π, *tout point* t n'aurait qu'un nombre fini de conséquents distincts $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Il en serait de même dans le plan Z, ce qui est impossible. Et si θ est incommensurable à 2π, les conséquents de t seraient partout denses sur le cercle de centre O passant par t; tout point Z dans Γ_p et *dans un anneau* Γ'_p *un peu plus grand que* Γ_p serait tel que ses conséquents seraient partout denses sur une courbe analytique passant par ce point. Or C^1_p étant un point de E'_{R_2} on peut toujours trouver un point A de E'_{R_2}, assez voisin de C^1_p pour appartenir à l'anneau Γ'_p, et qui appartienne à un cycle répulsif de R_2; cela tient à ce que, dans E'_{R_2}, les points des cycles répulsifs de R_2 sont partout denses. Le point A n'a qu'un nombre fini de conséquents distincts, ce qui constitue bien la contradiction annoncée.

En définitive, on vient de démontrer qu'il est impossible ici d'admettre l'invariance d'un domaine limité à E'_{R_2}, lorsque $G(Z)$ est véritablement méromorphe.

40. On est donc forcé de supposer que, dans la couronne initiale $\mathcal{C}$

du n° 39, la limite des $G_{n_i}(Z) = G[Z^{k^{n_i}}]$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$ est une *constante* appartenant à E'_{R_2}, et de plus, que *toutes les itérées de l'aire* Γ *du plan* ζ par $[\zeta | R_2(\zeta)]$ *sont deux à deux sans point commun.* Ceci encore va nous conduire à une impossibilité.

Considérons la suite des itérées d'ordre n_i de Γ dans l'itération par $[\zeta | R_2(\zeta)]$: soit Γ_{n_i} ces aires deux à deux sans point commun. On peut supposer que $\zeta = \infty$ n'appartient à aucune de ces itérées en supposant par exemple qu'il est intérieur à une des aires antécédentes de Γ. Les Γ_{n_i} sont alors, frontières comprises, toutes à distance finie. Elles sont deux à deux sans point commun, leur superficie tend vers zéro avec $\frac{1}{n_i}\cdot$ Toute aire γ intérieure à Γ a des itérées γ_{n_i} qui ont pour limite un point α de E'_{R_2}. Deux cas sont possibles :

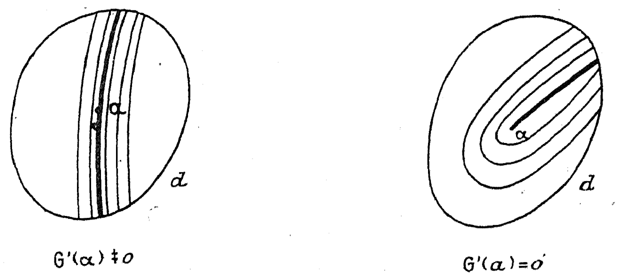
1° Toutes les Γ_{n_i} sont, comme Γ, doublement connexes. Traçons dans Γ une courbe fermée Δ divisant Γ en deux aires doublement connexes : les itérées Δ_{n_i} de Δ tendront vers α; par conséquent, les courbes limites des Γ_{n_i}, qui sont intérieures aux courbes Δ_{n_i}, tendent aussi vers α. Le voisinage de α, point de E'_{R_2}, est donc tel qu'il contient une infinité de courbes fermées composées d'arcs analytiques et appartenant à E'_{R_2}. Nous verrons plus loin que c'est impossible.

2° A partir d'un certain rang, les aires Γ_{n_i} sont toutes simplement connexes : si l'on prend l'aire γ intérieure à Γ, ses itérées γ_{n_i} tendent vers α. Au point α correspond dans le plan Z un point a à distance finie tel que $\alpha = G(a)$. Aux aires Γ_{n_i} vont correspondre dans le plan Z des aires contiguës à $\mathcal{C}_{R_2}$, c'est-à-dire des couronnes que nous appellerons $\mathcal{C}_{n_i}$ et ces couronnes auront pour limite le cercle de $\mathcal{E}_{R_2}$ qui passe par a. Pour qu'à une couronne $\mathcal{C}_{n_i}$ correspondît une aire Γ_{n_i} simplement connexe, il faudrait que $\mathcal{C}_{n_i}$ contînt au moins deux zéros de $G'(Z)$, et par conséquent au voisinage du cercle de $\mathcal{E}_{R_2}$ passant par a il y aurait une infinité de zéros de $G'(Z)$, ce qui est impossible. L'éventualité du 2° est donc impossible.

