Annales scientifiques de l'É.N.S.

S. Bays

Sur les systèmes cycliques de triples de Steiner

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 40 (1923), p. 55-96
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1923_3_40__55_0>

SUR

LES SYSTÈMES CYCLIQUES DE TRIPLES DE STEINER

PAR M. S. BAYS

J. Steiner (¹) a posé, en 1852, un problème compliqué d'analyse combinatoire, dont la première partie, la seule qui ait été jusqu'ici l'objet de recherches importantes, porte le nom particulier de problème des *triples* ou *triades* de Steiner et a l'énoncé suivant :

Pour quel nombre d'éléments N *peut-on trouver un système de triples (combinaisons trois à trois) contenant* UNE FOIS *et* UNE SEULE FOIS *chaque couple de ces éléments? Pour un* N *donné, combien y a-t-il de systèmes* DIFFÉRENTS, *c'est-à-dire de systèmes ne pouvant provenir l'un de l'autre par une permutation quelconque des* N *éléments?*

Par exemple, pour les sept éléments 0, 1, 2, ..., 6, dans le système de triples suivant :

$$012,\quad 034,\quad 056,\quad 135,\quad 146,\quad 236,\quad 245,$$

chacun des 21 couples de ces sept éléments entre une fois et une seule fois.

Le nombre des triples d'un tel système pour contenir une fois exactement chaque couple doit être $\frac{N(N-1)}{6}$; un élément quelconque, pour être accouplé à chacun des $N-1$ éléments restants, doit entrer dans $\frac{N-1}{2}$ triples. Avec cela on trouve aisément que les formes *nécessaires* pour N sont $6n+1$ et $6n+3$.

Ces deux formes sont également *suffisantes;* Reiss (²) (1859) et plus

(¹) *Journal für Mathematik*, t. XLV, 1853, p. 181.
(²) M. REISS, *Journal für Mathematik*, t. LVI, 1859, p. 326.

tard H. Moore [1] (1893) ont établi qu'il existe des systèmes de Steiner pour chaque N de la forme $6n+1$ et $6n+3$, en donnant chacun un procédé différent de construction de tels systèmes. Mais la seconde partie du problème, la détermination du nombre des systèmes différents pour chaque $N = 6n+1$ ou $6n+3$, paraît encore, à l'heure actuelle, loin d'être résolue.

Pour $N=6n+1$, comme aussi pour $N=6n+3$, il existe une classe de solutions du problème de Steiner intéressantes par leur construction spéciale. Ce sont les systèmes de triples *cycliques* [2]. Il ne sera question dans ce travail que des systèmes cycliques de Steiner, de $N=6n+1$ éléments. Soient les $N=6n+1$ éléments $0, 1, 2, \ldots, 6n$. La série ou *colonne* de N triples suivante :

$$\alpha+x, \quad \beta+x, \quad \gamma+x \qquad (x=0, 1, 2, \ldots, 6n),$$

dans lesquels chaque élément est éventuellement remplacé par son plus petit reste positif (mod N), est dite *cyclique;* elle est un cycle de N triples, formés chacun des trois éléments consécutifs aux éléments du précédent, et qui se reproduit indéfiniment par la substitution cyclique $(0\ 1\ 2\ \ldots\ N)$. Un système de triples de Steiner des $N=6n+1$ éléments $0, 1, 2, \ldots, 6n$ sera dit *cyclique*, lorsque les $\frac{N(N-1)}{6}$ triples du système sont répartis en $\frac{N-1}{6}=n$ colonnes cycliques différentes :

$$\alpha_i+x, \quad \beta_i+x, \quad \gamma_i+x \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

On fait immédiatement les remarques suivantes :

1° Une colonne cyclique est déterminée par l'un quelconque de ses triples que l'on peut appeler sa *tête de colonne.*

2° Une colonne cyclique a trois et trois seuls de ses triples contenant l'un quelconque des N éléments, l'élément 0 par exemple.

3° Deux colonnes cycliques différentes n'ont aucun triple commun.

---

(1) E.-H. MOORE, *Mathem. Ann.*, t. XLIII, 1893, p. 271.

Le tout est exposé également dans E. NETTO, *Lehrbuch der Combinatorik*, p. 202 à 218.

(2) Les systèmes cycliques pour $N=6n+3$ sont formés par n colonnes cycliques $(\alpha_i+x, \beta_i+x, \gamma_i+x)$, $(x, 0, 1, 2, \ldots, 6n+2)$, et une colonne cyclique supplémentaire de $2n+1$ triples.

4° Un système de n colonnes cycliques différentes sera un système de triples de Steiner, si l'un des N éléments, l'élément o par exemple, s'y trouve accouplé, dans les $3n$ triples qui le contiennent, à chacun des $6n$ autres éléments $1, 2, \ldots, 6n$.

E. Netto [1] (1893) a donné un système de triples de Steiner cyclique pour les nombres premiers de la forme $N = 6n + 1$; g étant une racine primitive de N, les n colonnes cycliques suivantes :

$$x, \quad g^{\alpha} + x, \quad g^{n+\alpha} + x$$
$$(x = 0, 1, 2, \ldots, 6n;\ \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

constituent un système de triples de Steiner. En effet, les triples contenant l'élément o dans ces n colonnes sont les suivants :

$$\left|\begin{array}{ccccccccccc}
0 & g^0 & g^n & ; & 0 & g^1 & g^{n+1} & ; & \ldots ; \\
-g^0 & 0 & -g^0 + g^n & ; & -g^1 & 0 & -g^1 + g^{n+1} & ; & \ldots ; \\
-g^n & -g^n + g^0 & 0 & ; & -g^{n+1} & -g^{n+1} + g^1 & 0 & ; & \ldots ; \\
 & & 0 & & g^{n-1} & & g^{2n-1} & ; & \\
 & & -g^{n-1} & & 0 & & -g^{n-1} + g^{2n-1} & ; & \\
 & & -g^{2n-1} & & -g^{2n-1} + g^{n-1} & & 0 & ; &
\end{array}\right.$$

et à l'aide des congruences :

$$g^{3n} \equiv -1, \qquad g^n - g^0 \equiv g^{2n} \qquad (\bmod N),$$

il est aisé de voir qu'ils peuvent prendre les formes plus explicites :

$$\begin{array}{llllllll}
0 \quad g^0 \quad g^n, & 0 \quad g^1 \quad g^{n+1}, & \ldots, & 0 \quad g^{n-1} \quad g^{2n-1}; \\
0 \quad g^{2n} \quad g^{3n}, & 0 \quad g^{2n+1} \quad g^{3n+1}, & \ldots, & 0 \quad g^{3n-1} \quad g^{4n-1}; \\
0 \quad g^{4n} \quad g^{5n}, & 0 \quad g^{4n+1} \quad g^{5n+1}, & \ldots, & 0 \quad g^{5n-1} \quad g^{6n-1}.
\end{array}$$

L'élément o est ainsi accouplé à chacun des $6n$ autres éléments $1, 2, \ldots, 6n$.

---

(1) E. NETTO, *Mathem. Ann.*, t. XLII, 1893, p. 143, ou *Combinatorik*, p. 220.

Dans le même article Netto donnait également la construction d'un système de triples cyclique pour $N = 6n + 3$, à condition que $2n + 1$ soit nombre premier de la forme $6m + 5$. L. Heffter (*Mathem. Ann.*, t. XLIX, 1897, p. 101) a levé cette dernière restriction et construit un système de triples cyclique pour chaque $N = 6n + 3$, où $2n + 1$ est nombre premier.

Remarquons le fait en rapport avec la suite du travail, que les n colonnes suivantes :

$$x, \quad g^{\alpha}+x, \quad g^{5n+\alpha}+x$$
$$(x=0, 1, 2, \ldots, 6n; \ \alpha=0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

représentent, avec la même racine primitive g, un second système de Netto *n'ayant aucun triple commun avec le premier*. En effet, les triples contenant l'élément o dans ces n colonnes sont pareils aux triples plus haut, à la différence près que g^n est remplacé par g^{5n}, et à l'aide des congruences :

$$g^{3n} \equiv -1, \qquad g^{5n}-g^0 \equiv g^{4n} \qquad (\text{mod N}),$$

on trouve de nouveau qu'ils prennent les formes :

$$\begin{array}{lllllllllll}
0 & g^0 & g^{5n}, & 0 & g^1 & g^{5n+1}, & \ldots, & 0 & g^{n-1} & g^{6n-1}; \\
0 & g^{3n} & g^{4n}, & 0 & g^{3n+1} & g^{4n+1}, & \ldots, & 0 & g^{4n-1} & g^{5n-1}; \\
0 & g^{n} & g^{2n}, & 0 & g^{n+1} & g^{2n+1}, & \ldots, & 0 & g^{2n-1} & g^{3n-1}.
\end{array}$$

Elles montrent sans autre que ce second système n'a aucun triple commun avec le premier. C'est, d'ailleurs, un système équivalent au premier, car il en découle immédiatement par la substitution $|x, g^n x|$ (1).

L. Heffter (2) (1897) a énoncé et étudié, relativement aux systèmes de triples cycliques les deux problèmes suivants. En remarquant que dans un système de triples cyclique, les trois différences entre les éléments d'un triple pris deux à deux dans un ordre fixe sont constantes pour tous les triples de la même colonne :

$$a+x, \quad b+x, \quad c+x$$
$$(x=0, 1, 2, \ldots, 6n \text{ ou } 6n+2),$$

ont une somme nulle et caractérisent cette colonne, il ramène la construction d'un système cyclique pour $\text{N}=6n+1$ à la solution de son *problème des différences I :*

Répartir les nombres 1, 2, ..., $3n$ *en* n *groupes de trois, de manière*

---

(1) Notation analytique (NETTO, *Gruppen und Substitutionentheorie*, p. 164).

(2) HEFFTER, *Mathem. Annalen*, t. XLIX, 1897, p. 101, et NETTO, *Combinatorik*, p. 221 à 227.

que dans chaque groupe les trois nombres aient pour somme $6n+1$, *ou que l'un des trois nombres soit égal à la somme des deux autres.*

Et la construction d'un système cyclique pour $N = 6n+3$, à la solution de son *problème des différences II :*

Répartir les nombres $1, 2, \ldots, 2n, 2n+2, \ldots, 3n+1$, *en n groupes de trois, tels que les trois nombres d'un groupe aient pour somme* $6n+3$, *ou que l'un des trois nombres soit égal à la somme des deux autres.*

Nous nous proposons, dans ce travail, de trouver tous les systèmes cycliques *différents* pour les premières valeurs de $N = 6n+1$ éléments. Dans une première Partie nous établissons que les systèmes cycliques vont par couples de systèmes *conjugués* équivalents, n'ayant aucun triple commun; la recherche des systèmes cycliques est ramenée aux solutions du problème de Heffter, mais en déduisant de chaque solution 2^{n-1} systèmes cycliques qui sont éventuellement différents. Dans une seconde Partie nous introduisons les substitutions *métacycliques* et quelques théorèmes nouveaux relatifs à leur effet sur les colonnes cycliques; l'emploi de ces substitutions permet alors de grouper l'ensemble des systèmes cycliques obtenus en classes de systèmes équivalents (par une substitution métacyclique). Enfin, dans une troisième Partie, le procédé des *trains de White* (1) simplifié nous permet de reconnaître si les systèmes de deux classes différentes sont différents ou non, et d'obtenir pour les valeurs de $N = 7, 13, 19, 25$ et 31 éléments auxquelles je me suis limité, tous les systèmes cycliques de Steiner différents et les groupes de substitutions qui leur appartiennent.

PREMIÈRE PARTIE.

Nous prendrons comme têtes des différentes colonnes cycliques l'un de leurs trois triples contenant l'élément o. Écrivons tous les triples

(1) H.-S. White, *Transactions of the Amer. Mathem. Society*, vol. XIV, 1913, p. 13.

des N éléments contenant l'élément o, ce qui revient, en négligeant l'élément o commun à tous ces triples, à écrire tous les couples des éléments 1, 2, ..., $6n$.

Nous avons avantage à disposer l'ensemble de ces couples sous la forme d'un tableau triangulaire, dont nous donnons l'exemple ci-dessous pour $N = 6.3 + 1 = 19$, en notant, pour abréger, les éléments par o, 1, 2, ..., 9, o', 1', ..., 8' :

Tableau I.

	A																
	12																
	13	23															
	14	**24**	34														
	15	25	35	45													
	16	26	**36**	46	56												
	17	27	37	47	57	67											
	18	28	38	**48**	58	68	78										
	19	29	39	49	59	69	79	89									
									B'								
C'	**10'**	20'	30'	40'	**50'**	60'	70'	80'	**90'**								
	11'	21'	**31'**	41'	51'	61'	71'	**81'**	91'	0'1'							
	12'	22'	32'	42'	**52'**	**62'**	**72'**	82'	92'	0'2'	1'2'						
							O										
	13'	23'	33'	43'	53'	**63'**	**73'**	83'	93'	0'3'	1'3'	2'3'					
	14'	24'	34'	44'	**54'**	64'	**74'**	84'	**94'**	0'4'	1'4'	2'4'	3'4'				
	15'	25'	35'	**45'**	55'	65'	75'	85'	95'	0'5'	**1'5'**	2'5'	3'5'	4'5'			
	16'	26'	**36'**	46'	56'	66'	76'	**86'**	96'	0'6'	1'6'	2'6'	**3'6'**	4'6'	5'6'		
	17'	**27'**	37'	47'	57'	67'	77'	87'	97'	0'7'	1'7'	2'7'	3'7'	4'7'	**5'7'**	6'7'	
	18'	28'	38'	48'	58'	68'	78'	88'	**98'**	0'8'	1'8'	2'8'	3'8'	4'8'	5'8'	6'8'	**7'8'**
B									A'								C

La colonne cyclique qui se déduit de la tête de colonne (o, α, β), ($\alpha < \beta$), contient les trois triples :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \alpha & \beta \\ N-\alpha & 0 & \beta-\alpha \\ N-\beta & N-(\beta-\alpha) & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{ou mieux}\\ \text{les}\\ \text{triples}\end{array} \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \alpha & \beta, \\ 0 & \beta-\alpha & N-\alpha, \\ 0 & N-\beta & N-(\beta-\alpha), \end{array}\right.$$

puisque, dans le tableau précédent, chaque couple a en premier son élément inférieur, indiquant la rangée verticale, et en second son élément supérieur, indiquant la ligne horizontale.

