Annales scientifiques de l'É.N.S.

Ervand Kogbetliantz

Analogie entre les séries sphériques au point de vue de leur sommabilité par les moyennes arithmétiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 40 (1923), p. 259-323
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1923_3_40__259_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANALOGIE

ENTRE

LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

ET

LES SÉRIES SPHÉRIQUES

AU POINT DE VUE DE LEUR SOMMABILITÉ PAR LES MOYENNES ARITHMÉTIQUES

PAR M. ERVAND KOGBETLIANTZ.

Introduction.

Les polynomes ultrasphériques

$$P_n^{(\lambda)}(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

qu'on définit par la fonction génératrice $(1 - 2xz + z^2)^{-\lambda}$:

$$\frac{1}{(1 - 2xz + z^2)^{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n^{(\lambda)}(x) \qquad (\lambda > 0)$$

et qui jouissent de la propriété d'orthogonalité dans l'intervalle $(-1, +1)$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_m^{(\lambda)}(x)\, P_n^{(\lambda)}(x)\, dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2} - \lambda}} = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)}{(n + \lambda)\,\Gamma(\lambda)}\, \dfrac{\Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(n + 1)\,\Gamma(2\lambda)} & (m = n), \end{cases}$$

se réduisent pour $\lambda = \frac{1}{2}$ aux polynomes de Legendre $P_n(x)$ et relient les derniers aux fonctions trigonométriques, puisqu'on a pour $x = \cos\theta$

$$\lim_{\lambda = 0} \frac{1}{\lambda} P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{2}{n} \cos n\theta \qquad (x = \cos\theta,\ n \geqq 1)$$

et aussi pour $\lambda = 1$

$$P_n^{(1)}(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \qquad (x = \cos\theta,\ \lambda = 1).$$

La série ultrasphérique

$$\text{I.}\quad F(\theta, \varphi) \backsim \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)\int\!\!\int_S \frac{F(\theta', \varphi')\, P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, d\sigma'}{[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}} \qquad (\lambda > 0)$$
$$[\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')]$$

généralise, d'un côté, la série de Laplace $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ et, de l'autre côté, se réduit à la limite pour $\lambda = 0$ à la série trigonométrique, si $F(\theta, \varphi) \equiv f(\cos\theta)$.

La découverte ([1]) de cette série I m'a permis de ramener à leur origine commune toutes les propriétés de ces deux classes de séries et d'établir ainsi l'analogie complète entre les séries sphériques et les séries trigonométriques au point de vue de leur sommabilité (C, δ) par le procédé des moyennes arithmétiques.

Or, l'ordre δ des moyennes arithmétiques de la série I est intimement lié au paramètre λ. J'ai établi, par exemple, que toutes les moyennes $F_n^{(\delta)}(\theta, \varphi)$ de la série I d'une fonction $F(\theta, \varphi)$ bornée sont toujours comprises entre les bornes inférieure m et supérieure M de la fonction développée, si l'ordre δ est au moins égal à $2\lambda+1$, c'est-à-dire qu'on a pour $\delta \geqq 2\lambda+1$

$$m \leqq F_n^{(\delta)}(\theta, \varphi) \leqq M$$
$$(0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi;\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty;\ \lambda > 0,\ \delta \geqq 2\lambda + 1),$$

si

$$m \leqq F(\theta, \varphi) \leqq M \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi).$$

Les propriétés correspondantes des séries trigonométriques de Fourier $(\lambda = 0)$ et des séries de Laplace $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ ont été signalées par M. L. Féjèr ([2]).

De même, le fait qu'il existe des fonctions continues sur toute la

---

([1]) *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 626.
([2]) *Mathem. Annalen*, t. 58, 1904, et t. 67, 1909.

sphère, dont la série I n'est pas sommable $(C, \delta \leqq \lambda)$ (1), explique la différence qu'on peut signaler à ce point de vue entre les séries trigonométriques et les séries de Laplace : tandis que le développement trigonométrique d'une fonction continue dans tout intervalle $(0, 2\pi)$ est uniformément sommable $(C, \delta > 0)$ pour chaque $\delta > 0$, il existe des fonctions continues sur toute la sphère et dont les séries de Laplace ne sont pas sommables $\left(C, \delta \leqq \frac{1}{2}\right)$ (2).

Il est évident que cette non-sommabilité $\left(C, \delta \leqq \frac{1}{2}\right)$ des séries de Laplace est parfaitement analogue au fait bien connu de l'existence des fonctions continues, dont les séries trigonométriques divergent, c'est-à-dire ne sont pas sommables $(C, \delta \leqq 0)$: les deux ne sont que les cas particuliers pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\lambda = 0$ de la non-sommabilité $(C, \delta \leqq \lambda)$ de la série I.

La sommabilité uniforme $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace d'une fonction $F(\theta, \varphi)$ continue sur toute la sphère (2) ainsi que la sommabilité uniforme $(C, \delta > 0)$ du développement trigonométrique d'une fonction continue sont aussi les cas particuliers de la sommabilité uniforme $(C, \delta > \lambda)$ de la série I d'une fonction $F(\theta, \varphi)$ continue sur toute la sphère S (1).

En étudiant la sommabilité (C, δ) de la série I pour $\lambda - 1 < \delta \leqq \lambda$, on s'aperçoit que les propriétés des moyennes d'ordres $-1 < \delta \leqq 0$ de la série trigonométrique doivent être essentiellement les mêmes que celles des moyennes d'ordres $-\frac{1}{2} < \delta \leqq \frac{1}{2}$ de la série de Laplace.

L'étude comparative des moyennes arithmétiques de ces deux classes des séries, entreprise dans ce Mémoire, prouve cette assertion. Cette étude ne saurait être remplacée par l'étude de la sommabilité (C, δ) de la série I d'une fonction $F(\theta, \varphi)$ pour $\lambda - 1 < \delta \leqq \lambda$ puisque la série trigonométrique n'est pas rigoureusement le cas particulier pour $\lambda = 0$ de la série I d'une fonction $F(\theta, \varphi) \equiv f(\cos\theta)$, mais son cas limite pour $\lambda \to 0$, ce qui exige l'étude directe de la sommabilité $(C, \delta < 0)$

(1) E. Kogbetliantz, *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 626.
(2) T. H. Gronwall, *Mathem. Annalen*, t. 75, 1914.

de la série trigonométrique, la sommabilité (C, o), c'est-à-dire la convergence étant étudiée en détail. Quant à la série de Laplace, l'étude de sa sommabilité (C, δ) pour $-\frac{1}{2} < \delta \leqq \frac{1}{2}$ est beaucoup plus simple que l'étude du cas général de la sommabilité (C, δ) de la série I pour $\lambda - 1 < \delta \leqq \lambda$ (1).

En ce qui concerne les séries trigonométriques et les séries de Laplace, on trouve les résultats suivants. Les critères bien connus de convergence de la série trigonométrique assurent aussi la sommabilité $\left(C, \delta = \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace (§ 5) qui, ainsi que la sommabilité $(C, \delta = 0)$ de la série trigonométrique, ne dépend que de l'allure de la fonction développée au voisinage du point considéré, si l'ordre γ d'infinitude de la fonction développée en point W, diamétralement opposé sur la sphère S au point M considéré, est inférieur à trois demis : $\gamma < \frac{3}{2}$. La sommabilité $(C, \delta < 0)$ de la série trigonométrique et la sommabilité $\left(C, \delta < \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace dépendent au contraire de toutes les valeurs que prend la fonction développée.

Les séries trigonométriques ne sont sommables $(C, \delta < 0)$ que pour $\delta > \alpha - 1$, où α est l'ordre maximum d'infinitude de la fonction développée dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Le fait analogue pour les séries de Laplace est plus compliqué : en point M la série de Laplace n'est sommable $\left(C, \delta < \frac{1}{2}\right)$ que pour $\delta > \alpha - \frac{3}{2}$, où α est l'ordre maximum d'infinitude de la fonction développée sur toute la sphère, mais si la fonction développée devient infinie d'ordre γ en point W, diamétralement opposé sur la sphère au point M, il est nécessaire de plus que δ soit plus grand que $\gamma - 1$: $\delta > \gamma - 1$.

Vu que les séries absolument convergentes sont sommables (C, δ) pour chaque $\delta > -1$, nous en déduisons les corollaires : la série trigonométrique ne converge nulle part absolument, si la fonction développée devient en un seul point infinie d'ordre $\alpha > 0$; la série de Laplace ne converge pas absolument en point M, si la fonction déve-

(1) Les résultats qui se rapportent à ce cas général ont été publiés dans les *Comptes rendus*, t. 169, 1919, p. 322.

loppée devient en point W, diamétralement opposé au point M, infinie d'ordre $\gamma > 0$; la série de Laplace ne converge nulle part absolument, si la fonction développée devient en un seul point de S infinie d'ordre $\alpha > \frac{1}{2}$.

La série de Legendre est le cas particulier de la série de Laplace pour $F(\theta, \varphi) \equiv f(\cos\theta)$ et l'on trouve les résultats suivants : la sommabilité $\left(C, \delta = \frac{1}{2}\right)$ de la série de Legendre en un point frontière, soit pour fixer les idées en point $x = +1$, ne dépend que de l'allure de la fonction développée au voisinage de l'autre des deux points frontières et, en dénotant l'ordre d'infinitude de la fonction en ce point frontière, $x = -1$, par γ, on a $\gamma < \frac{3}{4}$ comme condition nécessaire de la sommabilité $\left(C, \delta = \frac{1}{2}\right)$ de la série de Legendre en point $x = +1$. Au contraire, la sommabilité $\left(C, \delta < \frac{1}{2}\right)$ de la série de Legendre en point $x = +1$ dépend en outre de l'allure de la fonction développée à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$ et la condition nécessaire de la sommabilité $\left(C, \delta > -\frac{1}{2}\right)$ au point frontière $x = +1$ est $\delta > \delta_0$, où δ_0 est le plus grand des deux nombres $2\gamma - 1$ et $\beta - \frac{1}{2}$, β étant l'ordre maximum de l'infinitude de la fonction à l'intérieur de $(-1, +1)$ et γ l'ordre d'infinitude de la fonction au point frontière opposé $x = -1$.

Par conséquent, pour $|x| = 1$, la série de Legendre diverge, si la fonction développée devient en un point quelconque infinie d'ordre β supérieur ou égal à un demi, $\beta \geqq \frac{1}{2}$, et ne peut pas converger absolument en un point frontière, si la fonction devient en un point quelconque infinie d'ordre positif α $(\alpha > 0)$.

Les questions de la sommabilité $(C, \delta < 0)$ [1] de la série de Legendre en des points intérieurs, $|x| < 1$, de l'intervalle $(-1, +1)$

---

[1] La sommabilité $(C, \delta > 0)$ a été étudiée par M. H. T. Gronwall (*Mathem. Annalen*, t. 75, 1914), et la convergence par M. Hobson (*Proceed. Lond. Math. Society*, 2e série, t. 7, 1909, p. 31).

ne se prêtent pas à l'étude, si on la considère comme le cas particulier de la série de Laplace, et exigent l'application de méthodes directes.

J'ai démontré [1] que la série de Legendre en un point intérieur n'est pas sommable $(C, \delta \leqq \delta_0)$ et l'est $(C, \delta < 0)$ pour $\delta > \delta_0$, où $\delta_0 (\delta_0 < 0)$ est le plus grand de tous les nombres $2\gamma_0 - \frac{3}{2}$, $2\bar{\gamma}_0 - \frac{3}{2}$, $\gamma_k - 1 (k \geqq 1)$, $\bar{\gamma}_0$, γ_0 et $\gamma_k (k \geqq 1)$ dénotant les ordres de l'infinitude de la fonction développée en points frontières $\bar{x}_0 = -1$, $x_0 = +1$ et en points intérieurs $x_k (k \geqq 1)$ respectivement. Si $\bar{\gamma}_0$ ainsi que γ_0 ne dépassent pas un quart, $\bar{\gamma}_0$, $\gamma_0 \leqq \frac{1}{4}$, et si à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$ la fonction développée ne possède que des infinis logarithmiques, la série de Legendre en un point intérieur est sommable $(C, \delta < 0)$ pour chaque $\delta > -1$. Mais ces résultats dépassent les cadres du présent Mémoire et leur démonstration fera l'objet d'un autre Mémoire.

La méthode de sommation par les moyennes arithmétiques d'ordre δ d'une série

$$\sum_0^\infty u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

conduit, comme on sait, à la formation de la suite $s_0^{(\delta)}, s_1^{(\delta)}, s_2^{(\delta)}, \ldots, s_n^{(\delta)}, \ldots$ des moyennes arithmétiques d'ordre δ de ses sommes partielles $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n, \ldots$:

$$s_n^{(\delta)} = \frac{\delta . s_0}{n+\delta} + \sum_{m=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{(n+\delta-1)(n+\delta-2)\ldots(n+\delta-m)} \frac{\delta . s_m}{n+\delta} \qquad (\delta > -1).$$

On voit qu'en dénotant $A_n^{(\delta)}$ le coefficient de z^n dans le développement de la fonction $(1-z)^{-\delta-1}$ en série de Maclaurin

$$\frac{1}{(1-z)^{\delta+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\delta)} z^n,$$

donc

$$A_n^{(\delta)} = \frac{\Gamma(n+\delta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\delta+1)} \qquad (\delta > -1),$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. 169, 1919, p. 423; le cas particulier pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

on a

$$A_n^{(\delta)} s_n^{(\delta)} = \sigma_n^{(\delta)} = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta-1)} s_m = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)} u_m.$$

On envisage la suite des moyennes $s_n^{(\delta)}$ au lieu de la suite des sommes partielles $s_n = s_n^{(0)}$ et l'on attribue à la série $\sum_0^\infty u_n$ la somme s, si pour une valeur quelconque de $\delta > -1$ existe la limite

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(\delta)} = s.$$

Dans ce cas la série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ est dite *sommable* par la méthode des moyennes arithmétiques d'ordre δ, bref *sommable* (C, δ), avec la somme s. La convergence n'est que la sommabilité (C, $\delta = 0$) et l'on voit que la sommabilité (C, δ) constitue la généralisation la plus naturelle de la convergence.

Parmi les séries divergentes et sommables (C, δ), celles qui divergent plus fort ne sont sommables que par les moyennes arithmétiques d'ordre δ plus élevé que celles qui divergent plus lentement. C'est le sens de la condition nécessaire $u_n = o(n^\delta)$, c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{n^\delta} = 0 \qquad (\delta > -1)$$

de la sommabilité (C, δ) d'une série $\sum_0^\infty u_n$ par les moyennes d'ordre $\delta > -1$, qui généralise la condition nécessaire $\lim_{n=\infty} u_n = 0$ de la convergence. Par exemple, des deux séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \qquad = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots,$$

la seconde série diverge beaucoup plus fort que la première, comme on voit en comparant les oscillations de leurs sommes partielles pour $n \to \infty$, et ce fait se traduit en ce que la série $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ est sommable (C, δ) pour chaque $\delta > 0$, tandis que la série

$1-2+3-4+\ldots$ n'est sommable (C, δ) que pour $\delta > 1$. La série est sommable (C, δ) pour chaque $\delta > \delta_0$, si elle l'est pour $\delta = \delta_0$; donc chaque série, qui est sommable $(C, \delta < 0)$, converge nécessairement. La restriction $\delta > -1$ ne nuit nullement, car les séries absolument convergentes sont sommables (C, δ) pour $\delta > -1$.

Dans tout ce qui suit les notations $\varphi(n) = o(n^\alpha)$ et $\psi(n) = O(n^\beta)$ signifient que l'on a, pour $n \to \infty$, $\varphi(n) = \varepsilon_n n^\alpha$, où $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, et $|\psi(n)| < K.n^\beta$, quel que soit $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ et où la constante K ne dépend pas de n. En particulier, $\varphi(n) = o(1)$ et $\psi(n) = O(1)$ signifient $\lim_{n=\infty} \varphi(n) = 0$ et $|\psi(n)| < K$ quel que soit $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

1. — La sommabilité $(C, \delta < 0)$ des séries trigonométriques des fonctions à variation bornée.

Il est bien connu que la série de Fourier

$$f(\theta) \backsim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi),$$

où

$$\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} n\theta \, d\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

converge en tout point θ_0 de l'intervalle $(0, 2\pi)$, où existe l'expression

$$\frac{1}{2} [f(\theta_0 - 0) + f(\theta_0 + 0)],$$

vers cette expression, si la fonction développée est à variation bornée dans tout intervalle $(0, 2\pi)$, sauf les voisinages des points

$$\theta = \theta_k \qquad (k \geqq 1)$$

en nombre fini, où elle devient infinie. La convergence du développement trigonométrique en un point $\theta = \theta_0$ ne dépend que de l'allure de la fonction développée autour de ce point $\theta = \theta_0$ et il semble, au premier abord, que l'ordre de l'infinitude de la fonction en des points isolés $\theta = \theta_k$ $(k \geqq 1)$ de l'intervalle $(0, 2\pi)$ n'a aucune influence sur la convergence de la série en d'autres points. Mais le fait bien connu que les coefficients a_n, b_n sont de la forme $O(n^{\alpha-1})$, où α est l'ordre maximum d'infinitude de $f(\theta)$ en des points isolés de $(0, 2\pi)$, nous montre qu'il doit exister une dépendance entre l'ordre α d'infinitude de la fonction développée et le mode de convergence de la série trigonométrique de Fourier.

Mais, comment peut-on comparer la convergence de deux séries convergentes? Comment peut-on mesurer le mode de convergence?

Toute réponse nous fournira une classification des séries convergentes. Or, on a déjà une classification des séries divergentes dans la méthode (C, δ) de sommation des séries divergentes par les moyennes arithmétiques de différents ordres $\delta > 0$. On élargit cette classification des séries au point de vue de leur sommabilité (C, δ), en considérant aussi les valeurs négatives de δ $(\delta > -1)$, et l'on obtient ainsi la classification des séries convergentes.

En étudiant la sommabilité (C, δ) pour $-1 < \delta < 0$ des séries trigonométriques de Fourier, nous pouvons trouver la loi selon laquelle l'influence des points singuliers de la fonction développée, qui est trop faible pour détruire la convergence de la série de Fourier en d'autres points de l'intervalle $(0, 2\pi)$, détermine le mode de convergence de cette série.

La loi cherchée est bien simple : $f(\theta)$ étant à variation bornée dans les intervalles $(0, \xi - \varepsilon)$ et $(\xi + \varepsilon, 2\pi)$, et de la forme

$$f(\theta) = c_0 |\theta - \xi|^{-\alpha} + \varphi(\theta) \qquad (\xi - \varepsilon \leqq \theta \leqq \xi + \varepsilon;\ \alpha < 1)$$

dans l'intervalle $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, où $\alpha < 1$ et où $\varphi(\theta)$, est à variation bornée, on a le théorème suivant [1] :

THÉORÈME. — *La série trigonométrique de Fourier de $f(\theta)$ convergente partout dans $(0, 2\pi)$, sauf le point $\theta = \xi$, n'est nulle part sommable (C, δ) pour $\delta \leqq \alpha - 1$ et l'est $(C, \delta > \alpha - 1)$ avec la somme*

$$\frac{1}{2}[f(\theta - 0) + f(\theta + 0)]$$

partout, sauf le point $\theta = \xi$.

---

[1] E. KOGBETLIANTZ, *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 1193.

On voit que la convergence de la série trigonométrique n'est que la conséquence de ce théorème puisque l'on a toujours $\alpha - 1 < 0$ et une série sommable $(C, \delta < 0)$ converge sûrement.

Il est à observer que les moyennes d'ordre $\delta < \alpha - 1$ de la série trigonométrique de $f(\theta)$ oscillent entre $-\infty$ et $+\infty$, mais ses moyennes d'ordre $\delta = \alpha - 1$ qui oscillent aussi sans tendre vers la limite déterminée restent toujours bornées.

Ce théorème fait voir qu'*on ne peut pas substituer la sommabilité* $(C, \delta < 0)$ *à la convergence dans le théorème classique de Riemann*, puisque, quelque petite que soit la valeur absolue de δ, la sommabilité $(C, \delta < 0)$ de la série de Fourier dépend de l'ordre α de l'infinitude de la fonction développée; donc elle dépend de son allure dans tout intervalle $(0, 2\pi)$.

