ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE FRÉCHET

Sur les ensembles abstraits

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 38 (1921), p. 341-388

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1921_3_38__341_0>

SUR

LES ENSEMBLES ABSTRAITS

Par M. Maurice FRÉCHET

(Université de Strasbourg)

Introduction.

1. Des travaux intéressants sur la théorie des ensembles abstraits ont été publiés récemment. Je me propose ici d'étendre ou de compléter certains d'entre eux. J'adopterai dans ce but la terminologie, un peu différente de celle de ma Thèse, que j'ai employée dans mon dernier Mémoire (X) (1). Dans ce Mémoire, j'avais fait remarquer (p. 1, § 2) qu'il serait préférable d'appeler éléments d'accumulation de E, les éléments de l'ensemble dérivé de E, mais je ne m'étais pas décidé à abandonner l'expression habituelle d'élément-limite. Je m'y résous maintenant, réservant cette dernière expression, à l'exemple de Jules Tannery, pour désigner l'élément d'accumulation unique d'une suite convergente.

En outre, je modifie légèrement le sens du mot *séparable* introduit dans ma Thèse et je désigne ainsi tout ensemble E dont on peut extraire un ensemble dénombrable N tel que E appartienne à $N + N'$.

Enfin, j'appelle classe ($\mathcal{D}$) *complète* une classe ($\mathcal{D}$) où, parmi toutes les définitions de la distance compatibles avec la définition supposée préexistante des éléments d'accumulation, l'une au moins admet une généralisation du théorème de Cauchy sur la convergence d'une suite. Il serait du reste intéressant de savoir s'il existe des classes ($\mathcal{D}$), non complètes.

On m'excusera de n'avoir pas suivi dans ce qui suit un ordre

(1) Les chiffres romains renvoient à la liste bibliographique placée à la fin de cet article. Cette liste renferme les titres des Mémoires que nous aurons l'occasion de citer, sans viser aucunement à la bibliographie complète de notre sujet.

entièrement méthodique. Les différentes sections ont été écrites à peu près indépendamment les unes des autres, chacune étant consacrée à compléter ou généraliser les résultats d'un auteur particulier.

Je me propose de publier bientôt un exposé d'ensemble, sans démonstration mais précisant l'ensemble des résultats acquis et les replaçant dans leur ordre naturel ([1]).

I. — Sur une nouvelle extension d'un théorème de Borel-Lebesgue.

2. *Introduction.* — Ayant montré récemment (XVI) que dans une classe ($\mathcal{L}$) la propriété que j'ai appelée *propriété de Borel* est équivalente à la propriété : tout ensemble dérivé est fermé, j'ajoutais qu'il serait intéressant d'obtenir une équivalence analogue pour la propriété de Borel-Lebesgue. J'indiquais, en outre, une condition minimum et une condition maximum entre lesquelles se placerait la condition demandée.

M. Robert-L. Moore a donné (XVII), la réponse complète à la question que je posais en introduisant une notion qui se confond avec celle d'ensemble compact dans des cas étendus mais qui est cependant plus restrictive dans le cas général. C'est la notion d'ensemble parfaitement compact pour laquelle j'emploie une expression proposée par M. Janiszewski et une définition qui dérive de celle proposée par M. R.-L. Moore.

Mais, depuis mon Mémoire précédemment cité, j'ai étendu (X) les résultats que j'avais obtenus au cas d'une classe dans laquelle les conditions 1°, 2°, 3°, 5° de mon second Mémoire sont satisfaites.

Je me propose d'étendre aussi à cette même classe que j'appellerai *classe* ($\mathcal{H}$) certains des résultats de M. R.-L. Moore.

3. *Ensembles parfaitement compacts.* — Disons avec R.-L. Moore qu'une suite d'ensembles est *monotone* si de deux quelconques de ces ensembles toujours l'un appartient à l'autre. Il en résulte qu'une telle suite est *ordonnée* en convenant par exemple que E est de rang supérieur à F si E est une partie de F.

([1]) Cet exposé, *Esquisse d'une théorie des ensembles abstraits*, est en cours d'impression dans le second Tome des *Sir Asutosh Mookerjee's.* (*Commemoration Volumes*, *Baptist Mission Press*, Calcutta).

Ceci étant, nous dirons qu'un ensemble G est *parfaitement compact* si quelle que soit une suite monotone de sous-ensembles de G, il existe toujours un élément α qui est commun à cette suite de sous-ensembles ou qui est commun à leurs dérivés. Nous dirons que G est parfaitement compact en soi si l'on peut toujours choisir pour α un élément de G. C'est ce qui a lieu, par exemple, si G est fermé.

Considérons un sous-ensemble infini quelconque I d'un ensemble parfaitement compact E. Il existe dans I, une suite infinie d'éléments distincts a_1, a_2, ... En appelant E_n, l'ensemble des éléments a_n, a_{n+1}, ... on voit que la suite I, E_1, E_2, ... est une suite monotone de sous-ensembles de E. Comme I, E_1, E_2, ... n'ont évidemment aucun élément en commun, il y a nécessairement un élément commun aux dérivés de I, E_1, ...

Donc le dérivé de tout sous-ensemble infini I de E comporte au moins un élément : autrement dit E est *compact*.

Ainsi un ensemble parfaitement compact est compact quelle que soit la définition des éléments d'accumulation, c'est-à-dire des éléments des ensembles dérivés [1].

4. M. R.-L. Moore a montré par un exemple que la réciproque n'est pas toujours vraie. Il donne comme exemple celui des nombres transfinis de la seconde classe. Cet exemple se présente si naturellement qu'il avait été déjà donné en 1912 par S. Janiszewski (comme l'a remarqué M. R.-L. Moore au moment de corriger ses épreuves) et donné aussi dans le même but par F. Riesz (XXV) en 1908.

5. M. R.-L. Moore a par contre indiqué sans démonstration que tout ensemble compact est parfaitement compact dans une classe où une distance est définie, classe que j'appelai d'abord *classe* ($\mathcal{E}$) et que j'appelle maintenant (XI) *classe* ($\mathcal{D}$). Démontrons ce résultat.

Prenons d'abord le cas où l'on suppose que la suite monotone peut être numérotée sans en changer l'ordre (autrement dit qu'elle a le type d'ordre ω). Nous considérons donc une suite S de sous-ensembles E_1, E_2, ..., E_n, ... d'un ensemble compact E, chacun des E_n comprenant

---

[1] M. R.-L. Moore a déjà fait remarquer qu'il en est ainsi dans toute classe ($\mathcal{L}$).

le suivant. Soit a_n un élément quelconque de E_n. S'il n'existe dans la suite des a_n qu'un nombre fini d'éléments distincts, il y a sûrement un élément commun aux E_n. Sinon soit

$$a_{n_1}, \quad a_{n_2}, \quad \ldots, \quad a_{n_p}, \quad \ldots$$

une suite d'éléments a_n distincts et d'indices croissants. Puisque E est compact, il y a au moins un élément d'accumulation des éléments de cette suite. Cet élément a étant élément d'accumulation de la somme des ensembles de

$$a_{n_1}, \quad a_{n_2}, \quad \ldots \quad a_{n_p}$$

et de

$$a_{n_{p+1}}, \quad a_{n_{p+2}}, \quad \ldots$$

est nécessairement élément d'accumulation du second et par conséquent de $E_{n_{p+1}}$ et par suite de E_n pour $n \leqq n_{p+1}$. Ceci ayant lieu quel que soit p, on voit bien que a est élément d'accumulation commun à E_1, E_2, ..., E_n, ...

Si l'on examine cette démonstration, on voit qu'elle ne suppose pas que la classe des éléments considérés soit une classe ($\mathcal{D}$), elle exige seulement que les conditions de F. Riesz que j'ai appelées (X) *conditions* 1°, 2°, 3° soient vérifiées.

6. *Cas d'identité entre ensembles compacts et parfaitement compacts.* — Pour le cas général, la méthode n'est plus aussi simple. Nous allons supposer définitivement que la classe d'éléments considérée est une classe ($\mathcal{D}$), c'est-à-dire que les éléments d'accumulation y sont définis par l'intermédiaire d'une définition de la distance (que, dans ma Thèse, j'appelai *écart*).

Nous savons que dans une classe ($\mathcal{D}$) tout ensemble compact E est séparable, c'est-à-dire que l'on peut en extraire un ensemble dénombrable N d'éléments

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

tel que tout élément de E appartient à N ou à N'.

Appelons d'autre part (a, G) la borne inférieure de la distance d'un élément a aux différents éléments d'un ensemble G. Dire que (a, G) est nul, c'est donc dire que a appartient à G ou à son dérivé G'.

Ceci étant, soit S une suite monotone de sous-ensembles G d'un ensemble compact E d'éléments d'une classe $(\mathcal{D})$. Quel que soit l'élément a, le nombre (a, G) ne peut qu'augmenter quand on parcourt la suite ordonnée des ensembles G de rangs croissants dans la suite S. Soit (a, S) sa borne supérieure et soit ρ la borne inférieure de (a_n, S) quand a_n varie dans N. Si ρ était positif, on aurait, en prenant ρ' positif et inférieur à ρ,

$$(a_n, S) > \rho'$$

quel que soit n. Par conséquent, il y aurait un ensemble G_n de la suite S tel que $(a_n, G_n) > \rho'$. Appelons $G^{(n)}$ celui des ensembles $G_1, \ldots, G_n$ qui est contenu dans les $n-1$ autres. On aura

$$(a_n, G^{(n)}) \geqq (a_n, G_n) > \rho'.$$

La suite E, G^1, G^2, ... est une suite monotone et puisque nous sommes dans le cas simple envisagé tout d'abord il y a un élément a appartenant à tous les $G^{(n)}$ et à E, ou à tous les dérivés des $G^{(n)}$, donc tel que

$$(a, G^{(n)}) = 0$$

quel que soit n. Mais a appartenant à E appartient à N ou à N' de sorte que l'on peut trouver un élément a_{n_i} de N tel que

$$(a, a_{n_i}) < \frac{1}{i}$$

par exemple. Et, d'autre part, il existera un élément b_i de $G^{(n_i)}$ tel que

$$(a, b_i) < \frac{1}{i}.$$

Donc

$$(a_{n_i}, G^{(n_i)}) \leqq (a_{n_i}, b_i) \leqq (a_{n_i}, a) + (a, b_i) < \frac{2}{i}$$

quantité qui est inférieure à ρ' pour i assez grand. Nous arrivons donc à une contradiction. Il faut donc supposer $\rho = 0$. Mais alors quel que soit i, on peut trouver a_{p_i} tel que

$$(a_{p_i}, S) < \frac{1}{i}$$

d'où

$$(a_{p_i}, G) < \frac{1}{i}$$

quel que soit G de S. Tirons de la suite des a_{p_i}, puisque E est compact, une suite convergente a_{q_i} et soit c son élément limite. Il y a un élément c_i de G tel que

$$(a_{q_i}, \mathrm{G}) < (a_{q_i}, c_i) < \frac{1}{i},$$

d'où

$$(c, \mathrm{G}) \leqq (c, c_i) \leqq (c, a_{q_i}) + (a_{q_i}, c_i),$$

ce qui prouve que $(c, \mathrm{G}) = 0$ quel que soit G ; on trouve bien que l'ensemble est parfaitement compact.

Il serait intéressant de voir quelle est la classe la plus générale dans laquelle tout ensemble compact est parfaitement compact. Nous pouvons l'appeler une *classe* $(\mathcal{M})$; nous savons que parmi les classes $(\mathcal{M})$ figurent les classes $(\mathcal{D})$, mais que, parmi les classes $(\mathcal{L})$, il y a des classes qui ne sont pas $(\mathcal{M})$.

7. Nous avons vu que si un ensemble compact E fait partie d'une classe $(\mathcal{D})$, toute suite monotone S de sous-ensembles G de E aura un élément a commun à tous les G ou à tous leurs dérivés. Si E est fermé, cet élément a appartiendra à E. Il en sera encore de même si E, sans être fermé, est compact en soi, c'est-à-dire est tel que tout sous-ensemble infini de E a au moins un élément d'accumulation qui appartient à E. Inversement la démonstration faite plus haut montre que pour une classe quelconque [$(\mathcal{D})$ ou non], un ensemble parfaitement compact en soi est compact en soi.

8. *La propriété de Borel-Lebesgue. Condition nécessaire.* — Suivons maintenant, mais sous des hypothèses plus générales, le raisonnement de R.-L. Moore.

Il s'agit maintenant de généraliser le théorème de Borel-Lebesgue. Pour faciliter le langage, nous avons convenu (X) de dire qu'un ensemble E possède la propriété de Borel-Lebesgue si, toutes les fois qu'il existe une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles I telle que tout élément de E soit intérieur à l'un au moins des I, on peut supposer que la famille $\mathcal{F}$ soit finie.