Il est facile de se rendre compte de la position respective de ces trois triples. Car si β augmente de 1, le triple $(0, \alpha, \beta)$ descend d'une ligne dans la même rangée, le triple $(0, \beta-\alpha, N-\alpha)$ avance d'une rangée dans la même ligne, et le triple $[0, N-\beta, N-(\beta-\alpha)]$ monte d'une ligne et recule d'une rangée. Or, pour $\beta = 2\alpha$, les trois triples deviennent :

$$\begin{array}{cccll} 0 & \alpha & 2\alpha & \text{sur la médiane} & AA', \\ 0 & \alpha & N-\alpha & \quad\text{»} & BB', \\ 0 & N-2\alpha & N-\alpha & \quad\text{»} & CC', \end{array}$$

les deux premiers dans la même rangée du tableau, le second et le troisième dans la même ligne. O désignant le centre des médianes AA', BB', CC' du tableau, les triples $(0, \alpha, \beta)$ situés sur la médiane AO et à l'intérieur du triangle AOB ont ainsi leurs deux autres triples (1) correspondants placés dans le même ordre respectivement dans les triangles BOC et COA. Les triples de la médiane AO et de l'intérieur du triangle AOB peuvent donc être pris comme *têtes des* $n(6n-1)$ *colonnes cycliques différentes* en lesquelles se répartissent les

$$n(6n-1)(6n+1)$$

triples de $6n+1$ *éléments* [1].

---

[1] Si, au lieu d'écrire les triples contenant l'élément 0 dans les casiers d'un réseau à base carrée, on dispose ces mêmes triples aux sommets d'un réseau à base triangle équilatéral, le tableau prend la symétrie complète du triangle équilatéral. A chaque mouvement de l'axe ternaire, un triple quelconque se couvre avec son correspondant de la même colonne cyclique, et les deux triangles *conjugués* AOC′ et BOC′ (*voir* plus loin) sont symétriques par rapport à la médiane OC′.

Pour qu'une colonne cyclique $(0, \alpha, \beta)$ puisse faire partie d'un système de Steiner, il est nécessaire que cette colonne ne contienne pas deux fois le même couple. Il faut donc que les triples (1) de cette colonne ne contiennent pas deux fois le même élément, autre que 0. Or, ce n'est que lorsque $\beta = 2\alpha$, ou $N = \alpha + \beta$, ou $N + \alpha = 2\beta$, que deux des éléments α, β, $\beta - \alpha$, $N - \alpha$, $N - \beta$, $N - (\beta - \alpha)$, sont égaux, c'est-à-dire lorsque le triple $(0, \alpha, \beta)$ est situé sur l'une des trois médianes AA', BB', CC'.

Donc seules les colonnes cycliques déduites des têtes $(0, \alpha, \beta)$ *situées sur* AO *et* OC' *(ou sur l'une quelconque des trois médianes du tableau) contiennent deux fois le même couple. Toutes les colonnes cycliques déduites des têtes* $(0, \alpha, \beta)$ *situées à l'intérieur du triangle* AOB, *en dehors de* OC', *sont des colonnes propres à former des systèmes cycliques de Steiner.*

Nous appellerons la colonne $[0, \alpha, N - (\beta - \alpha)]$ la *conjuguée* de la colonne $(0, \alpha, \beta)$; dans ce cas, celle-ci est inversement la conjuguée de la première. La conjuguée de la colonne $(0, \alpha, 2\alpha + x)$ est

$$(0, \alpha, N - \alpha - x);$$

deux colonnes conjuguées sont donc équidistantes verticalement des triples $(0, \alpha, 2\alpha)$ et $(0, \alpha, N - \alpha)$ des médianes AO et BO. Lorsque α est impair, la colonne $\left(0, \alpha, \frac{N + \alpha}{2}\right)$ sur la médiane OC' est à elle-même sa conjuguée.

Théorème. — *Une colonne cyclique se transforme en sa conjuguée par la substitution* $|x, N - x|$.

En effet, cette substitution change le triple :

$$x, \quad x + \alpha, \quad x + \beta$$

de la colonne $(0, \alpha, \beta)$, en

$$N - x, \quad N - x - \alpha, \quad N - x - \beta,$$

qui est un triple de la colonne conjuguée $[0, \alpha, N - (\beta - \alpha)]$.

Pour constituer un système de triples cyclique, il s'agit de prendre

n colonnes $(0, \alpha, \beta)$, à l'intérieur du triangle AOB, en dehors de OC′, dont les 6 éléments associés à l'élément 0 soient tous différents d'une colonne à l'autre, et reproduisent les $6n$ éléments autres que zéro : $1, 2, 3, \ldots, 6n$. Puisque les six éléments associés à 0 dans les deux colonnes conjuguées :

$$\begin{array}{lll} 0 & \alpha & \beta, \\ 0 & \beta-\alpha & N-\alpha, \\ 0 & N-\beta & N-(\beta-\alpha), \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 0 & \alpha & N-(\beta-\alpha), \\ 0 & N-\beta & N-\alpha, \\ 0 & \beta-\alpha & \beta \end{array}$$

sont les mêmes, dans un système de triples cyclique, l'une de ces colonnes peut indifféremment être substituée à l'autre; le résultat de la substitution sera chaque fois un nouveau système cyclique de Steiner. Le système cyclique, formé des n colonnes respectivement conjuguées aux n colonnes d'un premier système, sera le *système cyclique conjugué* au premier. Du théorème plus haut découle alors la conclusion :

Les systèmes de triples cycliques vont par couples; les deux systèmes d'un même couple n'ont aucun triple commun, mais sont équivalents et se transforment l'un dans l'autre par la substitution $|x, N-x|$ (¹).

La détermination des systèmes de triples cycliques *différents* (qui ne peuvent provenir l'un de l'autre par une permutation quelconque des éléments) se restreint donc ainsi aux têtes de colonnes cycliques situées à l'intérieur du triangle AOC′, avec faculté de remplacer dans

---

(¹) H.-S. White, dans un travail dont il sera question plus loin (*Transactions of the Americ. Mathem. Society*, vol. XIV, n° 1, 1913, p. 13), a remarqué ce théorème, mais seulement dans le cas particulier du système cyclique de Netto de 13 éléments. Il est maintenant établi d'une manière générale. Le second système de Netto considéré au début :

$$0, g^{\alpha}, g^{5n+\alpha}, \ (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

n'est autre que le *conjugué* du premier :

$$0, g^{\alpha}, g^{n+\alpha}, \ (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

puisque

$$N-(g^{n+\alpha}-g^{\alpha}) \equiv g^{5n+\alpha} \qquad (\bmod N).$$

chaque système une ou plusieurs de ses colonnes, mais non toutes, par les conjuguées. Soit $(0, \alpha, \beta)$ une colonne cyclique à l'intérieur du triangle AOC'. Parmi les six éléments accouplés à o dans cette colonne :

$$(2) \qquad \alpha, \quad \beta-\alpha, \quad \beta, \quad N-\beta, \quad N-(\beta-\alpha), \quad N-\alpha,$$

trois d'entre eux sont inférieurs à $\frac{N}{2}$ et les trois autres compris entre $\frac{N}{2}$ et N.

Dans le tableau triangulaire I, le dernier triple sur la médiane AO, immédiatement au-dessus du point O, est le triple $(0, 2n, 4n)$; d'après cela, dans les colonnes $(0, \alpha, \beta)$ de l'intérieur du triangle AOC', les éléments α et β ont comme valeurs extrêmes respectivement $2n-1$ et $4n-1$. D'autre part, l'élément $\beta-\alpha$ a sa valeur extrême $3n-1$ dans le triple du triangle BOA' situé immédiatement à gauche du dernier triple $(0, 3n, 6n)$ de la médiane AA'. Par conséquent, dans les éléments (2), α et $\beta-\alpha$ n'atteignent jamais $\frac{N-1}{2}=3n$; seul β peut dépasser $\frac{N}{2}$ et atteindre $4n-1$, mais c'est alors $N-\beta$ qui devient à son tour inférieur à $\frac{N}{2}$.

Si nous appelons les trois éléments (2) inférieurs à $\frac{N}{2}$ la *caractéristique* de la colonne cyclique $(0, \alpha, \beta)$, cette caractéristique sera donc, selon le cas :

$$\alpha, \quad \beta-\alpha, \quad \beta \qquad \text{pour } \beta=2\alpha+1,\ 2\alpha+2,\ \ldots,\ 3n;$$
$$\alpha, \quad \beta-\alpha, \quad N-\beta \qquad \text{pour } \beta=3n+1,\ 3n+2,\ \ldots,\ 4n-1.$$

Écrivons les caractéristiques de toutes les colonnes cycliques $(0, \alpha, \beta)$ de l'intérieur du triangle AOC'. Il sera commode de placer sur une même ligne horizontale les caractéristiques des colonnes d'une même rangée verticale du tableau I. Les caractéristiques situées sur la même ligne horizontale ont ainsi leur premier élément commun; nous ne l'écrirons qu'une seule fois devant chaque ligne. Par exemple, pour $N = 25$, le tableau suivant des caractéristiques s'écrit immédiatement :

1	23	34	45	56	67	78	89	90'	0'1'	1'2'
2		35	46	57	68	79	80'	91'	0'2'	1'2'
3			47	58	69	70'	81'	92'	0'2'	
4				59	60'	71'	82'	92'	0'1'	
5					61'	72'	82'	91'		
6						72'	81'	90'		
7							80'			

Pour que les douze éléments (2) associés à l'élément o dans deux colonnes cycliques différentes soient tous différents, il faut et il suffit évidemment que les six éléments des deux caractéristiques soient tous différents. Déterminer toutes les combinaisons de n colonnes cycliques du triangle AOC' constituant un système cyclique de Steiner, revient donc à déterminer *tous les groupes de n de leurs caractéristiques n'ayant aucun élément commun.* Comme il devait en être, nous retombons sur le problème de Heffter. Pour les caractéristiques de la première forme ($\beta \leqq 3n$),

$$\alpha + \beta - \alpha = \beta;$$

pour les caractéristiques de la seconde forme ($\beta > 3n$),

$$\alpha + \beta - \alpha + N - \beta = N.$$

(J'ai séparé par la barre oblique dans le tableau précédent les caractéristiques de la première forme de celles de la seconde.) Les premières sont tous les triples des $3n$ éléments 1, 2, ..., $3n$ où l'un des éléments est égal à la somme des deux autres; les secondes sont tous les triples des mêmes éléments où la somme des trois nombres est égale à N. Mais par le procédé suivi, nous sommes certains maintenant d'obtenir tous les systèmes cycliques possibles, et comme le problème se réduit ici à déterminer dans le tableau précédent toutes les combinaisons de n de ses triples n'ayant aucun élément commun, peut-être la loi selon laquelle croît avec n, $(N = 6n + 1)$, le nombre de ces combinaisons serait-elle plus facile à découvrir avec cette disposition en quelque sorte géométrique de ces triples, coïncidant avec la disposition régulière des têtes de colonnes du triangle AOC'.

Quoi qu'il en soit, pour les premières valeurs de n auxquelles je me suis limité, je trouve, sans y mettre beaucoup de temps, les nombres de solutions suivants :

Pour $n = 1$	$N = 7$	1 solution
» $n = 2$	$N = 13$	1 »
» $n = 3$	$N = 19$	4 »
» $n = 4$	$N = 25$	15 »
» $n = 5$	$N = 31$	64 »

Pour opérer le plus simplement, par exemple dans le tableau précédent de $N = 25$, je sépare par une barre verticale les triples des premières lignes contenant les éléments jusqu'à $4 = n$; à partir de là il me faudra nécessairement un triple de chacune des quatre premières lignes, et nécessairement un triple contenant l'élément 5. J'essaye successivement 56, 57, 58, 59, et ensuite isolément les triples laissés à gauche 123, 134, etc., et l'opération est terminée.

DEUXIÈME PARTIE.

Une solution du problème de Heffter, c'est-à-dire un système de triples cyclique dont les têtes de colonnes appartiennent exclusivement au triangle AOC', fournit en réalité, puisque chacune de ses n colonnes peut être remplacée par sa conjuguée, 2^n systèmes de triples cycliques. La moitié de ces systèmes étant les conjugués des autres, il en reste à examiner 2^{n-1} pour chacune des solutions obtenues, c'est-à-dire pour :

$n = 1$	$N = 7$	1 système
$n = 2$	$N = 13$	2 »
$n = 3$	$N = 19$	16 »
$n = 4$	$N = 25$	120 »
$n = 5$	$N = 31$	1024 »

Une classe particulière de substitutions nous aidera à réduire beaucoup le nombre de ces systèmes qui peuvent être différents.