Une autre conséquence de notre théorème consiste en ce que *la série trigonométrique ne converge nulle part absolument, si la fonction développée devient en un seul point dans* $(0, 2\pi)$ *infinie d'ordre* $\alpha > 0$, puisqu'une série qui converge absolument est sûrement sommable $(C, \delta < 0)$ pour chaque $\delta > -1$.

Pour démontrer le théorème énoncé, nous devons étudier les propriétés de la moyenne arithmétique $S_n^{(\delta)}(\theta)$ d'ordre négatif δ de la série

$$\frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta}{1} + \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} + \ldots + \frac{\sin n\theta}{n} + \ldots.$$

On démontre les deux propositions suivantes :

I. *La série* $\frac{\theta}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ *est sommable* $(C, \delta > -1)$ *avec la somme* $\frac{\pi}{2}$ *pour* $0 < \theta < 2\pi$ *et même uniformément pour*

$$\varepsilon \leqq \theta \leqq 2\pi - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

II. *Les moyennes arithmétiques* $S_n^{(\delta)}(\theta)$ *sont bornées dans leur ensemble pour* $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ *et* $n = 0, 1, \ldots, \infty$, *pourvu que l'on ait* $\delta > -1$.

C'est-à-dire on a

$$\lim_{n=\infty} S_n^{(\delta)}(\theta) = \frac{\pi}{2} \qquad (0 < \theta < 2\pi;\ \delta > -1)$$

et aussi

$$|S_n^{(\delta)}(\theta)| < c_1 \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi;\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty;\ \delta > -1),$$

où la constante c_1 ne dépend que de δ et tend vers l'infini quand δ tend vers -1.

Désignons

$$\sigma_n^{(\delta)}(\theta) = A_n^{(\delta)}\frac{\theta}{2} + \sum_{m=1}^{n} A_{n-m}^{(\delta)} \frac{\sin m\theta}{m}.$$

Nous déduisons facilement de la fonction génératrice $\psi(z)$

$$\psi(z) = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2i}\log\frac{1 - z e^{-i\theta}}{1 - z e^{i\theta}} = \frac{\theta}{2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{z\sin\theta}{1 - z\cos\theta} = \frac{\theta}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\theta}{m} z^m,$$

la fonction génératrice de la suite des quantités $\sigma_n^{(\delta)}(\theta)$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m^{(\delta)}(\theta)\, z^m = \frac{\psi(z)}{(1 - z)^{1+\delta}}.$$

Soit $\delta < 0$. Pour déduire l'expression de $\sigma_n^{(\delta)}(\theta)$, nous employons la méthode de Stieltjes [1]. On a, en posant $\psi\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi(z)$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^{n-m-1}\sigma_m^{(\delta)}(\theta) = \frac{z^{n+\delta}\varphi(z)}{(z - 1)^{1+\delta}} = \frac{z^{n+\delta}}{(z - 1)^{1+\delta}}\left\{\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2i}\log\left(\frac{z - e^{-i\theta}}{z - e^{i\theta}}\right)\right\};$$

donc

$$2\pi i\,\sigma_n^{(\delta)}(\theta) = \int_{C_\varepsilon}\frac{z^{n+\delta}\varphi(z)\,dz}{(z - 1)^{1+\delta}} \qquad (\delta > -1),$$

où le chemin d'intégration C_ε consiste en trois lacets consécutifs L_1, L_2 et L_3, ayant leur entrée commune au point $z = 0$ et pour centres de leurs cercles γ_1, γ_2, γ_3 les points singuliers $e^{-i\theta}$, 1 et $e^{i\theta}$ de la fonction $\frac{z^{n+\delta}\varphi(z)}{(z-1)^{1+\delta}}$ respectivement :

Les rayons des circonférences γ_1, γ_2, γ_3, ainsi que le rayon du petit cercle γ autour du point $z = 0$ sont égaux à ε. Les branches des fonc-

---

(1) *Sur les polynomes de Legendre* (*Annales de Toulouse*, 1re série, t. 4, 1890, p. $\mathcal{G}$ 1-$\mathcal{G}$ 17).

tions multiformes $\varphi(z)$ et $\frac{1}{(z-1)^{1+\delta}}$ sont définies par la condition que ces fonctions sont réelles au point $z = 1 + \varepsilon$, qui se trouve à mi-chemin, l'intégration commençant au point $z = -\varepsilon$. Donc, en ce point $z = -\varepsilon$,

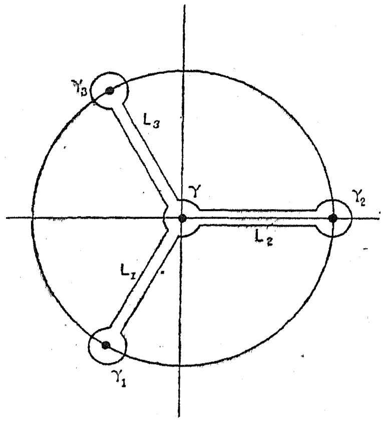

Fig. 1.

nous devons considérer la branche $[\varphi(z) - \pi]$ de la fonction $\varphi(z)$ et vu que les intégrales prises suivant les cercles γ_1, γ_2, γ_3 et suivant les arcs du cercle γ s'évanouissent, quand on fait tendre ε vers zéro, on a pour $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
2\pi i \sigma_n^{(\delta)}(\theta) = & \int_{\varepsilon e^{-i\theta}}^{(1-\varepsilon)e^{-i\theta}} \frac{[\varphi(z)-\pi] z^{n+\delta}\, dz}{(z-1)^{1+\delta}} + \int_{(1-\varepsilon)e^{-i\theta}}^{\varepsilon e^{-i\theta}} \frac{\varphi(z)\, z^{n+\delta}\, dz}{(z-1)^{1+\delta}} \\
& + e^{i\pi(1+\delta)} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\varphi(u)\, u^{n+\delta}\, du}{(1-u)^{1+\delta}} + e^{-i\pi(1+\delta)} \int_{1-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(u)\, u^{n+\delta}\, du}{(1-u)^{1+\delta}} \\
& + \int_{\varepsilon e^{i\theta}}^{(1-\varepsilon)e^{i\theta}} \frac{\varphi(z)\, z^{n+\delta}\, dz}{(z-1)^{1+\delta}} + \int_{(1-\varepsilon)e^{i\theta}}^{\varepsilon e^{i\theta}} \frac{[\varphi(z)-\pi]\, z^{n+\delta}\, dz}{(z-1)^{1+\delta}} + o(1) \\
& (\delta < 0).
\end{aligned}$$

A la limite pour $\varepsilon = 0$, il vient

$$\sigma_n^{(\delta)}(\theta) = \frac{\sin(1+\delta)\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi(u)\, u^{n+\delta}\, du}{(1-u)^{1+\delta}} + \mathrm{R}\, \frac{1}{i} \int_0^{e^{i\theta}} \frac{z^{n+\delta}\, dz}{(z-1)^{1+\delta}},$$

où

$$\varphi(u) = \frac{\theta}{2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{\sin\theta}{u - \cos\theta}.$$

Or on a

$$0 \leqq \operatorname{arc\,tang} \frac{\sin\theta}{u - \cos\theta} - \operatorname{arc\,tang} \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \int_1^u d\left[\operatorname{arc\,tang} \frac{\sin\theta}{t - \cos\theta}\right]$$
$$= \sin\theta \int_u^1 \frac{dt}{1 - 2t\cos\theta + t^2} \leqq \sin\theta \int_u^1 \frac{dt}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = 2(1-u)\cot\frac{\theta}{2},$$

puisque, pour $u \geqq 0$,

$$1 - 2u\cos\theta + u^2 = \left[(1+u)\sin\frac{\theta}{2}\right]^2 + \left[(1-u)\cos\frac{\theta}{2}\right]^2 \geqq \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Mais

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{\pi - \theta}{2},$$

donc

$$\varphi(u) - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arc\,tang} \frac{\sin\theta}{u - \cos\theta} - \operatorname{arc\,tang} \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta},$$

et il vient

$$\varphi(u) = \frac{\pi}{2} + 2(1-u)\,h(u,\theta)\cot\frac{\theta}{2},$$

où

$$0 \leqq h(u,\theta) \leqq 1 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \text{ et } 0 \leqq u \leqq 1.$$

On obtient maintenant :

$$\frac{\sin(1+\delta)\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi(u)\,u^{n+\delta}\,du}{(1-u)^{1+\delta}}$$
$$= \frac{\sin(1+\delta)\pi}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(n+\delta+1)\Gamma(-\delta)}{\Gamma(n+1)} + 2\cot\frac{\theta}{2} \int_0^1 \frac{h(u,\theta)\,u^{n+\delta}\,du}{(1-u)^{\delta}} \right\}$$
$$= A_n^{(\delta)} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2|\delta|\,h_n(\theta)}{n+1} \cot\frac{\theta}{2} \right\} \qquad (0 \leqq h_n(\theta) \leqq 1).$$

De l'autre côté, on a

$$\frac{1}{A_n^{(\delta)}} \left| \mathrm{R}\, \frac{1}{i} \int_0^{e^{i\theta}} \frac{z^{n+\delta}\,dz}{(z-1)^{1+\delta}} \right| \leqq \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \left| \int_0^{e^{i\theta}} \frac{z^{n+\delta}\,dz}{(z-1)^{1+\delta}} \right|$$
$$= \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \int_0^1 \frac{u^{n+\delta}\,du}{|u e^{i\theta} - 1|^{\delta+1}} \leqq \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \int_0^1 \frac{u^{n+\delta}\,du}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\delta+1}}$$
$$= \frac{1}{(n+\delta+1)\,A_n^{(\delta)}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\delta+1}} = \frac{1}{(\delta+1)\,A_n^{(\delta+1)}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\delta+1}} \leqq \frac{2\,\Gamma(1+\delta)}{\left[(n+1)\sin\frac{\theta}{2}\right]^{\delta+1}},$$

puisque

$$|u\,e^{i\theta}-1|=\sqrt{1-2u\cos\theta+u^2}\geqq\sin\frac{\theta}{2}.$$

Définitivement on obtient pour $-1<\delta<0$:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & S_n^{(\delta)}(\theta)=\frac{\sigma_n^{(\delta)}(\theta)}{A_n^{(\delta)}}=\frac{\pi}{2}+\frac{2|\delta|\,h_n(\theta)\cos\frac{\theta}{2}}{(n+1)\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{2\,h'_n(\theta)\,\Gamma(1+\delta)}{\left[(n+1)\sin\frac{\theta}{2}\right]^{\delta+1}} \\ & \qquad [0\leqq h_n(\theta)\leqq 1;\ |h'_n(\theta)|\leqq 1]. \end{aligned}\right.$$

On voit que l'on a

$$\lim_{n=\infty} S_n^{(\delta)}(\theta)=\frac{\pi}{2}$$

pour $0<\theta<2\pi$, $\delta>-1$ et même uniformément pour

$$\varepsilon\leqq\theta\leqq 2\pi-\varepsilon,\qquad \delta>-1.$$

Pour $\frac{\pi}{n+1}\leqq\theta\leqq 2\pi-\frac{\pi}{n+1}$ on a

$$(n+1)\sin\frac{\theta}{2}\geqq 1,$$

d'où, grâce à (1),

$$|S_n^{(\delta)}(\theta)|<\frac{\pi}{2}+2|\delta|+\frac{2}{\delta+1}<\frac{3,6}{1+\delta}\qquad\left(\frac{\pi}{n+1}\leqq\theta\leqq 2\pi-\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Mais $S_n^{(\delta)}(\theta)$ sont bornées dans leur ensemble aussi pour $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{n+1}$ et pour $2\pi-\frac{\pi}{n+1}\leqq\theta\leqq 2\pi$. Soit d'abord $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{n+1}$. On a

$$\begin{aligned} |S_n^{(\delta)}(\theta)| &= S_n^{(\delta)}(\theta)=\frac{\theta}{2}+\sum_{m=1}^{n}\frac{A_{n-m}^{(\delta)}}{A_n^{(\delta)}}\,\frac{\sin m\theta}{m}<\theta\left\{1+\sum_{m=1}^{n}\frac{A_{n-m}^{(\delta)}}{A_n^{(\delta)}}\right\} \\ &\leqq\frac{\pi}{n+1}\,\frac{A_n^{(\delta+1)}}{A_n^{(\delta)}}=\frac{\pi}{n+1}\,\frac{n+\delta+1}{1+\delta}<\frac{\pi}{1+\delta}\qquad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Or

$$S_n^{(\delta)}(2\pi-\theta)=\pi-S_n^{(\delta)}(\theta);$$

donc pour $2\pi-\frac{\pi}{n+1}\leqq\theta\leqq 2\pi$, on a aussi

$$|S_n^{(\delta)}(\theta)|\leqq\frac{\pi}{1+\delta}.$$

Par conséquent, on a prouvé l'inégalité

$$(2) \qquad |S_n^{(\delta)}(\theta)| \leqq \frac{3,6}{1+\delta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi,\ \delta > -1;\ n = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

La présence du diviseur $1+\delta$ est causée par le fait suivant : le segment $\overline{AB}$ du phénomène de Gibbs, qui a lieu pour $\delta < 0$ aussi

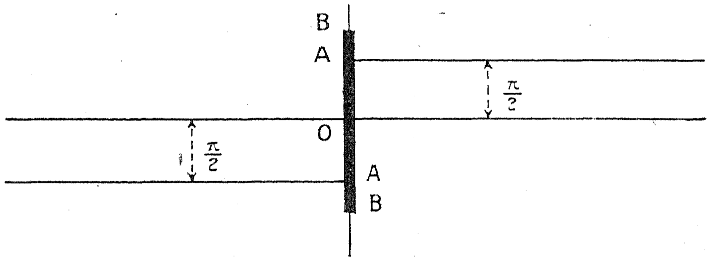

Fig. 2.

bien que pour $0 \leqq \delta \leqq 1$, est égal à zéro pour $\delta = 1$, s'allonge de plus en plus, quand δ diminue à partir de $\delta = 1$, et tend à devenir infiniment grand, quand δ en diminuant s'approche vers -1 :

Posons $l = \overline{AB}$. On a

$$l = l(\delta), \qquad \frac{dl}{d\delta} < 0, \qquad l(1) = 0$$

et

$$\lim_{\delta = -1} l(\delta) = +\infty.$$

Il serait très intéressant d'étudier en détail la loi qui régit ce phénomène de Gibbs généralisé, c'est-à-dire d'étudier la fonction $l(\delta)$ pour $-1 < \delta < 1$.

La moyenne arithmétique d'ordre δ de la série trigonométrique $-f_n^{(\delta)}(\theta)$ — s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} f_n^{(\delta)}(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\, s_n^{(\delta)}(u-\theta)\, du &= \frac{1}{\pi}\int_{\theta-\eta}^{\theta+\eta} + \frac{1}{\pi}\int_{\xi-\eta'}^{\xi+\eta'} + \frac{1}{\pi}\int_{(i)} \\ &= \mathrm{I}'_n \qquad + \mathrm{I}''_n \qquad + \mathrm{I}'''_n, \end{aligned}$$

où l'intervalle

$$(i) = (0, 2\pi) - (\theta - \eta, \theta + \eta) - (\xi - \eta', \xi + \eta')$$

et où $s_n^{(\delta)}(u-\theta)$ signifie la moyenne d'ordre δ de la série

$$\frac{1}{2}+\cos(u-\theta)+\cos 2(u-\theta)+\cos 3(u-\theta)+\ldots+\cos n(u-\theta)+\ldots.$$

Il est clair que l'on a

$$s_n^{(\delta)}(x)=\frac{d\,S_n^{(\delta)}(x)}{dx}.$$

En substituant $u=\theta+x$ dans I'_n, on obtient

$$\begin{aligned}
I'_n &= \frac{1}{\pi}\int_{\theta-\eta}^{\theta+\eta} f(u)\,s_n^{(\delta)}(u-\theta)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\eta}^{+\eta} f(\theta+x)\,s_n^{(\delta)}(x)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta}[f(\theta+x)+f(\theta-x)]\,s_n^{(\delta)}(x)\,dx\\
&= \frac{f(\theta+0)+f(\theta-0)}{\pi}\int_0^{\eta} s_n^{(\delta)}(x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\eta}\psi(x)\,s_n^{(\delta)}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

La fonction

$$\psi(x)=f(\theta+x)-f(\theta+0)+f(\theta-x)-f(\theta-0)$$

est à variation bornée dans $(0, \eta)$; donc $\psi(x)=\psi_1(x)-\psi_2(x)$, où $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$ sont monotones, et en appliquant le second théorème de la moyenne on obtient

$$\begin{aligned}
I'_n &= \frac{f(\theta+0)+f(\theta-0)}{\pi}\,S_n^{(\delta)}(\eta)\\
&\quad+\frac{1}{\pi}\int_0^{\eta}[\psi_1(x)-\psi_2(x)]\,s_n^{(\delta)}(x)\,dx = i'_n+i''_n,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
i''_n &= \frac{1}{\pi}\psi_1(\eta)\int_{\eta'}^{\eta} s_n^{(\delta)}(x)\,dx-\frac{1}{\pi}\psi_2(\eta)\int_{\eta''}^{\eta} s_n^{(\delta)}(x)\,dx\\
&= \frac{\psi_1(\eta)}{\pi}\{S_n^{(\delta)}(\eta)-S_n^{(\delta)}(\eta')\}-\frac{\psi_2(\eta)}{\pi}\{S_n^{(\delta)}(\eta)-S_n^{(\delta)}(\eta'')\}.
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\psi_1(0)=\psi_2(0)=0;$$

donc quelque petite que soit une quantité positive fixe ε nous pouvons, grâce à (2), pour chaque valeur fixe de $\delta>-1$, choisir $\eta=\eta(\varepsilon,\delta)$ assez petit pour avoir

$$|i''_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ayant ainsi fixé η, nous avons pour $n \geqq N = N(\varepsilon, \delta)$

$$\left| S_n^{(\delta)}(\eta) - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{|f(\theta+0)+f(\theta-0)|} \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \geqq N);$$

donc, pour $n \geqq N$,

$$\left| i'_n - \frac{f(\theta+0)+f(\theta-0)}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et par conséquent

$$\left| I'_n - \frac{f(\theta+0)+f(\theta-0)}{2} \right| < \varepsilon \qquad [n \geqq N(\varepsilon, \delta)],$$

d'où la conclusion :

$$\lim_{n=\infty} I'_n = \frac{f(\theta+0)+f(\theta-0)}{2} \qquad (\delta > -1).$$

De même on prouve facilement que l'on a

$$\lim_{n=\infty} I'''_n = 0$$

pour chaque $\delta > -1$, parce que $f(\theta)$ est à variation bornée dans les limites d'intégration :

$$\pi I'''_n = \int_0^{\theta-\eta} + \int_{\theta+\eta}^{\xi-\eta'} + \int_{\xi+\eta'}^{2\pi},$$

en supposant, pour fixer les idées, $\theta < \xi$.

Vu que $f(\theta) = f_1(\theta) - f_2(\theta)$, nous avons par exemple

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{\theta-\eta} f(u)\, s_n^{(\delta)}(u-\theta)\, du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_\eta^{\theta} [f_1(\theta-x) - f_2(\theta-x)]\, s_n^{(\delta)}(x)\, dx \\
&= \frac{f_1(0)}{\pi}\int_{\eta'}^{\theta} s_n^{(\delta)}(x)\, dx - \frac{f_2(0)}{\pi}\int_{\eta''}^{\theta} s_n^{(\delta)}(x)\, dx \\
&= \frac{f_1(0)}{\pi}\{ S_n^{(\delta)}(\theta) - S_n^{(\delta)}(\eta') \} - \frac{f_2(0)}{\pi}\{ S_n^{(\delta)}(\theta) - S_n^{(\delta)}(\eta'') \},
\end{aligned}$$

où η' et η'' dépendent de n, mais restent toujours $\geqq \eta$. Donc, en s'appuyant sur l'uniformité de la convérgence de la suite $\{S_n^{(\delta)}(x)\}$

vers la limite constante $\frac{\pi}{2}$ dans l'intervalle $(\eta, 2\pi - \eta)$, on obtient

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta-\eta} f(u)\, s_n^{(\delta)}(u-\theta)\, du = 0 \qquad (\delta > -1).$$

Le même raisonnement s'applique aux deux autres intégrales et nous voyons que l'on a

$$\lim_{n=\infty} I_n''' = 0,$$

quel que soit $\delta > -1$.