Dans la classe $(\mathcal{V})$ *la plus générale* (1) *tout ensemble possédant la propriété de Borel-Lebesgue est parfaitement compact en soi.* Tout d'abord il est au moins compact en soi, comme nous l'avons montré ailleurs (X).

(1) Je rappelle que j'ai adopté finalement (X) une définition des classes $(\mathcal{V})$ et des voisinages beaucoup plus générale que celle de ma Thèse.

Par conséquent si la classe était une classe $(\mathcal{D})$, cela suffirait pour établir la proposition. Mais restons dans le cas général. Il nous suffit de prouver que si S est une suite monotone quelconque de sous-ensembles G de E possédant chacun au moins un élément, et n'ayant aucun élément en commun, il existe un élément de E qui est élément d'accumulation pour tous les G.

Il faut d'abord prouver que les G ont chacun au moins un élément d'accumulation appartenant à E. Si chacun des G était infini, cela résulterait du fait que E est compact. Or, si l'un, G_0, des G ne comprenait qu'un nombre fini d'éléments $c_1, c_2, \ldots, c_q$, comme aucun d'eux ne peut appartenir à tous les G, c_1 n'appartient pas à l'un, G_1 des G; ... c_q n'appartient pas à G_q. La suite S étant monotone l'un des $G_0, G_1, \ldots. G_q$ est compris dans tous les autres et, par suite, ne posséderait aucun élément.

Nous pouvons donc supposer que chaque G de S possède au moins un élément d'accumulation. Soit G_0 l'un des G et a l'un des éléments d'accumulation de G_0 qui appartiennent à E. Si le théorème n'est pas exact, il existe un G de S, soit G_a dont a n'est pas élément d'accumulation et, par conséquent, il existe un voisinage I_a de a qui n'a aucun élément distinct de a en commun avec G_a.

En outre, s'il existe des éléments b de E n'appartenant pas à G'_0, il existe, pour chacun d'eux au moins un voisinage J_b de b qui n'a aucun élément (distinct de b) en commun avec G_0.

Alors tout élément de E est intérieur à l'un des ensembles I_a, J_b. Si donc E possède la propriété de Borel-Lebesgue, on peut remplacer la famille $\mathcal{F}$ des I_a, et des J_b par une famille $\mathcal{F}_1$ composée d'un nombre fini des uns et des autres $I_{a_1}, I_{a_2}, \ldots, I_{a_q}, J_{b_1}, \ldots, J_{b_r}$. Mais soit G_1 celui des ensembles $G_0, G_{a_1}, \ldots, G_{a_q}$ qui est compris dans tous les autres; $I_{a_1}, \ldots, J_{b_r}$ n'auront aucun élément en commun avec G_1, sauf peut-être certains des éléments $a_1, \ldots, b_r$. Donc G_1 serait composé d'un nombre fini d'éléments et nous avons vu que cela n'est pas possible.

On voit qu'en se plaçant dans le cas plus général des classes $(\mathcal{V})$ cette généralité même impose l'emploi des voisinages qui dispensent du lemme de Moore.

9. *Condition suffisante. Théorème préliminaire.* — Pour la réci-

proque, nous ne considérerons pas des classes aussi générales, mais nous resterons plus général que R.-L. Moore.

Nous avons généralisé ailleurs (X) une propriété énoncée par M. E. R. Hedrick dans le cas des classes $(\mathcal{L})$; la propriété de Hedrick généralisée est la suivante : si a est élément d'accumulation d'un ensemble F sans être élément d'accumulation d'un ensemble E, il existe un sous-ensemble F_1 de F qui a aussi a pour élément d'accumulation et dont tous les éléments sont intérieurs à E. Elle n'est pas exacte pour toute classe : elle équivaut, pour les classes $(\mathcal{V})$, à l'ensemble des conditions 2° et 5° de mon Mémoire (X). C'est dans une telle classe, classe $(\mathcal{V})$, vérifiant 2° et 5°, que nous démontrerons d'abord un lemme établi par R.-L. Moore pour les classes $(\mathcal{L})$: si E est un ensemble parfaitement compact en soi et si S est une suite ordonnée d'ensembles G telle que tout élément de E soit intérieur à l'un des G, il existe dans la suite S un ensemble G_0 tel que tout élément de E soit intérieur à l'un des G de la suite S_{G_0} formée des ensembles G qui ne suivent pas G_0.

Il est évident que si G_1 précède G_2, S_{G_1} est une partie de G_2; si donc on appelle E_{G_1} l'ensemble des éléments de E qui ne sont intérieurs à aucun des G de S_{G_1}, E_{G_1} comprend E_{G_2}. Les E_G forment donc une suite monotone de sous-ensembles de E. Pour démontrer la proposition, il suffit de démontrer que l'un des E_G ne possède aucun élément. En effet, dans le cas contraire, et puisque S est parfaitement compact en soi, il existerait un élément a de E commun à tous les E_G ou commun à tous leurs dérivés. Mais, d'après la propriété même attribuée à S, a est intérieur à l'un des G, soit G_1; il n'appartient donc pas à E_{G_1}. Il n'est donc pas commun à tous les E_G, par suite il appartient à tous leurs dérivés et en particulier à celui de E_{G_1}. D'après la propriété de Hedrick, il existe donc un sous-ensemble F de E_{G_1} dont tous les éléments sont intérieurs à G_1, ce qui est contradictoire avec la définition même de E_{G_1}.

Il faut remarquer que le même raisonnement s'appliquerait en renversant l'ordre dans S. Donc, en définitive, on peut toujours supposer qu'une suite telle que S possède un premier et un dernier élément.

10. *La condition nécessaire et suffisante.* — Dans la même classe [la classe $(\mathcal{V})$ la plus générale possédant la propriété de Hedrick], la con-

dition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E possède la propriété de Borel-Lebesgue est que cet ensemble soit parfaitement compact en soi.

Nous avons vu que la condition est nécessaire. Supposons-là vérifiée et supposons, avec R.-L. Moore, qu'on ait disposé en une suite bien ordonnée une famille $\mathfrak{F}$ d'ensembles G tels que tout élément de E soit intérieur à l'un au moins des G. Appelons $\mathfrak{F}_G$ une suite ordonnée formée par les ensembles de $\mathfrak{F}$ qui ne suivent pas G et par un nombre fini de ceux qui suivent G. D'après la proposition précédente, on peut remplacer $\mathfrak{F}$ par l'un des $\mathfrak{F}_G$ (sans même ajouter aucun ensemble de $\mathfrak{F}$ à la suite de G). Appelons G_1 le premier ensemble de $\mathfrak{F}$ tel qu'une suite $\mathfrak{F}_{G_1}$ puisse remplacer $\mathfrak{F}$, et soit $G_2, \ldots, G_n$ les ensembles de cet $\mathfrak{F}_G$ qui suivent G_1. Il suffit de montrer que G_1 est le premier élément de $\mathfrak{F}$.

Or, dans le cas contraire, la suite Σ_{G_1} des ensembles de $\mathfrak{F}$ distincts de G_1 et précédant G_1 existe et est, comme $\mathfrak{F}$, bien ordonnée. Soit S_2 la suite ordonnée obtenue en plaçant Σ_{G_1} à la suite de $G_2, \ldots, G_n$. En appliquant le théorème précédent à la suite S_2 qui comporte, dans un autre ordre, les mêmes éléments que $\mathfrak{F}_{G_1}$, on voit qu'on pourrait remplacer S_2 par une suite arrêtée à un ensemble G_0 de $\mathfrak{F}$ distinct de G_1 et le précédant dans S_2. Si G_0 était l'un des ensembles $G_2, \ldots, G_n$, le théorème serait démontré; sinon G_0 précède aussi G_1 dans $\mathfrak{F}$ et l'on pourrait remplacer $\mathfrak{F}$ par un $\mathfrak{F}_{G_0}$, où G_0 précède G_1, contrairement à la définition de G_1.

11. *Remarque.* — Si l'on compare avec le résultat correspondant (X, p. 19), pour le cas où $\mathfrak{F}$ ne comprend qu'une infinité dénombrable d'ensembles G, on constate que nous n'avons plus à invoquer ici la condition 3° qui figurait dans ce cas. Il serait intéressant de chercher à expliquer cette différence, si elle ne provient pas simplement de ce que j'aurais utilisé cette condition sans m'en apercevoir ou sans en avoir besoin.

II. — Sur les classes où les éléments d'accumulation peuvent être définis par l'intermédiaire de la notion de distance.

12. *Introduction.* — Je m'étais efforcé, dans ma Thèse, d'augmenter la généralité de certains résultats concernant les classes que j'appelai classes ($\mathcal{E}$) en les étendant à une classe que j'appelai ($\mathcal{V}$). Depuis lors,

j'ai exprimé le sentiment que la plus grande généralité des classes $(\mathcal{V})$ n'était qu'apparente. Cette assertion (XIX, p. 22, § 33) avait attiré l'attention de Chittenden, qui a réussi à en prouver le bien-fondé : les classes que j'avais appelées $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{V})$ sont identiques. J'ai donc réservé la notation classe $(\mathcal{V})$ et l'expression de voisinage à une notion beaucoup plus générale (X, p. 3, § 5) ; j'ai restreint la notation classe $(\mathcal{E})$ et l'expression d'écart à des cas moins étendus et j'appelle maintenant *distance* et *classe* $(\mathcal{D})$ ce que j'appelais *écart* et *classe* $(\mathcal{E})$; ces changements peuvent amener une confusion momentanée, mais correspondent à un progrès de la théorie.

Dans un récent travail (XXVIII), W. Gross s'est appliqué à étendre certains résultats de ma Thèse en montrant que, dans un grand nombre de cas, ces résultats, démontrés pour des ensembles compacts, subsistent pour des ensembles qu'il appelle a *compacts*. Ses raisonnements sont faits pour la classe $(\mathcal{V})$ au sens de ma Thèse. En les reproduisant, je ne les altèrerai autrement que pour les simplifier si je les restreins aux classes $(\mathcal{D})$.

13. L'extension apportée par W. Gross est certaine. Toutefois, il résulte de ses raisonnements mêmes que, dans le seul cas qu'il considère, celui des classes $(\mathcal{D})$, la notion d'ensemble a-*compact*, se confond avec celle d'ensemble séparable telle que je l'ai définie au début de cet article, et avec celle d'ensemble condensé. (J'avais appelé dans ma Thèse *ensemble condensé* un ensemble E dont tout sous-ensemble non dénombrable donne lieu à au moins un élément de condensation. Si l'on peut imposer à ce dernier d'appartenir à E, E est condensé *en soi*. Un *élément de condensation* d'un ensemble E est un élément d'accumulation commun à E et aux ensembles obtenus en supprimant de E un ensemble dénombrable.)

Dans ces conditions, il ne me paraît pas utile de retenir la notion d'ensemble a-*compact*. J'ai donc cru utile de reproduire les résultats de W. Gross en complétant en plusieurs points ces résultats et, par certains changements dans l'ordre des propositions, en en simplifiant parfois la démonstration et surtout en tirant parti de la notion nouvelle d'ensemble parfaitement compact.

14. *Les ensembles séparables et les ensembles condensés.* — M. Hadamard

avait attiré (XXIX) l'attention sur les familles $\mathcal{K}_\varepsilon$ d'ensembles k_ε relatifs aux ensembles E d'éléments d'une classe ($\mathcal{D}$) et tels que : 1° la distance de deux éléments d'un même k_ε reste inférieure au nombre positif arbitraire ε; 2° tout élément de E appartient à au moins l'un d'eux. La puissance de $\mathcal{K}_\varepsilon$ *numère*, selon lui, l'ensemble E.

J'ai montré que dans une classe ($\mathcal{D}$) complète la condition nécessaire et suffisante pour que l'un au moins des $\mathcal{K}_\varepsilon$ soit fini quel que soit $\varepsilon > 0$, est que E soit compact. Dans l'énoncé obtenu (XVIII, p. 25), la classe était supposée normale; mais ce n'est pas indispensable. Et même en ce qui concerne la condition suffisante, il n'est pas nécessaire de supposer la classe complète. On peut montrer aussi que, dans toute classe ($\mathcal{D}$), la condition nécessaire et suffisante pour que, quel que soit $\varepsilon > 0$, l'une au moins des familles $\mathcal{K}_\varepsilon$ relative à un ensemble E d'éléments d'une classe ($\mathcal{D}$) quelconque soit dénombrable est que E soit séparable. La méthode que j'ai indiquée (XVIII, §§ 40, 41) montre que la condition est suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire il suffit de former, pour $\varepsilon = \frac{1}{p}$, une famille dénombrable $\mathcal{K}_{\frac{1}{n}}$ d'ensembles $k_{\frac{1}{n}}$ et de choisir dans chacun de ceux-ci un élément de E; on aura ainsi une suite d'éléments $a_{n,1}$, $a_{n,2}$, ..., et l'on appellera N l'ensemble des éléments de ces suites quand on fait varier n. Tout élément a de E appartenant, quel que soit n, à l'un des ensembles $k_{\frac{1}{n}}$, il existera un élément a_{n,p_n} de N qui appartiendra à cet ensemble $k_{\frac{1}{n}}$ et par suite tel que

$$(a,\, a_{n,p_n}) < \frac{1}{n}.$$

Donc tout élément de E appartient à N ou à son dérivé N'.