Soient les éléments $0, 1, 2, \ldots, N$. Dans les substitutions suivantes, nous entendrons toujours comme jusqu'ici, par un élément supérieur à N son plus petit reste positif mod N.

La substitution *cyclique* $|x, a+x|$ est la puissance a de la substitution

$$s = |x, 1+x|.$$

Lorsque N est un nombre premier p, les substitutions

$$t = |x. a + \alpha x|$$
$$(a = 0, 1, 2, \ldots, p-1;\ \alpha = 1, 2, 3, \ldots, p-1)$$

constituent le groupe *métacyclique* (Kronecker) (¹). Pour $\alpha = 1, a = 0$, la substitution t est l'identité; pour $\alpha = 1$, la substitution t est la substitution cyclique s^a, qui déplace les p éléments; pour $\alpha > 1$, la substitution t déplace $p - 1$ éléments; l'élément qui ne change pas est donné par la congruence $x \equiv a + \alpha x \pmod p$.

Lorsque N est un nombre quelconque, les substitutions

$$t = |x, a + \alpha x|$$
$$[a = 0, 1, 2, \ldots, N-1;\ \alpha = \text{les } \varphi(N) \text{ entiers premiers avec } N]$$

constituent encore un groupe. Nous l'appellerons de même le groupe *métacyclique*. Mais ici les substitutions où $\alpha > 1$, selon les conditions dans lesquelles se présentent la congruence $x \equiv a + \alpha x \pmod N$, peuvent déplacer un nombre d'éléments moindre que $N - 1$. La

(¹) NETTO, *Gruppen und Substitutionentheorie*, p. 133.

$m^{\text{ième}}$ puissance de la substitution t, où $\alpha > 1$, est

$$\left| x,\ a\frac{\alpha^m - 1}{\alpha - 1} + \alpha^m x \right|.$$

Lorsque N est nombre premier p, cette puissance ne peut être qu'une substitution régulière de $p-1$ éléments, avec des cycles de u éléments, si u est la plus petite puissance de α congrue à $1 \pmod p$. Si α est racine primitive de p, la substitution t est donc d'ordre $p-1$ et formée d'un seul cycle.

Que N soit premier ou entier quelconque, si $\varphi(N)$ est la plus petite puissance de α congrue à $1 \pmod N$, le groupe métacyclique est produit par les deux substitutions

$$s = |x,\ 1+x|, \qquad t = |x,\ \alpha x|$$

et chacun de ses diviseurs non cycliques (nous les appellerons *diviseurs métacycliques*) par les deux substitutions

$$s = |x,\ 1+x|, \qquad t = |x,\ \alpha^{\omega} x|,$$

où ω est un diviseur quelconque de $\varphi(N)$. L'ordre de ce diviseur métacyclique est ainsi $N\frac{\varphi(N)}{\omega}$.

THÉORÈMES. — 1. *La substitution cyclique* $|x, a+x|$ *transforme chaque colonne cyclique en elle-même.*

2. *La substitution métacyclique* $|x, a+\alpha x|$ *transforme chaque colonne cyclique en une colonne cyclique.*

En effet, par cette substitution, le triple quelconque

$$m \quad n \quad p$$

devient

$$a+m\alpha \quad a+n\alpha \quad a+p\alpha;$$

le triple de la même colonne

$$m+s \quad n+s \quad p+s$$

devient

$$a+m\alpha+s\alpha \quad a+n\alpha+s\alpha \quad a+p\alpha+s\alpha,$$

c'est-à-dire un triple de la même colonne que le précédent.

3. *La substitution métacyclique* $|x, a + \alpha x|$ *transforme deux colonnes conjuguées en deux colonnes conjuguées.*

En effet, par cette substitution, la tête de colonne

$$0 \quad n \quad p$$

devient

$$a \quad a + n\alpha \quad a + p\alpha,$$

c'est-à dire la colonne

$$0 \quad n \quad p$$

devient la colonne

$$0 \quad n\alpha \quad p\alpha;$$

de même la colonne conjuguée

$$0 \quad n \quad p'$$

devient la colonne

$$0 \quad n\alpha \quad p'\alpha.$$

Or $p' = N - p + n$, en d'autres termes

$$p + p' \equiv n \qquad (\text{mod}\, N);$$

mais, α étant premier avec N, on a aussi

$$p\alpha + p'\alpha \equiv n\alpha \qquad (\text{mod}\, N).$$

Les deux colonnes transformées sont donc conjuguées comme les deux premières.

Le groupe, qui transforme un système de triples cyclique en lui-même, contient donc en tout cas le groupe cyclique $\{s\}$. Les substitutions du groupe métacyclique transforment un système de triples cyclique en un système cyclique et deux systèmes conjugués en deux systèmes conjugués.

4. *Le groupe qui transforme en lui-même le système de Netto :*

$$0 \quad g^{\alpha} \quad g^{n+\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

contient en tout cas le diviseur métacyclique d'ordre $\frac{(6n+1)6n}{2n} = 3(6n+1)$,

$$\{|x, 1+x|, \quad |x, g^{2n}x|\}$$

En effet $|x, g^n x|$ transforme le système de Netto en son conjugué; donc $|x, g^{2n} x|$ le transforme en lui-même.

5. *Le groupe, qui transforme en lui-même un système cyclique quelconque, ne peut contenir de diviseur métacyclique d'ordre* PAIR.

En effet, soit ω une puissance de α [$\varphi(N)$ est la plus petite puissance de α congrue à $1 \pmod N$] pour laquelle la substitution $|x, \alpha^\omega x|$ change le système en lui-même. ω doit être diviseur de $\varphi(N)$, mais non de $\frac{\varphi(N)}{2}$; sinon une puissance de $|x, \alpha^\omega x|$, changeant le système en lui-même, donnerait la substitution $\left|x, \alpha^{\frac{\varphi(N)}{2}} x\right|$, alors que cette dernière substitution transforme le système en son conjugué, puisque

$$\alpha^{\frac{\varphi(N)}{2}} \equiv -1 \pmod N.$$

Par conséquent, si l'on a

$$\varphi(N) = 2^\beta q^\gamma q'^{\gamma'} \ldots,$$
$$\frac{\varphi(N)}{2} = 2^{\beta-1} q^\gamma q'^{\gamma'} \ldots,$$

ω ne peut être que

$$\omega = 2^\beta q^\varepsilon q'^{\varepsilon'} \ldots.$$

Le diviseur métacyclique en question d'ordre $N\frac{\varphi(N)}{\omega}$ ne peut donc être que d'ordre impair. $\varphi(N)$ est nécessairement pair; aucun système de triples cyclique ne peut donc posséder le groupe métacyclique complet de ses N éléments.

6. *Si ω est la plus petite puissance pour laquelle la substitution $|x, \alpha^\omega x|$ change le système cyclique en lui-même, la substitution $\left|x, \alpha^{\frac{\omega}{2}} x\right|$ le change nécessairement en son conjugué.*

Cela résulte du fait que les substitutions $|x, \alpha^\beta x|$ et $|x, \alpha^{\omega+\beta} x|$, appliquées à ce système, donnent le même système transformé.

7. *La substitution métacyclique quelconque $|x, b + \beta x|$ (β premier*

avec N) *est permutable avec le diviseur métacyclique :*

$$\{|x, 1+x|, \quad |x, \alpha^{\omega}x|\}.$$

Les substitutions de ce diviseur sont, en effet,

$$|x, \alpha^{\omega s}x|.|x, a+x| = |x, a+\alpha^{\omega s}x|$$
$$\left(a = 0, 1, 2, \ldots, N-1;\ s = 1, 2, 3, \ldots, \frac{\varphi(N)}{\omega}\right)$$

et l'on a

$$|x, b+\beta x|.|x, a+\alpha^{\omega s}x| = |x, a+b\alpha^{\omega s}+\beta\alpha^{\omega s}x|,$$
$$|x, a'+\alpha^{\omega s}x|.|x, b+\beta x| = |x, b+\beta a'+\beta\alpha^{\omega s}x|.$$

Or, la congruence

$$\beta a' \equiv -b+a+b\alpha^{\omega s} \qquad (\text{mod } N)$$

a toujours une solution a', β étant premier avec N.

Ce résultat revient à dire que deux systèmes cycliques qui se transforment l'un dans l'autre, par une substitution métacyclique, ont les mêmes substitutions métacycliques qui les transforment en eux-mêmes. En particulier, les diviseurs métacycliques appartenant à deux systèmes conjugués sont constitués des mêmes substitutions (¹).

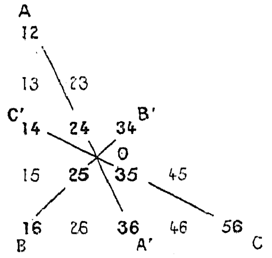
Pour $N = 7 = 6.1+1$, ($n = 1$), le triangle II montre immédiatement un seul couple de systèmes cycliques conjugués 13 et 15 (²). Pour 7 éléments, il est facile de voir, en effet, qu'il n'y a qu'un seul système de Steiner possible avec 30 formes différentes dont deux seules sont cycliques. Le groupe de ce système est ainsi d'ordre $\frac{7!}{30} = 168$. Les systèmes conjugués 13 et 15 possèdent le diviseur métacyclique d'ordre 21 :

$$\{|x, 1+x|, \quad |x, 3^2x|\},$$

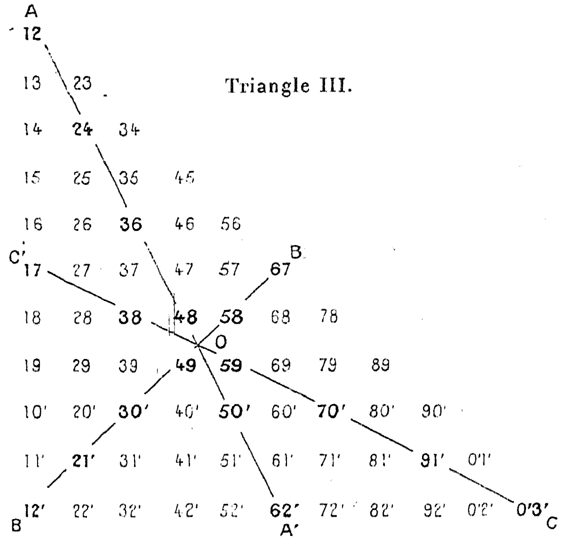
(¹) Le théorème donné par H. White, dans son travail cité plus haut, pour le système cyclique de Netto de 13 éléments, et qu'il énonce ainsi : *Triple-systems of the Netto type on 13 elements occur in pairs, the two of a pair having the same group, but having no triad in common*, est ainsi entièrement établi pour un système cyclique quelconque.

(²) En continuant à négliger d'écrire l'élément 0 commun à toutes les têtes de colonnes cycliques.

c'est-à-dire le demi du groupe métacyclique de 7 éléments.



Triangle II.



Triangle III.

Pour $N = 13 = 6.2 + 1$, ($n = 2$), le triangle AOC′ a une seule solution et ainsi deux systèmes à examiner [1] :

14	27	a
10′	27	a_1

Nous noterons toujours par l'indice prime le système conjugué. Avec la substitution $|x, 2x|$ (2 est racine primitive de 13), nous formons le tableau suivant, où chaque système est le transformé du précédent par cette substitution :

14	27	a
28	14	a'_1
10′	28	a'

A partir de a' ce sont les conjugués de ces systèmes qui reviendront dans le même ordre, puisqu'une substitution métacyclique transforme deux systèmes conjugués en deux conjugués. Donc encore un *seul système* cyclique pour 13 éléments, avec le diviseur métacyclique d'ordre 39 :

$$\{ |x, 1+x|, \quad |x, 2^4 x| \}.$$

(1) Nous mettrons toujours à droite la lettre qui désigne le système.

Pour former facilement ce tableau précédent et ceux qui suivent, il suffit d'écrire les têtes de colonnes du triangle AOC' et d'y appliquer la substitution $|x, \alpha x|$ choisie, α appartenant à l'exposant $\varphi(\mathrm{N})\pmod{\mathrm{N}}$. Les triples transformés sont encore dans le triangle des triples contenant l'élément o et indiquent immédiatement la colonne transformée. Les transformées des colonnes du triangle conjugué BOC' sont les conjuguées des premières. Avec cela, ces tableaux, où dans chaque rangée verticale une colonne est toujours la transformée de la précédente, et ainsi chaque système le transformé du précédent par la substitution $|x, \alpha x|$, s'établissent presque au courant de la plume; une fois atteint le conjugué du premier système, il est inutile de poursuivre puisque, en vertu du théorème 3 plus haut, ce sont les conjugués des premiers qui viendront dans le même ordre.