Pour étudier les conditions sous lesquelles $\lim\limits_{n=\infty} I_n'' = 0$ nous avons besoin de la formule approximative pour la moyenne $s_n^{(\delta)}(x)$ de la série

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + \ldots.$$

On la déduit à l'aide de la même méthode de Stieltjes, qui nous a donné la formule approximative (1) :

$$\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} z^m \cos mx = \frac{1}{2} \frac{1-z^2}{1-2z\cos x + z^2},$$

d'où

$$\sum_{m=0}^{\infty} \overline{\sigma}_m^{(\delta)}(x)\, z^{n-m-1} = \frac{1}{2} \frac{z^{n+\delta}(z+1)}{(z-1)^{\delta}(1-2z\cos x + z^2)} = \varphi(z)$$

et

$$2\pi i\, \overline{\sigma}_n^{(\delta)}(x) = \int_{C_t} \varphi(z)\, dz = \int_{L_1} \varphi(z)\, dz + \int_{L_2} \varphi(z)\, dz + \int_{L_3} \varphi(z)\, dz.$$

Or

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \varphi(z)\, dz = \lim_{z=e^{-ix}} (z - e^{-ix})\, \varphi(z) = \frac{1}{2} \frac{e^{-i(n+\delta)x}(e^{-ix}+1)}{(e^{-ix}-1)^{\delta}(e^{-ix}-e^{ix})}$$

et

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_3} \varphi(z)\, dz = \lim_{z=e^{ix}} (z - e^{ix})\, \varphi(z) = \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+\delta)x}(e^{ix}+1)}{(e^{ix}-1)^{\delta}(e^{ix}-e^{-ix})};$$

donc

$$\overline{\sigma}_n^{(\delta)}(x) = \frac{\cos\left[\left(n + \frac{\delta+1}{2}\right)x - \frac{\delta+1}{2}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{\delta+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \varphi(z)\, dz.$$

Mais

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\varphi(z)\,dz = \frac{\sin\delta\pi}{2\pi}\int_0^1 \frac{(1+t)\,t^{n+\delta}\,dt}{(1-t)^\delta(1-2t\cos x+t^2)}$$

et, par conséquent, il vient

$$s_n^{(\delta)}(x) = \frac{\overline{\sigma}_n^{(\delta)}(x)}{A_n^{(\delta)}} = \frac{\cos\left[\left(n+\frac{\delta+1}{2}\right)x - \frac{\delta+1}{2}\pi\right]}{A_n^{(\delta)}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{\delta+1}} + r_n^{(\delta)}(x),$$

où

$$|r_n^{(\delta)}(x)| \leqq \frac{|\sin\delta\pi|}{\pi A_n^{(\delta)}}\int_0^1 \frac{t^{n+\delta}(1-t)^{-\delta}\,dt}{\sin^2\frac{x}{2}} \leqq \frac{|\delta|}{(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}.$$

En appliquant cette formule, on obtient

$$\begin{aligned}
I_n'' &= \frac{1}{\pi}\int_{\xi-\eta'}^{\xi+\eta'} f(u)\,s_n^{(\delta)}(u-\theta)\,du \\
&= \frac{1}{\pi A_n^{(\delta)}}\int_{\xi-\eta'}^{\xi+\eta'} f(u)\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)(u-\theta) - \frac{1+\delta}{2}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{u-\theta}{2}\right)^{1+\delta}}\,du + \rho_n^{(\delta)} \\
&= i_n''' + \rho_n^{(\delta)},
\end{aligned}$$

où

$$\rho_n^{(\delta)} = \frac{1}{\pi}\int_{\xi-\eta'}^{\xi+\eta'} f(u)\,r_n^{(\delta)}(u-\theta)\,du$$

Dans l'intervalle $(\xi-\eta', \xi+\eta')$

$$f(u) = c_0|u-\xi|^{-\alpha} + \varphi(u);$$

donc

$$|f(u)| < c_2|u-\xi|^{-\alpha},$$

puisque $\varphi(u)$ y est bornée. En résumé, on a

$$|\rho_n^{(\delta)}| < \frac{|\delta|\,c_2}{n+1}\int_{\xi-\eta'}^{\xi+\eta'} |u-\xi|^{-\alpha}\frac{du}{\sin^2\frac{u-\theta}{2}} < \frac{c_3}{n+1}$$

et l'on voit que $\lim_{n=\infty}\rho_n^{(\delta)} = 0$ pour chaque valeur de $\delta > -1$. Quant à i_n''',

on a

$$i_n''' = \frac{c_0}{\pi A_n^{(\delta)}} \int_{\xi-\eta'}^{\xi+\eta'} |u-\xi|^{-\alpha} \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)(u-\theta)-\frac{1+\delta}{2}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{u-\theta}{2}\right)^{1+\delta}} du$$

$$+ \frac{1}{\pi A_n^{(\delta)}} \int_{\xi-\eta'}^{\xi+\eta'} \frac{\varphi(u)\cos\left[\left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)(u+\theta)-\frac{1+\delta}{2}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{u-\theta}{2}\right)^{1+\delta}} du$$

$$= i_n + i_n^{(\text{IV})}.$$

La fonction $\varphi(u)\left(2\sin\frac{u-\theta}{2}\right)^{-(1+\delta)}$ est à variation bornée et, en appliquant à l'intégrale $i_n^{(\text{IV})}$ le second théorème de la moyenne, on obtient pour chaque $\delta > -1$

$$|i_n^{(\text{IV})}| < \frac{c_4}{\left(n+\frac{1+\delta}{2}\right) A_n^{(\delta)}} < \frac{c_5}{(n+1)^{1+\delta}} \qquad (\delta > -1);$$

donc on a $\lim\limits_{n=\infty} i_n^{(\text{IV})} = 0$ pour chaque valeur de $\delta > -1$. Quant à l'intégrale i_n, nous la transformons comme suit :

$$i_n = \frac{c_0}{\pi A_n^{(\delta)}} \int_0^{\eta'} \left\{ \frac{\cos\left[\Omega_n + \left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)x\right]}{\left[2\sin\left(\frac{\xi-\theta}{2}+\frac{x}{2}\right)\right]^{1+\delta}} + \frac{\cos\left[\Omega_n - \left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)x\right]}{\left[2\sin\left(\frac{\xi-\theta}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]^{1+\delta}} \right\} \frac{dx}{x^\alpha},$$

où

$$\Omega_n = \left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)(\xi-\theta) - \frac{1+\delta}{2}\pi.$$

Les fonctions $\left[2\sin\left(\frac{\xi-\theta}{2} \pm \frac{x}{2}\right)\right]^{-(1+\delta)}$ sont monotones et, en appliquant le second théorème de la moyenne, nous décomposons i_n en somme de quatre intégrales, toutes de la forme

$$j_n = \frac{k_n}{A_n^{(\delta)}} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} \cos\left[\Omega_n \pm \left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)x\right] \frac{dx}{x^\alpha} \qquad (\eta' \geqq \mu_n > \lambda_n \geqq 0),$$

où $|k_n| < c_6$. Or

$$i_n = \frac{k_n}{A_n^{(\delta)}}\left\{\cos\Omega_n\int_{\lambda_n}^{\mu_n}\cos\left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)x\frac{dx}{x^\alpha} \pm \sin\Omega_n\int_{\lambda_n}^{\mu_n}\sin\left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)x\frac{dx}{x^\alpha}\right\}$$

$$= \frac{k_n\left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)^{\alpha-1}}{A_n^{(\delta)}}\left\{\cos\Omega_n\int_{\left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)\lambda_n}^{\left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)\mu_n}\cos\omega\frac{d\omega}{\omega^\alpha} \pm \sin\Omega_n\int_{\left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)\lambda_n}^{\left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)\mu_n}\sin\omega\frac{d\omega}{\omega^\alpha}\right\}.$$

Les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{\cos\omega\, d\omega}{\omega^\alpha} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{\sin\omega\, d\omega}{\omega^\alpha} \qquad (\alpha < 1)$$

convergent et nous voyons que l'intégrale i_n oscille entre $-\infty$ et $+\infty$ quand $n \to \infty$, si $\delta < \alpha - 1$. Si $\delta = \alpha - 1$, i_n reste toujours bornée, mais oscille pour $n \to \infty$ sans tendre vers une limite déterminée, comme $\cos\Omega_n$ et $\sin\Omega_n$. Enfin, pour $\delta > \alpha - 1$, nous obtenons le résultat cherché et l'on a $\lim\limits_{n=\infty} i_n = 0$, si $\delta > \alpha - 1$. La même conclusion s'applique à l'intégrale I''_n et par conséquent on a pour $\delta > \alpha - 1$

$$\lim_{n=\infty} I''_n = 0 \qquad (\delta > \alpha - 1).$$

C'est la condition nécessaire de la sommabilité (C, δ) de la série trigonométrique et par conséquent elle n'est nulle part sommable $(C, \delta \leqq \alpha - 1)$. Les moyennes $f_n^{(\delta)}(\theta)$ oscillent comme I''_n entre les bornes finies pour $\delta = \alpha - 1$ et entre $-\infty$ et $+\infty$, si $\delta < \alpha - 1$.

Il est à observer que la série trigonométrique de la fonction à variation bornée $f(\theta)$ qui ne possède dans $(0, 2\pi)$ que des infinis logarithmiques, autour desquels elle a la forme

$$f(\theta) = c_0 \log|\theta - \xi| + \varphi(\theta),$$

$\varphi(\theta)$ étant à variation bornée, est sommable (C, δ) pour chaque valeur de $\delta > -1$ partout dans $(0, 2\pi)$, sauf le point $\theta = \xi$. On le prouve, en s'appuyant sur l'inégalité

$$\left|\int_{\lambda_n}^{\mu_n} \log|x|\cos\left[\Omega_n \pm \left(n+\frac{1+\delta}{2}\right)x\right]dx\right| < \frac{c_7\log(n+1)}{n+1},$$

ce qui entraîne, pour chaque $\delta > -1$, $\lim\limits_{n=\infty} I''_n = 0$.

Citons, comme un exemple, le développement trigonométrique de la fonction $\log \frac{\pi}{|\theta|}$ dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$:

$$\log \frac{\pi}{|\theta|} = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} \int_0^{n\pi} \frac{\sin u \, du}{u} \qquad (-\pi \leqq \theta \leqq \pi).$$

Ce développement est sommable $(C, \delta < 0)$ pour chaque $\delta > -1$, si $\theta \neq 0$, donc *a fortiori* converge, mais il ne converge nulle part absolument.

2. — La série de Laplace.

La sommabilité $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace

$$\text{II.} \qquad F(\theta, \varphi) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \iint_S F(\theta', \varphi') P_n(\cos\omega) \, d\sigma'$$

$$[\cos\omega = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi')]$$

est étudiée en détail (¹) et le but de ce Mémoire est l'étude de sa sommabilité (C, δ) pour $\delta \leqq \frac{1}{2}$. Le cas $\delta = 0$ (convergence) a été étudié par Poisson, Dirichlet, Bonnet, Dini, Heine, Darboux sous l'hypothèse que la fonction développée est à variation bornée partout sur la sphère S, sauf les voisinages des points isolés, où l'ordre de l'infinitude de la fonction $F(\theta, \varphi)$ doit être inférieur à trois demis, puisque la série de Laplace de $F(\theta, \varphi)$ diverge partout sur la sphère, si la fonction $F(\theta, \varphi)$ possède sur S des infinis d'ordre supérieur ou égal à trois demis (²). Mais la convergence de la série de Laplace en points diamétralement opposés sur la sphère S aux infinis de $F(\theta, \varphi)$ est restée jusqu'ici inétudiée.

(¹) L. Féjèr, *Mathem. Annalen*, t. 67, 1909, p. 76-109. — A. Haar, *Rendiconti di Palermo*, t. 32, 1911, p. 132-142. — S. Chapman, *Mathem. Annalen*, t. 72, 1912, p. 220-226; *Quarterly Journal*, t. 43, 1912, p. 1-50. — T. Gronwall, *Mathem. Annalen*, t. 74, 1913, p. 213-270; t. 75, 1914, p. 321-375. — E. Kogbetliantz, *Comptes rendus*, t. 169, 1919, p. 54.

(²) Darboux, *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. 19, 1874, p. 16.

En étudiant la sommabilité $\left(C, \delta < \frac{1}{2}\right)$ de la série II, nous supposons que $F(\theta, \varphi)$ est à variation bornée sur S, sauf les voisinages des points isolés M_k, où elle devient infinie d'ordres α_k. De plus, $F(\theta, \varphi)$ est supposée absolument intégrable sur S et, par conséquent, les valeurs des α_k peuvent dépasser trois demis, étant limitées par la condition $\alpha_k < 2$. Nous avons désigné tous les infinis de $F(\theta, \varphi)$ sur S, à l'exception possible du point $(\pi - \theta, \pi + \varphi)$, diamétralement opposé sur la sphère S au point $M(\theta, \varphi)$, où l'on étudie la série II, par $M_k(\theta_k, \varphi_k)$ $(k \geqq 1)$, en réservant la notation W pour ce point $(\pi - \theta, \pi + \varphi)$, si la fonction $F(\theta, \varphi)$ y devient infinie. L'ordre γ de l'infinitude de $F(\theta, \varphi)$ en W doit être inférieur à trois demis, puisque nous nous proposons d'étudier la sommabilité $\left(C, \delta \leqq \frac{1}{2}\right)$, et la condition $\delta > \gamma - 1$ est nécessaire pour la sommabilité $\left(C, \delta > -\frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace.

Nous n'avons pas besoin d'appliquer la définition la plus générale de la fonction de deux variables à variation bornée (¹), et il nous suffit de la définir avec M. Chapman (²) comme suit : $F(\theta, \varphi)$ est à variation bornée dans le voisinage du point (θ, φ), si elle est à variation bornée sur un certain arc de chaque demi-grand cercle de direction $\psi\,(0 \leqq \psi \leqq 2\pi)$, issu du point (θ, φ), la longueur de cet arc étant $l(\psi)$, pourvu que la borne inférieure des valeurs de la fonction $l(\psi)$ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ soit positive. On démontre (§ 5) que la série de Laplace d'une fonction $F(\theta, \varphi)$ absolument intégrable sur S est sommable $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ en un point $M(\theta, \varphi)$ de S, si $F(\theta, \varphi)$ est à variation bornée au voisinage de ce point M ; mais on peut aller plus loin et l'on démontre (§ 5) que tous les critères connus de la convergence des séries trigonométriques s'appliquent et deviennent les critères de la sommabilité $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace. Par exemple, la série II est sommable $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ avec la somme $F(\theta, \varphi)$, si $F(\theta', \varphi')$ satisfait sur la

(¹) *Cf.* par exemple DE LA VALLÉE POUSSIN, *L'intégrale de Lebesgue*.

(²) *Loc. cit.* (*Quarterly Journal*, t. 43, 1912, p. 1-50).

sphère à la condition de Lipschitz-Dini :

$$\lim_{\omega=0} \log\omega\,[F(\theta', \varphi') - F(\theta, \varphi)] = 0,$$

où ω dénote la distance sphérique des points (θ', φ') et (θ, φ).

On démontre aussi que la sommabilité $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ de la série II en un point M dépend de l'allure de $F(\theta, \varphi)$ au point W, diamétralement opposé sur S au point M, et que la condition nécessaire est $\gamma < \frac{3}{2}$, puisque la série de Laplace n'est pas sommable $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ en points diamétralement opposés sur la sphère S aux infinis de la fonction développée, si l'ordre γ de l'infinitude de la fonction est supérieur ou égal à trois demis, $\gamma \geqq \frac{3}{2}$.

La sommabilité $\left(C, \delta = \frac{1}{2}\right)$ ne dépend pas de l'allure de $F(\theta, \varphi)$ sur S, sauf le voisinage du point W, si $F(\theta, \varphi)$ est absolument intégrable sur S. Quant à la sommabilité (C, δ) pour $|\delta| < \frac{1}{2}$, elle dépend de l'allure de $F(\theta, \varphi)$ sur toute la sphère et l'on a le théorème suivant :

Théorème [1]. — *Soit la fonction* $F(\theta', \varphi')$, *qui est à variation bornée partout sur* S, *sauf les voisinages* $\varpi_k \leqq \varepsilon$ *des points isolés* M_k, *et qui pour* $\varpi_k \leqq \varepsilon$ *se présente sous la forme*

$$A_k \sin\left(\frac{\varpi_k}{2}\right)^{-\alpha_k} + \varphi_k(\theta', \varphi') \qquad (\alpha_k < 2;\ \varpi_k \leqq \varepsilon),$$

où ϖ_k *dénote la distance sphérique des points* (θ', φ') *et* M_k *et où* $\varphi_k(\theta', \varphi')$ *est à variation bornée. La série de Laplace de* $F(\theta', \varphi')$ *en tout point* M, *qui n'appartient pas aux points* M_k, *est sommable* $\left(C, \delta > -\frac{1}{2}\right)$, *si* δ *est supérieur à* $\gamma - 1$ *et à* $\alpha - \frac{3}{2}$ $\left(\delta > \gamma - 1 \text{ et } \alpha - \frac{3}{2}\right)$; *où* γ *est l'ordre de l'infinitude de* $F(\theta', \varphi')$ *au point* W, *diamétralement opposé sur* S *au*

---

[1] E. Kogbetliantz, *Comptes rendus*, t. 169, 1919, p. 322. Le cas particulier pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

point M, *et où* α *est le plus grand de tous les ordres* α_k *de l'infinitude de* $F(\theta', \varphi')$ *aux points* M_k; *enfin la série de Laplace n'est pas sommable* (C, δ) *en point* M, *si* $\delta \leqq \gamma - 1$ *ou* $\delta \leqq \alpha - \frac{3}{2}$.

On voit que la série de Laplace de $F(\theta', \varphi')$ qui est à variation bornée sur S, sauf les voisinages des points M_k et W, ne converge que si $\gamma < 1$ et que si tous les $\alpha_k < \frac{3}{2}$.

On sait qu'une série absolument convergente est sommable (C, δ) pour chaque valeur de $\delta > -1$; donc on peut déduire du théorème énoncé que *la série de Laplace ne peut pas converger absolument en un point* M, *diamétralement opposé sur* S *au point* W, *où* $F(\theta', \varphi')$ *devient infinie d'ordre* $\gamma > 0$, *et ne le peut nulle part sur* S, *si* $F(\theta', \varphi')$ *devient infinie d'ordre* $\alpha > \frac{1}{2}$ *en un seul point de la sphère* S.

Les questions de la sommabilité (C, δ) de la série de Legendre

$$\text{III.} \qquad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) \int_{-1}^{+1} f(u) P_n(u)\, du$$

en un point frontière, $x = \pm 1$, peuvent être traitées, en l'envisageant comme le cas particulier de la série II pour $F(\theta, \varphi) = f(\cos\theta) = f(x)$ et en appliquant à ce cas particulier les mêmes méthodes qu'au cas général.

On obtient alors (§ 7) les résultats suivants : la sommabilité $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ de la série III en un point frontière ne dépend que de l'allure de la fonction développée au voisinage de l'autre des points frontières, si l'on suppose l'intégrabilité absolue de la fonction dans $(-1, +1)$, et la condition $\gamma < \frac{3}{4}$ est nécessaire pour la sommabilité $\left(C, \delta = \frac{1}{2}\right)$ de la série III en un point frontière, où γ dénote l'ordre de l'infinitude de $f(x)$ en point frontière différent de celui où l'on envisage la sommabilité $\left(C, \delta = \frac{1}{2}\right)$ de la série III.