40 *bis*. Reste à prouver qu'au voisinage d'un point de E'_{R_2} ne peuvent s'accumuler une infinité de petites courbes fermées, appartenant à E'_{R_2}, et composées d'arcs analytiques, conclusion à laquelle nous a conduit la première hypothèse. Au point α correspond en effet un

point a du plan Z, par $\alpha = G(a)$ [α n'est jamais valeur exceptionnelle de G, a sera une quelconque des racines de l'équation $\alpha = G(a)$] : a appartient à $\mathcal{E}_{R_2}$. L'ensemble des points de E'_{R_2} situés dans un petit cercle δ de centre α, se transforme pour $\zeta = G(Z)$ dans l'ensemble des points de $\mathcal{E}_{R_2}$ situés dans une petite aire d simplement connexe entourant a et inversement. Or, ces points de $\mathcal{E}_{R_2}$ constituent un ensemble d'arcs de cercle, dont aucun n'est isolé, et qui traversent l'aire d d'un seul trait au voisinage de a. Si $G'(a) \neq 0$, il leur correspond dans le plan ζ une infinité d'arcs analytiques traversant l'aire δ d'un seul trait au voisinage de α; si $G'(a) = 0$, il leur correspondra dans le plan des ζ des arcs analytiques qui ne devront pas présenter de point double [puisque les aires du plan ζ correspondant aux couronnes telles que les $\mathcal{C}_{n_i}$ envisagés plus haut, ne doivent contenir aucun point de E'_{R_2}], sauf peut-être l'arc correspondant au cercle passant par a, qui, s'il a un point de rebroussement, devra dès lors se composer d'un arc simple aboutissant en α et parcouru 2 fois en sens contraire : ces arcs devront traverser l'aire δ d'un seul trait, sauf peut-être l'arc correspondant au cercle passant par a auquel pourra correspondre un arc simple partant de α pour aboutir au contour de δ (voir *fig.* 2).

Fig. 2.



Comme on le voit, l'allure de l'ensemble des points de E'_{R_2} dans δ ne peut en aucun cas être compatible avec l'existence d'une infinité de petites courbes fermées appartenant à E'_{R_2} et tendant vers α. Il est donc bien établi que les hypothèses faites conduisent toujours à une contradiction. Il n'existe donc pas de couronne $\mathcal{C}$ où la famille des $G[Z^{k^n}]$ soit normale et par conséquent, si G *est méromorphe, l'ensemble* E'_{R_2} *est identique à tout le plan* ζ. A titre de vérification, on remarquera que l'exemple formé au n° 18 provient précisément d'une fonction elliptique $\wp(u)$ et l'on sait que la fraction rationnelle R_2 qui exprime le théorème de multiplication de $\wp(u)$ *a pour ensemble* E'_{R_2} *tout le plan* (¹).

La conclusion de cette étude est donc que *l'équation*

$$G(Z^k) = R_2[G(Z)]$$

ne peut avoir de solution méromorphe, avec o *et* ∞ *pour points singuliers essentiels, que si l'ensemble* E'_{R_2} *est identique au plan complet* ζ.