Il est à remarquer que les deux théorèmes que nous venons d'énoncer donnant les conditions pour que $\mathcal{K}_\varepsilon$ reste fini ou pour que $\mathcal{K}_\varepsilon$ reste dénombrable seraient encore exacts si tout élément de E était assujetti non seulement à appartenir à l'un des k_ε, mais encore à lui être intérieur. De plus, on peut toujours assujettir ces k_ε à être des sphéroïdes ayant pour centres des éléments de l'ensemble.

Du second théorème, on déduit immédiatement que : tout sous-ensemble d'un ensemble séparable d'éléments d'une classe ($\mathcal{D}$) est aussi séparable.

D'ailleurs, Gross a aussi démontré (XXVIII, p. 813) que, dans une classe ($\mathcal{D}$), le dérivé d'un ensemble séparable est aussi séparable.

On peut d'autre part remarquer qu'en le généralisant, le théorème de ma Thèse (XVIII énoncé p. 19, § 32), devient presque évident : *dans une classe* ($\mathcal{V}$), *l'ensemble des éléments isolés d'un ensemble séparable* E *forme un ensemble dénombrable*. En effet, il existe par hypothèse un ensemble dénombrable N d'éléments de E tel que E appartienne à $N + N'$; donc l'ensemble $E - E'$ appartient tout entier à N. Il suffit, pour que la proposition soit correctement démontrée, que l'ensemble E appartienne à une classe ($\mathcal{V}$). D'autre part, nous verrons plus loin que, dans une classe ($\mathcal{D}$), tout ensemble compact (et même tout ensemble condensé) est séparable, ce qui fournit alors le théorème de ma Thèse mentionné plus haut.

De même Gross (XXVIII, p. 814) obtient, par un raisonnement particulier, le théorème suivant :

« Dans une classe ($\mathcal{D}$), tout sous-ensemble fermé et séparable F d'un ensemble dense en soi G peut être considéré comme le dérivé d'un ensemble dénombrable E d'éléments de G. »

[Il en résulte que, dans une classe ($\mathcal{D}$) parfaite et séparable : tout ensemble dérivé est fermé et tout ensemble fermé est un ensemble dérivé.]

On obtient le même résultat si l'on emploie le même raisonnement donné dans ma Thèse (XVIII, p. 20, § 33) pour démontrer un théorème moins général en ayant soin de ne prendre pour E que les éléments appelés b_n^p dans ce même paragraphe de ma Thèse.

Enfin, Gross généralise aussi un autre théorème de ma Thèse (XVIII, p. 21, § 34) sous la forme suivante : « Dans toute classe ($\mathcal{D}$), tout sous-ensemble fermé F d'un ensemble séparable E peut être obtenu en supprimant de E les éléments appartenant à une infinité dénombrable de sphéroïdes.

W. Gross démontre (XXVIII, p. 818) que tout ensemble séparable d'éléments d'une classe ($\mathcal{D}$) possède la propriété de Lindelöf. [Nous dirons qu'un ensemble E possède *la propriété de Lindelöf* (XXX, p. 46) si de toute famille $\mathcal{F}$ d'ensembles I, à l'un au moins desquels est intérieur tout élément de E, on peut extraire une famille dénombrable jouissant de la même propriété.]

Il en résulte immédiatement (XXVIII, p. 812) qu'un tel ensemble est condensé. La proposition réciproque résulte aussi d'un raisonnement de W. Gross (XVIII, p. 805). Il y a lieu, du reste, de faire remarquer que le procédé qu'il y indique doit être appliqué transfiniment, et non pas seulement pour un nombre *fini* croissant d'éléments comme son texte pourrait peut-être laisser croire. C'est d'ailleurs précisément la seule différence de ce raisonnement avec celui qui m'a permis de démontrer (XIX, p. 3) qu'un ensemble compact d'éléments d'une classe ($\mathcal{D}$) est séparable et dans l'énoncé duquel, j'avais inutilement supposé, comme me l'a fait remarquer le professeur T.-H. Hildebrandt, que la classe était complète.

En définitive, on obtient le résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble d'éléments d'une classe ($\mathcal{D}$) *soit condensé est que cet ensemble soit séparable.*

Comme un grand nombre des classes les plus importantes sont des classes ($\mathcal{D}$) séparables dans lesquelles, par suite, tout ensemble est séparable, il en résulte, par suite, que *dans ces classes tout ensemble est condensé.* Même lorsque la classe est une classe ($\mathcal{D}$) quelconque, tout ensemble compact (étant séparable, comme nous l'avons remarqué à l'instant) est condensé.

15. *La propriété de Lindelöf.* — Si l'on revient maintenant à la propriété de Lindelöf, on remarquera qu'ajoutée à la propriété de Borel elle fournit la propriété de Borel-Lebesgue (*voir* pour les définitions de ces propriétés X, p. 15; XVI, p. 71). Or, j'ai obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour ces propriétés dans des classes beaucoup plus générales que les classes ($\mathcal{D}$) considérées par W. Gross. Il est donc à présumer qu'on peut encore étendre le résultat de ce dernier. On peut le faire en ce qui concerne la condition nécessaire de la manière suivante :

Nous allons démontrer que si *un ensemble* E *d'éléments d'une* *classe* $(\mathcal{V})$ *quelconque possède la propriété de Lindelöf, il est nécessairement condensé en soi*. En effet, dans le cas contraire, pour tout élément a de E il existerait un voisinage V^0 de E auquel n'appartiendrait qu'un ensemble dénombrable d'éléments d'un certain ensemble non dénombrable G d'éléments de E. Comme a est interieur à V^0_a, on peut extraire de la famille des V^0_a, une suite dénombrable $V^0_{a_1}$, $V^0_{a_2}$, ... telle que tout élément de E appartienne à l'un d'eux. Dans ces conditions, G contrairement à l'hypothèse, ne pourrait avoir qu'une infinité dénombrable d'éléments.

Ceci montre que, puisque dans une classe $(\mathcal{D})$ ensemble séparable et ensemble condensé sont synonymes, il est préférable, pour la préparer à une généralisation éventuelle en ce qui concerne la condition suffisante, d'énoncer la proposition de Gross sous la forme suivante :

Dans une classe $(\mathcal{D})$, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble possède la propriété de Lindelöf est que cet ensemble soit condensé en soi*.

En outre la remarque faite plus haut montre que *dans une classe* $(\mathcal{D})$ *un ensemble* condensé est nécessairement condensé en soi.

16. Il est inutile de retenir l'énoncé de Gross (XXVIII, p. 810) relatif à la généralisation du théorème de Borel, puisqu'une généralisation encore plus étendue a été obtenue (X, p. 19).

De même l'énoncé de Gross (XXVIII, p. 817) suivant lequel, dans une classe $(\mathcal{D})$ un ensemble fermé et séparable E est la somme d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait (celui des éléments de condensation de E) sans élément commun, ajoutant la condition que la classe soit complète, est moins général que celui de ma Thèse (XVIII, p. 19). Il est vrai que dans celle-ci j'avais supposé E condensé; mais nous savons maintenant que cette condition est synonyme de E séparable, dans les classes $(\mathcal{D})$. Il est vrai aussi que dans ma Thèse, je n'avais pas indiqué la structure des deux parties de E au moyen de la suite transfinie de ses ensembles dérivés. Mais je l'ai indiquée dans un autre Mémoire (XIX, p. 8), où tous les raisonnements sont valables quand au lieu de supposer E appartenant à une classe $(\mathcal{D})$ séparable, on suppose, ce qui est le cas de Gross, que E est un ensemble séparable appartenant à une classe $(\mathcal{D})$ quelconque.

Dans cet autre Mémoire, j'avais indiqué (§ 14, p. 8) que si E est un ensemble parfait quelconque appartenant à une classe $(\mathcal{D})$ complète, E n'est pas dénombrable. D'autre part, il est manifeste que d'après sa définition même tout ensemble *séparable* d'éléments d'une classe $(\mathcal{L})$ quelconque a au plus la puissance du continu, puisque ses éléments peuvent être définis chacun par une suite d'entiers. Ces renseignements sont complétés par le résultat de Gross, d'après lequel tout ensemble parfait séparable a dans une classe $(\mathcal{D})$ *complète*, la puissance du continu (XVIII, p. 808); ce résultat, on le voit, n'est pas une extension des précédents, mais il les complète en les chevauchant.

16 *bis*. — *Classes* $(\mathcal{D})$ *séparables*. — Dans le cas où une classe $(\mathcal{D})$ est séparable, tous ses éléments appartiennent soit à une certaine suite N d'éléments de la classe

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

soit au dérivé de N : la classe coïncide avec N + N'.

Il peut être utile de remarquer que l'on peut choisir tous les voisinages de tous les éléments de la classe dans une suite dénombrable d'ensembles, pour lesquels on peut, d'ailleurs, choisir des sphéroïdes. Il suffit, en effet, de constituer cette suite par l'ensemble des sphéroïdes $S_{n,p}$ de centre a_n, rayon $\frac{1}{p}$, où n et p prennent des valeurs entières quelconques. Tout élément a de la classe est la limite d'une suite a_{n_1}, a_{n_2}, ... d'éléments, distincts ou non, pris dans N; on a donc, pour q assez grand, soit $n_q = r_{p,a}$,

$$(a, a_{n_q}) < \frac{1}{p}.$$

Appelons $\Sigma_a^{(p)}$ celui des sphéroïdes $S_{n,p}$ pour lequel $n = r_{p,a}$. Il contient a, et même a lui est intérieur. L'ensemble des sphéroïdes $\Sigma_a^{(1)}, \Sigma_a^{(2)}, \ldots, \Sigma_a^{(p)}, \ldots$ peut être considérécomme une famille de voisinages de a, comme il est facile de le voir, et cet ensemble est pris quel que soit a dans l'ensemble dénombrable fixe des $S_{n,p}$.

On en déduit la propriété suivante :

Dans une classe $(\mathcal{D})$ séparable, si des ensembles G renferment chacun au moins un élément intérieur et s'ils sont disjoints, les ensembles G forment une famille dénombrable. La proposition est même encore vraie si, au lieu de supposer les G disjoints, on suppose que leurs intérieurs sont disjoints ou même si l'on se contente de supposer qu'un élément quelconque de l'un des ensembles G ne peut être intérieur à une infinité non dénombrable de ces ensembles G. En effet, d'après cela, l'un quelconque des voisinages $S_{n,p}$ ne peut appartenir à la fois qu'à un ensemble dénombrable d'ensembles G.

III. — Les fonctionnelles sur une classe où la définition des ensembles dérivés n'est soumise à aucune condition.

17. *Les fonctionnelles continues.* — W. Gross a aussi généralisé (XXVIII, p. 806) un résultat de ma Thèse (XVIII, § 48, p. 30) sur lequel je vais revenir parce qu'on peut l'étendre considérablement.

Nous allons supposer purement et simplement que dans la classe d'éléments considérés une définition déterminée mais entièrement *quelconque* des éléments d'accumulation a été donnée. En d'autres termes une correspondance quelconque K a été établie, assignant à chaque ensemble E d'éléments de la classe un certain ensemble dérivé E′. On peut dire que la classe est déterminée par la catégorie $\mathfrak{P}$ des éléments considérés et par la relation K; en utilisant le mode d'expression de M. E.-H. More, une classe n'est autre qu'un système ($\mathfrak{P}$, K).

Sous cette hypothèse très générale, nous dirons qu'une fonctionnelle U_b, définie sur un ensemble E, est *continue sur* E *en* a_0 si la borne inférieure de son oscillation, $\omega_I U$, sur la partie de E qui appartient à un ensemble I est nulle lorsqu'on fait varier I de sorte que a_0 lui reste intérieur. (Bien entendu, l'oscillation de U_b sur un ensemble est la différence finie ou non des bornes supérieure et inférieure des valeurs prises par U sur cet ensemble.)

On peut ramener cette définition à une forme qui peut parfois être plus commode : Soit U_a une fonctionnelle continue en a_0 sur E; par définition, il existe un ensemble I_n auquel a_0 est intérieur, et tel que

$$\omega_{I_n} U < \frac{1}{n}$$

quel que soit l'entier n. Soit maintenant G un sous-ensemble de E ayant a_0 pour élément d'accumulation; puisque a_0 est intérieur à I_n, l'un au moins a_n des éléments de G' appartient à I_n. Donc

$$|U_{a_0} - U_{a_n}| < \frac{1}{n};$$

et, par suite, U_{a_0} est égale à l'une des valeurs où à l'une des limites des valeurs prises par U sur G.

