J. BOUSSINESQ

Rectification et complément au mémoire de la goutte liquide tournante, inséré au commencement du volume

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 38 (1921), p. 431-437
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1921_3_38__431_0>

RECTIFICATION ET COMPLEMENT

AU

MÉMOIRE DE LA GOUTTE LIQUIDE TOURNANTE,

INSÉRÉ AU COMMENCEMENT DU VOLUME

PAR M. J. BOUSSINESQ

I. Une regrettable erreur de calcul dépare le premier Mémoire de ce Volume, non pas, *précisément*, de manière à en altérer les résultats dans de grands rapports, mais en les compliquant et masquant ainsi tout à fait de belles lois du phénomène étudié. Cette erreur se trouve dans le dernier terme de la formule (16), au bas de la page 7, terme dont la vraie expression est

$$-\varepsilon_0 \frac{k^2}{2} \int_1^\infty \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 \frac{dt}{t^2}. \tag{16 bis}$$

La fonction qui y figure sous le signe $\int$ se dédouble en

$$\frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad -\frac{4}{(t^2+1)^2},$$

qui ont respectivement les fonctions primitives

$$-\frac{1}{t} \quad \text{et} \quad -2\left(\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arc\,tang} t\right).$$

Or celles-ci, entre les deux limites 1 et ∞, donnent les intégrales définies 1 et $1-\pi$. Il en résulte, pour le dernier terme de la formule (17), l'expression

$$-\frac{6-\pi}{4} \varepsilon_0 k^2, \tag{17 bis}$$

puis, pour les formules (20) et (21) (p. 10),

$$b = \varepsilon_0(1 - 2k^2), \tag{20 bis}$$

$$\text{Aplatissement} = k^2. \tag{21 bis}$$

Or ces nouvelles formules, jointes à $a = \varepsilon_0(1 - k^2)$, à la définition (5) de k et au fait que les rapports de a, b, ε_0 à R diffèrent très peu de 1, conduisent à la triple proportion, très approchée,

$$\frac{\varepsilon_0 - a}{R} = \frac{a - b}{R} = \frac{k^2}{1} = \frac{\omega^2 R^3}{8f}, \tag{29}$$

exprimant de belles lois, éminemment simples.

Par suite encore, à la page 12, les formules (27) deviennent à leur tour

$$\left(\frac{R}{\varepsilon_0}\right)^3 = 1 \quad \text{ou} \quad \varepsilon_0 = R. \tag{27 bis}$$

Mais il est clair que le rapport de ε_0 à R ainsi obtenu n'est qu'un rapport-limite, exact pour $k^2 = 0$ seulement. Lorsque k^2 est très petit, ce rapport prend naturellement la forme $1 + \nu k^2 + \ldots$. Et la deuxième formule (27 *bis*) devient

$$\varepsilon_0 = R(1 + \nu k^2 + \ldots). \tag{27 ter}$$

En attendant qu'une *troisième approximation*, poussée jusqu'aux termes en k^4, ou un procédé bien plus simple qui s'offrira à nous, ait déterminé le coefficient ν, il faudra évidemment garder la constante ε_0, de préférence à R, dans le courant des calculs.

Enfin, au n° X (p. 12), la formule (28) admet des simplifications analogues. Le premier terme du second membre de (16), où la limite inférieure d'intégration se trouve maintenant remplacée par $\sqrt{\frac{1+\rho}{\alpha-\rho}}$, prend la forme

$$(2 - k^2)\left(\frac{1}{2}\sqrt{(1+\rho)(\alpha-\rho)} - \frac{1-\alpha}{2}\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{\alpha-\rho}{1+\rho}}\right)$$
$$= \varepsilon_0\left[\sqrt{(1+\rho)(1-\rho-k^2)} - \frac{k^2}{2}\sqrt{1-\rho^2} - k^2\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\right].$$

Quant au second terme, tout entier petit, il devient de même

$$-\tau_0 \frac{k^2}{2}\left[\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}+\sqrt{1-v^2}-2\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\right].$$

Il vient donc à la place de (28), pour la somme des deux termes, où se détruisent les arcs tangente,

$$(28\,bis)\qquad y=\tau_0\left[\sqrt{(1+v)(1-v-k^2)}-\frac{k^2}{2}\left(2\sqrt{1-v^2}+\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\right)\right]\quad (^1).$$

II. En même temps que se publiait le petit Mémoire du commencement du présent Volume, et bien avant qu'apparût l'erreur de la formule (16), des recherches heureusement indépendantes de cette formule (16) me firent connaître, même pour des valeurs non plus petites, mais quelconques, de k^2, d'intéressantes propriétés de la courbure $\frac{1}{\tau}$ du méridien de la goutte tournante et de la développée de ce méridien. Elles résultent presque immédiatement de la formule du bas de la page 3 donnant