41. *La même conclusion va ressortir de l'étude des solutions méromorphes de l'équation*

$$G[P(Z)] = R_2[G(Z)] \qquad (\text{P polynome en Z}).$$

L'ensemble E'_{R_2} des points ζ, où la famille des $R_2^{(n)}(\zeta)$ n'est pas normale, se traduit par $\zeta = G(Z)$ en un ensemble $\mathcal{E}_{R_2}$, du plan Z, des points où la famille des $G[P^{(n)}(Z)]$ n'est pas normale. L'ensemble E'_P, des points où la famille des $P^{(n)}(Z)$ n'est pas normale, est une partie de $\mathcal{E}_{R_2}$. E'_P est la frontière du domaine $\mathfrak{D}_\infty$, de convergence vers l'infini, des itérées $P^{(n)}(Z)$. E'_P est tout entier à distance finie. En un point Z_0, *n'appartenant pas à* $\mathfrak{D}_\infty$, et où la famille des $P^{(n)}$ est normale, la famille des $G[P^{(n)}]$ l'est aussi, et au point $\zeta_0 = G(Z_0)$, celle des $R_2^{(n)}(\zeta)$ l'est aussi. $\mathcal{E}_{R_2}$ se compose donc uniquement de points intérieurs à $\mathfrak{D}_\infty$ et de tous les points frontières de $\mathfrak{D}_\infty$.

Mais, si Z_0 est un point de $\mathcal{E}_{R_2}$, tout point Z_1 qui a, avec Z_0, un certain conséquent commun $P^{(n)}(Z_1) = P^{(n)}(Z_0)$, appartient aussi à $\mathcal{E}_{R_2}$. Or il est facile de voir comment se répartissent ces points Z_1. Böttcher a en effet prouvé l'existence d'une fonction $\Phi(Z)$ holomorphe à l'infini, c'est-à-dire développable à l'extérieur d'un certain cercle $|Z| > R$ par

$$\Phi(Z) = a_1 Z + a_0 + \frac{b_1}{Z} + \frac{b_2}{Z^2} + \ldots,$$

et satisfaisant à l'équation

$$\Phi[P(Z)] = [\Phi(Z)]^k \qquad [k = \text{degré de } P(Z)].$$

(¹) *Voir* par exemple mon Mémoire du *Journal de Jordan*, 1918, p. 106, note (¹).

M. Ritt [1] a le premier étudié la distribution des points Z_1, qu'il appelle *associés* d'un point Z_0 donné, à l'aide de l'équation de Böttcher précédente, qui ramène cette étude au cas de l'itération $[Z|Z^k]$ en posant

$$\Phi(Z)=U, \qquad \Phi[P(Z)]=U_1=U^k.$$

On voit ainsi que, au moins pour $|Z|>R$, les associés de Z_0 sont partout denses sur la courbe analytique $|\Phi(Z)|=|\Phi(Z_0)|$ qui passe au point Z_0 et qui, dans le plan Z, correspond au cercle $|U|=|U_0|$ du plan U. De plus, si $|Z_0|$ est assez grand, $\Phi'(Z)\neq 0$, et par conséquent la courbe précédente $|\Phi(Z)|=|\Phi(Z_0)|$ n'a aucun point singulier.

Cela étant, tout point ζ_0 de E'_{R_2} correspond à une infinité de racines Z_0 pour lesquelles $|Z_0|>R$, $\zeta_0=G(Z_0)$. Chacun de ces Z_0 est de $\mathcal{E}_{R_2}$ et entraîne avec lui dans $\mathcal{E}_{R_2}$ toute la courbe analytique $|\Phi(Z)|=|\Phi(Z_0)|$ qui passe par ce point [2]. Donc la partie de $\mathcal{E}_{R_2}$ telle que $|Z|>R$, se compose d'un ensemble fermé de courbes analytiques $|\Phi(Z)|=$ const. s'enveloppant mutuellement et tendant vers l'infini. Or $\mathcal{E}_{R_2}$ est invariant par $[Z|P(Z)]$, et toutes les branches de $[Z|P^{(-1)}(Z)]$.