Réciproquement, soit une fonctionnelle U_b, définie sur un ensemble E et telle que sur tout sous-ensemble G de E ayant a_0, de E, pour élément d'accumulation, U_{a_0} soit égal à l'une des valeurs ou l'une des limites des valeurs prises par U sur G : cette fonctionnelle est continue en a_0 sur E. En effet, appelons G_n l'ensemble des éléments b de G tel que

$$|U_b - U_{a_0}| < \frac{1}{2n};$$

il existe au moins un tel élément dans G par hypothèse. Appelons I_n l'ensemble formé par a_0, par l'ensemble complémentaire de E et par tous les ensembles G_n. Il est évident que l'oscillation de U sur la partie de E qui appartient à I_n est au plus égale à $\frac{1}{n}$.

Pour prouver que U est continue en a_0 sur E, il suffit de montrer que quel que soit n, a_0 est intérieur à I_n. Or a_0 appartient à I_n; s'il était élément d'accumulation d'un ensemble J' d'éléments qui n'appartiennent pas à I_n, comme J' est un sous-ensemble de E, il y aurait au moins un élément c de J' tel que

$$|U_c - U_{a_0}| < \frac{1}{2n},$$

et, par suite, contrairement à la définition de J', c appartiendrait à I_n.

On retrouve donc la définition que j'avais déjà proposée (X, § 15, p. 12), mais en se restreignant au cas où a_0 appartient à E, ce que je considère maintenant comme préférable.

18. Dans le cas où la classe est une classe ($\mathfrak{V}$), un élément a_0 est intérieur à tous ses voisinages et tout ensemble auquel a_0 est intérieur comprend entièrement au moins un voisinage de a_0. Il en résulte que,

dans la définition de la continuité donnée plus haut, on peut supposer que les ensembles I sont les seuls voisinages de a_0; on retrouve ainsi la définition que j'avais donnée précédemment (X, p. 14, § 16) pour les classes ($\mathcal{V}$).

Mais revenons à la classe la plus générale et suivons, en les généralisant, les résultats de ma Thèse.

19. Le théorème (XVIII, § 11, p. 8) peut être étendu ainsi :

Étant donnée une fonctionnelle U_b *uniforme sur un ensemble* E *parfaitement compact en soi, il existe au moins un élément* a_0 *de* E *tel que la borne supérieure, finie ou non,* M *de* U *sur* E *soit égale à la borne supérieure de* U *sur la partie de* E *appartenant à un ensemble quelconque* I *auquel* a_0 *est intérieur.*

En effet, par définition, il existe quel que soit n un élément a_n de E tel que

$$U_{a_n} > \alpha_n$$

$\left(\alpha_n \text{ étant égal à } M - \frac{1}{n} \text{ si } n \text{ est fini, à } n \text{ si M est infini}\right)$. Puisque E est parfaitement compact en soi, il existe un élément a_0 de E qui est commun à tous les ensembles S_n tel que

$$a_n, \quad a_{n+1}, \quad \ldots,$$

ou commun aux dérivés des S_n. Si a_0 était commun aux S_n on aurait

$$U(a_0) = M.$$

Sinon, un élément au moins a_{p_n} de chaque S_n appartient à I et alors la borne supérieure de U sur I est supérieure à α_n quel que soit n : elle est donc égale à M.

Comme corollaire : Toute fonctionnelle continue partout sur un ensemble E parfaitement compact en soi est bornée sur E et y atteint en au moins un élément de E sa borne supérieure et en au moins un élément de E sa borne inférieure.

On peut aussi énoncer un corollaire moins précis mais plus général en appelant fonctionnelle semi-continue supérieurement en a_0 sur un ensemble E une fonctionnelle définie sur E et prenant en a_0 une valeur U_{a_0} égale à la borne inférieure, quand I varie de sorte que a_0 lui reste intérieur, de la borne supérieure de U sur la partie de E qui appartient à I.

Alors : Toute fonctionnelle semi-continue supérieurement partout sur un ensemble E parfaitement compact en soi, est bornée sur E et y atteint en au moins un élément de E sa borne supérieure.

20. *Fonctionnelles également continues.* — Considérons une famille $\mathcal{F}$ de fonctionnelles U_b continues en a_0 sur un même ensemble E. Pour chacune de ces fonctionnelles, il est possible, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, de choisir un ensemble $I_\varepsilon^{(\varphi)}$ auquel a_0 est intérieur et sur lequel l'oscillation soit inférieure à ε. Mais, en général, $I_\varepsilon^{(\varphi)}$ dépend de ε. Nous dirons que les fonctionnelles de la famille $\mathcal{F}$ sont *également continues* en a_0 sur E s'il est possible quel que soit ε de choisir $I_\varepsilon^{(\varphi)}$ indépendamment de φ dans $\mathcal{F}$.

On a alors les propositions suivantes :

Premier lemme (*voir* XVIII, § 16, p. 11). — La limite d'une suite de fonctionnelles également continues en a_0 sur E et convergeant partout sur E est continue en a_0 sur E. Si E est parfaitement compact en soi et si la suite est également continue en chaque élément de E, la convergence est nécessairement uniforme.

En effet, si pour chaque fonctionnelle d'une certaine suite convergente en a_0, l'oscillation $\omega_I U^{(n)}$ peut être rendue inférieure à un nombre positif donné ε, a_0 étant intérieur à un ensemble I indépendant de n, on aura pour deux éléments quelconques b, c de E appartenant à I

$$|U_b^{(n)} - U_c^{(n)}| \leqq \varepsilon.$$

On aura donc pour la limite U de $U^{(n)}$

$$|U_b - U_c| \leqq \varepsilon,$$

d'où

$$\omega_I U \leqq \varepsilon.$$

U est continue en a_0 sur E.

Si l'égale continuité a lieu en tout élément a_0 de E, U sera continue partout sur E; mais, de plus, si E est parfaitement compact en soi, la convergence est uniforme sur E. Autrement, il existerait un nombre $\varepsilon_0 > 0$, tel que quel que soit p, il existe une fonctionnelle $U^{(n_p)}$ de rang $> p$, tel qu'en au moins un élément a_p de E, on ait

$$(1) \qquad |U_{a_p}^{(n_p)} - U_{a_p}| > \varepsilon_0.$$

Or E étant parfaitement compact en soi, on pourrait suivre le raisonnement déjà fait plus haut. Ou bien il existerait une infinité des a_p qui seraient identiques entre eux et il existerait un élément

$$a_{p_1} \equiv a_{p_2} \equiv \ldots$$

de E où la suite des $U^{(n)}$ ne serait pas convergente. Ou bien il existerait un élément α_0 de E, intérieur à un certain ensemble I sur lequel

$$\omega_I U^{(n)} < \frac{\varepsilon_0}{3}, \qquad \omega_I U < \frac{\varepsilon_0}{3}$$

et tel qu'une suite d'éléments $a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots$ de rangs croissants appartiennent à la fois à I et à la suite $a_0, a_1, \ldots, a_p, \ldots$, alors on aurait

$$|U_{a_{p_i}} - U_{\alpha_0}| < \frac{\varepsilon_0}{3}, \qquad |U_{\alpha_0}^{(n_{p_i})} - U_{a_{p_i}}^{(n_{p_i})}| < \frac{\varepsilon_0}{3},$$

et pour i assez grand

$$|U_{\alpha_0} - U_{\alpha_0}^{(n_{p_i})}| < \frac{\varepsilon_0}{3},$$

d'où, en ajoutant

$$|U_{a_{p_i}} - U_{a_{p_i}}^{(n_{p_i})}| < \varepsilon_0$$

contrairement à l'inégalité (1).

Deuxième lemme. — Soient $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots$ une suite de fonctionnelles qui converge sur un ensemble N. Si les fonctions de cette suite sont également continues partout sur l'ensemble

$$F = N + N',$$

cette suite est aussi partout convergente sur F.

En effet, soit α un élément quelconque d'accumulation de N; il est intérieur à un ensemble I tel que

$$\omega_I U^{(n)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

quel que soit n. Et il existe au moins un élément b de N qui appartient à I. Alors on peut trouver un nombre n, tel que

$$|U_b^{(n)} - U_b^{(n+p)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

quel que soit l'entier p. Et, d'autre part, on a

$$|U_\alpha^{(n)} - U_b^{(n)}| \leqq \omega_1 U^{(n)} < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |U_b^{(n+p)} - U_\alpha^{(n+p)}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

d'où, en ajoutant,

$$|U_\alpha^{(n)} - U_\alpha^{(n+p)}| < \varepsilon.$$

Autrement dit, la suite des $U^{(n)}$ converge aussi en tout élément α de N'.

Théorème. — *Étant donnée une famille infinie de fonctionnelles qui, en chaque élément d'un ensemble séparable* E, *sont bornées et également continues sur* E, *il existe toujours une suite infinie de fonctionnelles extraites de cette famille, qui converge partout sur* E *vers une fonctionnelle continue partout sur* E. *Et, si* E *est parfaitement compact en soi la convergence est uniforme sur* E.

En effet, par hypothèse, il existe un sous-ensemble dénombrable N d'éléments

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

de E, tel que E appartienne à N + N'. On pourra (XVIII, § 19, p. 14) extraire de la famille de fonctionnelles considérées une suite $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots$ qui converge sur N. Alors, d'après le deuxième lemme, cette suite converge sur N + N' et en particulier sur E. Alors, d'après le premier lemme, la limite de cette suite est une fonctionnelle continue partout sur E et, si E est parfaitement compact en soi, la convergence est uniforme sur E.

20 *bis*. *La limite supérieure d'un ensemble de fonctionnelles.* — Étant donnée une certaine famille $\mathfrak{F}$ de fonctionnelles U définies sur un ensemble E, on peut considérer *la fonctionnelle* T qui, en chaque élément b de E, est égale à la borne supérieure des valeurs des fonctionnelles de $\mathfrak{F}$ en b : *si les fonctionnelles de* $\mathfrak{F}$ *sont en chaque élément*

a_0 de E *bornées dans leur ensemble et également continues sur* E, *la fonctionnelle* T *est aussi continue en a_0 sur* E.

Pour le démontrer, il suffit presque d'écrire les hypothèses. Quel que soit le nombre positif ε, il existe un ensemble I auquel a_0 est intérieur et tel que pour tout élément b commun à I et E, on a

$$-\varepsilon < \mathrm{U}_{a_0} - \mathrm{U}_b < +\varepsilon$$

pour toute fonctionnelle U de $\mathcal{F}$. Or, il en existe au moins une U′ telle qu'en a_0

$$\mathrm{T}_{a_0} < \mathrm{U}^1_{a_0} + \varepsilon,$$

et une autre U^2 (distincte ou non de U^1) telle qu'en b

$$\mathrm{T}_b < \mathrm{U}^2_b + \varepsilon.$$

Comme on a, d'ailleurs,

$$\mathrm{U}^1_b \leqq \mathrm{T}_b, \qquad \mathrm{U}^2_{a_0} \leqq \mathrm{T}_{a_0},$$

on a, en combinant ces diverses inégalités,

$$-2\varepsilon < \mathrm{U}^2_{a_0} - \mathrm{U}^2_b - \varepsilon < \mathrm{T}_{a_0} - \mathrm{T}_b < \mathrm{U}^1_{a_0} - \mathrm{U}^1_b + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Donc, l'oscillation de T sur I peut être rendue inférieure à tout nombre donné 4ε en choisissant convenablement I. T est continue en a_0 sur E.

IV. — Les fonctionnelles sur des classes (H) plus générales que les classes (L).

21. Le théorème que nous avons démontré au paragraphe 20 renferme, comme cas particulier, la proposition correspondante de ma Thèse (XVIII, § 19, p. 13), en ce qui concerne la condition suffisante. En ce qui concerne la condition nécessaire qui s'y trouvait démontrée dans le cas des classes ($\mathcal{L}$), il serait intéressant de l'étendre aussi au cas d'une classe quelconque. Le raisonnement de ma Thèse est valable pour prouver que si une famille $\mathcal{F}$ de fonctionnelles continues sur un ensemble E parfaitement compact en soi est telle que, de toute famille infinie extraite de $\mathcal{F}$, on peut tirer une suite qui converge uniformément sur E vers une fonctionnelle continue sur E, les fonction-

nelles de $\mathcal{F}$ sont bornées dans leur ensemble sur E. Pour prouver que ces fonctions doivent être également continues en chaque élément de E sans rien supposer sur la classe, le raisonnement de ma Thèse ne convient plus. Il est probable cependant que cette condition reste nécessaire pour des classes plus étendues que les classes $(\mathcal{L})$.

22. *Convergence quasi uniforme* (*voir* XVIII, § 14, p. 10). — Cherchons à quelle condition une série de fonctionnelles $U^{(n)}$ convergentes et continues sur un ensemble E a pour limite une fonctionnelle continue sur E. Supposons d'abord que E soit parfaitement compact en soi.