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{x}{\tau_0}+\frac{\omega^2}{8f}x^3$$

et de ce que

$$\frac{1}{\tau}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Celle-ci, multipliée par τ_0, devient, en effet,

$$\frac{\tau_0}{\tau}=1+3\frac{\omega^2\tau_0}{8f}x^2=1+\frac{3}{\tau_0^2}k^2x^2.$$

Réintroduisons le carré u du rapport $\frac{x}{\tau_0}$ (que nous appelions v). Et

---

(1) C'est une élève déjà ancienne du Cours de Physique mathématique de la Faculté des Sciences, M[lle] Suzanne Jandin, professeur à l'École normale supérieure libre de jeunes filles de Neuilly, qui a découvert dans le dernier terme de la formule (16), en septembre 1921, l'erreur initiale de calcul masquant tous ces résultats simples : c'est donc à elle qu'il convient d'attribuer, pour une bonne part, la découverte des formules approchées, si élégantes, de la question de Physique étudiée ici.

nous aurons la formule cherchée :

$$\frac{\imath_0}{\imath} = 1 + 3k^2\frac{x^2}{\imath_0^2} = 1 + 3k^2 u. \tag{30}$$

La courbure croît donc, du pôle, où $u = 0$, à l'équateur, où $u = \alpha^2$, dans le rapport de 1 à $1 + 3k^2\alpha^2$: son accroissement est partout proportionnel au carré x^2 de l'abscisse.

Appelons λ l'angle de la normale, tirée en (x, y), vers le dehors, avec le demi-axe équatorial des x positifs, angle qui serait la latitude si le quart considéré du méridien était celui de la Terre qui va du pôle boréal à l'équateur et dont la tangente est $-\frac{1}{y'}$, ou, d'après (9) différentiée en x,

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\sqrt{1 - u(1 + k^2 u)^2}}{\sqrt{u}\,(1 + k^2 u)}. \tag{31}$$

On en déduit

$$\cos\lambda = \sqrt{u}\,(1 + k^2 u), \qquad \sin\lambda = \sqrt{1 - u(1 + k^2 u)^2};$$

et puis, en appelant ξ, η les deux coordonnées du centre de courbure pour le point (x, y) du méridien,

$$\left\{\begin{aligned} x - \xi &= \imath\cos\lambda = \frac{\imath_0\sqrt{u}\,(1 + k^2 u)}{1 + 3k^2 u},\\ y - \eta &= \imath\sin\lambda = \frac{\imath_0\sqrt{1 - u(1 + k^2 u)^2}}{1 + 3k^2 u}. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Observant que $x = \imath_0\sqrt{u}$ et que y a la valeur (9), c'est-à-dire

$$\frac{\imath_0}{2}\int_u^{\alpha^2} \frac{(1 + k^2 u)\,du}{\sqrt{1 - u(1 + k^2 u)^2}}, \tag{33}$$

les deux équations (32), résolues par rapport à ξ, η, donnent à ces coordonnées du point quelconque (ξ, η) de la développée du quart considéré de méridien, les valeurs

$$\xi = \frac{2k^2\imath_0 u\sqrt{u}}{1 + 3k^2 u}, \qquad \eta = \frac{\imath_0}{2}\left[\int_u^{\alpha^2} \frac{(1 + k^2 u)\,du}{\sqrt{1 - u(1 + k^2 u)^2}} - \frac{2\sqrt{1 - u(1 + k^2 u)^2}}{1 + 3k^2 u}\right] \tag{34}$$

Éliminons de la seconde (34) l'intégrale définie qui y figure, au moyen de son expression fournie par la formule (24), prise entre les limites (u, α^2) et où paraîtra une intégrale définie plus compliquée, mais *affectée du facteur* k^2. La seconde (34) deviendra ainsi

$$(35) \qquad \eta = 3k^2\mathfrak{r}_0\left[\frac{u\sqrt{1-u(1+k^2u)^2}}{1+3k^2u} - \frac{1}{2}\int_u^{\alpha^2}\frac{u(1+k^2u)\,du}{\sqrt{1-u(1+k^2u)^2}}\right].$$