De toute courbe de $\mathcal{E}_{R_2}$ située dans $\mathcal{D}_\infty$ se déduisent une infinité d'autres qui sont toutes ses antécédentes dans l'itération $[Z|P(Z)]$. Ces antécédentes pourraient présenter des points anguleux si la courbe considérée passait par un point critique de $P^{(-1)}(Z)$. Elles ont pour limite la frontière de $\mathcal{D}_\infty$ *tout entière*. En définitive, $\mathcal{E}_{R_2}$ se compose d'un ensemble *fermé* de courbes *analytiques* pouvant avoir des points anguleux isolés, cet ensemble fermé ayant en particulier pour limite E'_P, frontière du domaine $\mathcal{D}_\infty$. On va montrer que, *si* $\mathcal{E}_{R_2}$ *ne recouvre pas tout le plan*, G *est nécessairement rationnelle*.

42. D'abord, si $\mathcal{E}_{R_2}$ contient une courbe isolée de la famille des $|\Phi(Z)|=$ const., E'_{R_2} comptera un arc analytique isolé; ce sera donc un *cercle* ou un *arc de cercle* et l'on verra alors, comme au n° 38, qu'il est impossible qu'au voisinage d'un point de E'_P s'accumule une

---

(1) *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 4 mars 1918.

(2) *Voir* ma Note aux *C. R. Acad. Sc.*, Paris, du 21 novembre 1921, où les considérations précédentes sont exposées pour *toute fonction entière*.

infinité de courbes distinctes appartenant à $\mathcal{E}_{R_2}$. L'hypothèse actuelle entraîne donc que $G(Z)$ est *rationnelle*.

43. Supposons maintenant qu'aucune courbe de $\mathcal{E}_{R_2}$ ne soit isolée et que $G(Z)$ soit vraiment méromorphe. Soient ζ_0 un point quelconque de E'_{R_2}, Z_0 une racine suffisamment grande de $G(Z)=\zeta_0$ (1) pour que en Z_0 et dans son voisinage $\Phi'(Z)\neq 0$. La partie de E'_{R_2} intérieure à un petit cercle γ de centre ζ_0 devient, par $\zeta = G(Z)$, la partie de $\mathcal{E}_{R_2}$ intérieure à une petite aire simple c entourant Z_0. Or, au voisinage de Z_0, les courbes composant $\mathcal{E}_{R_2}$ sont des courbes analytiques sans point commun deux à deux et qui traverseront d'un trait l'aire c au voisinage de Z_0 : dans le plan ζ, la partie de E'_{R_2} intérieure à γ sera donc formée de courbes analytiques sans point commun deux à deux traversant γ d'un trait au voisinage de ζ_0 et une discussion analogue à celle du n° 40 *bis* prouvera que, si $G'(Z_0)\neq 0$, ces courbes sont sans point singulier ou double, et si $G'(Z_0)=0$ aucun de ces arcs n'aura de point singulier ou double, sauf peut-être l'arc passant par ζ_0 qui sera composé d'un arc simple reliant ζ_0 au contour de γ et parcouru deux fois en sens contraire. [Dans la discussion actuelle, les courbes $|\Phi(Z)| = \text{const.}$ appartenant à $\mathcal{E}_{R_2}$ jouent le rôle qu'ont joué dans le cas où $P(Z) = Z^k$ les *cercles* appartenant à $\mathcal{E}_{R_2}$.] En aucun cas donc, la partie de E'_{R_2} intérieure à γ *ne peut comprendre une infinité de petites courbes fermées distinctes tendant vers* ζ_0, *ou un arc de courbe non analytique*.

44. Or considérons la frontière de $\mathcal{D}_\infty$, c'est-à-dire E'_P. Ou bien $\mathcal{D}_\infty$ est simplement connexe, ou bien son ordre de connexion est infini (2).

Dans le premier cas, E'_P est un contour d'un seul tenant. Lorsque Z décrit E'_P, $\zeta = G(Z)$ décrit un continu appartenant à E'_{R_2}, et si E'_P n'était pas analytique, E'_{R_2} contiendrait un continu non analytique. E'_P est donc analytique, *c'est donc un cercle ou un arc de cercle*. $P(Z)$ se

(1) Un point ζ_0 de E'_{R_2} n'est jamais valeur exceptionnelle de $G(Z)$.