Donnons-nous deux nombres positifs ε, N et en appelant U_b la limite de $U_b^{(n)}$, posons

$$r_b^{(n)} = U_b - U_b^{(n)}.$$

Pour chaque élément b de E, on peut déterminer un entier $n > N$ tel que

$$|r_b^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, si nous supposons U et $U^{(n)}$ continues en b, on pourra déterminer deux ensembles I, $I^{(n)}$ auxquels b est intérieur et sur lesquelles les oscillations U, $U^{(n)}$ seront respectivement inférieures à $\frac{\varepsilon}{3}$. Supposons que la classe considérée soit une classe $(\mathcal{V})$ sur laquelle la condition 2° de F. Riesz soit satisfaite. Alors il existera un voisinage $J^{(n)}$ de b appartenant à la fois à I et $I^{(n)}$ et, par suite, sur lequel les oscillations de U et $U^{(n)}$ sont toutes deux inférieures à $\frac{\varepsilon}{3}$. Si donc c appartient à $J^{(n)}$, on aura

$$|r_c^{(n)}| \leqq |U_c - U_b| + |r_b^{(n)}| + |U_b^{(n)} - U_c^{(n)}| < \varepsilon.$$

Ainsi il existe un ensemble $J^{(n)}$ auquel b est intérieur et tel que, en tout élément c de $J^{(n)}$,

$$|r_c^{(n)}| < \varepsilon.$$

Mais supposons que la classe $(\mathcal{V})$ vérifie en outre les conditions 3° et 5° (X, p. 2, 7). Alors nous avons vu que l'ensemble E parfaitement compact en soi possède la propriété de Borel-Lebesgue. Donc, on peut extraire de la suite de l'ensemble des $J^{(n)}$, dont chacun correspond à un certain élément de E, un nombre fini de ces ensembles $J^{(n_1)}, \ldots, J^{n_p}$ qui couvre entièrement E. Par suite, en appelant N′ le plus grand de ces nombres $n_1, \ldots, n_p$, on voit qu'en tout élément c de E, on a

$$|r_c^{(n)}| < \varepsilon,$$

n désignant un certain entier variable avec c, mais tel que

$$N \leqq n \leqq N'.$$

Pour caractériser d'un nom cette propriété, nous dirons qu'une suite de fonctionnelles $U^{(1)}, \ldots, U^{(n)}, \ldots$ est quasi uniforme sur E, si étant donné arbitrairement ε et N, il existe $N' \geqq N$, tel que, en tout élément de E,

$$|r_c^{(n)}| < \varepsilon$$

pour une valeur de n, variable avec c, mais telle que

$$N \leqq n \leqq N'.$$

Réciproquement, si une série de fonctionnelles $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots$ continues sur un ensemble E quelconque converge quasi uniformément sur E, leur limite est une fonctionnelle U continue sur E.

Tout d'abord, la série étant convergente en tout élément a_0 de E, on peut déterminer un nombre N tel que

$$|r_{a_0}^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (\text{pour } n > N).$$

On peut ensuite déterminer un nombre N′ tel que, en tout élément b de E, on ait

$$|r_b^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour une valeur de n convenablement choisie, quand b est donné, entre N et N′. On a donc à la fois

$$|r_{a_0}^{(N+p)}| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |r_b^{N+p}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour l'une au moins p_b des valeurs $p = 0, p = 1, \ldots, p = N' - N$.

D'autre part, les fonctionnelles $U^N, U^{N+1}, \ldots, U^{N'}$ sont continues sur E en a_0. Leurs oscillations sont donc inférieures à $\frac{\varepsilon}{3}$ dans des ensembles respectifs $I^N, \ldots, I^{N'}$ auquel a est intérieur. Si E appartient à une classe ($\mathcal{V}$) vérifiant la condition 2° de F. Riesz, il existe un ensemble J appartenant à ceux-ci et auquel a_0 est intérieur. On aura donc, pour tout élément b de J,

$$|U_{a_0}^{(N+p)} - U_b^{(N+p)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour chacune des valeurs $p = 0, p = 1, \ldots, p = N' - N$.

Or on a

$$|U_{a_0} - U_b| \leqq |r_{a_0}^{(N+p)}| + |U_{a_0}^{(N+p)} - U_b^{(N+p)}| + |r_b^{(N+p)}|$$

et, en prenant $p = p_b$, on aura dans J

$$|U_{a_0} - U_b| < \varepsilon;$$

la limite U des $U^{(n)}$ est donc continue en tout élément a_0 de E.

23. *Les classes* ($\mathcal{H}$). — Nous appellerons *classes* ($\mathcal{H}$), les classes dans lesquelles les théorèmes précédents ont été démontrés. Nous avons déjà eu l'occasion au paragraphe 10 et ailleurs (X, p. 19) de signaler quelques-unes de leurs propriétés, nous en obtiendrons encore par la suite. Il est intéressant, à ce propos, de définir les classes ($\mathcal{H}$) d'une façon plus directe.

Une classe ($\mathcal{H}$) étant donnée, montrons d'abord que l'on peut si l'on veut imposer au voisinage V_b d'un élément b quelconque la condition d'être des ensembles *ouverts*, c'est-à-dire dont tous les points leur sont respectivement intérieurs. Appelons, en effet, W_b l'intérieur de V_b. W_b existe puisqu'il comprend en particulier l'élément b. La famille des W_b est équivalente à la famille des V_b (X, p. 5). En effet, tout V_b comprend naturellement le W_b correspondant. D'autre part, soit un W_b : W_b^0 correspondant à V_b^0. Puisque les conditions 2° et 5° sont vérifiées (X, p. 8, 9), il y a un voisinage V_b^1 entièrement intérieur à V_b^0.

En joignant à cette remarque les conditions 2° *bis* et 3° *bis*, on voit que les classes ($\mathcal{H}$) sont des classes où les éléments d'accumulation sont définis au moyen de famille de voisinage satisfaisant aux conditions suivantes :

A. A tout élément b correspond au moins un voisinage W_b; chaque voisinage W_b contient l'élément b.

2° *bis.* Étant donnés deux voisinages W_b^1, W_b^2 de b, il existe un voisinage W_b^0 de b appartenant à la fois à W_b^1 et W_b^2.

C. Quel que soit l'élément c du voisinage W_b de b, il existe un voisinage W_c de c qui appartient entièrement à W_b.

3° *bis.* Pour tout couple d'éléments distincts b, c, il existe un voisinage de b ne contenant pas c et inversement.

24. *L'espace topologique.* — On reconnaît, dans les conditions A, 2° *bis*, C, trois des conditions A, B, C, D imposées (dans le même ordre) par F. Hausdorff à son « espace topologique » (XIV, p. 213). La quatrième condition 3° *bis* est vérifiée quand la condition D de F. Hausdorff :

[D. Pour tout couple d'éléments distincts b, c, il existe deux voisinages respectifs disjoints de b et de c.]

est vérifiée. Par conséquent l'espace topologique est une classe $(\mathcal{H})$. Mais l'espace topologique satisfait aussi, grâce à la condition D, à la condition 4° *bis*.

4° *bis.* Quels que soient les éléments distincts b, c, l'un au moins des voisinages de b ne comprend entièrement aucun des voisinages de c et inversement.

Cette condition étant indépendante de 3° *bis*, on voit que les classes $(\mathcal{H})$ sont plus générales que l'espace topologique. Or, on verra dans le présent Mémoire qu'on peut étendre à peu près toutes les propriétés de l'espace topologique démontrées par F. Hausdorff à la classe $(\mathcal{H})$. D'autre part, la définition de la classe $(\mathcal{H})$ au moyen des conditions 1°, 2°, 3° de F. Riesz qui s'imposent si naturellement à la notion d'élément d'accumulation et de la condition (5°) dont l'importance est ainsi mise en valeur, paraît beaucoup plus naturelle que les conditions A, B, C, D. En fait, on peut même se demander si le processus, qui ne nous est pas expliqué, par lequel F. Hausdorff a été amené à poser ses quatre conditions, n'a pas consisté, plus ou moins consciemment, à chercher quelles conditions il fallait imposer à la notion de voisinages pour réaliser sous une forme simple les conditions 1°, 2°, 3°, 4°, 5°.

Ce n'est qu'après la guerre que j'ai pu lire l'intéressant Livre de F. Hausdorff. Les remarques précédentes ne doivent pas m'empêcher de reconnaître que si la définition générale des classes ($\mathcal{V}$), présentée en 1918 au moyen de Notes rédigées avant la guerre, est l'aboutissant d'un développement progressif de cette notion qu'on peut suivre dans mes propres recherches, on peut suivre aussi ce développement dans celles de R. Root (XI) en 1911 et de F. Hausdorff (XIV) en 1914, travaux qui ne sont parvenus à ma connaissance que tout récemment.

J'ajouterai que F. Hausdorff de même que Carathéodory (XXX, p. 37, 40) semblent considérer, comme une condition inhérente à la notion de voisinage, la propriété pour un voisinage d'être un ensemble *ouvert*. C'est là une limitation qui peut être commode pour formuler certaines conditions comme la condition C, mais qui n'est nullement essentielle et qui risque même de cacher la véritable nature du voisinage.

Nous allons indiquer ici et dans la section suivante (et sous une forme plus générale) certains résultats de F. Hausdorff et de C. Carathéodory.

25. *Propriétés des classes* ($\mathcal{H}$). — Appelons *fermeture* d'un ensemble E l'ensemble $E + E'$; on le représente souvent par la notation $\overline{E}$. L'importance de cet ensemble est caractérisée par la propriété suivante :

Dans une classe ($\mathcal{H}$), la fermeture $\overline{E}$ d'un ensemble E est le plus petit ensemble fermé contenant E. En d'autres termes, $\overline{E}$ est fermé, contient E et est irréductible par rapport à ces deux propriétés, c'est-à-dire qu'il est contenu dans tout ensemble fermé contenant E. Les conditions 1° et 2° étant vérifiées, le dérivé de $\overline{E}$ est $E' + E''$; la condition 5° étant vérifiée, $E' + E'' = E'$, donc $\overline{E}$ est bien un ensemble fermé contenant E. D'autre part, si F est un ensemble fermé contenant E, il contiendra F' qui, d'après 1°, contient E', donc il contient $\overline{E}$.

On peut d'ailleurs remarquer que, si E est dense en soi, E appartient à E', dans ce cas $\overline{\overline{E}} = E'$; mais, d'après 1°, E' appartient à E'', donc E' est aussi dense en soi; comme il est fermé d'après 5°, on voit que : dans une classe ($\mathcal{H}$), la fermeture d'un ensemble dense en soi est un ensemble parfait.

On peut aussi introduire le *noyau* d'un ensemble E, appelant ainsi l'ensemble des éléments, s'il en existe, communs à E et à son dérivé, désignons-le par $E \times E'$.

Dans une classe ($\mathcal{H}$), le noyau d'un ensemble E est le plus grand, s'il en existe, des ensembles denses en soi contenus dans E. D'abord $H = E \times E'$ a, d'après 1°, un ensemble dérivé contenu dans E', H est donc un ensemble dense en soi contenu dans E. S'il en existe un autre K, K étant dense en soi sera contenu dans K' qui, d'après 1°, est contenu dans E'. Ainsi K est contenu dans E et dans E' : K est une partie de H (ou H lui-même); c'est ce qu'on exprime en disant que H est le plus grand des ensembles K.

La géométrie de situation dans les ensembles abstraits.

25. *Introduction*. — Je me propose d'amalgamer les résultats obtenus par différents auteurs (XXIV, XXV, XXIX, XXX) avec ceux que j'avais commencé à rassembler avant la guerre concernant ce qu'on est convenu d'appeler l'*Analysis situs*, appliquée aux ensembles abstraits. Il est très important de distinguer dans l'*Analysis situs* ordinaire ce qui résulte de la nature des éléments envisagés : points de l'espace euclidien et ce qui est indépendant de la nature de ces éléments. On s'apercevra par exemple qu'on peut simplifier bien des démonstrations en évitant, comme le conseille S. Janiszewski (XXIV, p. 5), d'employer les lignes polygonales, dans un grand nombre de questions concernant les ensembles plans où leur considération n'est pas essentielle.

Je commencerai par définir les ensembles bien enchaînés en m'inspirant à la fois de S. Janiszewski et de F. Riesz (XXV, p. 22, 23).

26. *Ensembles enchaînés*. — Nous dirons que deux ensembles E, F sont *enchaînés* si l'un des éléments d'accumulation de l'un appartient à l'autre ou s'ils ont un élément d'accumulation commun. Ceci peut

s'exprimer par la notation

$$E \times F' + F \times E' + E' \times F' \neq 0$$

en représentant par $G \times H$ l'ensemble des éléments communs à deux ensembles quelconques G, H.

Nous remarquons, en particulier, que si deux ensembles *disjoints* (entendant par ensembles disjoints deux ensembles sans éléments communs) sont fermés, ils ne sont pas enchaînés. Nous voyons aussi que deux ensembles dont les dérivés sont nuls ne sont pas enchaînés.