Pour $\mathrm{N} = 19 = 6.3 + 1$, $(n = 3)$, le triangle AOC' contient les quatre solutions (tableau I) :

14	29	51'	a	dont les systèmes conjugués sont :	16'	22'	53'	a'
15	28	30'	b		15'	23'	32'	b'
16	20'	37	c		14'	21'	35'	c'
18	25	40'	d		12'	26'	43'	d'

Il en résulte 16 systèmes non conjugués; nous désignerons les quatre fournis par le système a par

14	29	51'	a
16'	29	51'	a_1
14	22'	51'	a_2
14	29	53'	a_3

et de même les quatre fournis par chacun des systèmes b, c, d. La substitution $|x, 2x|$ (2 est racine primitive de 19) donne la répartition suivante :

14	29	51'	a	16'	29	51'	a_1
28	15	30'	b	23'	15	30'	b_2
37	20'	16	c	35'	20'	16	c_3
51'	14	22'	a_2	53'	14	22'	a'_1
30'	28	15'	b_1	18	25	40'	d
16	37	21'	c_2	26'	40'	18	d_2
22'	51'	16'	a'_3	43'	18	26'	d'_1
15'	30'	23'	b'_3	12'	26'	43'	d'
21'	16	35'	c'_1	18	25	43'	d_3
16'	22'	53'	a'	26'	40'	12'	d'_3

Donc, pour 19 éléments, au plus 4 *systèmes* cycliques sont différents. Le système a ne possède que le groupe cyclique $\{|x, 1+x|\}$. Les systèmes a_1 et d possèdent le diviseur métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, 2^6 x|\}$ d'ordre $3 \times 19 = 57$, et le système d_3 le diviseur métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, 2^2 x|\}$ d'ordre $9 \times 19 = 171$.

Pour $N = 25 = 6.4 + 1$, $(n = 4)$, le triangle AOC′ (pour 25 et 31 éléments le triangle des triples contenant l'élément o ne tient plus dans la largeur de cette page; il est d'ailleurs facile de se le représenter) contient les 15 systèmes :

					Les systèmes conjugués sont :				
13	43′	51′	75′	a	13″	46′	59′	77′	a'
13	41′	53′	65′	b	13″	48′	57′	66′	b'
14	20′	54′	63′	c	12″	27′	56′	68′	c'
15	29	33′	64′	d	11″	28′	35′	67′	d'
15	23′	39	75′	e	11″	24′	39′	77′	e'
16	20′	32′	41′	f	10″	27′	36′	48′	f'
16	21′	30′	42′	g	10″	26′	38′	47′	g'
17	22′	31′	49	h	19′	25′	37′	40″	h'
18	26	33′	54′	i	18′	21″	35′	56′	i'
19	25	44′	63′	k	17′	22″	45′	68′	k'
19	22′	37	51′	l	17′	25′	31″	59′	l'
10′	26	31′	52′	m	16′	21″	37′	58′	m'
11′	27	39	42′	n	15′	20″	39′	47′	n'
12′	28	30′	49	o	14′	29′	38′	40″	o'
12′	29	38	40′	p	14′	28′	30″	49′	p'

Il en résulte 120 systèmes non conjugués; nous désignerons les huit fournis par le système a par :

13	43′	51′	75′	a
13″	43′	51′	75′	a_1
13	46′	51′	75′	a_2
13	43′	59′	75′	a_3
13	43′	51′	77′	a_4
13″	46′	51′	75′	a_5
13″	43′	59′	75′	a_6
13″	43′	51′	77′	a_7

La substitution $|x, 2x|$ [2 appartient à l'exposant $\varphi(25) = 20$ (mod 25)] donne la répartition suivante; à droite les têtes de colonnes sont rangées à nouveau par ordre de grandeur de leur premier élément autre que o :

13	43′	51′	75′	ou	13	43′	51′	75′	a
26	18	33′	54′	»	18	26	33′	54′	i
42′	26′	16	30′	»	16	26′	30′	42′	g_2
19	31″	22′	51′	»	19	22′	31″	51′	b_3
28′	67′	15	33′	»	15	28′	33′	67′	d'_6
41′	36′	20′	16	»	16	20′	36′	41′	f_3
31′	19′	40″	22′	»	19′	22′	31′	40″	h_7
39	23′	77′	15	»	15	23′	39	77′	e_4
68′	14	56′	20′	»	14	20′	56′	68′	c'_5
14′	28	38′	40″	»	14′	28	38′	40″	o'_2
13″	46′	59′	77′	»	13″	46′	59′	77′	a'

13	41′	53′	65′	ou	13	41′	53′	65′	b b_1 b_2 b_5
26	31′	10′	52′	»	10′	26	31′	52′	m
42′	39	20″	11′	»	11′	20″	39	42′	n_2
19	68′	45′	22″	»	19	22″	45′	68′	k'_1
28′	14′	30″	49′	»	14′	28′	30″	49′	p'
41′	13″	65′	57′	»	13″	41′	57′	65′	b_6 b'_4 b_3 b'_7

Si nous prenons un autre système a_i comme point de départ, c'est-à-dire si nous remplaçons dans le système a une ou plusieurs colonnes par les conjuguées, en vertu du théorème 3, les rangées verticales correspondantes seront remplacées par les colonnes conjuguées; en d'autres termes, les sept autres systèmes a_i donneront chacun une succession de systèmes identique à celle de a, abstraction faite des indices. Même remarque pour le système b, pour lequel, d'ailleurs, il est inutile de pousser le tableau au delà de b_6; à partir de b_6, en vertu toujours du théorème 3, se présenteront [1] dans le même ordre des systèmes de même lettre que les précédents, mais d'indice différent puisque b_6 est d'indice différent de b. Les systèmes b_i vont donc par couples; pour connaître sans autre le transformé de b_1 par la substitution $|x, 2^5 x|$, il suffit de remplacer dans b_6 la colonne $41'$, transformée de 13, par sa conjuguée $48'$, transformée de la conjuguée de 13; on trouve b'_4. De même le transformé de b_2 est b_3 et de b_5, b'_7. Ainsi, pour 25 éléments, au plus 12 *systèmes* cycliques sont différents; chacun possède uniquement le diviseur cyclique $\{|x, 1+x|\}$.

Pour $N = 31 = 6.5 + 1$, $(n = 5)$, le triangle AOC' contient les

[1] Jusqu'au 10^{me} transformé, qui sera nécessairement b'.

64 systèmes suivants ; nous n'écrirons pas leurs systèmes conjugués :

13	41'	55'	68'	87'	A(*a*)	19	25	45'	68'	77'	G(*a*)
13	41'	57'	65'	88'	A(*b*)	19	27	33'	46'	67'	G(*b*)
13	42'	54'	66'	78'	A(*c*)	19	23'	37	57'	66'	G(*c*)
13	47'	51'	75'	99'	A(*d*)	19	25'	34'	40'	52'	G(*d*)
14	20'	57'	65'	78'	B(*a*)	10'	25	46'	64'	78'	H(*a*)
14	22'	53'	67'	76'	B(*b*)	10'	27	36'	42'	67'	H(*b*)
14	22'	56'	63'	87'	B(*c*)	10'	28	36'	41'	57'	H(*c*)
14	23'	52'	66'	87'	B(*d*)	10'	24'	38	45'	63'	H(*d*)
14	24'	51'	76'	88'	B(*e*)	10'	26'	38	41'	68'	H(*e*)
15	29	35'	67'	88'	C(*a*)	11'	25	46'	63'	87'	I(*a*)
15	20'	34'	68'	76'	C(*b*)	11'	26	36'	52'	87'	I(*b*)
15	25'	39	77'	89'	C(*c*)	11'	27	35'	43'	64'	I(*c*)
15	26'	31'	63'	99'	C(*d*)	11'	24'	37	53'	65'	I(*d*)
16	29	34'	46'	88'	D(*a*)	12'	29	38	47'	66'	K(*d*)
16	29	36'	44'	89'	D(*b*)	12'	26	33'	54'	75'	K(*a*)
16	21'	36'	42'	77'	D(*c*)	12'	27	36'	40'	87'	K(*b*)
16	22'	36'	41'	87'	D(*f*)	12'	28	36'	49	77'	K(*c*)
16	22'	31'	47'	76'	D(*d*)	12'	25'	30'	49	64'	K(*e*)
16	22'	34'	43'	75'	D(*e*)	13'	25	41'	66'	87'	L(*a*)
16	23'	30'	46'	87'	D(*g*)	13'	26	30'	56'	87'	L(*b*)
16	23'	32'	44'	75'	D(*h*)	13'	27	31'	44'	65'	L(*c*)
16	26'	32'	41'	88'	D(*k*)	13'	28	30'	45'	54'	L(*d*)
16	26'	30'	43'	89'	D(*i*)	13'	21'	37	55'	64'	L(*e*)
17	20'	32'	47'	56'	E(*a*)	15'	26	38	78'	99'	M(*a*)
17	21'	35'	44'	53'	E(*b*)	15'	29	33'	42'	51'	M(*b*)
17	24'	31'	43'	55'	E(*c*)	15'	22'	39	41'	53'	M(*c*)
17	26'	33'	49	89'	E(*d*)	15'	22'	31'	49	63'	M(*d*)
18	21'	36'	40'	57'	F(*a*)	14'	25	40'	76'	89'	N(*a*)
18	22'	39	47'	56'	F(*b*)	14'	28	37	56'	99'	N(*b*)
18	22'	36'	49	67'	F(*c*)	14'	28	32'	41'	55'	N(*c*)
18	23'	35'	40'	54'	F(*d*)	14'	20'	39	45'	52'	N(*d*)
18	25'	32'	44'	51'	F(*e*)	14'	22'	38	41'	65'	N(*e*)

Il en résulte 1024 systèmes non conjugués. Si a', b', c', d', e' représentent les cinq colonnes conjuguées du système A(a) par exemple, nous désignerons encore selon le même principe que plus haut par A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 les systèmes qui contiennent la seule colonne conjuguée correspondante a', b', c', d', e' ; par A_6, A_7, A_8, ..., A_{15} respectivement ceux qui contiennent les combinaisons successives de deux colonnes conjuguées a', b' ; a', c' ; a', d' ; a', e' ; b', c' ; b', d' ; b', e' ; c', d' ; c', e' ; d', e'.

La substitution $|x, 3x|$ (3 est racine primitive de 31) répartit ces 1024 systèmes en huit groupes de systèmes équivalents; trois groupes sont d'un même type, et trois autres groupes d'un même type également; les deux groupes à part donnent les systèmes qui offrent le plus d'intérêt.

Premier groupe.

13	41′	55′	68′	87′	ou	13	41′	55′	68′	87′	$A(a)$	A_1 A_2 A_5 A_4 A_7 A_{11} A_{15} (1)
39	22′	17′	53′	41′	»	17′	22′	39	41′	53′	$M_1(c)$	
43′	16″	30″	73″	22′	»	16″	22′	30″	43′	73″	$D'_{11}(e)$	
43″	36′	21′	71″	16″	»	16″	21′	36′	43″	71″	$D'_{10}(c)$	
54″	82″	26	11″	36′	»	11″	26	36′	54″	82″	$I'_{10}(b)$	
51″	44″	68′	13	82″	»	13	44″	51″	68′	82″	$A'_8(a)$	A_{12} A_{14} A_{10} A'_4 A'_7 A'_{11} A'_{15}
....	....	....	....	....		....	....	....	....	....		
69′	41′	13	51″	87′	»	13	41′	51″	69′	87′	$A_{13}(a)$	A_3 A'_9 A'_6
....	....	....	....	....		....	....	....	....	....		
19″	44″	51″	69′	82″	»	19″	44″	51″	69′	82″	$A'(a)$	A'_1 A'_2 A'_5

D'après les remarques faites plus haut, il est inutile de pousser le tableau au delà de $A'_8(a)$; à partir de $A'_8(a)$ les systèmes de mêmes lettres se représenteront dans le même ordre, mais avec des indices différents, $A'_8(a)$ étant différent de $A(a)$. Le 10e transformé de $A(a)$ ne saurait être $A'(a)$ ou $A(a)$, en vertu toujours des propositions énoncées; il est $A_{13}(a)$. Pour l'écrire directement, les deux lignes des systèmes $A(a)$ et $A'_8(a)$ nous suffisent. Le 15e transformé de $A(a)$ sera nécessairement $A'(a)$. En remplaçant 13 et la première rangée verticale du tableau (de gauche) par les colonnes conjuguées, on a $A_1(a)$ et ses systèmes transformés; en remplaçant la seconde rangée verticale par les conjuguées, on a $A_2(a)$ et ses transformés, et ainsi de suite. Le résultat apparaît immédiatement :

Les quatre systèmes $A(a)$, $A_1(a)$, $A_2(a)$, $A_5(a)$ ne possèdent que le diviseur cyclique $\{|x, 1+x|\}$.

Les quatre systèmes $A_4(a)$, $A_7(a)$, $A_{11}(a)$, $A_{15}(a)$ ont le diviseur métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, 3^{10}x|\}$ d'ordre $3 \times 31 = 93$.

(1) En entendant par A_1, A_2, A_5, etc., les systèmes $A_1(a)$, $A_2(a)$, $A_5(a)$, etc. Nous négligeons seulement d'écrire la lettre (a) pour gagner de la place.

Deuxième groupe (même type que le premier).