III. Bornons-nous maintenant au cas de k^2 très petit, où l'on néglige k^4. Alors la présence du facteur k^2 devant le second membre de (35) permet d'évaluer la quantité entre crochets dans l'hypothèse approchée d'un méridien circulaire, où, pour k^2 nul, cette quantité entre crochets se réduit à

$$\left[u\sqrt{1-u} - \frac{1}{2}\int_u^1\frac{u\,du}{\sqrt{1-u}}\right].$$

Le second terme y devient identiquement, grâce à une intégration par parties,

$$\left[u\sqrt{1-u} + \frac{2}{3}(1-u)^{\frac{3}{2}}\right]_{u=u}^{u=1},$$

c'est-à-dire

$$-u\sqrt{1-u} - \frac{2}{3}(1-u)^{\frac{3}{2}};$$

et la formule (35), divisée par $2k^2\mathfrak{r}_0$, puis élevée, dans ses deux membres, à la puissance $\frac{1}{3}$, est finalement

$$\left(\frac{\eta}{2k^2\mathfrak{r}_0}\right)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt{1-u},$$

ou bien, par une élévation au carré,

$$(36) \qquad u + \left(\frac{\eta}{2k^2\mathfrak{r}_0}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Or la première (34), divisée par $2k^2\mathfrak{r}_0$, donne de même, à la limite $k^2 = 0$, en élevant finalement les deux membres à la puissance $\frac{2}{3}$,

$$u = \left(\frac{\xi}{2k^2\mathfrak{r}_0}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Portons dans (36) cette valeur de u; et nous reconnaîtrons bien, vu l'infiniment petite valeur de k^2, l'équation classique

$$(37) \qquad \left(\frac{\xi}{2k^2 v_0}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{2k^2 v_0}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

de la microscopique développée, entourant le centre de son étoile à quatre pointes égales, qui caractérise le cercle, considéré comme limite d'ellipses d'un aplatissement évanouissant.

IV. Mais revenons à l'équation approchée (28 *bis*) du méridien (p. 433), où ϱ est $\frac{x}{v_0}$ et k^2 défini par (29) (p. 432), pour en dégager une vue nette de cette courbe, comparativement à l'ellipse construite sur les mêmes axes $2a$, $2b$, ou dont l'équation serait

$$(38) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

A cet effet, cherchons les valeurs que reçoit, le long de notre courbe, le premier membre de (38). L'inverse de b étant, d'après (20 *bis*), $\frac{1+2k^2}{v_0}$, la formule (28 *bis*) donnera

$$(39) \qquad \frac{y}{b} = \sqrt{(1+\varrho)(1-\varrho-k^2)} + k^2\left(\sqrt{1-\varrho^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\varrho}{1+\varrho}}\right).$$

Élevons au carré, en négligeant au second membre le carré du terme où figure k^2. Il viendra, par des réductions immédiates,

$$(40) \qquad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \varrho^2 - 2k^2\varrho^2.$$

Formons le carré analogue de $\frac{x}{a} = \varrho(1+k^2)$. Cela donne

$$\frac{x^2}{a^2} = \varrho^2 + 2k^2\varrho^2;$$

et, en ajoutant (membre à membre) cette relation à (40),

$$(41) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Donc le méridien, lieu des points (x, y), se confond avec une ellipse, et notre goutte liquide est un *ellipsoïde de révolution à axes* $2a$, $2a$, $2b$, ayant par suite, comme volume,

$$\frac{4}{3}\pi a^2 b = \frac{4}{3}\pi \iota_0^3(1-k^2)^2(1-2k^2) = \frac{4}{3}\pi \iota_0^3(1-4k^2).$$

Or ce volume égale celui de la figure sphérique de repos $\frac{4}{3}\pi R^3$. La relation, jusqu'ici inconnue, entre ι_0 et R, sera donc

$$\iota_0^3(1-4k^2) = R^3 \qquad \text{ou} \qquad \iota_0 = \left(1+\frac{4}{3}k^2\right)R.$$

Tel est le procédé simple, annoncé après (27 *ter*), pour déterminer la constante ν, qui égale ainsi $\frac{4}{3}$.

V. Alors l'équation (30) définissant les rayons de courbure ι du méridien devient complètement explicite, c'est-à-dire exprimée au moyen de la donnée immédiate R. Et il en résulte

$$(42) \qquad \frac{\iota}{R} = 1 + 3k^2\left(\frac{4}{9} - \frac{x^2}{R^2}\right).$$

On voit que le rayon de courbure ι du méridien excède R aux latitudes dont le cosinus $\frac{x}{R}$ n'atteint pas $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire supérieures à 48° 11' $\frac{1}{3}$ environ; mais il est moindre que R dans la large zone équatoriale à latitudes plus basses, zone comprenant la fraction $\frac{\sqrt{5}}{3} = 0,7454$, ou les trois quarts environ, de la surface totale de la goutte.

A l'équateur $x = R$, ce rayon de courbure, qu'on peut alors appeler ι_e, devient

$$(43) \qquad \iota_e = R\left(1-\frac{5}{3}k^2\right).$$