Les conditions 1°, 2°, 3° de F. Riesz (X, p. 2) imposées à la définition des éléments d'accumulation entraînent respectivement les conséquences suivantes :

I. Si E, F sont enchaînés, il en est de même de deux ensembles quelconques comprenant respectivement E, F.

II. Si E est enchaîné à $G + F$, il est enchaîné à l'un au moins des ensembles G ou F.

III. Deux éléments ne sont jamais enchaînés.

On peut d'ailleurs aussi déduire de 3° la conséquence suivante :

Pour qu'un élément b soit enchaîné à un ensemble E, il faut et il suffit que b soit un élément d'accumulation de E et aussi :

Deux ensembles enchaînés à un élément sont enchaînés.

Il est intéressant de remarquer qu'inversement la condition III entraîne la condition 3°, et que celle-ci une fois vérifiée, la condition I entraîne 1° et la condition II entraîne 2°.

Pour la suite de la théorie, il sera utile de se restreindre au cas où la définition des ensembles dérivés satisfait aux conditions 1°, 2°, 3° et aussi à la condition 5° (X, p. 7) : tout ensemble dérivé est fermé, c'est-à-dire au cas des classes ($\mathcal{H}$), considéré à la section précédente.

27. *Ensembles bien enchaînés*. — Nous appellerons ensemble *bien enchaîné* un ensemble E tel que, si on le considère comme la somme de deux ensembles distincts et non nuls, ceux-ci (qu'ils soient disjoints ou non) sont enchaînés.

Dans une classe ($\mathcal{H}$) tout ensemble bien enchaîné E est dense en soi. En effet, si un élément b de E n'appartient pas à E', E serait la somme de deux ensembles b et E qui ne sont pas enchaînés l'un à l'autre.

Ainsi E appartient à son ensemble dérivé E' : celui-ci est bien enchaîné. Il faut prouver que, si $E' = G + H$, G et H sont enchaînés. Or, soient $G_1 = E \times G$, $H_1 = E \times H$, les ensembles communs à E et G, à E et H. Si G_1 et H_1 ne sont pas nuls, ils doivent être enchaînés l'un à l'autre et alors d'après I, G et H aussi. Si, par exemple, $G_1 = 0$, alors c'est que E appartient à H, alors H' comprendra E' et par suite G, donc H et G sont encore enchaînés.

On remarquera que la démonstration serait encore correcte si E' désignait non le dérivé de E, mais la somme de E et de certains éléments d'accumulation de E : un tel ensemble est donc également bien enchaîné.

On appelle *continu* tout ensemble fermé et bien enchaîné, comprenant plus d'un élément. On voit donc que : tout continu est parfait; tout ensemble bien enchaîné E appartient à son propre dérivé E' et celui-ci est un continu.

Par sa définition même, si l'on décompose un ensemble bien enchaîné en deux ensembles fermés, ceux-ci étant enchaînés auront nécessairement un élément commun. Mais cette décomposition n'est possible que si E est fermé.

On voit qu'on est alors conduit à la définition suivante des ensembles bien enchaînés :

Un ensemble fermé sera dit *bien enchaîné* s'il ne peut être décomposé en deux ensembles fermés disjoints.

Un ensemble non fermé sera dit *bien enchaîné* si la somme de cet ensemble et de son ensemble dérivé, somme qui, dans une classe ($\mathcal{H}$), constitue un ensemble fermé, est bien enchaîné au sens précédent.

Ces conditions sont nécessaires d'après ce qui précède. Elles sont suffisantes.

En d'autres termes, si E est un ensemble tel que $E + E'$ ne puisse être décomposé en deux ensembles fermés disjoints, E est bien enchaîné. Il faut prouver que si $E = G + H$, G et H sont enchaînés. En effet, posons

$$H_1 = E - G;$$

on a

$$(E + E') = (G + G') + (H_1 + H'_1).$$

Les ensembles entre parenthèses sont fermés, ils ont donc, par hypothèse, au moins un élément commun [1]. Cet élément ne peut appartenir à G et H_1 ; il appartient donc à $G'H_1 + GH'_1 + G'H'_1$ et, par suite, aussi à $G'H + GH' + G'H'$: G et H sont enchaînés.

27 *bis*. — Enfin généralisant la notion d'ensembles « zusammenhängend im kleinen » due à M. H. Hahn (XXXIV), il nous sera utile d'introduire les ensembles localement bien enchaînés. Un ensemble E est dit *bien enchaîné en* A si dans tout voisinage V_A d'un élément A de E, il existe un voisinage W_A de A où deux éléments quelconques, B, C de E appartenant à W_A, appartiennent à un ensemble de E bien enchaîné et appartenant à V_A. D'ailleurs, il suffit évidemment que ceci ait lieu quand $C \equiv A$ (un ensemble *bien enchaîné localement*, c'est-à-dire en chacun de ses éléments, n'est pas nécessairement bien enchaîné). Cette définition garde un sens dans une classe $(\mathcal{V})$ quelconque. Il est clair que dans une classe $(\mathcal{H})$ tout sous-ensemble ouvert d'un ensemble localement bien enchaîné est aussi localement bien enchaîné.

28. *Propriétés des ensembles bien enchaînés dans une classe* $(\mathcal{H})$. — I. Si tout couple d'éléments d'un ensemble E appartient à un sous-ensemble bien enchaîné de E, E est bien enchaîné. En effet, dans le cas contraire, il existerait deux ensembles G, H non enchaînés et dont la somme est E. Choisissons deux éléments b, c dans ces ensembles respectifs. Il existerait un ensemble bien enchaîné K auquel appartiennent b et c. Soient $G_1 = G \times K$, $H_1 = H \times K$; l'ensemble bien enchaîné K serait la somme de deux ensembles G_1, H_1 comprenant chacun au moins un élément. Ceux-ci seraient alors enchaînés et seraient respectivement contenus dans deux ensembles G, H non enchaînés l'un à l'autre.

La réciproque de la proposition actuelle est d'ailleurs évidente.

II. La somme E de deux ensembles bien enchaînés R, S qui ont un élément b au moins en commun, est bien enchaînée. Soit, en effet,

---

[1] Le raisonnement serait en défaut si $H_1 = 0$; mais, alors, on referait le raisonnement en permutant le rôle de G et H.

$E = G_1 + G_2$, montrons que G_1 est enchaînée à G_2. En appelant A la partie commune à R et S, on peut écrire

$$R = A + U, \qquad S = A + T;$$

A a au moins un élément b et, si l'un des ensembles U ou T était nul, on aurait

$$E = S \quad \text{ou} \quad E = R,$$

le théorème serait évident. Appelons maintenant $U_1, T_1, A_1, U_2, T_2, A_2$, les parties communes à U, T, A respectivement avec G_1 et G_2. Puisque R est bien enchaîné et que

$$R = (A_1 + U_1) + (A_2 + U_2),$$

les deux ensembles $A_1 + U_1$ et $A_2 + U_2$ sont enchaînés; et puisque ceux-ci appartiennent respectivement à G_1 et G_2, ceux-ci sont aussi enchaînés. Il n'y aurait exception au raisonnement que si $A_1 + U_1$ ou $A_2 + U_2$ étaient nuls et si de même $A_1 + T_1$ ou $A_2 + T_2$ était nul.

Comme $A = A_1 + A_2$ n'est pas nul, il faudrait que, par exemple, $A_1 + U_1$ et $A_1 + T_1$ fussent nuls, et, par suite, que R et S appartinssent tous deux à G_2, ce qui n'est possible que si G_1 est nul. Or, on suppose évidemment que G_1 et G_2 ne sont pas nuls.

III. La somme S d'ensembles bien enchaînés E qui ont deux à deux un élément commun au moins est un ensemble bien enchaîné. Il suffit de montrer, d'après ce qui précède, que deux éléments quelconques b, c de S appartiennent à un sous-ensemble bien enchaîné F de E. Lorsque b et c appartiennent à un même ensemble E, on peut prendre $F = E$. Lorsque b et c appartiennent respectivement à deux ensembles E_1, E_2 de S, on peut, d'après le théorème précédent, prendre $F = E_1 + E_2$.

Remarque. — En remplaçant dans le raisonnement précédent chaque ensemble E par sa « fermeture » $E + E'$ on obtient la forme plus générale suivante du dernier théorème :

Si des ensembles bien enchaînés sont deux à deux non disjoints ou enchaînés, leur somme est bien enchaînée.

IV. Si un continu E a un élément au moins en commun avec un ensemble quelconque G sans appartenir entièrement à G, il a au moins un élément en commun avec la frontière de G. En effet, si l'on appelle R la partie commune à E et à G et si l'on pose $S = E - R$, on divise E en deux ensembles R et S disjoints mais possédant chacun au moins un élément. Il y aura donc au moins un élément b de l'ensemble $RS' + SR' + R'S'$; cet élément appartient donc, comme R, S, R', S', à l'ensemble fermé $E = R + S$. D'autre part, comme il appartient à $RS' + SR' + R'S'$, qui est contenu à la fois dans $R + R'$ et dans $S + S'$, et par suite dans $G + G'$ et $H + H'$ (en appelant H le complémentaire de G), il appartient bien à la frontière de G.

29. *Composants d'un ensemble.* — Appelons *composant* (XIV, p. 245) d'un ensemble E relatif à un élément b de E la somme de tous les sous-ensembles bien enchaînés de E contenant b, s'il en existe, ou l'élément b, seul, dans le cas contraire. D'après II (§ 28), le composant de E relatif à b est aussi relatif à chacun des éléments de ce composant. Tout composant de E est un sous-ensemble de E et tout élément de E appartient à un composant de E. Ces composants sont bien enchaînés d'après II (§ 28). Par suite, d'après leur définition même, si deux composants sont distincts, ils sont disjoints. Et même deux composants distincts G, H de E ne peuvent être enchaînés l'un à l'autre. Car si l'un, G, est relatif à l'élément b, leur somme serait un sous-ensemble de E qui serait bien enchaîné et contiendrait b, et par conséquent devrait être contenue dans G. De même leur somme devrait aussi être contenue dans H.

Ainsi : *tout ensemble est la somme d'ensembles bien enchaînés, disjoints et dont aucun n'est enchaîné à l'un des autres*, certains de ces composants pouvant être formés d'un seul élément qui n'appartient ni à un autre composant, ni à son dérivé. Il en résulte en particulier que *tout composant d'un ensemble fermé est un continu ou est réduit à un seul élément.*

Inversement, *si un ensemble* E *est la somme d'un nombre fini d'ensembles* P, Q, R, ..., T *bien enchaînés, disjoints, et dont deux quelconques ne sont jamais enchaînés l'un à l'autre*, P, Q, ..., T *sont les composants de* E. En effet, soit p un élément de P. Il appartient à un composant P_1 de E relatif à p; par définition de P_1, P_1 contient P. S'il contenait quelque autre élément b n'appartenant pas à P, b appartiendrait à un des ensembles Q, R, ..., par exemple Q. Alors $P_1 + Q$ serait un ensemble bien enchaîné contenant p et par suite appartiendrait à P_1. Par suite, Q appartiendrait à P_1, En résumé, P_1 serait la somme de P et de certains des autres ensembles Q, R, ..., par exemple

$$P_1 = P + Q + R + S.$$

Mais P_1 étant bien enchaîné, les ensembles disjoints P et $(Q + R + S)$ sont enchaînés et par suite P serait, contrairement à l'hypothèse, enchaîné à Q, R ou S.

Le raisonnement qui s'appuie sur la propriété II (§ 26) serait en défaut si le nombre des ensembles P, Q, ..., T n'était pas fini. L'énoncé reste-t-il cependant correct? Il suffit, pour voir que non, de considérer le cas où les ensembles P, Q, R, ... sont des intervalles fermés définis sur une droite de la façon suivante : P et Q sont deux intervalles disjoints. On prend pour R un intervalle entre P et Q ne laissant libre entre P et Q que deux intervalles de longueurs $< \frac{1}{2}$. Puis on prend pour S et T deux intervalles placés l'un entre P et R, l'autre entre S et T et de longueurs $< \frac{1}{3}$ et ainsi de suite. Ces ensembles seront évidemment bien enchaînés, disjoints et deux d'entre eux ne pourront être enchaînés. Pourtant ce ne seront pas les composants de la somme $P + Q + R + S + T + \ldots$, car cette somme est évidemment un ensemble linéaire limité dont on peut joindre deux points quelconques par une chaîne de maillons $< \frac{1}{n}$ quel que soit l'entier n. Donc cette somme est un ensemble bien enchaîné qui est à lui-même son propre composant.