14	22′	56′	63′	87′	ou	14	22′	56′	63′	87′	$B(c)$ B_1 B_2 B_5 B_3 B_8 B_{10} B_{14} (¹)
32′	16″	26′	88′	41′	»	16″	26′	32′	41′	88′	$D_1(k)$
46″	36′	67′	18	22′	»	18	22′	36′	46″	67′	$F_4(c)$
49′	82″	23′	34″	16″	»	16″	23′	34″	49′	82″	$D'_2(g)$
57′	44″	25″	12″	36′	»	12″	25″	36′	44″	57′	$H'_{14}(c)$
56′	21″	63′	18″	82″	»	18″	21″	56′	63′	82″	$B'_{13}(c)$ B'_4 B_9 B_6 B'_3 B'_8 B'_{10} B'_{14}
....	....	....	....	....		....	....	....	....	....	
63′	22′	18″	50″	87′	»	18″	22′	50″	63′	87′	$B_7(c)$ B'_{12} B'_{15} B'_{11}
....	....	....	....	....		....	....	....	....	....	
18″	21″	50″	64″	82″	»	18″	21″	50″	64″	82′	$B'(c)$ B'_1 B'_2 B'_5

Les quatre systèmes $B(c)$, $B_1(c)$, $B_2(c)$, $B_5(c)$ ne possèdent que le diviseur cyclique $\{|x, 1+x|\}$.

Les quatre systèmes $B_3(c)$, $B_8(c)$, $B_{10}(c)$, $B_{14}(c)$ ont le diviseur métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, 3^{10}x|\}$ d'ordre $3 \times 31 = 93$.

Troisième groupe (même type que le premier).

16	29	36′	44′	89′	ou	16	29	36′	44′	89′	$D(b)$ D_1 D_2 D_3 D_4 D_8 D_{12} D_{13} (¹)
38′	40′	82″	10″	27	»	10″	27	38′	40′	82″	$K'_{11}(b)$
87′	13′	44″	25	61″	»	13′	25	44″	61″	87′	$L_{13}(a)$
41′	38	21″	65′	18′	»	18′	21″	38	41′	65′	$N_6(e)$
22′	76′	16	47′	33″	»	16	22′	33″	47′	76′	$D_3(d)$
16″	44′	38′	89′	24″	»	16″	24″	38′	44′	89′	$D'_{15}(b)$ D_{10} D'_5 D_6 D'_4 D'_8 D'_{12} D'_{13}
....	....	....	....	....		....	....	....	....	....	
16	89′	36′	24″	41″	»	16	24″	36′	41″	89′	$D_{11}(b)$ D'_{14} D'_7 D'_9
....	....	....	....	....		....	....	....	....	....	
16″	24″	38′	41″	80″	»	16″	24″	38′	41″	80″	$D'(b)$ D'_1 D'_2 D'_3

Les quatre systèmes $D(b)$, $D_1(b)$, $D_2(b)$, $D_3(b)$ ne possèdent que le diviseur cyclique $\{|x, 1+x|\}$.

Les quatre systèmes $D_4(b)$, $D_8(b)$, $D_{13}(b)$, $D_{12}(b)$ ont le diviseur métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, 3^{10}x|\}$ d'ordre $3 \times 31 = 93$.

Quatrième groupe.

16	22′	36′	41′	87′	ou	16	22′	36′	41′	87′	$D'(f)$	$D_1(f)$	$D_2(f)$	$D_4(f)$
38′	16″	82″	22′	41′	»	16″	22′	38′	41′	82″	$D'_{11}(f)$	$D_9(f)$	$D_{14}(f)$	$D'_4(f)$
87′	36′	44″	16″	22′	»	16″	22′	36′	44″	87′	$D_8(f)$	$D'_{10}(f)$	$D'_{12}(f)$	
41′	82″	21″	36′	16″	»	16″	21″	36′	41′	82″	$D'_{13}(f)$	$D'_3(f)$	$D_6(f)$	
22′	44″	16	82″	36′	»	16	22′	36′	44″	82″	$D_{15}(f)$	$D'_7(f)$	$D_5(f)$	
16″	21″	38′	44″	82″	»	16″	21″	38′	44″	82″	$D'(f)$	$D'_1(f)$	$D'_2(f)$	

(¹) Nous négligeons encore, pour gagner de la place, d'écrire la lettre (c) après B_1 B_2, etc., et la lettre (b) après D_1, D_2, etc.

Les systèmes $D(f)$, $D_1(f)$, $D_2(f)$ possèdent le diviseur métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, 3^{10}x|\}$ d'ordre 93.

Le système $D_4(f)$ possède le diviseur métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, 3^2x|\}$ d'ordre 465.

Cinquième groupe.

12′	29	38	47′	66′	ou	12′	29	38	47′	66′	$K(d)$	$K_1(d)$	$K_3(d)$	$K_2(d)$
28″	40′	76′	89′	14′	»	14′	28″	40	76′	89′	$N_2(a)$			
62″	13′	44′	27	31′	»	13′	27	31	44′	62″	$L_5(c)$			
48′	38	10″	61″	29	»	10″	29	38	48	61″	$K'_{10}(d)$	$K_9(d)$	$K_{15}(d)$	$K'_2(d)$
66′	10″	47′	24″	38	»	10″	24″	38	47′	66′	$K_6(d)$	$K'_{13}(d)$	$K'_{14}(d)$	
29	47′	61″	36″	10″	»	10″	29	36″	47′	61″	$K'_{11}(d)$	$K'_4(d)$	$K_7(d)$	
38	61″	24″	12′	47′	»	12	24″	38	47′	61″	$K_{12}(d)$	$K'_8(d)$	$K_5(d)$	
10″	24″	36″	48′	61″	»	10″	24″	36″	48′	61″	$K'(d)$	$K'_1(d)$	$K'_3(d)$	

Les quatre premières lignes du tableau nous suffisent; ni le 6^e, ni le 9^e, ni le 12^e transformé de $K(d)$ ne saurait être $K'(d)$, ni $K(d)$ avant d'avoir obtenu $K'(d)$. Les systèmes $K(d)$, $K_1(d)$, $K_3(d)$ ne possèdent que le diviseur cyclique $\{|x, 1+x|\}$.

Le système $K_2(d)$ possède le diviseur métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, 3^6x|\}$ d'ordre 155.

Enfin, les trois derniers groupes avec les systèmes $A(b)$, $A(c)$ et $B(a)$ comme première ligne du tableau n'ont pas grand intérêt. Les quinze premières puissances de la substitution $|x, 3x|$ appliquées au système $A(b)$ donne la suite, sans écrire les indices :

$A(b)$, $F(b)$, $D(i)$, $H(b)$, $B(d)$, $N(c)$, $M(d)$, $D(a)$, $F(a)$,
$L(b)$, $H(e)$, $B(b)$, $D(h)$, $K(c)$, $I(a)$.

Comme aucun autre système $A_i(b)$ n'apparaît dans cette suite, chacun des quinze autres systèmes $A_i(b)$ donnera la même suite, mais chaque système avec un autre indice. Les seize systèmes $A_i(b)$ possèdent ainsi uniquement le diviseur cyclique $\{s\}$. Il en est de même des systèmes $A_i(c)$ et $B_i(a)$ qui donnent les suites, abstraction faite des indices :

$A(c)$, $N(d)$, $E(c)$, $M(b)$, $G(d)$, $L(e)$, $M(a)$, $C(b)$, $E(b)$,
$K(a)$, $G(a)$, $I(d)$, $A(d)$, $C(c)$, $I(c)$, $A(c)$;

$B(a)$, $E(a)$, $E(d)$, $G(b)$, $G(c)$, $N(b)$, $C(d)$, $C(a)$, $F(d)$,
$L(d)$, $H(d)$, $B(e)$, $F(e)$, $K(e)$, $H(a)$, $B(a)$.

En résumant, pour 31 éléments, au plus

$$3 \times 16 + 3 \times 8 + 4 + 4 = 80 \text{ systèmes cycliques}$$

sont *différents;* 63 de ces systèmes ne possèdent que le diviseur cyclique $\{s\}$; 15 d'entre eux possèdent le diviseur métacyclique d'ordre 93 :

$$\{|x,\ 1+x|,\quad |x,\ 3^{10}x|\},$$

un le diviseur d'ordre 465 :

$$\{|x,\ 1+x|,\quad |x,\ 3^{2}x|\},$$

et un le diviseur d'ordre 155 :

$$\{|x,\ 1+x|,\quad |x,\ 3^{6}x|\}.$$

Nous trouverons maintenant dans une troisième partie que ces systèmes, qui sont les premières lignes des tableaux précédents, sont en réalité *tous différents*, et en outre que, sauf deux exceptions, le système de 7 éléments et le système $K_2(d)$ de 31 éléments, aucun d'eux n'a d'autres substitutions qui le transforment en lui-même que celles du diviseur métacyclique qui lui a été trouvé. On peut en conclure avec grande probabilité l'existence du théorème suivant, qui serait à démontrer :

Si deux systèmes cycliques sont équivalents, ils peuvent en tout cas se déduire l'un de l'autre par une substitution métacyclique.

Il peut être intéressant de faire remarquer quels sont ceux de ces systèmes cycliques obtenus pour $6n+1=p$ (premier) éléments, qui sont les systèmes cycliques de Netto correspondant aux diverses racines primitives de p :

Pour $p=7$....	racine primitive $3 = 013$.	
	» $5 = 015$.	
Pour $p=13$...	racine primitive 2 donne a'_1, 6 donne a_1.	
	» 7 » a', 11 » a.	
Pour $p=19$...	racine primitive 2, 3, 14 donnent d'_1	le même système.
	» 10, 13, 15 » d'	
Pour $p=31$...	racine primitive 3 donne $D'_3(f)$, 13 donne $D_3(f)$	deux systèmes
	» 11 » $D_2(f)$, 24 » $D'_2(f)$	différents :
	» 12 » $D_7(f)$, 21 » $D'_7(f)$	$D_3(f)$ équiv. $D_7(f)$.
	» 17 » $D_6(f)$, 22 » $D'_6(f)$	$D_2(f)$ équiv. $D_6(f)$.

TROISIÈME PARTIE.

Dans un travail présenté à l'American Mathematical Society en 1912 et publié dans les *Transactions of the Amer. Mathem. Society*, vol. XIV, n° 1, 1913, p. 6, H.-S. White a donné le premier un moyen direct de reconnaître les systèmes de triples différents. Jusque-là, le critère pour différencier deux systèmes de triples était la différence du groupe de substitutions qui leur appartenait. D'ailleurs, les recherches sur le problème de Steiner, à part l'établissement du théorème d'existence d'un système de triples pour chaque N de la forme $6n+1$ et $6n+3$ par Reiss, Moore, et récemment encore Fitting (1), et la construction de systèmes particuliers par Netto, Heffter et d'autres, se sont longtemps arrêtées au cas de 13 éléments. Pour 7 et 9 éléments, on remarqua immédiatement qu'il n'y a qu'un seul système de Steiner. Pour 13 éléments, Zulauf (2) montra, précisément au moyen de la différence des groupes de substitutions, que le système cyclique de Netto était différent des systèmes donnés par Kirkmann, Reiss, de Vries (3), qui, par contre, se ramenaient l'un à l'autre par des permutations d'éléments; ensuite successivement Pasquale, G. Brunel, J. Barrau, F. Cole (4) établirent que, pour 13 éléments, le système

---

(1) FITTING, *Nieuw Archief*, 2e série, t. IX, 1911, p. 359.

(2) ZULAUF, *Dissertation*, Giessen, 1897.

(3) KIRKMANN, *Cambridge and Dublin Mathem. Journ.*, t. VIII, 1853. — REISS, *Journ. f. Mathem.*, t LVI, p. 326. — DE VRIES, *Rend. circ. mat. di Palermo*, t. VIII, 1894, p. 222.

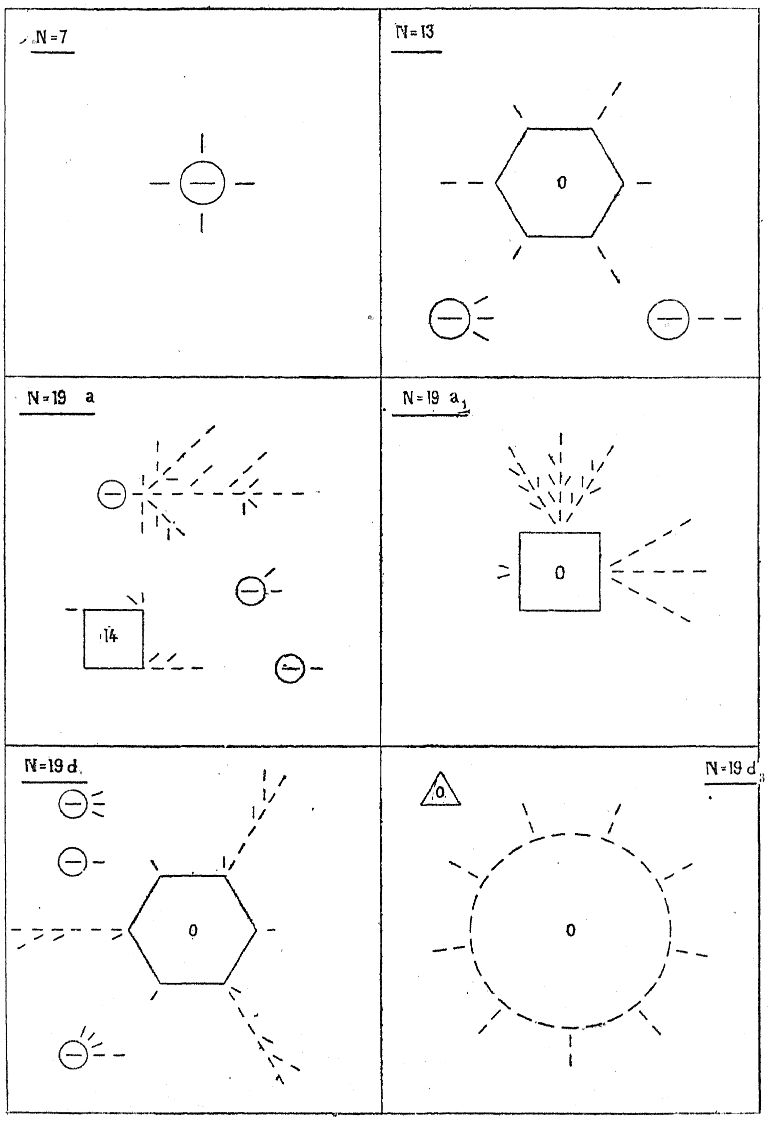
(4) V. DE PASQUALE, *Sui sistemi ternari di* 13 *elementi* (*Lomb. Ist. Rend.*, 2e série, t. XXXII, 1899, p. 213). — G. BRUNEL, *Sur les deux systèmes de triades de* 13 *éléments* (*Journ. de Math.*, 5e série, t. VII, 1901, p. 305, et *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 6e série, t. 2, cahier 1, 1903). — J. BARRAU, *Over drietalstelsels in het bijzonder die van dertien elementen* (*Amst. Ak. Verslag*, t. XVII, 1908, p. 274). — F.-N. COLE, *The triad systems of* 13 *letters* (*Transactions of the Amer. Mathem. Society*, vol. XIV, n° 1, 1913, p. 1).