Au contraire, la sommabilité $\left(C, \delta < \frac{1}{2}\right)$ de la série III en un point frontière (soit, pour fixer les idées, en point $x = +1$) dépend aussi de l'allure de $f(x)$ à l'intérieur de $(-1, +1)$. En supposant $f(x)$ à variation bornée partout dans $(-1, +1)$, sauf les voisinages du point $x=-1$ et des points intérieurs $x=\xi_k$, où elle devient infinie d'ordres γ et β_k respectivement et où elle se présente sous la forme

$$A(1+x)^{-\gamma}+\varphi(x) \qquad (-1 \leqq x \leqq \varepsilon - 1)$$

et

$$A_k|x-\xi_k|^{-\beta_k}+\varphi_k(x) \quad \text{ou} \quad A_k \log|x-\xi_k|+\varphi_k(x) \qquad (|x-\xi_k| \leqq \varepsilon),$$

A, A_k étant constantes et $\varphi(x)$, $\varphi_k(x)$ étant à variation bornée, on a le théorème suivant :

THÉORÈME (1). — *La série de Legendre de $f(x)$ est sommable $\left(C, \delta > -\frac{1}{2}\right)$ en point $x=1$ avec la somme $f(1-0)$ pour chaque $\delta > -\frac{1}{2}$, si $\gamma \leqq \frac{1}{4}$ et si aux points intérieurs $x=\xi_k$ la fonction $f(x)$ n'a que des infinis logarithmiques; elle l'est toujours pour δ supérieur à $2\gamma-1$ et à $\beta-\frac{1}{2}$ $\left(\delta > 2\gamma - 1 \text{ et } \beta-\frac{1}{2}\right)$, où β désigne le plus grand de tous les exposants β_k; elle n'est pas sommable $\left(C, \delta \leqq 2\gamma - 1 \text{ et } \beta - \frac{1}{2}\right)$ et ne l'est non plus $\left(C, \delta \leqq -\frac{1}{2}\right)$, si à l'intérieur de $(-1, +1)$ $f(x)$ possède des infinis logarithmiques.*

En supposant $\gamma=0$, $\beta>0$ et de plus la fonction $f(x)$ à variation bornée aux voisinages des deux points frontières $x=1$ et $x=-1$, M. Hobson a démontré (2) que la série de Legendre converge en un point frontière, si $\beta < \frac{1}{2}$, et diverge, si $\beta \geqq \frac{1}{2}$. On voit maintenant que dans ce cas, quelle que soit la valeur de $\beta < 1$, la série de Legendre est sommable $\left(C, \delta > \beta - \frac{1}{2}\right)$ et n'est pas sommable $\left(C, \delta \leqq \beta - \frac{1}{2}\right)$ en un point frontière, ce qui contient le résultat de M. Hobson. M. Chapman a poussé (3) l'étude de ce cas particulier $\gamma=0$ plus

(1) E. KOGBETLIANTZ, *Comptes rendus*, t. 169, 1919, p. 423. Le cas particulier pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

(2) *Proceedings of the Lond. Math. Society*, 2e série, t. 7, 1909, p. 39.

(3) *Mathem. Annalen*, t. 72, 1912, p. 224-226, § 5.

loin : il a établi que, pour $1 > \beta \geqq \frac{1}{2}$, la série III en un point frontière est sommable $\left(C, \delta > \beta - \frac{1}{2}\right)$, mais il a laissé inétudié le cas, où $\beta < \frac{1}{2}$, et même pour $\beta \geqq \frac{1}{2}$ il n'a pas démontré que la série III n'est pas alors sommable $\left(C, \delta \leqq \beta - \frac{1}{2}\right)$.

Notre théorème fait voir que la série de Legendre ne converge en un point frontière que si $\gamma < \frac{1}{2}$ et que si tous les β_k sont inférieurs à un demi, $\beta_k < \frac{1}{2}$. Par exemple, le développement

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}} \sim 1 + P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_n(x) + \ldots$$

diverge pour $x = -1$, puisque dans ce cas $\gamma = \frac{1}{2}$. On voit que pour $x = -1$ ce développement se réduit à la série divergente

$$\frac{1}{2} \sim 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots$$

qui n'est sommable (C, δ) avec la somme $\frac{1}{2}$ que pour $\delta > 0$ conformément à notre théorème $\left(\beta = 0,\ \gamma = \frac{1}{2},\ 2\gamma - 1 = 0\right)$.

3. — La formule approximative pour $s_n^{(\delta)}(\omega)$.

La $n^{\text{ième}}$ moyenne arithmétique d'ordre δ de la série II, $F_n^{(\delta)}(\theta, \varphi)$, s'exprime par l'intégrale double suivante :

$$F_n^{(\delta)}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\int_S F(\theta', \varphi')\, s_n^{(\delta)}(\omega)\, d\sigma',$$

où $s_n^{(\delta)}(\omega)$ dénote la moyenne d'ordre δ de la série

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}P_1(\cos\omega) + \frac{5}{2}P_2(\cos\omega) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2}\right)P_n(\cos\omega) + \ldots.$$

Or, en posant

$$\sigma_n^{(\delta)}(\omega) = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)}\left(m + \frac{1}{2}\right)P_m(\cos\omega),$$

où comme toujours $A_n^{(\delta)}$ est le coefficient de z^n dans la série de Maclaurin de la fonction $\frac{1}{(1-z)^{1+\delta}}$, on trouve, eu égard à la définition de la moyenne arithmétique d'ordre δ,

$$s_n^{(\delta)}(\omega) = \frac{\sigma_n^{(\delta)}(\omega)}{A_n^{(\delta)}},$$

et, pour avoir la formule approximative pour $s_n^{(\delta)}(\omega)$, il suffit de la déduire pour $\sigma_n^{(\delta)}(\omega)$. On a

$$\frac{1}{\sqrt{1-2z\cos\omega+z^2}} = \sum_0^\infty z^n\,P_n(\cos\omega),$$

d'où

$$\sum_0^\infty z^m\,\sigma_m^{(\delta)}(\omega) = \frac{1}{2}\,\frac{1+z}{(1-z)^\delta(1-2z\cos\omega+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous allons appliquer la méthode de Stieltjes : on a

$$\sum_{m=0}^\infty z^{n-m-1}\,\sigma_m^{(\delta)}(\omega) = \frac{1}{2}\,\frac{z^{n+\delta+1}(1+z)}{(z-1)^\delta(1-2z\cos\omega+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \psi(z),$$

et par conséquent

$$\sigma_n^{(\delta)}(\omega) = \frac{1}{4\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{(1+z)\,z^{n+\delta+1}\,dz}{(z-1)^\delta(1-2z\cos\omega+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\psi(z)\,dz.$$

Le chemin d'intégration C_ε entoure tous les trois points singuliers $z_1 = e^{-i\omega}$, $z_2 = 1$ et $z_3 = e^{i\omega}$, et se réduit à trois lacets consécutifs L_1, L_2 et L_3, ayant leur entrée commune à l'origine et pour centres de leurs cercles les points critiques z_1, z_2 et z_3.

L'intégration se commence au point $z = -\varepsilon$ sur l'axe réel négatif et les branches des fonctions multiformes

$$(z-1)^\delta \quad \text{et} \quad (1-2z\cos\omega+z^2)^{\frac{3}{2}}$$

sont définies par la condition que la fonction sous le signe d'intégrale devient réelle au point $z = 1+\varepsilon$, c'est-à-dire après le parcours d'un demi de C_ε. On suppose $0 < \omega < \pi$. Posons $T = 1-2z\cos\omega+z^2$ et envisageons l'identité

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^{n+\delta+2}}{(z-1)^{\delta+1}\sqrt{\mathrm{T}}}\right\}+\frac{1}{2}\,\frac{(1+z)\,z^{n+\delta+1}}{(z-1)^{\delta}\,\mathrm{T}^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{z^{n+\delta+1}}{(z-1)^{\delta+1}\sqrt{\mathrm{T}}}-(\delta+1)\frac{z^{n+\delta+1}}{(z-1)^{\delta+2}\sqrt{\mathrm{T}}}.$$

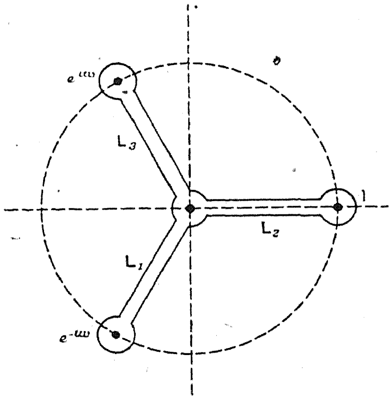

Fig. 3

En l'intégrant le long du lacet L_1, on obtient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{L}_1}\psi(z)\,dz=-\frac{2n+1}{2\pi i}\int_0^{e^{-i\omega}}\frac{z^{n+\delta+1}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}\sqrt{\mathrm{T}}}+\frac{\delta+1}{\pi i}\int_0^{e^{-i\omega}}\frac{z^{n+\delta+1}\,dz}{(z-1)^{\delta+2}\sqrt{\mathrm{T}}}.$$

On suppose $\delta \leqq \frac{1}{2}$, par conséquent on a tout simplement

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{L}_2}\psi(z)\,dz=\frac{\sin\delta\pi}{2\pi}\int_0^1\frac{(1+u)\,u^{n+\delta+1}\,du}{(1-u)^{\delta}(1-2u\cos\omega+u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Enfin, le lacet L_3 nous fournit la contribution

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{L}_3}\psi(z)\,dz=\frac{2n+1}{2\pi i}\int_0^{e^{i\omega}}\frac{z^{n+\delta+1}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}\sqrt{\mathrm{T}}}-\frac{\delta+1}{\pi i}\int_0^{e^{i\omega}}\frac{z^{n+\delta+1}\,dz}{(z-1)^{\delta+2}\sqrt{\mathrm{T}}}$$

et l'on obtient la formule

$$(3)\quad \sigma_n^{(\delta)}(\omega)=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{R}\left\{\frac{1}{i}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^{e^{i\omega}}\frac{z^{n+\delta+1}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}\sqrt{\mathrm{T}}}-(\delta+1)\int_0^{e^{i\omega}}\frac{z^{n+\delta+1}\,dz}{(z-1)^{\delta+2}\sqrt{\mathrm{T}}}\right]\right\}$$
$$+\frac{\sin\delta\pi}{2\pi}\int_0^1\frac{(1+u)\,u^{n+\delta+1}\,du}{(1-u)^{\delta}(1-2u\cos\omega+u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, vu que

$$(1-2u\cos\omega+u^2)^{\frac{3}{2}}=\left\{\left[(1-u)\cos\frac{\omega}{2}\right]^2+\left[(1+u)\sin\frac{\omega}{2}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}\geqq\sin^3\frac{\omega}{2}$$

et

$$\Gamma(\delta)\,\Gamma(1-\delta)=\frac{\pi}{\sin\delta\pi},$$

on a

$$\frac{|\sin\delta\pi|}{2\pi}\int_0^1\frac{(1+u)\,u^{n+\delta+1}\,du}{(1-u)^{\delta}\,(1-2u\cos\omega+u^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4}$$
$$\leqq\frac{|\sin\delta\pi|}{\pi\sin^3\frac{\omega}{2}}\int_0^1(1-u)^{-\delta}\,u^{n+\delta}\,du=\frac{|\delta|\,A_n^{(\delta)}}{(n+1)\sin^3\frac{\omega}{2}}.$$

Dans les intégrales du premier terme du second membre de (3), nous employons la substitution $z=e^{i\omega}(1-u)$, ce qui nous donne

$$\frac{1}{i}\int_0^{e^{i\omega}}\frac{z^{n+\delta+1}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}\sqrt{T}}$$
$$=\frac{e^{i\left[\left(n+1+\frac{\delta}{2}\right)\omega-\frac{2\delta+1}{4}\pi\right]}}{i\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{2\sin\omega}}\int_0^1\frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+\delta+1}\,du}{\sqrt{1-u\,\varphi(\omega)}\left[1-u\,\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{\delta+1}},$$

où

$$2\sin\omega\,\varphi(\omega)=e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}.$$

On a, pour $0\leqq u\leqq 1$,

$$|1-u\,\varphi(\omega)|=\left[\left(1-\frac{u}{2}\right)^2+\frac{u^2}{4}\cot^2\omega\right]^{\frac{1}{2}}\geqq 1-\frac{u}{2}\geqq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};$$

donc

$$\frac{2}{\pi}(\delta+1)\left|R\,\frac{1}{i}\int_0^{e^{i\omega}}\frac{z^{n+\delta+1}\,dz}{(z-1)^{\delta+2}\sqrt{T}}\right| \tag{5}$$
$$\leqq\frac{2(\delta+1)}{\pi\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+2}\sqrt{2\sin\omega}}\int_0^1\frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+\delta+1}\,du}{\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\delta+2}}$$
$$\leqq\frac{2}{\pi}(\delta+1)\frac{1}{\sqrt{\sin\omega}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}=\frac{2(1+\delta)A_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{\sin\omega}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+2}}.$$

Posons ensuite

$$\Psi(u)=\sqrt{1-u\,\varphi(\omega)}\left[1-u\,\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{\delta+1}\geqq 2^{-\left(\delta+\frac{3}{2}\right)}.$$

On a

$$\left|\frac{1}{\Psi(u)}-1\right|=\left|\int_0^u\frac{1}{\Psi(u)}\right|=\left|\int_0^u\frac{\Psi'(u)\,du}{[\Psi(u)]^2}\right|\leqq 2^{\delta+\frac{3}{2}}\int_0^u\left|\frac{\Psi'(u)}{\Psi(u)}\right|du.$$

Or

$$\left|\frac{\Psi'(u)}{\Psi(u)}\right|=\left|\frac{1}{2}\,\frac{\varphi(\omega)}{1-u\,\varphi(\omega)}+\frac{(1+\delta)\,\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1-u\,\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|\leqq\frac{1}{2\sin\omega}+\frac{1+\delta}{\sin\frac{\omega}{2}}\leqq\frac{7}{2\sin\omega},$$

donc

$$\left|\frac{1}{\Psi(u)}-1\right|\leqq\frac{14u}{\sin\omega}\qquad\left(\delta\leqq\frac{1}{2}\right)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\Bigg|\,\mathrm{R}\left\{\frac{2n+1}{2i}\int_0^{e^{i\omega}}\frac{z^{n+\delta+1}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}\sqrt{\mathrm{T}}}\right\}&\\ -\frac{\sin\left[\left(n+1+\frac{\delta}{2}\right)\omega-\frac{2\delta+1}{4}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{2\sin\omega}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+\delta+1}\,du\,\Bigg|&\\ <\frac{(2n+1)\,14}{\pi\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{2\sin\omega}}\,\frac{1}{\sin\omega}\int_0^1 u^{+\frac{1}{2}}(1-u)^{n+\delta+1}\,du.&\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}0\leqq\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}-\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+\delta+1}\,du&\\ \leqq\left(\frac{3}{2}+\delta\right)\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)}.&\end{aligned}$$

et

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{n+\delta+1}\,du<\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)};$$

donc

$$(6)\quad \left| \frac{2}{\pi} R \left\{ \frac{2n+1}{2i} \int_0^{e^{i\omega}} \frac{z^{n+\delta+1}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}\sqrt{T}} \right\} - \frac{A_n^{(\frac{1}{2})} \sin\left[\left(n+1+\frac{\delta}{2}\right)\omega - \frac{2\delta+1}{4}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{2\sin\omega}} \right|$$
$$< \frac{c_8}{\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}(\sin\omega)^{\frac{3}{2}}\sqrt{n+1}}.$$

En additionnant les résultats (4), (5) et (6), on obtient la formule cherchée

$$(7)\quad s_n^{(\delta)}(\omega) = \frac{\sigma_n^{(\delta)}(\omega)}{A_n^{(\delta)}} = \frac{A_n^{(\frac{1}{2})}}{A_n^{(\delta)}} \frac{\sin\left[\left(n+1+\frac{\delta}{2}\right)\omega - \frac{2\delta+1}{4}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{2\sin\omega}} + \rho_n^{(\delta)}(\omega),$$

où

$$|\rho_n^{(\delta)}(\omega)| < \frac{c_9}{(n+1)^{\frac{1}{2}+\delta}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}(\sin\omega)^{\frac{3}{2}}} + \frac{|\delta|}{(n+1)\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (0<\omega<\pi).$$

Supposons maintenant $\omega \geqq \frac{\pi}{n+1}$. Alors on a, pour $\delta \leqq \frac{1}{2}$,

$$\left[(n+1)\sin\frac{\omega}{2}\right]^{\frac{1}{2}-\delta} \geqq \left[(n+1)\frac{\omega}{\pi}\right]^{\frac{1}{2}-\delta} \geqq 1,$$

et par conséquent

$$|\rho_n^{(\delta)}(\omega)| < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}+\delta}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}} \left\{ \frac{c_9}{(\sin\omega)^{\frac{3}{2}}} + \frac{|\delta|}{\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Donc on obtient, pour $\omega \geqq \frac{\pi}{n+1}$,

$$(8)\qquad |\rho_n^{(\delta)}(\omega)| < \frac{c_{10}}{(n+1)^{\frac{1}{2}+\delta}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{1+\delta}(\sin\omega)^{\frac{3}{2}}} \qquad \left(\omega \geqq \frac{\pi}{n+1}\right).$$

Le même raisonnement nous montre qu'on a aussi, pour $\omega \geqq \frac{\pi}{n+1}$,

$$(9)\qquad |\sigma_n^{(\delta)}(\omega)| < \frac{c_{11}\sqrt{n+1}}{\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{\sin\omega}} \qquad \left(\omega \geqq \frac{\pi}{n+1}\right).$$

Eu égard à la relation

$$A_n^{(k)} = \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1)} = \frac{(n+1)^k}{\Gamma(k+1)} \{1+\varepsilon_n\},$$

où $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, on déduit d'abord de l'inégalité (4), pour $\omega \geqq \dfrac{\pi}{n+1}$,

$$\frac{|\sin\delta\pi|}{\pi}\int_0^1 \frac{(1+u)\,u^{n+\delta+1}\,du}{(1-u)^\delta(1-2u\cos\omega+u^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$< \frac{c_{12}\sqrt{n+1}}{\left[(n+1)\sin\dfrac{\omega}{2}\right]^{\frac{3}{2}-\delta}\left(\sin\dfrac{\omega}{2}\right)^{\frac{3}{2}+\delta}} < \frac{c_{13}\sqrt{n+1}}{\left(\sin\dfrac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{\sin\omega}},$$

puis

$$\frac{2}{\pi}\left|R\,\frac{2n+1}{2i}\int_0^{e^{i\omega}} \frac{z^{n+\delta+1}\,dz}{(z-1)^{\delta+1}\sqrt{T}}\right|$$
$$< \frac{2n+1}{\pi\left(2\sin\dfrac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{2\sin\omega}}\int_0^1 \frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n+\delta+1}\,du}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\delta+1}}$$
$$< \frac{c_{14}(2n+1)A_n^{(-\frac{1}{2})}}{\left(\sin\dfrac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{\sin\omega}} < \frac{c_{15}\sqrt{n+1}}{\left(\sin\dfrac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{\sin\omega}},$$

et enfin, grâce à (5),

$$\left|\frac{2}{\pi}R\,\frac{\delta+1}{i}\int_0^{e^{i\omega}} \frac{z^{n+\delta+1}\,dz}{(z-1)^{\delta+2}\sqrt{T}}\right| < \frac{c_{16}\sqrt{n+1}}{\left[(n+1)\sin\dfrac{\omega}{2}\right]\left(\sin\dfrac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{\sin\omega}}$$
$$\leqq \frac{c_{16}\sqrt{n+1}}{\left(\sin\dfrac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{\sin\omega}},$$

ce qui nous fournit, à l'aide de (3), l'inégalité (9).