Les composants d'un ensemble E ouvert et localement bien enchaîné sont aussi ouverts et localement bien enchaînés. D'après le paragraphe 27, il suffit de prouver qu'ils sont ouverts. Or, l'un au moins des voisinages d'un élément quelconque b de E appartient à l'ensemble ouvert E, et il contient un voisinage S_b de E dont tout élément appartient à un sous-ensemble de E bien enchaîné et contenant b. Donc le composant de b contient un voisinage S_b de b : b lui est intérieur. Ainsi, tout ensemble ouvert et localement bien enchaîné est la somme d'ensembles ouverts, bien enchaînés, bien enchaînés localement, disjoints et deux à deux non enchaînés. Si en outre l'ensemble E est séparable, c'est la somme d'une famille dénombrable de ces sous-ensembles, famille formée par exemple des composants de E relatifs à un certain sous-ensemble dénombrable N de E.

30. *Ensembles homéomorphes*. — Nous dirons que deux ensembles fermés E, F sont *homéomorphes* si l'on peut établir entre eux une correspondance biunivoque et bicontinue, c'est-à-dire telle que tout élément de E corresponde à un élément bien déterminé de F et réciproquement, et qu'à tout élément d'accumulation d'un sous-ensemble de E corresponde un élément d'accumulation du sous-ensemble correspondant de F et réciproquement.

On voit alors que deux sous-ensembles de E qui sont enchaînés se transforment en deux sous-ensembles de F, qui sont aussi enchaînés. En particulier, quand deux ensembles fermés E, F sont homéomorphes si l'un est un continu, l'autre aussi; en particulier aussi, si un ensemble fermé F est homéomorphe d'un segment de droite (extrémités comprises), F est un continu. Il en est encore de même quand la transformation du segment n'est qu'univoque et continue (et non inversement).

Il en résulte que, dans une classe $(\mathcal{H})$, si deux éléments quelconques b, c d'un ensemble E peuvent être joints dans E par un arc de Jordan, c'est-à-dire appartiennent à un sous-ensemble fermé de E, transformé univoque et continu d'un segment fermé de droite, d'après le théorème I (p. 371, § 28), cet ensemble E est bien enchaîné.

31. On peut aussi généraliser un théorème de ma Thèse (XVIII, § 12) en deux temps de la façon suivante :

Si une fonctionnelle est continue en tout élément d'un continu E, sur E, elle ne peut y passer d'une valeur p à une autre q sans passer aussi près que l'on veut (à droite et à gauche) de toutes les valeurs intermédiaires. En effet, dans le cas contraire, autour d'une telle valeur r, il y aurait un intervalle fermé p_1, q_1 compris entre p et q et comprenant r dont aucune valeur ne serait prise par la fonctionnelle considérée U. On pourrait donc considérer E comme la somme de deux ensembles disjoints P et Q formés des éléments de E, où l'on a respectivement $U > p_1$, $U < q_1$, si $p_1 > q_1$. Ces ensembles comprenant chacun au moins un élément : P celui où $U = p$, Q celui où $U = q$, sont enchaînés; par suite, il existe un élément b de $PQ' + P'Q + P'Q'$. Comme E est fermé, b appartient à E. Si, par exemple, b appartient à PQ', la valeur de U en b est $> p_1$ et est l'une des limites des valeurs prises par U sur Q, valeurs qui sont $< q_1$. Si b appartient à $P'Q'$, la valeur de U en b sera la limite commune de valeurs $> p_1$ et $< q_1$. Dans tous les cas, on arrive à une impossibilité.

Enfin, si ce continu est en même temps un ensemble compact, on voit que la valeur intermédiaire r elle-même sera atteinte. Car en appelant E_n l'ensemble des éléments de E, où $r - \frac{1}{n} < U < r + \frac{1}{n}$, la suite $E_1, E_2, \ldots$ sera une suite monotone de sous-ensembles de E dont chacun a au moins un élément. Par suite, il y a un élément α commun aux E_n ou commun aux E'_n. Cet élément appartient à E, qui est fermé; s'il appartient à E_n, on a

$$r - \frac{1}{n} < U_\alpha < r + \frac{1}{n};$$

s'il appartient à E'_n, on a

$$r - \frac{1}{n} \leqq U_\alpha \leqq r + \frac{1}{n},$$

puisque U est continue. Ceci ayant lieu quel que soit n, $U_\alpha = r$.

Pour que l'on puisse joindre deux éléments quelconques d'un ensemble E par un arc de Jordan situé sur E, il est nécessaire (§ 30) que cet ensemble soit bien enchaîné. On peut se demander s'il ne suffirait pas qu'en outre il existe, pour tout couple d'éléments de l'ensemble, une fonctionnelle continue sur l'ensemble prenant des valeurs distinctes en ces deux éléments.

32. *La Géométrie de situation dans les classes* $(\mathfrak{D})$. — On peut mettre la condition d'enchaînement sous une forme commode quand les ensembles considérés appartiennent à une classe $(\mathfrak{D})$.

Dans une classe $(\mathfrak{D})$, si deux ensembles E, F sont enchaînés, il existe, quel que soit $\varepsilon > 0$, un couple d'éléments distincts b de E, c de F dont la distance est inférieure à ε. Car $EF' + E'F + E'F' \neq 0$; si a est un élément du premier membre, il y a au moins deux éléments b

de E, c de F distincts ou non de a, mais distincts entre eux, qui sont à des distances de a inférieures à $\frac{\varepsilon}{2}$; donc

$$(b, c) < \varepsilon.$$

La réciproque n'est pas entièrement exacte comme le montre, par exemple, dans le cas des ensembles de points d'un plan, le cas où E et F seraient l'un une hyperbole, l'autre ses asymptotes.

Mais on peut prouver que, si E, F sont compacts et si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe deux éléments b, c (distincts) l'un de E, l'autre de F à une distance $< \varepsilon$, E et F sont enchaînés. Car si b_n, c_n correspondent à $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on peut extraire des b_n une suite convergeant vers un certain élément a de E ou de E', et alors, puisque

$$(a, c_n) \leqq (a, b_n) + (b_n, c_n),$$

la suite correspondante extraite des c_n convergera vers un élément de F ou de F', qui sera a. Puisque b_n et c_n sont distincts, on ne peut supposer que les deux suites ne contiennent qu'un nombre fini d'éléments distincts de a, et par suite a est bien un élément d'accumulation de E (ou de F) qui appartient en outre à F + F' (ou à E + E'); les deux ensembles E, F sont enchaînés l'un à l'autre.

Il faut remarquer que le raisonnement reste valable si un seul des ensembles E, F est compact.

33. Passons aux ensembles bien enchaînés.

Dans une classe $(\mathcal{D})$, si un ensemble E est bien enchaîné, on peut, quel que soit $\varepsilon > 0$, joindre deux éléments quelconques b, c de E par une chaîne dont les maillons sont $< \varepsilon$. Autrement dit, il existe un nombre fini d'éléments $a_1, a_2, \ldots, a_p$ appartenant à E et tels que

$$(b, a_1) < \varepsilon, \qquad (a_1, a_2) < \varepsilon, \qquad \ldots, \qquad (a_n, c) < \varepsilon.$$

En effet, soit B_ε l'ensemble des éléments de E que l'on peut joindre à b par une telle chaîne. Si $B_\varepsilon \equiv E$ quels que soient b et ε, le théorème est établi. Sinon, il existe un élément b_0 de E et un nombre ε_0 tels que l'ensemble E comprenne d'autres éléments que ceux de l'ensemble B_{ε_0} correspondant à b_0. Soit C_0 l'ensemble restant;

on a $E = B_{\varepsilon_0} + C_0$, et par suite B_{ε_0} et C_0 sont enchaînés. Quel que soit ε, il existe donc un élément b'_0 de B_{ε_0} et c'_0 de C_0 dont la distance est $< \varepsilon_0$. Le maillon b'_0, c'_0 placé à la suite de la chaîne unissant par hypothèse b_0 et b'_0, et de maillons $< \varepsilon_0$, permettrait de constituer une chaîne unissant b_0 à c'_0 de C_0 et dont les maillons sont $< \varepsilon_0$; c'_0 ne pourrait appartenir à C_0.

Ici encore la réciproque n'est pas entièrement exacte comme le montre le cas de l'ensemble, qui n'est pas bien enchaîné, formé par l'ensemble de l'hyperbole et de ses asymptotes.

Dans une classe ($\mathfrak{D}$), si un ensemble E est compact et si, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut joindre deux quelconques de ses éléments par une chaîne d'éléments de E formant des maillons $< \varepsilon$, cet ensemble E est bien enchaîné. Autrement dit, G, H étant deux ensembles distincts non nuls dont la somme est E, G et H sont enchaînés. En effet, G, H possèdent respectivement un élément au moins chacun, soient b_0 et c_0. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une chaîne d'éléments de E, $b_0, b_1, \ldots, b_p, c_0$, de maillons $< \varepsilon$. Dans cette chaîne, b_0 appartient à G et il existe au moins un élément c_0 de H, soit b_k le dernier des éléments de la suite appartenant à G. Alors b_k appartient à G, b_{k+1} (ou c_0) à H, leur distance est $< \varepsilon$ et on peut les supposer distincts. Un tel couple existant quel que soit ε et G, H étant compacts comme E : G, H seront enchaînés.

D'après cela, un ensemble de points d'une droite qui est contenu dans un intervalle limité et dense dans tout cet intervalle est bien enchaîné. En particulier, un segment de droite est un continu. En particulier aussi, l'ensemble des points d'abscisses rationnelles entre 0 et 1 est bien enchaîné. On voit par cet exemple que notre définition se distingue de celle de F. Hausdorff (XIV, p. 300) pour lequel un tel ensemble n'est pas bien enchaîné (zusammen hängend).

De même, si l'on considère deux sphères tangentes, l'ensemble des points intérieurs à l'une ou l'autre de ces deux sphères forme un ensemble ouvert bien enchaîné. Comme, d'autre part, on peut considérer cet ensemble ouvert comme la somme de deux ensembles ouverts disjoints, on voit que notre définition des ensembles ouverts bien enchaînés ne coïncide pas avec celle de Carathéodory (XXX, p. 222).

Par contre, elle coïncide avec celle de Cantor pour les ensembles compacts et avec celle de Jordan pour les ensembles fermés.

34. *Exemples de classes* ($\mathcal{D}$) *dont les sphéroïdes sont des continus.* — Passons en revue quelques-unes des classes ($\mathcal{D}$) que l'on rencontre en Analyse et montrons, au moyen des considérations précédentes, que leurs sphéroïdes sont des continus. [Il en résultera également, d'après le paragraphe 28, que dans ces classes les sphéroïdes ouverts sont aussi bien enchaînés, puisque tout sphéroïde ouvert, ensemble des éléments c tels que $(a, c) < \rho$, est la somme $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$ des sphéroïdes S_n ensembles des éléments b tel que $(a, b) \leqq \rho - \frac{1}{n}$, les S_n ayant a en commun].

Nous aurons montré, en même temps, que ces classes sont localement bien enchaînées.

I. *Espace* Ω. — C'est la classe des points x déterminés par une infinité de coordonnées $x_1, x_2, \ldots$ dont la somme des carrés est convergente et où

$$(x, x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2 + \ldots}.$$

Si x', x'' sont deux points du sphéroïde de centre x^0, rayon ρ, ils appartiennent à un ensemble fermé homéomorphe d'un segment fermé de droite et appartenant au sphéroïde, à savoir l'ensemble des points $X^{(\lambda)}$ de coordonnées

$$X_n^{(\lambda)} = x'_n + \lambda(x''_n - x'_n) \qquad \text{où} \qquad 0 \leqq \lambda \leqq 1.$$

En effet, on a pour deux valeurs de λ

$$(X^{(\lambda)}, X^{(\lambda')}) = |\lambda - \lambda'|(x'', x'),$$

de sorte que la correspondance entre le point $X^{(\lambda)}$ et le point d'abscisse λ du segment $(0, 1)$ est non seulement biunivoque, mais bicontinue. Et, d'autre part,

$$\begin{aligned}(x^0, X^{(\lambda)})^2 &= \sum_n [(x'_n - x_n^0)(1 - \lambda) + (x''_n - x_n^0)\lambda]^2 \\ &= (1-\lambda)^2(x', x^0)^2 + \lambda^2(x'', x^0)^2 + 2\lambda(1-\lambda)\,\Sigma(x'_n - x_n^0)(x''_n - x_n^0).\end{aligned}$$

Or

$$[\Sigma(x'_n - x_n^0)(x''_n - x_n^0)]^2 \leqq [\Sigma(x'_n - x_n^0)^2] \times [\Sigma(x''_n - x_n^0)^2];$$

d'où

$$\Sigma(x'_n - x_n^0)(x''_n - x_n^0) = \theta(x', x^0)(x'', x^0), \qquad \text{où} \qquad |\theta| < 1,$$

de sorte que

$$(x^0, X^{(\lambda)})^2 = [(1-\lambda)(x', x^0) + \lambda(x'', x^0)]^2 - 2\lambda(1-\lambda)(1-\theta)(x', x_0)(x'', x_0).$$

Si donc

$$0 \leqq \lambda \leqq 1 \quad \text{et} \quad (x', x^0) \leqq \rho, \quad (x'', x_0) \leqq \rho,$$

on aura

$$(x^0, X^{(\lambda)})^2 \leqq [(1-\lambda)\rho + \lambda\rho]^2 = \rho^2.$$

Ainsi, on peut joindre deux points quelconques du sphéroïde de centre x^0, rayon ρ, par un ensemble continu situé dans ce sphéroïde. Comme le sphéroïde est un ensemble évidemment fermé, c'est lui-même un continu.