Les deux premiers au moyen des configurations $(3, 3)_{10}$ de Kantor. Barrau se sert également des configurations; mais Cole le démontre uniquement par les substitutions.

J'ai donné récemment une cinquième preuve du même théorème, ne faisant appel à aucune notion particulière, par la construction directe des systèmes de triples de 13 éléments qui ne contiennent pas un triple fixé *abc* (*Actes de la Société helvétique des Sciences naturelles*, Zurich, 1917, p. 131).

cyclique de Netto et le système de Kirkmann (comme étant le plus vieux) étaient les deux seuls systèmes différents possibles. Pour

Systèmes de 7, 13 et 19 éléments.



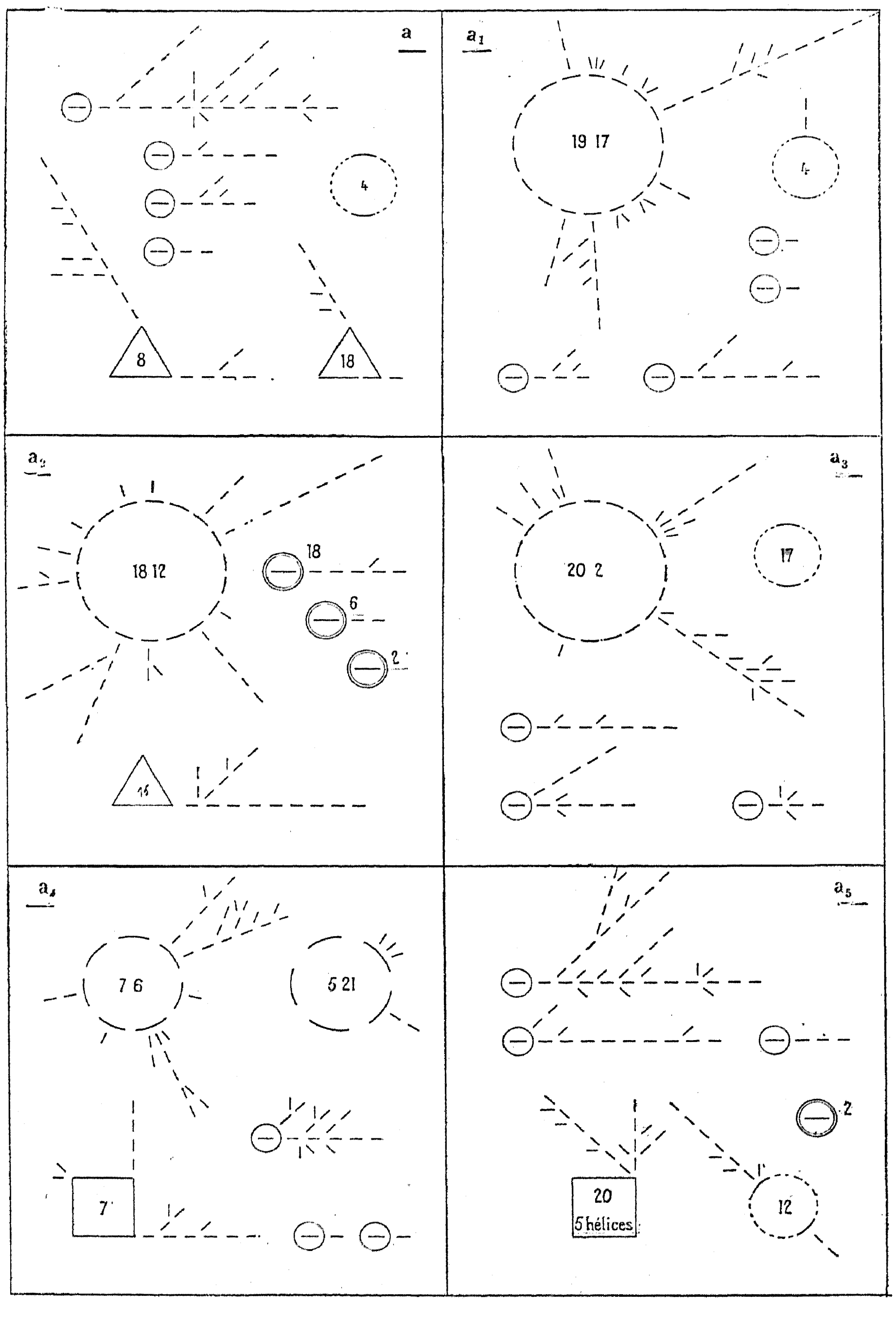
15 éléments, un certain nombre de systèmes de triples différents (11 ou 12) avaient également été donnés par Kirkmann, Cayley, Reiss, etc.,

comme solutions du problème particulier de Kirkmann, posé à peu près à la même date que celui de Steiner, mais ne se rapportant qu'au cas de $6n+3$ éléments.

Dans un travail publié en 1914, encore dans les *Transactions of the Amer. Mathem. Society*, vol. XV, n° 3, 1914, p. 311, Miss L. Cummings emploie aussi une méthode personnelle pour différencier les systèmes de triples et découvrir en même temps le groupe de substitutions qui leur appartient. Elle construit facilement de nouveaux systèmes de triples différents pour 15 éléments (leur nombre est ainsi porté à 24) et entre autres, pour la première fois, des systèmes différents qui ont cependant un même groupe de substitutions. Les deux procédés de différenciation de H.-S. White et de Miss Cummings ne peuvent s'appliquer aisément qu'à un nombre restreint d'éléments; cependant, les *séquences* de Miss Cummings, qui ne s'établissent que pour les $\frac{N(N-1)}{6}$ triples des systèmes soumis à l'examen, sont d'une application plus commode, même au cas d'un assez grand nombre d'éléments. Par contre, le procédé de White est lié plus simplement et plus étroitement à la structure du système et à l'ensemble des triples des N éléments, et il dévoile d'une manière immédiate et graphique le degré de symétrie du système; son principe d'ailleurs pourra donner lieu à d'autres applications. Il est en tout cas une classe de systèmes de triples auxquels il peut s'appliquer aisément, et donner des résultats intéressants, celle des *systèmes cycliques*. White, dans son travail, ne s'en sert que pour établir une fois de plus la différence des systèmes de Netto et de Reiss pour 13 éléments, et c'est dans l'intention d'appliquer son procédé aux systèmes cycliques que j'avais commencé leur recherche dans les cas les plus simples. Je n'avais pas encore connaissance de l'article de L. Cummings lorsque j'avais également, pour 25 éléments par exemple, 12 systèmes différents ayant le même groupe de substitutions, le groupe cyclique; malheureusement, la guerre et les mobilisations successives m'ont empêché de suivre mon travail et de le publier plus tôt.

White regarde un système de triples comme un *opérateur*. Dans ce système, chaque couple des N éléments est associé dans un triple

Systèmes de 25 éléments.



à un troisième élément unique et déterminé. En convenant de substituer à chaque couple ce troisième élément, un triple quelconque *abc* des N éléments, qui contient les trois couples *bc*, *ca*, *ab*, sera transformé en un nouveau triple *a'b'c'*, si le système opérateur contient les trois triples *bca'*, *cab'*, *abc'*. *Un triple abc du système opérateur sera transformé en lui-même*, puisque chacun des couples *bc*, *ca*, *ab* vient respectivement remplacé par l'élément *a*, *b*, *c*. *Un triple* EXTÉRIEUR *abc* (*n'appartenant pas*) *au système opérateur*, puisque dans ce cas le système opérateur doit contenir un triple *abc'*, sera transformé en un triple *différent* du premier. En appliquant à nouveau la transformation à ce premier triple dérivé, on obtient un second triple dérivé, puis de ce second triple un troisième, et ainsi de suite. Mais en continuant à dériver ainsi chaque fois un nouveau triple du précédent, on doit nécessairement arriver ou à un triple du système, et alors ce triple se répète de là indéfiniment, ou à un triple extérieur déjà obtenu précédemment, et alors la série des triples obtenus à partir de celui-là recommence et forme un cycle périodique, se répétant de même indéfiniment. Dans les deux cas, la série des triples dérivés successifs aboutit donc à un cycle terminal, en considérant un triple du système comme un cycle périodique d'un seul terme. White nomme *transformation duale* (terme anglais : *dual*) cette opération produite sur l'ensemble des triples des N éléments par le système donné ; il appelle *primitifs* les triples têtes des séries, *dérivés* les autres triples des séries, *appendice* l'ensemble des triples d'une série conduisant à un cycle terminal, et *train* (terme anglais : *train*) l'ensemble d'un cycle et de ses appendices.

On a sans autre les deux propositions :

La FORME DES TRAINS en lesquels se répartissent les triples de N éléments par transformation duale produite par un système donné est *invariante* sous toutes les substitutions du groupe symétrique des N éléments ; en d'autres termes, deux systèmes qui, par transformation duale, répartissent les triples des N éléments en des trains de *formes différentes*, sont des *systèmes différents*.

Le CONTENU DE CES TRAINS est *invariant* pour toutes les substitutions du groupe qui transforme en lui-même le système opérateur ; en d'autres termes, seules les substitutions qui transforment un de ces trains en lui-même ou en un train de l'ensemble obtenu peuvent être substitutions du groupe appartenant au système opérateur.

Avec un système opérateur *quelconque*, la transformation duale des $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$ triples des N éléments et leur répartition en trains est une opération assez longue et le résultat un ensemble de trains plus ou moins disparates et encombrants. Avec un système opérateur *cyclique*, l'opération se trouve considérablement réduite et le résultat d'autant du fait de la propriété suivante :

Si, par transformation duale produite par un système cyclique, le triple

$$m \quad n \quad p \qquad \text{devient} \qquad m' \quad n' \quad p',$$

le système opérateur contient les triples suivants :

$$\begin{array}{llllll} m & n & p' & \text{et par suite} & m+\alpha \quad n+\alpha & p'+\alpha, \\ m & n' & p & \text{»} & m+\alpha \quad n'+\alpha & p+\alpha, \\ m' & n & p & \text{»} & m'+\alpha \quad n+\alpha & p+\alpha, \end{array}$$

et, par la transformation duale produite, le triple

$$m+\alpha \quad n+\alpha \quad p+\alpha \qquad \text{deviendra} \qquad m'+\alpha \quad n'+\alpha \quad p'+\alpha.$$

Par transformation duale produite par un système cyclique, une colonne cyclique demeure donc une colonne cyclique, deux triples de la colonne gardant entre eux la même distance, si nous convenons d'appeler α la *distance* des deux triples

$$m \quad n \quad p, \qquad m+\alpha \quad n+\alpha \quad p+\alpha,$$

dans la colonne *mnp*. L'opération est ainsi réduite aux $\frac{(N-1)(N-2)}{6}$ têtes de colonnes cycliques, et, dans ce qui a été dit plus haut, l'expression de « triples » peut maintenant être remplacée par celle de « colonnes ». Une première colonne dérivée donne une seconde colonne dérivée, celle-ci une troisième colonne dérivée, et ainsi de suite; mais, dans cette suite, on doit nécessairement arriver ou à une colonne du système opérateur, qui de là se répète indéfiniment, ou à une colonne extérieure au système déjà obtenue précédemment, et alors la série des colonnes obtenues à partir de celle-là recommence, et forme un cycle de colonnes qui se répète de même indéfiniment.

Lorsque le train se termine par une *colonne du système opérateur*, c'est-à-dire par un triple de cette colonne, c'est ce triple qui se répète indéfiniment; il y a alors n trains de forme identique, terminés à chacun des N triples de la colonne du système opérateur; l'un quelconque de ces N trains suffit à les représenter. Lorsque dans le train réapparaît une *colonne extérieure* qui a déjà été obtenue précédemment, le cycle de colonnes ainsi constitué peut avoir un nombre de termes $t > 1$ ou $t = 1$. Si $t > 1$, il peut se présenter deux cas :

1° Le triple de la colonne extérieure qui réapparaît est *le même* que la première fois. Graphiquement, le train peut alors être considéré comme un *cercle* (ou polygone) avec des appendices plus ou moins irréguliers distribués sur son pourtour d'une manière régulière ou non, selon l'ordre du groupe de substitutions que possède le système opérateur. Il y a N cercles avec appendices pareils constitués en ajoutant successivement $0, 1, 2, \ldots, N-1$ aux éléments du premier, et l'un d'entre eux suffit à les représenter.