On a par conséquent

$$|s_n^{(\delta)}(\omega)| < \frac{c_{17}(n+1)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\left(\sin\dfrac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{\sin\omega}} \qquad \left(\pi \geqq \omega \geqq \frac{\pi}{n+1}\right).$$

Cette inégalité a lieu aussi pour $\omega = \pi$, puisque alors son premier membre reste fini, tandis que le second membre devient infiniment grand. Pour l'affranchir de la restriction $\omega \geqq \frac{\pi}{n+1}$, nous envisagerons l'inégalité bien connue $|P_n(\cos\omega)| \leqq 1$, d'où il résulte

$$|s_n^{(\delta)}(\omega)| \leqq \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \sum_{m=0}^{n} \left(m+\frac{1}{2}\right) A_{n-m}^{(\delta)} |P_m(\cos\omega)| < \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \sum_{0}^{n} A_m^{(1)} A_{n-m}^{(\delta)} = \frac{A_n^{(\delta+2)}}{A_n^{(\delta)}};$$

donc

$$|s_n^{(\delta)}(\omega)| < c_{18}(n+1)^2 \qquad (0 \leqq \omega \leqq \pi,\ \delta > -1).$$

Pour $\omega \leqq \frac{\pi}{n+1}$, on a

$$\left[(n+1)\sin\frac{\omega}{2}\right]^{\frac{3}{2}+\delta} \leqq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}+\delta},$$

d'où

$$|s_n^{(\delta)}(\omega)| < \frac{c_{18}(n+1)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{3}{2}+\delta}} \left[(n+1)\sin\frac{\omega}{2}\right]^{\frac{3}{2}+\delta} \leqq \frac{c_{19}(n+1)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{\sin\omega}}.$$

Par conséquent, nous avons prouvé l'inégalité fondamentale

$$(10) \qquad |s_n^{(\delta)}(\omega)| < \frac{c_{20}(n+1)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{\sin\omega}} \qquad \left(0 \leqq \omega \leqq \pi;\ \delta \leqq \frac{1}{2}\right).$$

4. — Sur la série

$$(11) \qquad \frac{1}{2}\int_{\omega}^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi + \frac{3}{2}\int_{\omega}^{\pi} P_1(\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi + \ldots + \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{\omega}^{\pi} P_n(\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi + \ldots.$$

En nous appuyant sur la formule approximative (7), nous allons étudier la sommabilité (C, δ) de la série (11) et démontrer les deux propositions suivantes :

Lemme I. — *La série* (11) *est sommable* $\left(C, \delta > -\frac{1}{2}\right)$ *avec la somme zéro pour* $\omega > 0$ *et même uniformément pour* $\pi \geqq \omega \geqq \varepsilon$.

LEMME II. — *Ses moyennes arithmétiques*, $S_n^{(\delta)}(\omega)$, *sont bornées dans leur ensemble pour* $0 \leqq \omega \leqq \pi$ *et* $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, *pourvu que l'on ait* $\delta > -\frac{1}{2}$:

$$|S_n^{(\delta)}(\omega)| < c_{21} \quad \left(0 \leqq \omega \leqq \pi,\ \delta > -\frac{1}{2};\ n = 0, 1, 2, \ldots, \infty\right),$$

où la constante c_{21} *ne dépend que de* δ.

En posant $\cos\omega = x$ et $\cos\varphi = u$, on transcrit (11) ainsi :

$$\sum_0^\infty \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{x} P_n(u)\, du \qquad (x < 1)$$

et l'on forme la fonction

$$\sum_{m=0}^\infty z^m \left(m + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{x} P_m(u)\, du$$
$$= \int_{-1}^{x} \left\{ \sum_0^\infty \left(m + \frac{1}{2}\right) z^m P_m(u) \right\} du = \frac{1 - z^2}{2} \int_{-1}^{x} \frac{du}{(1 - 2uz + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1 - z^2}{(1 + z)^3} \int_{-1}^{x} \left[1 - \frac{2z(1+u)}{(1+z)^2}\right]^{-\frac{3}{2}} du = \frac{(1-z)(1+x)}{2(1+z)^2} F\left(1, \frac{3}{2}, 2, \tau\right),$$

où F est le signe de la fonction hypergéométrique et $\tau = \frac{2z(1+x)}{(1+z)^2}$. Par conséquent, la fonction génératrice $\Phi(z)$ de la suite des quantités $\sigma_n^{(\delta)}(x)$, telles que

$$A_n^{(\delta)} S_n^{(\delta)}(\omega) = \sigma_n^{(\delta)}(x) \qquad (x = \cos\omega)$$

n'est que

$$\Phi(z) = \frac{(1+x) F\left(1, \frac{3}{2}, 2, \tau\right)}{2(1-z)^\delta (1+z)^2} \qquad \left[\tau = \frac{2z(1+x)}{(1+z)^2}\right].$$

Or

$$F\left(1, \frac{3}{2}, 2, \tau\right) = \frac{1+z}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} F\left(1, \frac{1}{2}, 2, \tau\right)$$

et de l'autre côté

$$F\left(1, \frac{3}{2}, 2, \tau\right) = \frac{(1+z)^4}{(1 - 2xz + z^2)^2} F\left(1, \frac{1}{2}, 2, \frac{\tau}{\tau - 1}\right).$$

Eu égard à ce que $\tau = 1$ pour $z = e^{\pm i\omega}$ et $\tau = \infty$ pour $z = -1$, on s'aperçoit que $\Phi(-1) = \frac{1}{2^{1+\delta}} \cdot \frac{1+x}{1-x}$, et que $\Phi(z)$ n'a que les points $z_1 = e^{-i\omega}$, $z_2 = 1$ et $z_3 = e^{i\omega}$ pour ses points singuliers. En appliquant la méthode de Darboux, nous développons en série la fonction

$$\overline{\Phi}(z) = \frac{1}{4}\cos^2\frac{\omega}{2} F\left(1, \frac{3}{2}, 2, \cos^2\frac{\omega}{2}\right)\frac{1}{(1-z)^\delta}$$
$$+ \frac{2\sqrt{\cos\frac{\omega}{2}}}{\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}}\left\{\frac{e^{i\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{\delta}{2}\right)\pi - \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\omega\right]}}{\sqrt{1-z e^{-i\omega}}} + \frac{e^{-i\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{\delta}{2}\right)\pi - \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\omega\right]}}{\sqrt{1-z e^{i\omega}}}\right\}$$

et le coefficient de z^n nous fournira le premier terme de la formule approximative pour $A_n^{(\delta)} S_n^{(\delta)}(\omega) = \sigma_n^{(\delta)}(x)$. Or on a

$$\overline{\Phi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left\{\frac{A_n^{(\delta-1)}}{4}\cos^2\frac{\omega}{2} F\left(1, \frac{3}{2}, 2, \cos^2\frac{\omega}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2A_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\cos\frac{\omega}{2}}}{\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}}\cos\left[\left(n+1+\frac{\delta}{2}\right)\omega - \left(\frac{3}{4}+\frac{\delta}{2}\right)\pi\right]\right\},$$

d'où la formule approximative cherchée

$$S_n^{(\delta)}(\omega) = \frac{\sigma_n^{(\delta)}(x)}{A_n^{(\delta)}} = \frac{A_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}}{A_n^{(\delta)}}\,\frac{2\sqrt{\cos\frac{\omega}{2}}}{\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}}$$
$$\times\left\{\cos\left[\left(n+1+\frac{\delta}{2}\right)\omega - \left(\frac{3}{4}+\frac{\delta}{2}\right)\pi\right] + \frac{\varepsilon_n(\omega)}{(n+1)\sin\frac{\omega}{2}}\right\}$$
$$+ \frac{\delta\cos^2\frac{\omega}{2}}{4(n+1)} F\left(1, \frac{3}{2}, 2, \cos^2\frac{\omega}{2}\right)\left\{1 + \frac{\eta_n}{n+1}\right\},$$

où $|\eta_n| < c_{22}$ et $|\varepsilon_n(\omega)| < c_{23}$ pour $0 \leqq \omega \leqq \pi$, puisqu'on sait que l'erreur commise dans l'application de la formule approximative de

Darboux est toujours plus petite que le premier terme rejeté. Cette formule démontre la première de nos deux propositions : $\lim_{n=\infty} S_n^{(\delta)}(\omega) = 0$ pour $\omega > 0$, si $\delta > -\frac{1}{2}$, et la sommabilité est uniforme pour $\varepsilon \leqq \omega \leqq \pi$. On établit la seconde proposition à l'aide de la formule approximative (7). On a

$$S_n^{(\delta)}(\omega) = \int_\omega^\pi s_n^{(\delta)}(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi = \int_\omega^\varepsilon + \int_\varepsilon^\pi = \int_\omega^\varepsilon s_n^{(\delta)}(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi + S_n^{(\delta)}(\varepsilon).$$

En vertu de la proposition I on a, pour $\delta > -\frac{1}{2}$,

$$\lim_{n=\infty} S_n^{(\delta)}(\varepsilon) = 0 \qquad \left(\delta > -\frac{1}{2}\right),$$

et aussi

$$\int_\omega^\varepsilon s_n^{(\delta)}(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi = \int_\omega^{\frac{\pi}{n+1}} + \int_{\frac{\pi}{n+1}}^\varepsilon = i'_n + i''_n.$$

L'inégalité $|s_n^{(\delta)}(\omega)| < c_{18}(n+1)^2$ nous fournit

$$|i'_n| < c_{18}(n+1)^2 \int_\omega^{\frac{\pi}{n+1}} \varphi\, d\varphi < \frac{c_{18}\,\pi^2}{2} < c_{24}.$$

Quant à l'intégrale i''_n, elle demande l'application de la formule (7) avec l'inégalité (8) :

$$i''_n = \frac{A_n^{(\frac{1}{2})}}{A_n^{(\delta)}} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^\varepsilon \frac{\sin\left[\left(n+1+\frac{\delta}{2}\right)\omega - \frac{2\delta+1}{4}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{2\sin\omega}} \sin\omega\, d\omega + \int_{\frac{\pi}{n+1}}^\varepsilon \rho_n^{(\delta)}(\omega)\sin\omega\, d\omega,$$

où

$$\left|\int_{\frac{\pi}{n+1}}^\varepsilon \rho_n^{(\delta)}(\omega)\sin\omega\, d\omega\right| < \frac{c_{10}}{(n+1)^{\frac{1}{2}+\delta}} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^\varepsilon \frac{d\omega}{\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{\sin\omega}} < \frac{c_{25}}{(n+1)^{\frac{1}{2}+\delta}} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^\infty \frac{d\omega}{\omega^{\frac{3}{2}+\delta}} < c_{26}.$$

Donc on a

$$S_n^{(\delta)}(\omega) = \frac{A_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{A_n^{(\delta)}\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\varepsilon} \frac{\sin\left[\left(n+1+\frac{\delta}{2}\right)\omega - \frac{2\delta+1}{4}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+\frac{1}{2}}} \sqrt{\cos\frac{\omega}{2}}\, d\omega + \eta_n^{(\delta)}(\omega),$$

où $|\eta_n^{(\delta)}(\omega)| < c_{27}$.

La fonction $\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}+\delta\right)} \sqrt{\cos\frac{\omega}{2}}$ est monotone et décroissante pour $\delta > -\frac{1}{2}$ et l'on peut appliquer à l'intégrale du second membre le second théorème de la moyenne :

$$S_n^{(\delta)}(\omega) = \frac{A_n^{\left(\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\cos\frac{\pi}{2n+2}}}{A_n^{(\delta)}\sqrt{2}\left(2\sin\frac{\pi}{2n+2}\right)^{\delta+\frac{1}{2}}} \times \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\xi_n} \sin\left[\left(n+1+\frac{\delta}{2}\right)\omega - \frac{2\delta+1}{4}\pi\right] d\omega + \eta_n^{(\delta)}(\omega),$$

où

$$\frac{\pi}{n+1} \leqq \xi_n \leqq \varepsilon.$$

Or

$$\frac{A_n^{\left(\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\cos\frac{\pi}{2n+2}}}{A_n^{(\delta)}\sqrt{2}\left(2\sin\frac{\pi}{2n+2}\right)^{\delta+\frac{1}{2}}} \times \left| \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\xi_n} \sin\left[\left(n+1+\frac{\delta}{2}\right)\omega - \frac{2\delta+1}{4}\pi\right] d\omega \right| < \frac{c_{28}\sqrt{n+1}\,(n+1)^{\delta+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{\delta}\left(n+1+\frac{\delta}{2}\right)} < c_{29}$$

et la seconde proposition se trouve établie. On s'aperçoit facilement que la série (11) n'est pas sommable $\left(C, \delta \leqq -\frac{1}{2}\right)$.

5. — La sommabilité $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace.

On sait ([1]) qu'il y a des fonctions continues partout sur la sphère S,

([1]) H. Gronwall, *Math. Annalen*, t. 75, 1914, p. 321-375.

dont les séries de Laplace divergent néanmoins $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ en des points isolés de S, c'est-à-dire n'y sont pas sommables $\left(C, \frac{1}{2}\right)$. Dans ce paragraphe, nous allons d'abord démontrer le

THÉORÈME. — *La série de Laplace d'une fonction* $F(\theta, \varphi)$ *absolument intégrable sur* S *est sommable* $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ *en un point* (θ, φ) *de* S *et a pour somme la valeur moyenne de* $F(\theta, \varphi)$ *en ce point, si la fonction développée* $F(\theta, \varphi)$ *est à variation bornée au voisinage de ce point* (θ, φ) *et si l'ordre* γ *de l'infinitude de* $F(\theta, \varphi)$ *au point* $(\pi - \theta; \pi + \varphi)$, *diamétralement opposé sur* S *au point* (θ, φ), *est plus petit que trois demis :* $\gamma < \frac{3}{2}$.

Envisageons la fonction

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi \sin\omega} \int_{C_\omega} F(\theta', \varphi')\, ds' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta', \varphi')\, d\psi,$$

où l'intégrale curviligne est prise suivant le cercle C_ω de centre (θ, φ) et de rayon sphérique ω, et où ds' est l'élément d'arc de ce cercle. En transportant le pôle de S en (θ, φ), nous désignons les nouvelles coordonnées par ω et ψ. On voit que la moyenne arithmétique d'ordre δ $[F_n^{(\delta)}(\theta, \varphi)]$ de la série de Laplace, formée pour le point (θ, φ), s'exprime ainsi :

$$F_n^{(\delta)}(\theta, \varphi) = F_n^{(\delta)} = \int_0^{\pi} f(\omega)\, s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega\, d\omega,$$

et il est important d'étudier les propriétés de la fonction $f(\omega)$, étant données celles de $F(\theta, \varphi)$.

On s'aperçoit d'abord que l'hypothèse de l'intégrabilité absolue de $F(\theta, \varphi)$ sur S entraîne l'intégrabilité absolue du produit $f(\omega)\sin\omega$ dans l'intervalle $(0, \pi)$:

$$\int_0^{\pi} |f(\omega)| \sin\omega\, d\omega \leqq \frac{1}{2\pi} \int\int_S |F(\theta', \varphi')|\, d\sigma'.$$

Ensuite, $f(\omega)$ est à variation bornée dans l'intervalle $0 \leqq \omega \leqq \varepsilon$ pour ε suffisamment petit, puisque $F(\theta', \varphi')$ est supposée à variation bornée dans le voisinage du point (θ, φ). Enfin $F(\theta', \varphi')$ se présentant pour

$\pi - \varepsilon \leqq \omega \leqq \pi$ sous la forme

$$F(\theta', \varphi') = (\sin\omega)^{-\gamma} H(\theta', \varphi'),$$

où la fonction $H(\theta', \varphi')$ est bornée, $f(\omega)$ devient aussi infinie d'ordre γ au point $\omega = \pi$:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{H(\theta', \varphi')\,d\psi}{(\sin\omega)^\gamma} = \frac{\varphi(\omega)}{(\sin\omega)^\gamma} \qquad (\pi - \varepsilon \leqq \omega \leqq \pi),$$

où $\varphi(\pi) \neq 0$ et $\varphi(\omega)$ est bornée dans $(\pi - \varepsilon, \pi)$.

Ainsi $f(\omega)$ est à variation bornée dans $(0, \varepsilon)$, devient infinie d'ordre γ au point $\omega = \pi$ et le produit $|f(\omega)|\sin\omega$ est intégrable dans $(0, \pi)$. On a pour $\delta = \frac{1}{2}$

$$F_n^{(\frac{1}{2})} = \int_0^\pi f(\omega)\, s_n^{(\frac{1}{2})}(\omega)\sin\omega\, d\omega = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} + \int_{\pi-\varepsilon}^\pi = I'_n + I''_n + I'''_n.$$

La fonction $f(\omega)$ étant à variation bornée dans $(0, \varepsilon)$, $f(+0)$ existe et n'est que la valeur moyenne de $F(\theta', \varphi')$ au point (θ, φ) :

$$f(+0) = \lim_{\omega=0} \frac{1}{2\pi\sin\omega}\int_{C_\omega} F(\theta', \varphi')\, ds'.$$

Il est facile de démontrer que l'on a, pour ε suffisamment petit et n suffisamment grand, l'inégalité

$$(12) \qquad |I'_n - f(+0)| < \frac{1}{2}\eta \qquad [\varepsilon \leqq \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta),\ n \geqq N = N(\eta)],$$

où η est aussi petit qu'on veut :

$$I'_n = \underbrace{f(+0)\int_0^\varepsilon s_n^{(\frac{1}{2})}(\omega)\sin\omega\, d\omega}_{=j_n^{(1)}} + \underbrace{\int_0^\varepsilon [f(\omega) - f(+0)]\, s_n^{(\frac{1}{2})}(\omega)\sin\omega\, d\omega}_{+j_n^{(2)}}$$

Or

$$\lim_{n=\infty} S_n^{(\frac{1}{2})}(\varepsilon) = \lim_{n=\infty}\int_\varepsilon^\pi s_n^{(\frac{1}{2})}(\omega)\sin\omega\, d\omega = 0;$$

donc

$$\lim_{n=\infty} j_n^{(1)} = f(+0)\lim_{n=\infty}\int_0^\pi s_n^{(\frac{1}{2})}(\omega)\sin\omega\, d\omega = \frac{f(+0)}{2}\int_0^\pi \sin\omega\, d\omega = f(+0),$$

puisque l'on a, pour $\delta > -1$,

$$\int_0^{\pi} s_n^{(\delta)}(\omega)\sin\omega\,d\omega = \frac{1}{A_n^{(\delta)}}\sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)}\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi} P_m(\cos\omega)\sin\omega\,d\omega \qquad (\delta > -1),$$

et tous les termes de cette somme, sauf le premier, s'évanouissent grâce à l'orthogonalité des polynomes de Legendre dans l'intervalle $(-1, +1)$. Dans l'intégrale $j_n^{(2)}$, nous exprimons la fonction à variation bornée $f(\omega)$ comme la différence de deux fonctions monotones $f(\omega) = f_1(\omega) - f_2(\omega)$ pour appliquer ensuite à chacune des intégrales résultantes le second théorème de la moyenne; il vient

$$j_n^{(2)} = [f_1(\varepsilon) - f_1(0)]\int_{\sigma_1}^{\varepsilon} s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega)\sin\omega\,d\omega - [f_2(\varepsilon) - f_2(0)]\int_{\sigma_2}^{\varepsilon} s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega)\sin\omega\,d\omega$$
$$(0 \leqq \sigma_1 \leqq \varepsilon;\; 0 \leqq \sigma_2 \leqq \varepsilon).$$

Or, on a vu que l'intégrale $\int_{\sigma}^{\varepsilon} s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega)\sin\omega\,d\omega$ est bornée, quels que soient $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ et σ, pourvu que $\delta > -\frac{1}{2}$; donc, en choisissant ε suffisamment petit, nous pouvons diminuer $j_n^{(2)}$ en valeur absolue autant qu'on veut, ce qui démontre (12).