(2) *Voir* mon Mémoire du *Journal de Jordan*, 1918, n° 46.

ramène donc soit à $P(Z) = Z^k$, soit au polynome $\pi(Z)$ qui exprime $Z_1 = \pm \cos pz$ en fonction de $Z = \cos z$.

Le cas $P(Z) = Z^k$ a été déjà étudié. Reste à étudier le cas où $\pi(Z)$ exprime $\pm \cos pz$ en $Z = \cos z$. En remplaçant au besoin P par $P^{(2)}$, on peut supposer que $P(Z)$ exprime $+\cos pz$ en $\cos z$. E'_P se réduit alors au segment $(-1, +1)$. La solution $\Phi(Z)$ du problème de Böttcher, c'est alors

$$\Phi(Z) = Z + \sqrt{Z^2 - 1} = e^{iz},$$

car on a

$$Z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad Z_1 = P(Z) = \frac{e^{piz} + e^{-piz}}{2},$$

$$\Phi[Z_1] = Z_1 + \sqrt{Z_1^2 - 1} = e^{piz} = [\Phi(Z)]^p.$$

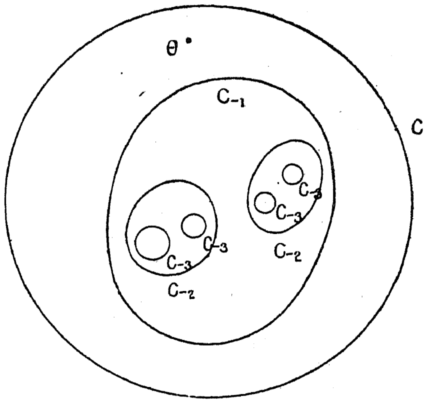
Les courbes $|\Phi(Z)| = \text{const.}$ sont *les ellipses homofocales de foyers* $(-1, +1)$. $\mathcal{E}_{R_2}$ est ici composé d'un ensemble fermé d'ellipses homofocales, dont aucune n'est isolée, et qui tendent vers $(-1, +1)$ et vers l'infini. En raisonnant sur cet ensemble, absolument comme on a raisonné aux n^{os} 39, 40, 40 *bis* sur les cercles dont se composait alors $\mathcal{E}_{R_2}$, on arrivera toujours à la même conclusion : que $G(Z)$ *ne peut être vraiment méromorphe que si* E_{R_2} *et* E'_{R_2} *recouvrent tout le plan.*

45. Si la frontière de $\mathcal{D}_\infty$ n'est pas d'un seul tenant, c'est que $\mathcal{D}_\infty$ contient à son intérieur au moins un point critique à distance finie de la fonction algébrique $P^{(-1)}(Z)$ inverse de $P(Z)$. Le domaine $\mathcal{D}_\infty$ s'engendre, en effet, à partir de l'extérieur d'une courbe C de $\mathcal{E}_{R_2}$, $|\Phi(Z)| = \text{const.}$ suffisamment grande (pour que son itérée C_1 soit extérieure à C) en prenant les antécédentes successives, par toutes les branches de $P^{-1}(Z)$, de l'aire infinie extérieure à C; ces antécédentes sont limitées par les antécédentes C_{-1}, C_{-2}, ... de C, et ce n'est que si une C_{-i} laisse à son extérieur un point critique θ à distance finie de $P^{-1}(Z)$ que $C_{-(i+1)}$ sera composée de plus d'une courbe fermée [1]. Alors $C_{-(i+1)}$ sera composé d'au moins deux courbes fermées limitant deux aires simples extérieures l'une à l'autre (voir *fig.* 3, où C_{-1} laisse à l'extérieur un point critique θ). Ces deux courbes $C_{-(i+1)}$ sont

[1] Voir *Journal de Jordan* mon Mémoire *Sur l'itération des fractions rationnelles*, n° 46.

intérieures à C_{-i}. $C_{-(i+2)}$ comptera au moins 2^2 courbes simples limitant des aires extérieures deux à deux et intérieures à $C_{-(i+1)}$.