2° Le triple de la colonne extérieure qui réapparaît est à la *distance* $\alpha \neq 0$ du triple obtenu la première fois. Graphiquement, le train est alors une *hélice*; la distance α est le *pas* de l'hélice, et les appendices de forme identique situés le long d'une même génératrice du cylindre ont leurs triples à la distance α dans les colonnes cycliques correspondantes. Lorsque le pas α et le nombre N des triples d'une colonne ont un p. g. c. d. $\rho \neq 1$, cette hélice se fractionne en ρ hélices plus courtes, chacune de $\frac{N}{\rho}$ spires, se reproduisant indéfiniment comme la grande par transformation duale [1]. Leur projection sur le plan de base, ou mieux, le train constitué par les têtes de colonnes cycliques correspondantes suffit à représenter ces hélices. Le premier cas considéré est celui dans lequel le pas $\alpha = 0$.

Si $t = 1$, la colonne *extérieure* qui réapparaît est donc la *colonne précédente,* mais le nouveau triple est nécessairement à une distance $\alpha \neq 0$

---

[1] Si l'on pose dans ce cas $\alpha = \rho\alpha'$, $N = \rho N'$, la congruence $a + m\alpha \equiv a$, c'est-à-dire $m\alpha \equiv 0 \pmod{N}$, est en effet déjà satisfaite par $N'(\rho\alpha') \equiv 0 \pmod{\rho N'}$; il y a donc $\frac{N}{N'} = \rho$ hélices.

du précédent. Les triples de cette colonne forment alors un *cycle plan ;* α en est en quelque sorte la *raison*, et l'appendice, s'il existe, qui conduit à ce cycle, se répète identique à chaque terme du cycle et constitué par les triples successifs à la distance α des colonnes déterminées par le premier appendice. Lorsque α aurait avec N un p. g. c. d. $\rho \neq 1$, ce cycle plan se fractionnerait également en ρ cycles de même nature que le premier, de $\frac{N}{\rho}$ termes chacun ; ce dernier cas particulier est le seul qui ne s'est pas présenté dans mon travail.

Les remarques suivantes se font encore immédiatement dans la transformation duale :

1° Trois triples consécutifs dans un train ne peuvent contenir *aucun élément qui se répète*. Soient en effet les trois triples consécutifs par transformation duale :

$$mnp - m'n'p' - m''n''p''.$$

Le système opérateur contient ainsi les triples suivants :

$$\begin{array}{ll} m\,n\,p', & m'\,n'\,p'', \\ m\,n'p, & m'\,n''p', \\ m'\,n\,p, & m''\,n'p'. \end{array}$$

On a immédiatement

$$m', n', p' \neq m, n, p; \qquad m'', n'', p'' \neq m', n', p'.$$

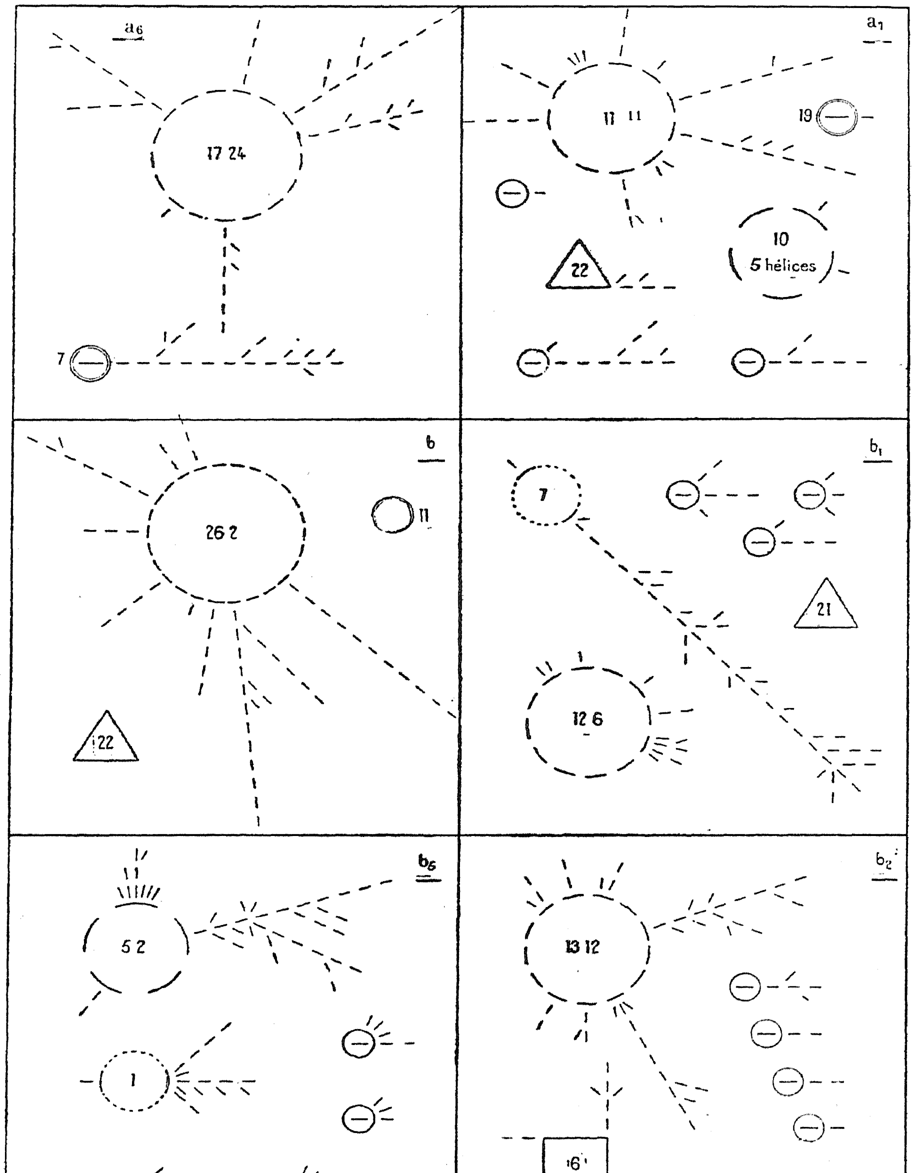
On ne saurait avoir non plus, par exemple, $m'' = m$, car les deux triples du système opérateur $mn'p$ et $m''n'p'$ exigeraient alors $p = p'$. On a donc ainsi

$$m'', n'', p'' \neq m, n, p.$$

Corollaire. — Il ne peut exister de trains avec un cycle terminal à deux termes. Dans le cas d'un système opérateur cyclique, un cycle binaire ne peut donc avoir un pas $\alpha = 0$, et sera toujours une hélice.

2° Dans le tableau triangulaire des triples contenant l'élément 0 (triangle I), chaque médiane passe par les $\frac{N-1}{2}$ colonnes cycliques à couples d'éléments qui se répètent, et chacun des triangles AOB,

Systèmes de 25 éléments.



BOC, COA contient en son intérieur, en dehors des médianes, les $\frac{(N-1)(N-5)}{6}$ colonnes à couples d'éléments qui ne se répètent pas. Une substitution métacyclique transforme une colonne cyclique en une colonne cyclique; elle ne peut ainsi que permuter entre elles les colonnes, par exemple, de la médiane AA', et entre elles les colonnes intérieures au triangle AOB. Si donc, par une substitution métacyclique, un système cyclique S se transforme en un système cyclique S' (S' peut être le système S lui-même), dans les deux ensembles de trains produits par les systèmes opérateurs S et S' par transformation duale, les colonnes $(0, \alpha, 2\alpha)$ de la médiane AA' *doivent se retrouver aux endroits homologues;* de même les colonnes $(0, \alpha, \beta)$, $(\beta > 2\alpha)$, du triangle AOB.

3° Par la substitution $|x, N-x|$, chaque colonne cyclique devient sa conjuguée et le système opérateur cyclique devient le système conjugué. Le système *conjugué* employé comme opérateur remplacera donc, dans l'ensemble des trains produits par le premier système, *chaque colonne cyclique par la colonne conjuguée* (1).

Il est inutile maintenant de détailler la manière d'opérer. Le plus simple est de faire un premier tableau des $N - 2 + \frac{(N-1)(N-2)}{6}$ couples strictement nécessaires en écrivant à côté l'élément que leur fait correspondre le système opérateur, puis un second tableau des $\frac{(N-1)(N-2)}{6}$ têtes de colonnes cycliques en écrivant à côté le triple transformé d'abord, et ensuite la tête de colonne qui contient ce triple transformé. Ce n'est ensuite plus qu'un jeu de voir l'enchaînement des colonnes dérivées successives et les trains qu'elles fournissent. Le tableau des triples contenant l'élément 0 (tableau I) permet, en s'en servant adroitement, de lire immédiatement la tête de colonne correspondante quand on a le triple transformé. Comme seule la forme des trains importe, comme invariante pour tous les systèmes équivalents au système opérateur et caractéristique de ce système, il est

(1) Dans le travail cité déjà deux fois, ce fait est également remarqué par White dans la transformation duale opérée par le système cyclique de Netto de 13 éléments, sans qu'il soit à même d'ailleurs d'en donner la raison.

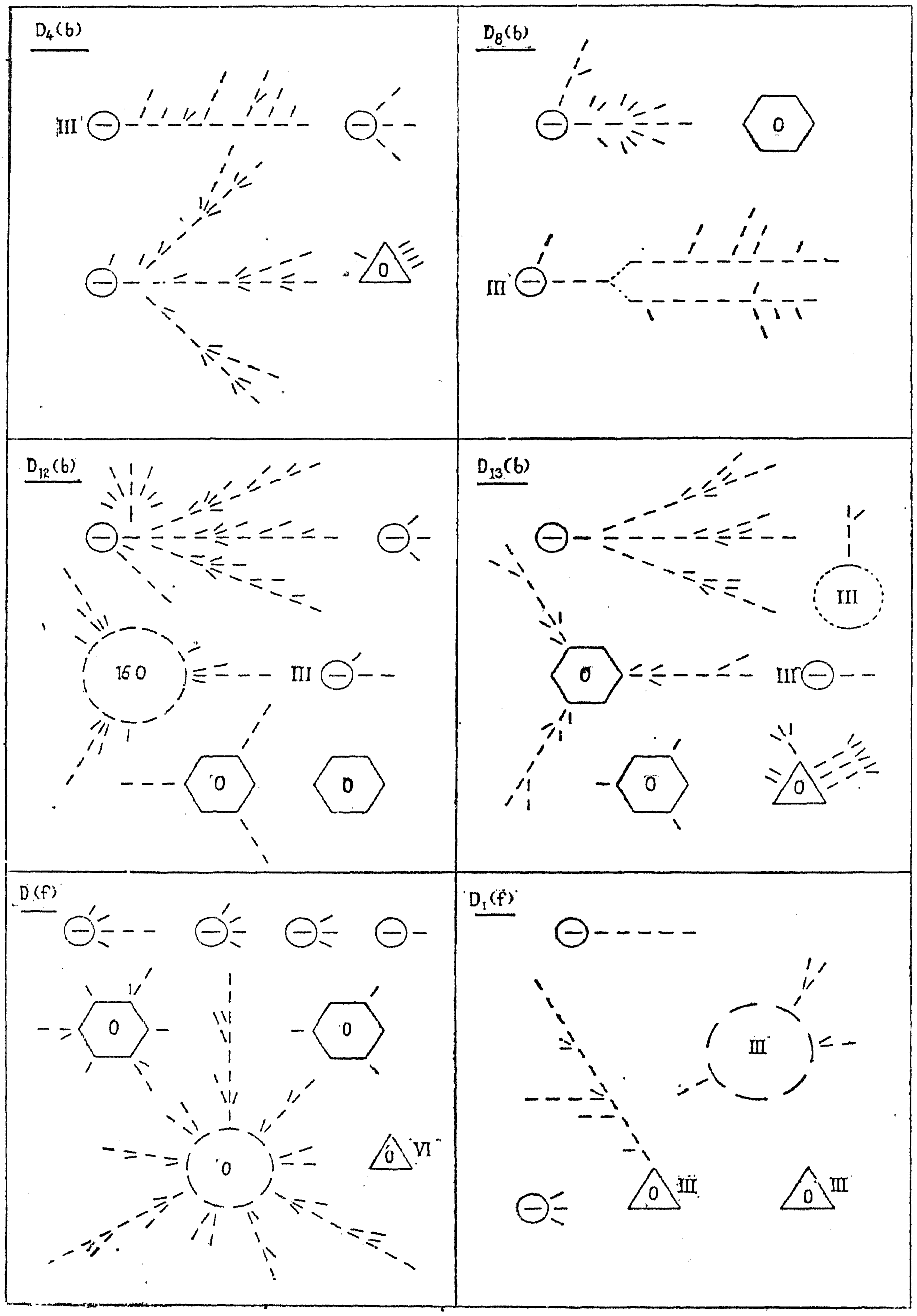
indifférent de remplacer par des segments de droite (ou des points) les triples ou plutôt les colonnes cycliques de chaque train. Des deux nombres en chiffres arabes écrits à l'intérieur des trains, le premier est le nombre des termes du cycle périodique; le second est le pas de l'hélice pour le système indiqué ([1]). Le pas est également covariant avec le système cyclique équivalent choisi comme opérateur; il n'y aurait donc en réalité lieu de l'indiquer que dans les cas où il est nul ou ayant avec N un p. g. c. d. $\rho \neq 1$. Le nombre des termes du cycle périodique n'est pas indiqué lorsqu'il est immédiatement visible; j'ai représenté le cycle par un triangle, un carré et un hexagone lorsqu'il est à 3, 4 et 6 termes. Les cycles périodiques sont tous écrits dans le sens des aiguilles d'une montre. Les petits cercles entourant le dernier segment signifient les trains terminés par une colonne du système opérateur, c'est-à-dire par un triple de cette colonne; deux petits cercles concentriques entourant le dernier segment désignent les trains terminés par une colonne extérieure répartie en un cycle plan, selon le cas $t = 1$ plus haut; j'ai noté également à côté la raison α du cycle plan pour le système opérateur choisi.