A l'intégrale I_n'', nous appliquons le théorème général de M. Hobson ([1]). Les conditions de ce théorème sont satisfaites, puisque : 1° le produit $\sin\omega f(\omega)$ étant absolument intégrable dans $(0, \pi)$, $f(\omega)$ l'est dans l'intervalle $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$; 2° l'inégalité (10) prouve que l'on a, pour $\varepsilon \leqq \omega \leqq \pi - \varepsilon$,

$$\left|s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega)\right|\sin\omega < \frac{c_{20}\sqrt{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} = c_{30} \qquad (\varepsilon \leqq \omega \leqq \pi),$$

et 3° la valeur absolue de l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega)\sin\omega\,d\omega = S_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\alpha) - S_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\beta) \qquad (\varepsilon \leqq \alpha < \beta \leqq \pi - \varepsilon)$$

est plus petite que $2\varepsilon_n$, où ε_n ne dépend pas de α et β et tend vers zéro

---

([1]) *Proceed. of the Lond. Math. Society*, 2e série, t. 6, p. 354, § 2.

pour $n \to \infty$, $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, puisque la série (11) est uniformément sommable $\left(C, \delta > -\frac{1}{2}\right)$ dans (ε, π) et a pour somme zéro, comme nous l'avons démontré dans le paragraphe 4. Par conséquent, le théorème cité de M. Hobson s'applique à I''_n :

$$(13) \qquad \lim_{n=\infty} I''_n = 0.$$

Il nous reste à examiner l'intégrale I'''_n. Dans l'intervalle $(\pi - \varepsilon, \pi)$, $f(\omega) = (\sin\omega)^{-\gamma}\varphi(\omega)$ et nous supposons que γ est inférieur à trois demis ;

$$\gamma = \frac{3}{2} - h < \frac{3}{2} \qquad (h > 0).$$

En substituant dans I'''_n $f(\omega) = (\sin\omega)^{h-\frac{3}{2}}\varphi(\omega)$ et en appliquant (10), nous avons

$$(14) \quad |I'''_n| < \frac{c_{20}}{\left(\sin\dfrac{\pi-\varepsilon}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \frac{|\varphi(\omega)|\,d\omega}{(\sin\omega)^{1-h}} < c_{31}\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \frac{d\omega}{(\sin\omega)^{1-h}} < c_{32}\,\varepsilon^h \qquad (h>0).$$

On voit qu'en choisissant ε assez petit, on diminue la valeur absolue de l'intégrale I'''_n autant qu'on veut. En résumé, pour $\gamma < \frac{3}{2}$, nous avons eu égard à (12), (13) et (14) :

$$\left|F_n^{(\frac{1}{2})} - f(+0)\right| < |I'_n - f(+0)| + |I''_n| + |I'''_n| < \eta,$$

où η est aussi petit qu'on veut, si l'on a soin de choisir ε suffisamment petit et n suffisamment grand, c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} F_n^{(\frac{1}{2})} = f(+0) \qquad \left(\gamma < \frac{3}{2}\right). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On voit que *la sommabilité* $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ *est uniforme dans tout domaine* Δ *qui est entièrement compris dans le domaine* T *de continuité de la fonction développée* $F(\theta', \varphi')$, *si cette fonction est à variation bornée dans le domaine* T *et si l'ordre d'infinitude de* $F(\theta, \varphi)$ *aux divers points du domaine* Δ_0, *diamétralement opposé sur la sphère* S *au domaine* Δ, *est inférieur à trois demis.*

Soit maintenant $2 > \gamma \geqq \frac{3}{2}$. Nous allons démontrer que, dans ce cas, la série de Laplace n'est pas sommable $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ en point (θ, φ), même si la fonction $\varphi(\omega) = (\sin\omega)^{\gamma} f(\omega)$ est régulière au point $\omega = \pi$. Soit donc

$$\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{-\gamma}\varphi(\omega) = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{\gamma} f(\omega) = 2^{-\gamma}\varphi(\pi) + \cos\frac{\omega}{2}\,\psi_1(\omega)$$
$$(\pi - \varepsilon \leqq \omega \leqq \pi),$$

c'est-à-dire

$$f(\omega) = \frac{\varphi(\pi)}{\left(2\cos\frac{\omega}{2}\right)^{\gamma}} + \psi(\omega) \qquad (\pi - \varepsilon \leqq \omega \leqq \pi),$$

où l'ordre d'infinitude de $\psi(\omega)$ au point $\omega = \pi$, si elle y devient infinie, est sûrement inférieur à trois demis. On a

$$I_n''' = 2^{-\gamma}\varphi(\pi)\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-\gamma} s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega)\sin\omega\,d\omega + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\psi(\omega)\,s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega)\sin\omega\,d\omega.$$

La valeur absolue du dernier terme du second membre peut être rendue aussi petite qu'on veut par le choix convenable de ε, puisque l'ordre d'infinitude de $\psi(\omega)$ pour $\omega = \pi$ est inférieur à trois demis, et tout revient à l'étude du premier terme. On a pour $n \to \infty$, en posant $\gamma = 2\lambda$,

$$\int_0^{\varepsilon}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-2\lambda} s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega)\sin\omega\,d\omega = 1 + o(1)$$

et

$$\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-2\lambda} s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega)\sin\omega\,d\omega = o(1)$$
$$\left(2 > \gamma \geqq \frac{3}{2};\ 1 > \lambda \geqq \frac{3}{4}\right),$$

puisque ces deux intégrales sont du type étudié I_n' et I_n'' respectivement.

Par conséquent, on a

$$\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-2\lambda} s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega)\sin\omega\,d\omega$$
$$= \int_0^{\pi} - \int_0^{\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} = \int_0^{\pi}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-2\lambda} s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega)\sin\omega\,d\omega - 1 + o(1)$$

et pour étudier I_n''' il suffit de trouver la formule approximative pour l'intégrale $i_n^{(\lambda, \frac{1}{2})}$, où $i_n^{(\lambda, \delta)}$ est définie comme suit :

$$i_n^{(\lambda,\delta)} = A_n^{(\delta)} \int_0^\pi \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-2\lambda} s_n^{(\delta)}(\omega)\sin\omega\, d\omega = 2^\lambda \int_{-1}^{+1} (1-x)^{-\lambda} \sigma_n^{(\delta)}(-x)\,dx$$

avec

$$1 > \lambda \geqq \frac{3}{4}, \qquad -\frac{1}{2} < \delta \leqq +\frac{1}{2}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sigma_n^{(\delta)}(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1+z}{(1-z)^\delta(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, pour obtenir cette formule approximative, il faut calculer la fonction génératrice de la suite

$$i_0^{(\lambda,\delta)}, \quad i_1^{(\lambda,\delta)}, \quad i_2^{(\lambda,\delta)}, \quad \ldots, \quad i_n^{(\lambda,\delta)}, \quad \ldots.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda^{(\delta)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n i_n^{(\lambda,\delta)} &= 2^\lambda \int_{-1}^{+1} (1-x)^{-\lambda} \left\{ \sum_0^\infty z^n \sigma_n^{(\delta)}(-x) \right\} dx \\
&= \frac{2^{\lambda-1}(1+z)}{(1-z)^\delta} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x)^{-\lambda}\,dx}{(1+2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{1-\lambda}\,\frac{1+z}{(1-z)^{3+\delta}}\, F\left(1, \frac{3}{2}, 2-\lambda, \tau\right),
\end{aligned}$$

où F est le signe de la fonction hypergéométrique et où $\tau = -\frac{4z}{(1-z)^2}$. $\Phi_\lambda^{(\delta)}(z)$ n'a que deux points singuliers $z_1 = 1\ (\tau = \infty)$ et $z_2 = -1\ (\tau = 1)$; les deux se trouvent sur la circonférence du cercle de convergence. Avant d'appliquer la méthode de Darboux, nous exprimons, en nous appuyant sur les propriétés les plus élémentaires de la fonction hypergéométrique, la fonction génératrice $\Phi_\lambda^{(\delta)}(z)$ dans le voisinage du point $z_1 = 1$ ainsi :

$$\Phi_\lambda^{(\delta)}(z) = \frac{(1+z)(1-\tau)^{-1}}{(1-\lambda)(1-z)^{3+\delta}}\, F\left(\frac{1}{2}-\lambda, 1, 2-\lambda, \frac{\tau}{\tau-1}\right) = \frac{\varphi(z)}{(1-z)^{1+\delta}},$$

où

$$\varphi(z) = \frac{1}{(1-\lambda)(1+z)}\, F\left[\frac{1}{2}-\lambda, 1, 2-\lambda, \frac{4z}{(1+z)^2}\right].$$

Vu que

$$\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)+1-(2-\lambda)=-\frac{1}{2}<0,$$

on trouve que

$$F\left(\frac{1}{2}-\lambda,\ 1,\ 2-\lambda,\ 1\right)=\frac{\Gamma(2-\lambda)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(1-\lambda)}=2(1-\lambda)$$

existe et l'on obtient par conséquent $\varphi(1)=1$.

De même, dans le voisinage du point $z=-1$,

$$\Phi_{\lambda}^{(\delta)}(z)=\frac{\psi(z)}{(1+z)^{2\lambda}}=\frac{(1-z)^{2\lambda-2-\delta}}{(1-\lambda)(1+z)^{2\lambda}}F\left[\frac{1}{2}-\lambda,\ 1-\lambda,\ 2-\lambda,\ -\frac{4z}{(1-z)^2}\right],$$

où

$$\psi(-1)=\frac{2^{2\lambda-2-\delta}}{1-\lambda}F\left(\frac{1}{2}-\lambda,\ 1-\lambda,\ 2-\lambda,\ 1\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\Gamma(1-\lambda)}{2^{1-2\lambda+\delta}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Selon la méthode de Darboux, nous devons développer en série de Maclaurin la fonction auxiliaire

$$D(z)=\frac{\varphi(1)}{(1-z)^{1+\delta}}+\frac{\psi(-1)}{(1+z)^{2\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n^{(\delta)}\varphi(1)+(-1)^n A_n^{(2\lambda-1)}\psi(-1)\right\}z^n$$

et pour $n\to\infty$ on obtient la formule approximative cherchée sous la forme

$$\frac{i_n^{(\lambda,\delta)}}{A_n^{(\delta)}}=1+(-1)^n\frac{A^{(2\lambda-1)}\psi(-1)}{A_n^{(\delta)}}[1+o(1)]+o(1).$$

Vu que $2\lambda=\gamma$, le cas particulier $\delta=\frac{1}{2}$ nous donne

$$\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-\gamma}s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega)\sin\omega\,d\omega$$

$$=\frac{i_n^{\left(\frac{\gamma}{2},\frac{1}{2}\right)}}{A_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}}-1+o(1)=(-1)^n\frac{A_n^{(\gamma-1)}}{A_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)}{2^{1-\gamma}\sqrt{2\pi}}+o(1)\right\}+o(1),$$

et l'on obtient définitivement

$$\mathrm{I}_n''' = (-1)^n (n+1)^{\gamma - \frac{3}{2}} \left\{ \frac{\varphi(\pi)\, \Gamma\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \sqrt{\pi}}{2^{1+\gamma}\, \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \sqrt{2}} + o(1) \right\} + o(1).$$

Cette formule résout la question : I_n''' ne tend vers zéro avec $n \to \infty$ que si γ est inférieur à trois demis, $\gamma < \frac{3}{2}$; si γ est égal à trois demis, $\gamma = \frac{3}{2}$, I_n''' oscille pour $n \to \infty$ entre des bornes finies et, si γ est supérieur à trois demis, $\gamma > \frac{3}{2}$, ses bornes d'indétermination sont infinies. Il est donc démontré que *la condition* $\gamma < \frac{3}{2}$ *est nécessaire pour la sommabilité* $\left(\mathrm{C}, \frac{1}{2}\right)$ *de la série de Laplace et que cette sommabilité* $\left(\mathrm{C}, \frac{1}{2}\right)$ *en un point* (θ, φ) *ne dépend que de l'allure de la fonction développée* $\mathrm{F}(\theta', \varphi')$ *dans le voisinage de ce point, si* $\gamma < \frac{3}{2}$ *et si* $\mathrm{F}(\theta', \varphi')$ *est absolument intégrable sur la sphère* S.

Ce théorème est l'analogue du théorème classique de Riemann sur la convergence de la série trigonométrique.

Au contraire, la sommabilité $\left(\mathrm{C}, \delta < \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace dépend (§ 6) de l'allure de $\mathrm{F}(\theta', \varphi')$ sur toute la sphère S.

L'hypothèse que $\mathrm{F}(\theta', \varphi')$ est à variation bornée dans le voisinage de (θ, φ) n'a été employée que pour prouver que l'intégrale

$$j_n^{(2)} = \int_0^{\varepsilon} [f(\omega) - f(+0)]\, s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega) \sin\omega \, d\omega$$

peut être rendue en valeur absolue aussi petite qu'on veut, ce qui est pour $\gamma < \frac{3}{2}$ la condition suffisante de la sommabilité $\left(\mathrm{C}, \delta = \frac{1}{2}\right)$ sous les suppositions de l'existence de la valeur moyenne $f(+0)$ et de l'intégrabilité absolue de $\mathrm{F}(\theta', \varphi')$ sur S. Or, on peut formuler d'autres conditions suffisantes qui peuvent remplacer l'hypothèse que $\mathrm{F}(\theta', \varphi')$ est à variation bornée autour du point (θ, φ). Posons

$$\varphi(\omega) = \psi(\omega) \sin\frac{\omega}{2} = f(\omega) - f(+0);$$

on a

$$
\begin{aligned}
j_n^{(2)} &= \int_0^{\varepsilon} \varphi(\omega)\, s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega) \sin\omega \, d\omega \\
&= \int_0^{\frac{6\pi}{4n+5}} \varphi(\omega)\, s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega) \sin\omega \, d\omega + \int_{\frac{6\pi}{4n+5}}^{\varepsilon} \varphi(\omega)\, s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega) \sin\omega \, d\omega \\
&= \mathrm{R}_n^{(1)} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathrm{R}_n^{(2)}
\end{aligned}
$$

et

$$
|\mathrm{R}_n^{(1)}| < c_{18}(n+1)^2 \sin\frac{6\pi}{4n+5} \int_0^{\frac{6\pi}{4n+5}} |\varphi(\omega)|\, d\omega < c_{33}(n+1)\,\Phi\left(\frac{6\pi}{4n+5}\right),
$$

où

$$
\Phi(\omega) = \int_0^{\omega} |\varphi(\omega)|\, d\omega .
$$

Supposons que l'intégrale indéfinie $\Phi(\omega)$ pour $\omega = 0$ a une dérivée égale à zéro, alors on a

$$
\Phi\left(\frac{6\pi}{4n+5}\right) = \frac{6\pi}{4n+5}\varepsilon_n,
$$

où $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, et l'on voit que cette supposition entraîne $\lim\limits_{n=\infty} \mathrm{R}_n^{(1)} = 0$.

Dans l'intégrale $\mathrm{R}_n^{(2)}$, nous appliquons la formule (7) avec l'inégalité (8) :

$$
s_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{5}{4}\right)\omega - \frac{\pi}{2}\right]}{\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\sin\omega}} + \rho_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega),
$$

$$
\left|\rho_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega)\right| < \frac{c_{10}}{(n+1)\left(\sin\frac{\omega}{2}\sin\omega\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \left(\omega \geqq \frac{\pi}{n+1}\right),
$$

ce qui nous fournit

$$
\mathrm{R}_n^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{6\pi}{4n+5}}^{\varepsilon} \psi(\omega) \sin\left[\left(n+\frac{5}{4}\right)\omega - \frac{\pi}{2}\right] \sqrt{\cos\frac{\omega}{2}}\, d\omega + r_n,
$$

où

$$
|r_n| = \left| \int_{\frac{6\pi}{4n+5}}^{\varepsilon} \varphi(\omega)\, \rho_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega) \sin\omega\, d\omega \right| < \theta_\varepsilon \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\varepsilon} \left|\rho_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\omega)\right| \sin\omega\, d\omega ;
$$

θ_ε désigne la borne supérieure de la fonction

$$|\varphi(\omega)| = |f(\omega) - f(+0)|$$

dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$ et peut être rendue par conséquent aussi petite qu'on veut par le choix convenable de ε. Or

$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\varepsilon} \left|\rho_n^{(\frac{1}{2})}(\omega)\right| \sin\omega\, d\omega < \frac{c_{10}}{n+1} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\varepsilon} \frac{d\omega}{\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sin\omega}} < \frac{c_{34}}{n+1} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} < c_{35},$$

ce qui prouve que la valeur absolue de l'intégrale r_n est aussi petite qu'on veut, si ε est suffisamment petit. Examinons maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{6\pi}{4n+5}}^{\varepsilon} \psi(\omega) \sin\left[\left(n + \frac{5}{4}\right)\omega - \frac{\pi}{2}\right] \sqrt{\cos\frac{\omega}{2}}\, d\omega.$$

On prouve facilement que l'on a

$$1 - \sqrt{\cos\frac{\omega}{2}} < \frac{\omega \sin\frac{\omega}{2}}{4\sqrt{\cos\frac{\omega}{2}}};$$

donc

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{6\pi}{4n+5}}^{\varepsilon} \psi(\omega) \sin\left[\left(n + \frac{5}{4}\right)\omega - \frac{\pi}{2}\right] \left(1 - \sqrt{\cos\frac{\omega}{2}}\right) d\omega\right|$$
$$< c_{36} \int_{\frac{6\pi}{4n+5}}^{\varepsilon} \omega\, |\varphi(\omega)|\, d\omega = o(\varepsilon^2);$$

par conséquent, on obtient

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{6\pi}{4n+5}}^{\varepsilon} \psi(\omega) \sin\left[\left(n + \frac{5}{4}\right)\omega - \frac{\pi}{2}\right] \sqrt{\cos\frac{\omega}{2}}\, d\omega$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{6\pi}{4n+5}}^{\varepsilon} \psi(\omega) \cos\left(n + \frac{5}{4}\right)\omega\, d\omega + o(\varepsilon^2).$$

Quant à l'intégrale

$$\int_{\frac{6\pi}{4n+5}}^{\varepsilon} \psi(\omega) \cos\left(n + \frac{5}{4}\right)\omega\, d\omega,$$

elle est du type étudié par M. H. Lebesgue ([1]), et, en lui appliquant le même raisonnement qu'applique M. H. Lebesgue à l'intégrale

$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\varepsilon} \psi(\omega) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega \, d\omega,$$

on prouve facilement que l'on a

$$\lim_{n=\infty} \int_{\frac{6\pi}{4n+5}}^{\varepsilon} \psi(\omega) \cos\left(n+\frac{5}{4}\right)\omega \, d\omega = 0,$$

sous l'hypothèse que l'intégrale

$$\chi(\rho) = \int_{\rho}^{\varepsilon} |\psi(\omega+\rho) - \psi(\omega)| \, d\omega$$

tend vers zéro avec $\rho \to 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{\rho=0} \chi(\rho) = 0$.

Vu que $\Phi(\omega)$ pour $\omega = 0$ a la dérivée égale à zéro, s'il existe la valeur moyenne $f(+0)$ de $F(\theta', \varphi')$ en un point (θ, φ), on voit que nous avons démontré le théorème :

La série de Laplace d'une fonction $F(\theta', \varphi')$ *absolument intégrable sur* S *est sommable* $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ *en un point* (θ, φ) *de* S, *où existe la valeur moyenne* $f(+0)$ *de* $F(\theta', \varphi')$, *et a pour somme cette valeur moyenne si l'ordre d'infinitude* γ *de* $F(\theta', \varphi')$ *au point diamétralement opposé sur* S *au point* (θ, φ) *est inférieur à trois demis,* $\gamma < \frac{3}{2}$, *et si l'intégrale*

$$\chi(\rho) = \int_{\rho}^{\varepsilon} |\psi(\omega+\rho) - \psi(\omega)| \, d\omega$$

tend vers zéro avec $\rho \to 0$.