Fig. 3.



$C_{-(i+\lambda)}$ comptera au moins 2^λ courbes fermées limitant des aires simples deux à deux extérieures et toutes intérieures aux courbes $C_{-(i+\lambda-1)}$.

Le nombre des points critiques à distance finie de $P^{-1}(Z)$ est au plus $k-1$ [k degré de $P(Z)$]. Donc on peut choisir une suite d'aires simples limitées par des courbes $C_{-1}, C_{-2}, C_{-3}, \ldots, C_{-n}, \ldots$ telles qu'à partir d'un certain rang q ces aires laissent tous les points critiques de P^{-1} à l'extérieur, chacune contenant la suivante. Cela résulte de ce que le nombre des aires $[C_{-(i+\lambda)}]$ deux à deux extérieures augmente indéfiniment avec λ. Considérons l'aire finie (C_{-q}); dans cette aire on a des branches uniformes de

$$P^{(-1)}(Z), \quad P^{(-2)}(Z), \quad \ldots, \quad P^{-n}(Z), \quad \ldots,$$

qui transforment cette aire en

$$C_{-(q+1)}, \quad C_{-(q+2)}, \quad \ldots, \quad C_{-(q+n)}, \quad \ldots,$$

et par conséquent forment une famille normale dans C_{-q} : une fonction limite de cette famille ne peut être qu'une constante, car si l'on trace dans l'aire C_{-q} une courbe fermée simple C'_{-q} assez voisine du contour C_{-q}, les antécédentes successives de C'_{-q} pour les branches considérées des $P^{(-n)}(Z)$ viendront, comme les antécédentes du contour C_{-q}, *s'écraser, pour $n=\infty$, sur la frontière de* $\mathcal{D}_\infty$, ce qui serait impossible si la fonction limite n'était pas constante dans l'anneau (C'_{-q}, C'_{-q}). On peut donc trouver une suite d'aires emboîtées C_{-n_1}, C_{-n_2}, ... parmi les $C_{-(q+n)}$, ..., dont la limite est une constante a appartenant à l'ensemble E'_P [l'ensemble E'_P est l'ensemble limite des antécédents successifs d'un point quelconque du plan (1)]. Au voisinage de a, $\mathcal{E}_{R_2}$ comprendrait une infinité de courbes fermées distinctes C_{-n_1}, C_{-n_2}, ... tendant vers a; au voisinage de $\alpha = G(a)$, E'_{R_2} aurait un aspect analogue de petites courbes fermées distinctes s'enveloppant mutuellement et tendant vers α, et l'on a vu que cela est impossible à la fin du n° 43.

46. Toutes les hypothèses possibles ayant été examinées, on conclut que l'équation

$$G[P(Z)] = R_2[G(Z)]$$

ne peut admettre de solution $G(Z)$ *méromorphe dans tout le plan, et non rationnelle, que si l'ensemble* E'_{R_2} *recouvre tout le plan*. L'exemple fourni au n° 24 satisfait bien à cette condition puisqu'il résulte d'une fonction rationnelle R_2 exprimant un théorème de multiplication de la fonction $\wp(u)$ de Weierstrass.

47. *Remarque.* — L'équation

$$G[R(Z)] = R[G(Z)],$$

où R est rationnelle $[R_1 = R_2 = R]$, ne peut admettre de solution méromorphe qui ne soit rationnelle, car une solution méromorphe ne peut exister que si $R_1 = R$ est un polynome ou bien $Z^{\pm k}$, et dans ce cas $R_2 = R$ admet un ensemble E'_{R_2} qui n'est pas superficiel.

Toute solution uniforme de

$$G[R] = R[G]$$

sera donc rationnelle ou bien admettra tous les points de E'_R pour points singuliers essentiels.

---

(1) *Journal de Jordan*, 1918, nos 27 et suivants, et nos 14 et suivants.