Pour 31 éléments, il n'était pas question naturellement de reproduire les trains des 80 systèmes obtenus; j'ai donné uniquement les trains de 12 systèmes, soient les trains des systèmes $D(f)$ et $K(d)$ des 4^e^ et 5^e^ groupes qui offrent le plus d'intérêt, et ceux des quatre systèmes à symétrie ternaire de l'un des trois premiers groupes; j'ai choisi arbitrairement le groupe $D(b)$. Souvent le train lui-même n'a pas la symétrie ternaire, mais alors il existe trois trains de forme identique, de manière que l'ensemble des trains correspondant au système a quand même la symétrie ternaire. Pour n'en représenter qu'un seul, j'ai noté par un chiffre romain III [VI ou également V pour les systèmes $D_4(f)$ et $K_2(d)$] le fait qu'il y a 3 trains (6 ou 5) identiques à celui qui est donné.

L'ensemble des trains obtenus donne lieu, sans autre, à la constatation suivante. A part le système de 7 éléments et le système $K_2(d)$

([1]) Lorsqu'il n'y en a qu'un, o par exemple, il est toujours le pas de l'hélice pour le système indiqué.

Systèmes de 31 *éléments.*



de 31 éléments, dont les graphiques présentent à première vue une disposition particulière et en rapport l'une avec l'autre, les trains obtenus permettent exactement dans chaque système, pour un train quelconque, *le nombre de transformations correspondant à l'ordre du diviseur métacyclique* qui a déjà été trouvé pour ce système (IIe Partie), à moins *qu'il n'existe des substitutions autres que l'identité*, appartenant au groupe du système opérateur, qui transforment ce train en lui-même, en laissant chaque triple à sa place. Or, ce n'est pas le cas; la plupart des systèmes renferment un train suffisamment étendu pour que la vérification en soit inutile; pour les autres, la vérification se fait immédiatement avec le train le plus étendu.

En conséquence, le système de 7 éléments et le système $K_2(d)$ *mis à part, les groupes de substitutions qui transforment en eux-mêmes les systèmes cycliques de* 13, 19, 25 *et* 31 *éléments sont les diviseurs métacycliques qui leur ont été trouvés plus haut.*

Le graphique obtenu pour le système $K_2(d)$ fait entrevoir déjà une analogie certaine entre son groupe de substitutions et le groupe connu du système de 7 éléments. Pour trouver ce groupe de substitutions, il est nécessaire de rappeler quelques propriétés :

1° Une substitution qui change un système de triples en lui-même ne peut laisser en place qu'un nombre d'éléments m de la forme $6k+1$ ou $6k+3$.

2° Si le groupe de substitutions que possède un système de triples contient des substitutions laissant en place m éléments, et d'autres substitutions laissant en place avec ces m éléments α autres éléments, α doit être au moins égal à $m+1$.

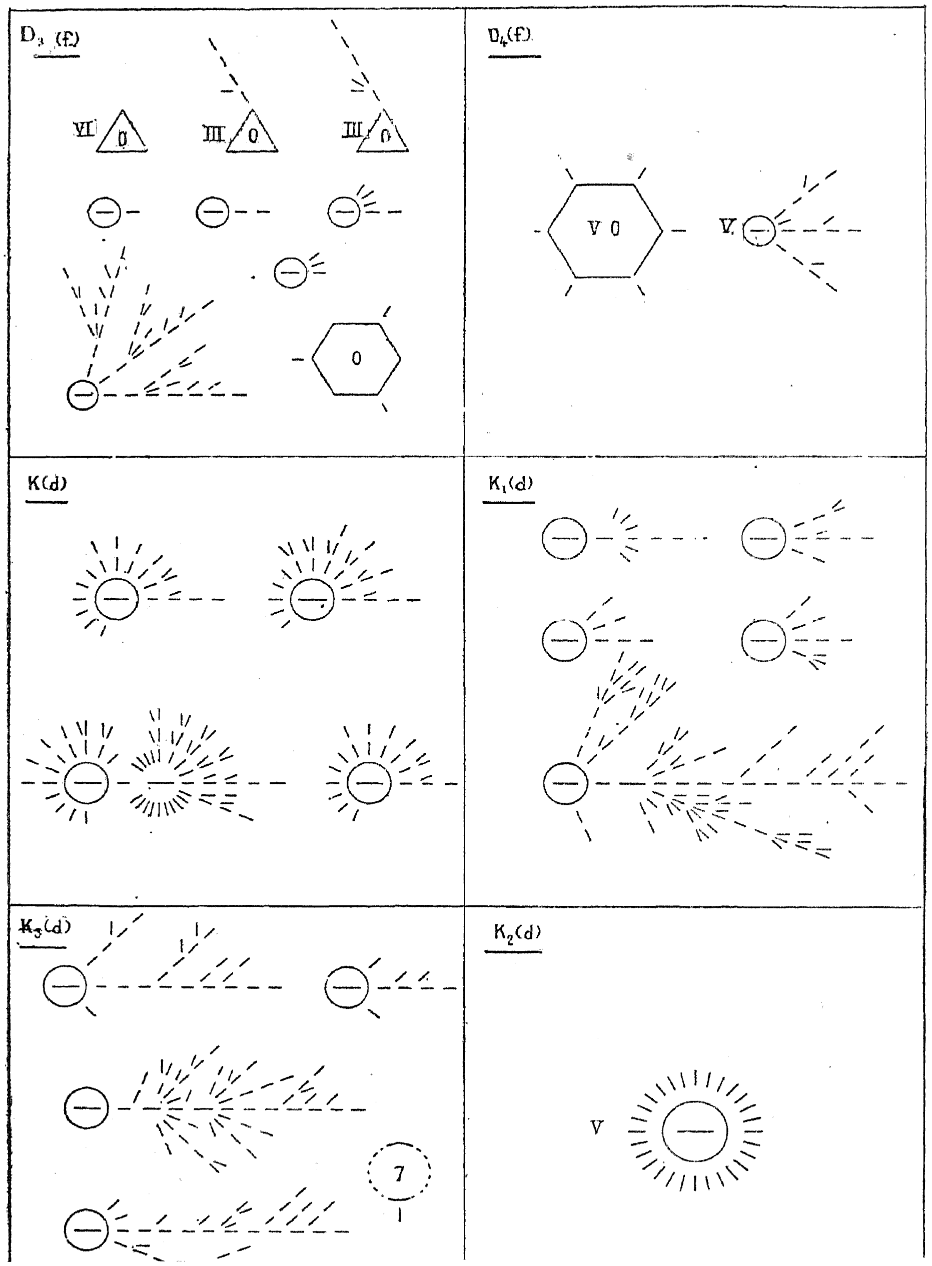
Une substitution qui transforme en lui-même un système de triples de 31 éléments ne peut donc déplacer que 31, 30, 28, 24, 16 ou 0 éléments.

3° Un groupe transitif dont le degré est nombre premier, qui n'est pas métacyclique, est au moins doublement transitif.

4° L'ordre d'un groupe doublement transitif de degré n est $n(n-1)$ fois l'ordre d'un diviseur du groupe qui laisse en place deux éléments quelconques.

Pour le système de 7 éléments, les quatre triples primitifs qui

Systèmes de 31 éléments.



donnent le dérivé 013 sont

$$245, \quad 246, \quad 256, \quad 456,$$

c'est-à-dire les quatre triples possibles avec les éléments 2, 4, 5, 6. Si, dans le système 013, les éléments 0 et 1, et par suite 3, restent en place, les quatre éléments 2, 4, 5, 6 sont imprimitifs de trois manières et le diviseur de ces quatre éléments qui change le système cyclique en lui-même n'a, avec l'identité, que les trois substitutions

$$(24)(56), \quad (25)(46), \quad (26)(45).$$

L'ordre du groupe du système de 7 éléments est ainsi encore une fois

$$7 \times 6 \times 4 = 168.$$

Pour le système $K_2(d)$, les 28 triples primitifs qui donnent le dérivé $012'$ sont les 7 groupes de 4 triples possibles avec chacun des ensembles

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & & 2, & 4'', & 3', & 7''; & & & & \\ 3, & 8, & 0', & 5''; & 4, & 7', & 7, & 9; & 6, & 6', & 2'', & 9''; \\ 5, & 8'', & 4', & 8'; & 1', & 0''', & 3'', & 6''; & 5', & 1'', & 9', & 0''. \end{array}$$

Le diviseur des 28 éléments $2, 4'', 3', 7''; 3, \ldots$, qui change ce train de $012'$ en lui-même, est donc imprimitif, et si les éléments 0, 1, et par suite $2'$, restent en place, dans le système $K_2(d)$ les quatre éléments de chaque ensemble précédent sont imprimitifs comme plus haut. Si l'on écrit, avec ce train de $012'$, les trains qui ont, par exemple, les triples dérivés $024''$ et $03'7''$:

$012'$.	$024''$.	$03'7''$.
$2, 4''; \; 3', 7''$	$1, 2'; \; 3', 7''$	$1, 2'; \; 2, 4''$
$3, 8; \; 0', 5''$	$3, 8; \; 4', 8'$	$3, 8; \; 5, 8''$
$5, 8''; \; 4', 8'$	$5, 8''; \; 0', 5''$	$4', 8'; \; 0', 5''$
$4, 7'; \; 7, 9$	$4, 7'; \; 3'', 6''$	$4, 7'; \; 1', 0'''$
$1', 0'''; \; 3'', 6''$	$1', 0'''; \; 7, 9$	$3'', 6''; \; 7, 9$
$6, 6'; \; 2'', 9''$	$6, 6'; \; 9', 0''$	$6, 6'; \; 5', 1''$
$5', 1''; \; 9', 0''$	$5', 1''; \; 2'', 9''$	$9', 0''; \; 2'', 9''$

on voit que le diviseur des 24 éléments, $3, 8, 0', 5''; 5, \ldots$, qui change chacun de ces trois trains en lui-même, est encore imprimitif d'une autre manière. Appelons :

G, le diviseur des 28 éléments $2, 4'', 3', 7''; 3, \ldots$;
G_1, le diviseur des 24 éléments $3, 8, 0', 5''; 5, \ldots$;
G_2, le diviseur des 16 éléments $4, 7', 7, 9; 1', \ldots$,

qui changent le système cyclique en lui-même, et désignons par $[\rho]$, $[\rho]_1$, $[\rho]_2$ le nombre des substitutions qui déplacent ρ éléments respectivement dans G, G_1, G_2. D'après une formule connue de la théorie des substitutions (¹), on a

$$\begin{aligned}
&[28] = 28\left(\frac{3}{4}[24]_1 + \frac{11}{12}[16]_1 + \frac{27}{18}[0]_1\right) = 8280,\\
&[24] = \ 7\,[24]_1 = 2366, \qquad [16] = \frac{28}{12}[16]_1 = \ 105,\\
&[24]_1 = 24\left(\frac{7}{8}[16]_2 + \frac{23}{24}[0]_2\right) = 338,\\
&[16]_1 = \ 3\,[16]_2 = 45, \qquad [16]_2 = \ 15.
\end{aligned}$$

L'ordre du groupe G est ainsi

$$8280 + 2366 + 105 + 1 = 10752 = 2^6 \times 168,$$

et l'ordre du groupe qui appartient au système $K_2(d)$ sera

$$2^6 \times 168 \times 30 \times 31 = 9.999.360.$$

En terminant, la remarque suivante peut être faite. La croissance du nombre des systèmes de triples de Steiner avec le nombre N d'éléments se présente de plus en plus comme étant excessivement rapide. White, dans un nouveau travail, publié encore dans les *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. XVI, nº 1, 1915, p. 13, a établi que, pour 31 éléments, le nombre des systèmes de triples différents dépasse 37.10^{12}. Cela ne doit pas, cependant, décourager toute recherche individuelle des systèmes, surtout quand il s'agit de tous les systèmes d'une même classe. Pour 7 éléments, l'unique système est cyclique; pour 13 éléments (il n'est question pour le moment que de $N = 6n + 1$), il n'existe que deux systèmes, l'un est cyclique et l'autre ne l'est pas. S'il existe une relation, pour un N donné, entre le nombre des systèmes cycliques et celui des systèmes non cycliques, *déterminer le nombre des systèmes cycliques différents pour chaque* N serait le premier pas vers la solution complète du problème de Steiner.

(¹) NETTO, *Gruppen und Substitutionentheorie*, p. 130.