Or, on sait que tous les critères classiques connus de la convergence des séries trigonométriques se déduisent de la condition établie $\lim\limits_{\rho=0} \chi(\rho) = 0$ et l'on voit qu'ils sont, par conséquent, aussi les critères

([1]) *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 57-58.

de la sommabilité $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace en un point de la sphère S sous les hypothèses faites. Ces critères se rapportent à la fonction

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi \sin\omega} \int_{C_\omega} F(\theta', \varphi')\, ds',$$

mais il est facile de les formuler pour la fonction $F(\theta', \varphi')$ elle-même. Envisageons, par exemple, la condition de Lipschitz-Dini :

$$|f(\rho) - f(+0)| \log\rho \to 0 \qquad (\rho \to 0)$$

pour $\rho \to 0$. Supposons que $F(\theta, \varphi)$ existe et formons la différence

$$f(\omega) - F(\theta, \varphi) = f(\omega) - f(+0) = \frac{1}{2\pi \sin\omega} \int_{C_\omega} [F(\theta', \varphi') - F(\theta, \varphi)]\, ds'.$$

On voit que $f(\omega)$ satisfait à la condition de Lipschitz-Dini, si l'on a pour $\omega \to 0$

$$|F(\theta', \varphi') - F(\theta, \varphi)| \log\omega \to 0,$$

ce qui n'est que la condition de Lipschitz-Dini par rapport à la fonction $F(\theta', \varphi')$.

On peut dire que la sommabilité $(C, 0)$ des séries trigonométriques et la sommabilité $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ des séries de Laplace présentent une analogie complète au point de vue des conditions suffisantes de sommabilité.

6. — La sommabilité (C, δ) de la série de Laplace pour $|\delta| < \frac{1}{2}$.

Les résultats du paragraphe précédent suggèrent l'idée que la sommabilité $\left(C, \delta < \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace doit être analogue à la sommabilité $(C, \delta < 0)$ des séries trigonométriques, étudiée dans le premier paragraphe. Son étude ne fait que confirmer cette idée.

En étudiant la sommabilité $\left(C, \delta < \frac{1}{2}\right)$, nous supposons $F(\theta', \varphi')$ à variation bornée partout sur S, à l'exception des voisinages des points isolés M_k, où elle se présente sous la forme

$$F(\theta', \varphi') = A_k\left(\sin\frac{\varpi_k}{2}\right)^{-\alpha_k} + F_k(\theta', \varphi') \qquad (\alpha_k < 2;\ \varpi_k \leqq \varepsilon),$$

ϖ_k étant la distance sphérique des points $M_k(\theta_k, \varphi_k)$ et (θ', φ') et la fonction $F_k(\theta', \varphi')$ étant à variation bornée pour $\varpi_k \leqq \varepsilon$. Si l'un quelconque des points M_k est diamétralement opposé sur S au point (θ, φ) où l'on envisage la sommabilité $\left(C, \delta < \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace, nous le désignons par W et l'ordre d'infinitude de $F(\theta', \varphi')$ en ce point W par γ.

Transportons le pôle de S en point $M(\theta, \varphi)$ et désignons les nouvelles coordonnées par ω et ψ. On a

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta', \varphi')\, d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\omega, \psi)\, d\psi,$$

où $\Psi(\omega, \psi)$ n'est que la fonction $F(\theta', \varphi')$ exprimée en nouvelles coordonnées.

Désignons le point (θ', φ') par μ et la distance sphérique des points $M_k(\theta_k, \varphi_k)$ et $M(\theta, \varphi)$ par ω_k. Le triangle sphérique $MM_k\mu$ nous fournit dans le cas général $\omega_k \neq \pi$, où ω_k et ψ_k sont les coordonnées du point M_k :

$$\cos\varpi_k = \cos\omega \cos\omega_k + \sin\omega \sin\omega_k \cos(\psi - \psi_k) \qquad (0 < \omega_k < \pi);$$

donc

$$\sin^2\frac{\varpi_k}{2} = \sin^2\frac{\omega - \omega_k}{2} + \sin\omega \sin\omega_k \sin^2\frac{\psi - \psi_k}{2}.$$

La fonction $F(\theta', \varphi')$ étant à variation bornée partout sur S, sauf les voisinages des points M_k et W, $f(\omega)$ est à variation bornée dans tout intervalle $(0, \pi - \varepsilon)$, sauf le voisinage des points $\omega = \omega_k$, et il s'agit d'étudier ses propriétés au voisinage de ces points intérieurs $\omega = \omega_k$ et dans l'intervalle $(\pi - \varepsilon, \pi)$. Posons pour $\omega \to \omega_k$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\, d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{\psi_k - 2\varepsilon}^{\psi_k + 2\varepsilon} F\, d\psi + \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\psi_k - 2\varepsilon} + \int_{\psi_k + 2\varepsilon}^{2\pi}\right) F\, d\psi \\ &= f_1(\omega) + f_2(\omega). \end{aligned}$$

Il est clair que la fonction $f_2(\omega)$ est à variation bornée pour $|\omega-\omega_k|\leqq\varepsilon$. Or

$$f_1(\omega)=\frac{A_k}{2\pi}\int_{\psi_k-2\varepsilon}^{\psi_k+2\varepsilon}\left(\sin\frac{\varpi_k}{2}\right)^{-\alpha_k}d\psi+\frac{1}{2\pi}\int_{\psi_k-2\varepsilon}^{\psi_k+2\varepsilon}F_k(\theta',\varphi')\,d\psi=f_3(\omega)+f_4(\omega),$$

où la fonction $f_4(\omega)$ est aussi à variation bornée pour $|\omega-\omega_k|\leqq\varepsilon$. L'expression de $\left(\sin\frac{\varpi_k}{2}\right)^2$ nous fournit de l'autre côté

$$f_3(\omega)=\frac{A_k}{2\pi}\int_{\psi_k-2\varepsilon}^{\psi_k+2\varepsilon}\left[\sin^2\frac{\omega-\omega_k}{2}+\sin\omega\sin\omega_k\sin^2\frac{\psi-\psi_k}{2}\right]^{-\frac{\alpha_k}{2}}d\psi$$

et la substitution

$$u\sin\frac{\omega-\omega_k}{2}=\sin\frac{\psi-\psi_k}{2}\sqrt{\sin\omega\sin\omega_k}$$

transforme cette intégrale en

$$f_3(\omega)=\frac{2A_k}{\pi\sqrt{\sin\omega\sin\omega_k}}\left(\sin\frac{\omega-\omega_k}{2}\right)^{1-\alpha_k}\int_0^{\eta(\omega)}\frac{du}{\cos\frac{\psi-\psi_k}{2}(1+u^2)^{\frac{\alpha_k}{2}}},$$

où

$$\eta(\omega)=\frac{\sin\varepsilon\sqrt{\sin\omega\sin\omega_k}}{\left|\sin\frac{\omega-\omega_k}{2}\right|}.$$

En appliquant le second théorème de la moyenne, on obtient

$$\left(\sin\frac{\omega-\omega_k}{2}\right)^{\alpha_k-1}f_3(\omega)=\frac{2A_k}{\pi\cos\varepsilon\sqrt{\sin\omega\sin\omega_k}}\int_{\bar\eta(\omega)}^{\eta(\omega)}\frac{du}{(1+u^2)^{\frac{\alpha_k}{2}}}\qquad(0\leqq\bar\eta\leqq\eta).$$

Si $\alpha_k>1$, l'intégrale du second membre représente une fonction de ω à variation bornée pour $|\omega-\omega_k|\leqq\varepsilon$; donc si $\alpha_k>1$, $f(\omega)$ se présente sous la forme

$$f(\omega)=\frac{\varphi_k(\omega)}{\left(\sin\frac{\omega-\omega_k}{2}\right)^{\alpha_k-1}}+\bar\varphi_k(\omega)=\frac{g_k(\omega)}{|\omega-\omega_k|^{\alpha_k-1}}+h_k(\omega)\qquad(\alpha_k>1),$$

où les fonctions $g_k(\omega)$ et $h_k(\omega)$ sont à variation bornée pour $|\omega-\omega_k|\leqq\varepsilon$.

Si $\alpha_k=1$, l'intégrale du second membre augmente pour $\omega\to\omega_k$

comme $\log(\omega - \omega_k)$ et

$$f(\omega) = g_k(\omega)\log|\omega - \omega_k| + h_k(\omega) \qquad (\alpha_k = 1).$$

Enfin, si $\alpha_k < 1$, $f(\omega)$ est à variation bornée pour $|\omega - \omega_k| \leqq \varepsilon$ et on le prouve en considérant la fonction

$$f_5(\omega) = \frac{A_k}{2\pi}\int_{\psi_k - 2\varepsilon'}^{\psi_k + 2\varepsilon'} \left(\sin\frac{\varpi_k}{2}\right)^{-\alpha} d\psi \qquad \left[\varepsilon' = \arc\sin\left(\varepsilon\sqrt{\frac{\sin\omega_k}{\sin\omega}}\right)\right],$$

où

$$\sin\varepsilon' = \varepsilon\sqrt{\frac{\sin\omega_k}{\sin\omega}}.$$

La substitution

$$V = \sin\frac{\psi - \psi_k}{2}\sqrt{\sin\omega\sin\omega_k}$$

transforme $f_5(\omega)$ en

$$f_5(\omega) = g(\omega)\int_{-\varepsilon\sin\omega_k}^{+\varepsilon\sin\omega_k}\left(V^2 + \sin^2\frac{\omega - \omega_k}{2}\right)^{-\frac{\alpha_k}{2}} dV \qquad (\alpha_k < 1),$$

où $g(\omega)$ est à variation bornée, et cela démontre notre assertion.

En résumé, on a établi pour $0 < \omega_k < \pi$ que $f(x)$ ne se présente dans l'intervalle $|\omega - \omega_k| \leqq \varepsilon$ que sous les trois formes suivantes :

$$\begin{aligned}
&(\text{pour } \alpha_k > 1) \quad f(\omega) = g_k(\omega)|\omega - \omega_k|^{1-\alpha_k} + h_k(\omega),\\
&(\text{pour } \alpha_k = 1) \quad f(\omega) = g_k(\omega)\log|\omega - \omega_k| + h_k(\omega) \qquad (|\omega - \omega_k| \leqq \varepsilon),\\
&(\text{pour } \alpha_k < 1) \quad f(\omega) = h_k(\omega),
\end{aligned}$$

où $g_k(\omega)$ et $h_k(\omega)$ sont à variation bornée pour $|\omega - \omega_k| \leqq \varepsilon$.

Soit maintenant $\omega_k = \pi$ (le point W); pour $\pi \geqq \omega \geqq \pi - \varepsilon$, on a

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[A\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-\gamma} + \overline{F}(\theta', \varphi')\right] d\psi = \frac{A}{\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{\gamma}} + \varphi(\omega),$$

d'où la conclusion que $f(\omega)$ devient infinie au point $\omega = \pi$ du même ordre γ que $F(\theta', \varphi')$ et que $\varphi(\omega)$ est à variation bornée dans $(\pi - \varepsilon, \pi)$.

Pour étudier la sommabilité $\left(C, \delta < \frac{1}{2}\right)$ de la série de Laplace de $F(\theta', \varphi')$ il suffit de considérer $F(\theta', \varphi')$ avec un seul point M_k. Soit $\alpha_k = 1 + \beta$ et $\omega_k = \xi (0 < \xi < \pi)$. Envisageons d'abord le cas

$\beta > 0 (\alpha_k > 1)$. On a alors pour $|\omega - \xi| \leqq \varepsilon$

$$f(\omega) = g(\omega)|\omega - \xi|^{-\beta} + \varphi_1(\omega) \qquad (|\omega - \xi| \leqq \varepsilon);$$

et pour $\omega \geqq \pi - \varepsilon$

$$f(\omega) = A\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-\gamma} + \varphi_2(\omega) \qquad (\pi \geqq \omega \geqq \pi - \varepsilon).$$

La moyenne arithmétique d'ordre δ de la série de Laplace — $F_n^{(\delta)}$ — s'exprime comme suit :

$$F_n^{(\delta)} = \int_0^\pi f(\omega)\, s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega\, d\omega = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}$$
$$= I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)} + I_n^{(4)} + I_n^{(5)}.$$

Posons

$$I_n^{(1)} = f(+0)\int_0^\varepsilon s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega\, d\omega$$
$$+ \int_0^\varepsilon [f(\omega) - f(+0)]\, s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega\, d\omega = i_1^{(n)} + i_2^{(n)}.$$

La série (11) étant uniformément sommable $\left(C, \delta > -\frac{1}{2}\right)$ pour $\omega \geqq \varepsilon$ avec zéro pour somme, on a, pour chaque $\delta > -\frac{1}{2}$,

$$\lim_{n=\infty} S_n^{(\delta)}(\varepsilon) = \lim_{n=\infty} \int_\varepsilon^\pi s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega\, d\omega = 0 \qquad \left(\delta > -\frac{1}{2}\right),$$

d'où

$$\lim_{n=\infty} i_1^{(n)} = f(+0) \lim_{n=\infty} \int_0^\pi s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega\, d\omega = f(+0) \qquad \left(\delta > -\frac{1}{2}\right).$$

Quant à l'intégrale $i_2^{(n)}$, $f(\omega)$ y est à variation bornée et, en posant

$$f(\omega) = f_1(\omega) - f_2(\omega),$$

où $f_1(\omega)$ et $f_2(\omega)$ sont des fonctions monotones, nous décomposons $i_2^{(n)}$ en somme de deux intégrales, à chacune desquelles nous appliquons le second théorème de la moyenne :

$$i_2^{(n)} = \quad [f_1(\varepsilon) - f_1(0)]\int_{\sigma_1}^\varepsilon s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega\, d\omega$$
$$- [f_2(\varepsilon) - f_2(0)]\int_{\sigma_2}^\varepsilon s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega\, d\omega$$
$$= \theta_1(\varepsilon)\left\{ S_n^{(\delta)}(\sigma_1) - S_n^{(\delta)}(\varepsilon) \right\} - \theta_2(\varepsilon)\left\{ S_n^{(\delta)}(\sigma_2) - S_n^{(\delta)}(\varepsilon) \right\}.$$

Or, toutes les moyennes $S_n^{(\delta)}(\omega)$ sont bornées dans leur ensemble pour $0 \leqq \omega \leqq \pi$, pourvu que δ soit supérieur à moins un demi, $\delta > -\frac{1}{2}$; donc les quantités entre accolades restent finies, tandis que $\theta_1(\varepsilon)$ et $\theta_2(\varepsilon)$ peuvent être rendues en valeurs absolues aussi petites qu'on veut, si l'on a soin de choisir ε assez petit. On a par conséquent, pour ε suffisamment petit et n suffisamment grand,

$$|I_n^{(1)} - f(+0)| < \zeta \qquad \left(\delta > -\frac{1}{2}\right), \tag{15}$$

où ζ est aussi petit qu'on veut et fixe.

Aux intégrales $I_n^{(2)}$ et $I_n^{(4)}$ nous appliquons le même raisonnement qu'à l'intégrale $i_2^{(n)}$ et, grâce à la sommabilité uniforme $\left(C, \delta > -\frac{1}{2}\right)$ de la série (11) pour $\omega \geqq \varepsilon$ avec zéro pour somme, nous obtenons

$$\lim_{n=\infty} I_n^{(2)} = \lim_{n=\infty} I_n^{(4)} = 0 \qquad \left(\delta > -\frac{1}{2}\right). \tag{16}$$

Nous avons supposé $\alpha_k = 1 + \beta > 1$, donc

$$I_n^{(3)} = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} g(\omega)\,|\omega - \xi|^{-\beta} s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega\, d\omega + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_1(\omega)\, s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega\, d\omega$$
$$(\beta > 0),$$

où l'on a, pour $\delta > -\frac{1}{2}$,

$$\lim_{n=\infty} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_1(\omega)\, s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega\, d\omega = 0$$

puisque $\varphi_1(\omega)$ est à variation bornée.

Quant à la première des intégrales du second membre la formule (7) et l'inégalité (8) nous donnent

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} g(\omega)\,|\omega - \xi|^{-\beta} s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega\, d\omega$$
$$= \frac{A_n^{(\frac{1}{2})}}{2^{\delta+1} A_n^{(\delta)}} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{g(\omega) \sin\left[\left(n + 1 + \frac{\delta}{2}\right)\omega - \frac{2\delta+1}{4}\pi\right] \sqrt{\cos\frac{\omega}{2}}\, d\omega}{|\omega - \xi|^{\beta} \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+\frac{1}{2}}} + \rho_n$$
$$= \frac{A_n^{(\frac{1}{2})}}{2^{\delta+1} A_n^{(\delta)}} I_n + \rho_n$$
$$= (n+1)^{\frac{1}{2}-\delta} I_n\, O(1) + \rho_n,$$

où

$$\rho_n = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{|g(\omega)|}{|\omega-\xi|^\beta} |\rho_n^{(\delta)}(\omega)| \sin\omega \, d\omega$$
$$\leqq \frac{c_{37}}{(n+1)^{\frac{1}{2}+\delta}} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{|\omega-\xi|^{-\beta}\, d\omega}{\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\delta+1}\sqrt{\sin\omega}} < \frac{c_{38}}{(n+1)^{\frac{1}{2}+\delta}},$$

et où par conséquent $\lim\limits_{n=\infty} \rho_n = 0$ pour $\delta > -\frac{1}{2}$. La fonction

$$\chi(\omega) = \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{-\left(\delta+\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\cos\frac{\omega}{2}}$$

étant décroissante, on a

$$\mathrm{I}_n = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \chi(\omega)\, g(\omega)\, |\omega-\xi|^{-\beta} \sin\left[\left(n+1+\frac{\delta}{2}\right)\omega - \frac{2\delta+1}{4}\pi\right] d\omega$$
$$= \chi(\xi-\varepsilon) \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\eta} g(\omega)\, |\omega-\xi|^{-\beta} \sin\Omega_n \, d\omega,$$

où

$$\Omega_n = \left(n+1+\frac{\delta}{2}\right)\omega - \frac{2\delta+1}{4}\pi \qquad \text{et} \qquad |\eta| = |\eta_n| < \varepsilon.$$

On peut poser

$$g(\omega) = g_1(\omega) - g_2(\omega),$$

puisque $g(\omega)$ est à variation bornée, ce qui nous donne

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\eta} g(\omega)\, |\omega-\xi|^{-\beta} \sin\Omega_n \, d\omega$$
$$= \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\eta} g_1(\omega)\, |\omega-\xi|^{-\beta} \sin\Omega_n \, d\omega$$
$$- \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\eta} g_2(\omega)\, |\omega-\xi|^{-\beta} \sin\Omega_n \, d\omega = j_1 - j_2.$$

Le second théorème de la moyenne, appliqué aux intégrales j_1 et j_2, nous donne, $g_1(\omega)$ et $g_2(\omega)$ étant des fonctions croissantes,

$$j_m = g_m(\xi+\eta) \int_{\xi-\eta_m}^{\xi+\eta} |\omega-\xi|^{-\beta} \sin\Omega_n \, d\omega \qquad (m = 1, 2;\ \xi-\varepsilon \leqq \xi-\eta_m \leqq \xi+\eta).$$

Il s'agit d'étudier l'intégrale du type

$$j'_n = \int_{\xi - a_n}^{\xi + b_n} |\omega - \xi|^{-\beta} \sin \Omega_n \, d\omega \qquad (|a_n|, |b_n| < \varepsilon),$$

et la substitution $\omega = \xi + u$ donne

$$\begin{aligned} j'_n &= \int_{-a_n}^{b_n} |u|^{-\beta} \sin\left[\left(n + 1 + \frac{\partial}{2}\right)(\xi + u) - \frac{2\partial + 1}{4}\pi\right] du \\ &= \int_{-a_n}^{b_n} |u|^{-\beta} \sin[r_n u + \mathfrak{S}_n] \, du \\ &= \sin \mathfrak{S}_n \int_{-a_n}^{b_n} |u|^{-\beta} \cos r_n u \, du + \cos \mathfrak{S}_n \int_{-a_n}^{b_n} |u|^{-\beta} \sin r_n u \, du, \end{aligned}$$

où

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n(\xi) = r_n \xi - \frac{2\partial + 1}{4}\pi \qquad \text{et} \qquad r_n = n + 1 + \frac{\partial}{2}.$$

Il vient

$$j'_n = r_n^{\beta - 1} \left\{ \sin \mathfrak{S}_n \int_{-a_n r_n}^{b_n r_n} |u|^{-\beta} \cos u \, du + \cos \mathfrak{S}_n \int_{-a_n r_n}^{b_n r_n} |u|^{-\beta} \sin u \, du \right\}.$$

L'intégrale $\int_0^{\pm\infty} |u|^{-\beta} e^{iu} du$ étant bornée pour chaque $0 < \beta < 1$, nous voyons que nos intégrales

$$\int_{-a_n r_n}^{b_n r_n} |u|^{-\beta} \cos u \, du \quad \text{et} \quad \int_{-a_n r_n}^{b_n r_n} |u|^{-\beta} \sin u \, du,$$

où $|a_n| < \varepsilon$, $|b_n| < \varepsilon$ le sont aussi quel que soit $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ et nous en concluons que j_1, j_2 et avec eux l'intégrale I_n peuvent être présentées sous la forme

$$I_n = c_{39}(n + 1)^{\beta - 1} \theta_1(n),$$

où la fonction $\theta_1(n)$ pour $n \to \infty$ oscille sans tendre vers la limite déterminée, comme $\sin \mathfrak{S}_n$ et $\cos \mathfrak{S}_n$ qui entrent dans son expression, mais reste toujours bornée : $|\theta_1(n)| \leqq 1$. Vu que $\beta = \alpha_k - 1$ et que

$$I_n^{(3)} = (n + 1)^{\frac{1}{2} - \partial} I_n \, O(1) + \rho_n,$$

on obtient définitivement pour $\delta > -\frac{1}{2}$,

$$I_n^{(3)} = (n+1)^{\alpha_k - \frac{3}{2} - \delta}\,\theta(n) + o(1) \qquad (\alpha_k > 1),$$

où $\theta(n)$ pour $n \to \infty$ oscille comme $\theta_1(n)$, mais reste bornée : $|\theta(n)| \leqq c_{40}$.

Cette formule prouve que la condition $\delta > \alpha_k - \frac{3}{2}$ est nécessaire et suffisante pour avoir $\lim\limits_{n=\infty} I_n^{(3)} = 0$, puisque, si $\delta = \alpha_k - \frac{3}{2}$, $I_n^{(3)}$ oscille pour $n \to \infty$ entre des bornes finies et même, si $\delta < \alpha_k - \frac{3}{2}$, oscille entre $-\infty$ et $+\infty$.

Par conséquent, il est démontré que la condition $\delta > \alpha_k - \frac{3}{2}$ est nécessaire pour la sommabilité (C, δ) de la série de Laplace de $F(\theta', \varphi')$ avec $\alpha_k > 1$, si $-\frac{1}{2} < \delta < \frac{1}{2}$.

Soit maintenant $\alpha_k \leqq 1$. Pour $\alpha_k = 1$ on répète le même raisonnement et l'on parvient aux intégrales du type

$$\int_{-a_n r_n}^{b_n r_n} \log|u| \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, u\, du,$$

qui sont d'ordre $\log r_n = \log\left(n + 1 + \frac{\delta}{2}\right)$:

$$\left| \int_{-a_n r_n}^{b_n r_n} \log|u| \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, u\, du \right| < c_{41} \log(n+1).$$

Par conséquent, dans ce cas, $\alpha_k = 1$, on a la formule

$$I_n^{(3)} = \frac{\log(n+1)}{(n+1)^{\frac{1}{2}+\delta}}\,\theta(n) + o(1) \qquad (\alpha_k = 1),$$

d'où la conclusion : pour $\alpha_k = 1$, on a, quel que soit $\delta > -\frac{1}{2}$,

$$\lim_{n=\infty} I_n^{(3)} = 0.$$

Pour $\alpha_k < 1$, $f(\omega)$ est à variation bornée dans l'intervalle $|\omega - \xi| \leqq \varepsilon$ et, en appliquant le même raisonnement que pour les intégrales $I_n^{(2)}$ et $I_n^{(4)}$, on trouve, pour $\delta > -\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n=\infty} I_n^{(3)} = 0$. En résumé, on obtient le résultat général que voici :

$$\lim_{n=\infty} I_n^{(3)} = 0 \qquad \left(\delta > -\frac{1}{2} \text{ et } \alpha_k - \frac{3}{2}\right), \tag{17}$$

si δ est supérieur à $\alpha_k - \frac{3}{2}$ et à $-\frac{1}{2}$.

Il nous reste à examiner l'intégrale $I_n^{(5)}$, où $f(\omega)$ se présente sous la forme $f(\omega) = A\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-\gamma} + \varphi_2(\omega)$:

$$I_n^{(5)} = A\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-\gamma} s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega \, d\omega + \varepsilon_n.$$

On a

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = \lim_{n=\infty} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \varphi_2(\omega)\, s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega \, d\omega = 0 \qquad \left(\delta > -\frac{1}{2}\right),$$

puisque $\varphi_2(\omega)$ est à variation bornée dans $(\pi - \varepsilon, \pi)$. On a aussi

$$\lim_{n=\infty} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-\gamma} s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega \, d\omega = 0 \qquad \left(\delta > -\frac{1}{2}\right),$$

puisque $\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-\gamma}$ est à variation bornée dans $(0, \pi - \varepsilon)$, ce qui entraîne de plus pour $n \geqq N$ et ε suffisamment petit l'inégalité

$$\left| \int_0^{\varepsilon} \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-\gamma} s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega \, d\omega - 1 \right| < \zeta,$$

où ζ est aussi petit qu'on veut. Par conséquent, on a

$$\int_0^{\pi} \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-\gamma} s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega \, d\omega = 1 + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-\gamma} s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega \, d\omega + \eta_n(\varepsilon),$$

où $|\eta_n(\varepsilon)| < \zeta$ pour ε suffisamment petit et $n \geqq N = N(\varepsilon, \zeta)$.

Or, l'intégrale du premier membre est étudiée au paragraphe 5, où elle a été désignée par $\frac{i_n^{(\lambda,\delta)}}{A_n^{(\delta)}}$ $(2\lambda = \gamma)$, et où l'on a établi la formule

$$\int_0^{\pi} \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-\gamma} s_n^{(\delta)}(\omega) \sin\omega \, d\omega = 1 + (-1)^n \frac{A_n^{(\gamma-1)}}{A_n^{(\delta)}} \psi(-1)[1 + o(1)] + o(1).$$

En appliquant ce résultat, on voit que l'on a pour $\delta > -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} I_n^{(5)} &= A\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-\gamma} s_n^{(\delta)}(\omega)\sin\omega\, d\omega + o(1) \\ &= (-1)^n c_{42}(n+1)^{\gamma-1-\delta}[1+o(1)] + o(1), \end{aligned}$$

si l'on a soin de choisir ε suffisamment petit et n suffisamment grand. Cette formule prouve que la condition $\delta > \gamma - 1$ est nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} I_n^{(5)} = 0 \qquad \left(\delta > -\frac{1}{2} \text{ et } \gamma - 1\right). \tag{18}$$

Les résultats (15), (16), (17) et (18) prouvent le théorème suivant :

Théorème. — *Soit la fonction* $F(\theta', \varphi')$ *qui est à variation bornée partout sur la sphère* S, *sauf les voisinages* $\varpi_k \leqq \varepsilon$ *des points isolés* M_k *et qui pour* $\varpi_k \leqq \varepsilon$ *se présente sous la forme*

$$A_k\left(\sin\frac{\varpi_k}{2}\right)^{-\alpha_k} + F_k(\theta', \varphi') \qquad (\alpha_k < 2,\ \varpi_k \leqq \varepsilon),$$

où ϖ_k *dénote la distance sphérique des points* (θ', φ') *et* M_k *et où* $F_k(\theta', \varphi')$ *est à variation bornée. La série de Laplace de* $F(\theta', \varphi')$ *en tout point* M *qui n'appartient pas aux points* M_k *est sommable* $\left(C, \delta > -\frac{1}{2}\right)$ *avec la valeur moyenne de* $F(\theta', \varphi')$ *au point* M *pour somme, si* δ *est supérieur à* $\gamma - 1$ *et à* $\alpha - \frac{3}{2}$ $\left(\delta > \gamma - 1 \text{ et } \alpha - \frac{3}{2}\right)$, *où* γ *est l'ordre de l'infinitude de* $F(\theta', \varphi')$ *au point* W, *diamétralement opposé sur* S *au point* M, *et où* α *est le plus grand des ordres* α_k *de l'infinitude de* $F(\theta', \varphi')$ *en tous les autres points* M_k; *la série de Laplace n'est pas sommable* (C, δ) *en point* M, *si* δ *est inférieur ou égal à* $\gamma - 1$ *ou à* $\alpha - \frac{3}{2}$, $\delta \leqq \gamma - 1$ *et* $\alpha - \frac{3}{2}$.

Si la fonction développée $F(\theta', \varphi')$ est continue dans un domaine T sur S, la sommabilité $\left(C, \delta > -\frac{1}{2}\right)$, où δ est supérieur à $\gamma_0 - 1$ et à $\alpha_0 - \frac{3}{2}$, est uniforme dans tout domaine Δ qui est compris entièrement dans T, α_0 désignant le plus grand de tous les exposants α_k et γ_0 désignant le plus grand de ceux des exposants α_k qui appartiennent aux points M_k compris à l'intérieur du domaine T_0, diamétralement opposé sur S au domaine T. Pour un domaine Δ fixe il suffit de choisir pour γ_0 l'exposant le plus grand parmi ceux des α_k qui appartiennent aux points M_k situés à l'intérieur et sur la frontière du domaine Δ_0, diamétralement opposé sur S au domaine Δ.

Pour donner un exemple, envisageons la série de Laplace de la fonction $F(\theta', \varphi')$ qui ne devient infinie qu'en un seul point, le pôle nord de la sphère S, où son ordre d'infinitude est γ, et qui est continue et à variation bornée partout sur S, sauf la petite région entourant le pôle nord. Sa série de Laplace diverge partout sur S, si γ est supérieur ou égal à trois demis, $\gamma \geqq \frac{3}{2}$; elle converge partout, sauf les deux pôles de S, et même uniformément pour $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, si γ est inférieur à trois demis, mais supérieur ou égal à l'unité, $1 \leqq \gamma < \frac{3}{2}$, et elle converge aussi au pôle sud de S, si γ est inférieur à l'unité : $\gamma < 1$. Cette série de Laplace ne converge nulle part absolument, si γ est supérieur à un demi, $\gamma > \frac{1}{2}$, et elle ne converge pas absolument au pôle sud de S, si $\gamma > 0$. Si $\gamma = \frac{3}{2}$ ses sommes partielles oscillent en chaque point de S, à l'exception du pôle sud, entre des bornes finies et leurs bornes d'oscillation sont infinies, si $\gamma > \frac{3}{2}$. Au pôle sud, les sommes partielles oscillent pour $n \to \infty$ entre des bornes finies, si $\gamma = 1$, et oscillent entre $-\infty$ et $+\infty$, si $\gamma > 1$.

On voit l'analogie entre ce fait et la propriété suivante de la série de Legendre, indiquée par M. Hobson [1] : la série de Legendre de $f(x)$ diverge partout à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$, si $f(x)$ en un point frontière devient infinie d'ordre $\gamma \geqq \frac{3}{4}$.

7. — La sommabilité $\left(C, \delta \leqq \frac{1}{2}\right)$ de la série de Legendre en un point frontière $x = \pm 1$.

Envisageons la série de Legendre de $f(x)$

$$\text{III.} \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) \int_{-1}^{+1} f(y) P_n(y)\, dy \qquad (-1 \leqq x \leqq +1),$$

(1) *Proceedings of the Lond. Math. Society*, 2e série, t. 7, 1909, p. 34.

et supposons que $f(x)$ est absolument intégrable dans $(-1, +1)$ et devient infinie en un point frontière, — soit, pour fixer les idées, au point $x = -1$, — d'ordre γ. Nous allons étudier la sommabilité $\left(C, \delta \leqq \frac{1}{2}\right)$ de la série III en un autre point frontière, $x = +1$, sous l'hypothèse de l'existence de $f(1-0)$.

Il est bien connu que, sous les hypothèses faites, la série III pour $x = 1$ est sommable $(C, \delta > 2\gamma - 1)$ avec la somme $f(1-0)$, si γ est supérieur ou égal à trois quarts, $\gamma \geqq \frac{3}{4}$, et sommable $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$, si γ est inférieur à trois quarts, $\gamma < \frac{3}{4}$. Il s'agit d'établir que pour γ inférieur à trois quarts, $\gamma < \frac{3}{4}$, elle est sommable $\left(C, \delta = \frac{1}{2}\right)$ et a pour somme $f(1-0)$, si $f(x)$ est à variation bornée dans l'intervalle $(1-\varepsilon, 1)$. Le problème posé n'est que le cas particulier pour

$$F(\theta, \varphi) \equiv f(\cos\theta) = f(x)$$

du problème traité au paragraphe 5, quand le point M se trouve au pôle nord de S et quand par conséquent $\omega = \theta'$ et $\psi = \varphi'$. Donc la fonction auxiliaire $\bar{f}(\omega)$

$$\bar{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi \sin\omega}\int_{C_\omega} F(\theta', \varphi')\, ds' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos\theta')\, d\varphi' \equiv f(\cos\theta') = f(x)$$

ne diffère pas de la fonction développée et l'on obtient le théorème suivant :

Théorème. — *La série* III *est sommable* $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ *pour* $x = 1\ [x = -1]$ *et a pour somme* $f(1-0)[f(0-1)]$, *si la fonction développée* $f(x)$ *est à variation bornée dans l'intervalle* $(1-\varepsilon, 1)[(-1, \varepsilon - 1)]$ *et si elle est absolument intégrable dans tout intervalle* $(-1, +1)$, *pourvu que* γ *soit inférieur à trois quarts,* $\gamma < \frac{3}{4}$; *pour* γ *supérieur ou égal à trois quarts,* $\gamma \geqq \frac{3}{4}$, *la série* III *n'est pas sommable* $\left(C, \frac{1}{2}\right)$.

En appliquant le second théorème du paragraphe 5, on voit que l'hypothèse « $f(x)$ *est à variation bornée dans* $(1-\varepsilon, 1)$ » peut être remplacée, sous la supposition de l'existence de $f(1-0)$, par la condition suivante :

$$\lim_{\rho=0}\chi(\rho)=\lim_{\rho=0}\int_{\rho}^{\varepsilon}\left|\frac{f(\cos\overline{\omega+\rho})-f(1-0)}{\sin\frac{\omega+\rho}{2}}-\frac{f(\cos\omega)-f(1-0)}{\sin\frac{\omega}{2}}\right|d\omega=0$$

qui est remplie lorsque $f(x)$ satisfait dans le voisinage du point $x=1$ à l'un des critères connus de la convergence des séries trigonométriques. Par exemple, on a $\lim\limits_{\rho=0}\chi(\rho)=0$, si $f(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz-Dini :

$$\lim_{\omega=0}|f(\cos\omega)-f(1-0)|\log\omega=0,$$

c'est-à-dire à la condition

$$\lim_{x=1}|f(x)-f(1-0)|\log(1-x)=0,$$

ce qui donne le théorème :

La série III *d'une fonction $f(x)$ absolument intégrable dans* $(-1,+1)$ *est sommable* $\left(C,\frac{1}{2}\right)$ *pour* $x=+1\,[x=-1]$ *et a pour somme* $f(1-0)\,[f(0-1)]$, *si cette expression existe et si l'ordre γ d'infinitude de $f(x)$ au point* $x=-1\,[x=+1]$ *est inférieur à trois quarts,* $\gamma<\frac{3}{4}$, *pourvu qu'au point* $x=+1\,[x=-1]$ $f(x)$ *satisfasse à la condition de Lipschitz-Dini :*

$$\lim_{\rho=0}|f(1-\rho)-f(1-0)|\log\rho=0 \qquad (\text{pour } x=1);$$
$$\left[\lim_{\rho=0}|f(\rho-1)-f(0-1)|\log\rho=0 \qquad (\text{pour } x=-1)\right].$$

Passons maintenant à la sommabilité $\left(C,\delta<\frac{1}{2}\right)$ et supposons que $f(x)$ est à variation bornée partout dans $(-1,+1)$, sauf les voisinages des points intérieurs isolés $x=\xi_k$, où $f(x)$ se présente sous la forme (19) :

$$A_k|x-\xi_k|^{-\beta_k}+\varphi_k(x) \qquad (\beta_k<1) \tag{19}$$

ou sous la forme (20) :

$$(20) \qquad A_k \log|x-\xi_k| + \varphi_k(x) \qquad (|\xi_k| < 1;\ |x-\xi_k| \leqq \varepsilon),$$

et sauf le voisinage du point $x = -1$, où $f(x)$ se présente sous la forme

$$A(1+x)^{-\gamma} + \varphi(x) \qquad (-1 \leqq x \leqq \varepsilon - 1),$$

$\varphi(x)$ et $\varphi_k(x)$ étant à variation bornée. Nous dirons dans ce cas que $f(x)$ satisfait à l'hypothèse (H).

La sommabilité $(C, \delta \geqq 0)$ de la série de Legendre en un point frontière pour $\delta < \frac{1}{2}$ a été étudiée par MM. Hobson (1) et Chapman (2), sous l'hypothèse que la fonction développée $f(x)$ est à variation bornée non seulement à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$ [sauf les voisinages des points $x = \xi_k$, où elle se présente sous la forme (19)], mais aussi au voisinage $1 \geqq |x| \geqq 1 - \varepsilon$ des deux points frontières $x = \pm 1$. M. Hobson établit qu'en ce cas la série III diverge aux points frontières $x = \pm 1$, si β est supérieur ou égal à un demi, $\beta \geqq \frac{1}{2}$, β désignant le plus grand de tous les exposants β_k, et qu'elle converge pour $x = \pm 1$, si β est inférieur à un demi, $\beta < \frac{1}{2}$. M. Chapman envisage le cas $1 > \beta \geqq \frac{1}{2}$ et démontre qu'en ce cas la série III est sommable $\left(C, \frac{1}{2} > \delta > \beta - \frac{1}{2}\right)$ pour $|x| = 1$.

On voit que les cas où β est inférieur à un demi, $\beta < \frac{1}{2}$, et où $f(x)$ possède à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$ des infinis logarithmiques, sont restés inétudiés et que, quant à l'allure de $f(x)$ dans le voisinage du point frontière, différent de celui où l'on envisage la sommabilité (C, δ) de la série III, notre hypothèse (H) est beaucoup plus large que l'hypothèse faite par MM. Hobson et Chapman, qui supposent $f(x)$ à variation bornée dans le voisinage des deux points frontières $x = \pm 1$.

En appliquant les résultats et le théorème du paragraphe 6 dans le

(1) *Proceedings of the Lond. Math. Society*, 2e série, t. 7, 1909, p. 39.
(2) *Mathematische Annalen*, t. 72, 1912, p. 224-226, § 5.

cas particulier, quand le point $M(\theta, \varphi)$ se trouve au pôle nord de S et quand

$$F(\theta', \varphi') \equiv f(\cos\theta') = f(x)$$

nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La série de Legendre d'une fonction* $f(x)$, *qui satisfait à l'hypothèse* (H), *est sommable* $\left(C, \delta > -\frac{1}{2}\right)$ *en point frontière* $x = 1\ [x = -1]$ *avec la somme* $f(1-0)\,[f(0-1)]$, *si* $f(x)$ *ne possède à l'intérieur de l'intervalle* $(-1, +1)$ *que des infinis logarithmiques et si* γ *est inférieur ou égal à un quart,* $\gamma \leqq \frac{1}{4}$, *et n'est pas dans ce cas sommable* $\left(C, \delta \leqq -\frac{1}{2}\right)$. *La série* III *est toujours sommable* (C, δ) *pour* δ *supérieur à* $2\gamma - 1$ *et à* $\beta - \frac{1}{2}$, $\delta > 2\gamma - 1$ *et* $\beta - \frac{1}{2}$, *où* β *est le plus grand de tous* β_k, *et elle n'est pas sommable* (C, δ), *si* δ *est inférieur ou égal à* $2\gamma - 1$ *ou à* $\beta - \frac{1}{2}$: $\delta \leqq 2\gamma - 1$ *et* $\beta - \frac{1}{2}$.

Les résultats de MM. Hobson et Chapman sont des cas particuliers de ce théorème général.