Le raisonnement s'applique évidemment (en laissant x_{n+1}, x_{n+2}, ... nuls) à l'espace euclidien à n dimensions.

II. *Espace* D_ω. — Pour éviter toute confusion avec la famille plus générale des classes $(\mathcal{D})$, appelons espace D_ω l'espace que nous avions appelé auparavant (VI, p. 161) espace D, celui des points x à une infinité de coordonnées x_1, x_2, ..., bornées quand n varie et où la distance (x, x') de deux points x, x' est définie comme la borne supérieure, quand n varie, de la valeur absolue $|x_n - x'_n|$ de la différence de leurs coordonnées de mêmes rangs.

Un raisonnement semblable au précédent permettra de montrer que dans l'espace D_ω également on peut joindre encore deux points quelconques x', x'' d'un sphéroïde de centre x^0, rayon ρ, par un arc de Jordan décrit par le point $X^{(\lambda)}$ de coordonnées

$$X_n^{(\lambda)} = x'_n + \lambda(x''_n - x'_n), \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1),$$

arc tout entier dans le sphéroïde et ayant pour extrémités les points x', x''.

III. *Ensemble des fonctions continues.* — Considérons la classe dont les éléments sont des fonctions continues d'une variable numérique réelle dans un intervalle fixe a, b, et définissons-y distance de deux fonctions le maximum de la valeur absolue de leur différence.

Alors, si f_1, f_2 sont deux éléments du sphéroïde de centre f_0, rayon ρ, nous pourrons refaire un raisonnement analogue au précédent en joignant f_1, f_2 par l'ensemble continu, contenant f_1 et f_2, des fonctions

$$f_\lambda(x) = f_1(x) + \lambda[f_2(x) - f_1(x)], \qquad (0 \leqq \lambda \geqq 1).$$

On verra encore que

$$(f_\lambda, f_{\lambda'}) = |\lambda - \lambda'|.(f_1, f_2)$$

et que

$$(f_\lambda, f_0) \leqq (f_1, f_0)(1-\lambda) + \lambda(f_2, f_0) \leqq \rho.$$

IV. *Espace* E_ω. — J'ai appelé dans ma Thèse (XVIII, p. 19) *espace* E_ω un espace dont les points x sont, chacun, définis par une suite infinie de nombres $x_1, x_2, \ldots$ appelés les *coordonnées* de x, et dans lequel une suite infinie de points $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}, \ldots$ est dite *converger* vers un point x si les coordonnées de $x^{(p)}$ convergent, d'ailleurs indépendamment, vers les coordonnées de même rang de x quand p croît indéfiniment. C'est la « convergence faible » de Hilbert. Et j'ai montré que, dans cet espace, les points limites pouvaient être aussi définis par l'intermédiaire d'une définition convenable de la distance de deux points. J'ai proposé, pour valeur de la distance de deux points x, x', la quantité

$$(x, x') = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n!} \frac{|x_n - x'_n|}{1 + |x_n - x'_n|}.$$

Cette expression est choisie d'une manière artificielle; il est probable que l'on pourrait en proposer une qui serait plus simple et plus naturelle tout en conduisant à la même définition des points limites. Mais l'essentiel est qu'il existe au moins une définition de la distance, puisque son expression n'intervient pas dans les théorèmes généraux sur les classes $(\mathfrak{D})$.

Ici, pour démontrer que l'on peut joindre deux points d'un sphéroïde dans l'espace E_ω par un arc continu situé dans le sphéroïde, nous prouverons, pour éviter des complications, qu'on peut le faire simplement dans le cas où l'un des points est le centre du sphéroïde. Dans le cas général, il suffira de joindre les deux points au centre.

Or, si

$$(x', x^{(0)}) < \rho,$$

et si l'on pose

$$X_n = x_n^{(0)} + \lambda(x'_n - x_n^{(0)}) \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqq \lambda \leqq 1,$$

on aura

$$\frac{|X_n - x_n^{(0)}|}{1 + |X_n - x_n^{0}|} = \frac{\lambda |x'_n - x_n^{(0)}|}{1 + \lambda |x'_n - x_n^{(0)}|} \leqq \frac{|x'_n - x_n^{(0)}|}{1 + |x'_n - x_n^{(0)}|},$$

et par suite

$$(X, x^{(0)}) \leqq (x', x^{(0)}) < \rho$$

si X est le point de coordonnées $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$. Or, lorsque λ tend vers λ', λ et λ' restant entre 0 et 1, le point X correspondant à λ tend vers le point X' correspondant à la valeur λ' de λ.

Par conséquent, lorsque λ varie de 0 à 1, X décrit un arc continu joignant $x^{(0)}$ à x' et tout entier dans le sphéroïde de centre $x^{(0)}$, rayon ρ, auquel appartient x'.

V. *Classes des fonctions holomorphes à l'intérieur d'une aire donnée.* — Le même mode de démonstration que celui employé pour l'espace E_ω conviendra en utilisant la définition de la distance de deux fonctions holomorphes que j'ai donnée dans ma Thèse (XVIII, p. 46). Cette définition est aussi sujette aux remarques faites pour l'espace E_ω.

VI. *Classes des courbes continues.* — Le raisonnement est à peu près le même que pour la classe des fonctions continues et conduit au même résultat.

VII. *Classe des fonctions mesurables.* — Appelons (M) la classe dont les éléments sont des fonctions $f(x)$ mesurables au sens de M. Lebesgue dans un intervalle fixe (a, b) et où une suite d'éléments est dite *convergente* si elle converge « en mesure » au sens de M. F. Riesz. Nous rappelons que $f_n(x)$ converge en mesure vers $f(x)$ si l'ensemble des points où $f_n(x)$ diffère sensiblement de $f(x)$ a une mesure qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Autrement dit, si $\eta > 0$ étant donné, il existe un entier p et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que, pour $n > p$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| < \eta,$$

sauf peut-être dans un ensemble de points de mesure $< \varepsilon$.

J'ai montré (XXXVII; XXXVIII, p. 202) qu'une telle classe est une classe ($\mathfrak{D}$). Autrement dit, on peut définir la convergence « en mesure » par l'intermédiaire d'une distance convenablement définie. Il est probable que l'on pourrait formuler une définition de la distance équivalente à celle que j'ai proposée, mais moins artificielle. Mais dans la théorie actuelle la forme de cette distance n'a aucun intérêt, l'essentiel est de pouvoir en définir une. J'indique donc la suivante. On appellera *distance* des deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ mesurables sur (a, b), la borne inférieure lorsque ω varie, par valeurs $\geqq 0$, de la somme

$$\omega + m_{|f-\varphi|>\omega},$$

où le second terme désigne la mesure de l'ensemble des points de (a, b), où

$$|f(x) - \varphi(x)| > \omega.$$

Une telle classe est séparable, complète, parfaite. Montrons que l'on peut joindre deux de ses éléments f_1, f_2 appartenant au même sphéroïde S_φ par un arc de Jordan appartenant à ce même sphéroïde. Pour simplifier, nous ramènerons comme plus haut au cas où f_1 est le centre du sphéroïde. On pourra alors joindre f_1 à f_2 par l'arc de Jordan constitué par l'ensemble des fonctions de x

$$f_t(x) = f_1(x) + t[f_2(x) - f_1(x)], \qquad 0 \leqq t \leqq 1.$$

En effet, on a

$$|f_t - f_1| = |t|\,|f_2 - f_1|.$$

Pour toute valeur de t entre 0 et 1, l'ensemble des points où $|f_t - f_1| > \omega$ est compris dans l'ensemble des points où $|f_2 - f_1| > \omega$ et, par suite,

$$\omega + m_{|f_t-f_1|>\omega} \leqq \omega + m_{|f_2-f_1|>\omega}.$$

Donc

$$(f_1, f_t) \leqq (f_1, f_2),$$

et f_t est bien un élément de tout sphéroïde de centre f_1 qui comprend f_2.

D'autre part, $f_t(x)$ correspond à f_1 pour $t = 0$, à f_2 pour $t = 1$, et décrit un arc de Jordan. En effet,

$$|f_t(x) - f_{t'}(x)| = |t - t'|\,|f_2(x) - f_1(x)|.$$

Il suffit de montrer que l'on peut prendre t' assez voisin de t pour que la distance $(f_t, f_{t'})$ soit inférieure à un nombre positif donné quelconque ε. Or, dans le cas contraire, il existerait $\varepsilon_0 > 0$, t_0 et t'_n dans $(0, 1)$, tels que, quel que soit n,

$$|t_0 - t'_n| < \frac{1}{n}, \qquad (f_{t_0}, f_{t'_n}) > \varepsilon_0.$$

Par suite, quel que soit $\omega > 0$,

$$\omega + m_{|f_{t_0} - f_{t'_n}| > \omega} > \varepsilon_0 > 0,$$

et, en prenant $\omega = \frac{\varepsilon_0}{2}$,

$$(1) \qquad m_{|f_{t_0} - f_{t'_n}| > \omega} > \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Or

$$m_{|f_{t_0} - f_{t'_n}| > \omega} = m_{|f_2 - f_1| > \frac{\omega}{|t_0 - t'_n|}} \leqq m_{|f_2 - f_1| > n\omega}$$

et

$$(b-a) = m_{|f_2 - f_1| \leqq 1}$$
$$+ [m_{|f_2 - f_1| > 1} - m_{|f_2 - f_1| > 2}] + \ldots + [m_{|f_2 - f_1| > n} - m_{|f_2 - f_1| > n+1}] + \ldots.$$

La fonction $(f_2 - f_1)$ étant mesurable sur (a, b), on voit que la série est convergente et, par suite,

$$m_{|f_2 - f_1| > n\omega}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Si donc on prend $\omega = \frac{\varepsilon_0}{2}$, puis n assez grand pour que

$$m_{|f_2 - f_1| > n\omega} < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

on aurait

$$m_{|f_{t_0} - f_{t'_n}| > \omega} < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

contrairement à l'inégalité (1).

35. *Propriétés des classes* ($\mathcal{D}$) *où tout sphéroïde est un continu.* — La classe entière est un continu. En effet, c'est la somme de sphé-

roïdes concentriques, lesquels sont bien enchaînés et ont en commun leur centre. Donc (§ 28, III) elle est bien enchaînée. Elle est, d'autre part, fermée par définition.

D'autre part, il est clair que la classe toute entière est localement bien enchaînée et par suite (§ 27) que ses sous-ensembles ouverts sont localement bien enchaînés.

Enfin la classe jouit des propriétés que nous allons établir plus généralement pour toute classe $\mathcal{H}$ qui est un continu localement bien enchaîné. Dans une telle classe :

I. Un ensemble ne peut être à la fois ouvert et fermé. Car, dans ce cas, l'ensemble complémentaire d'un ensemble ouvert étant fermé, la classe entière serait la somme de deux ensembles fermés disjoints.

II. Un ensemble bien enchaîné E reste bien enchaîné quand on lui ajoute des composants de l'ensemble complémentaire H.

D'après le lemme III (§ 28), il suffit de montrer que, si P est un composant de H, $E+P$ est bien enchaîné. En effet, considérons $E+P$ comme la somme de deux ensembles G_1, G_2 distincts non nuls et appelons E_1, E_2 les parties communes à E et à G_1 et G_2, et de même pour P_1, P_2. On a $G_1 = E_1 + P_1$, $G_2 = E_2 + P_2$, et comme G_1, G_2 ne sont pas nuls, E_1 par exemple n'est pas nul. Alors, si E_2 n'est pas nul, l'ensemble bien enchaîné E étant la somme de deux ensembles distincts non nuls E_1, E_2, ceux-ci sont enchaînés, donc G_1 et G_2 sont enchaînés. Si, au contraire, E_2 est nul, P_2 ne l'est pas. Si P_1 n'est pas nul, on voit encore que P_1 et P_2, et par suite G_1 et G_2 sont enchaînés. Reste le cas où $E_2 = 0$, $P_1 = 0$, et de même le cas où $E_1 = 0$, $P_2 = 0$, c'est-à-dire celui où $G_1 = E$, $G_2 = P$ ou $G_1 = P$, $G_2 = E$. Il faut donc montrer que E et P sont enchaînés. S'ils ne l'étaient pas, $E_0 = E + E'$ et $P_0 = P + P'$ seraient deux ensembles fermés et, par suite, deux continus sans élément commun. Par suite, $P + P'$ serait un ensemble bien enchaîné appartenant à H et contenant le composant P de H. Donc $P + P'$ serait identique à P. Mais, puisque P appartiendrait au complémentaire de E_0, lequel complémentaire H_0 appartient à H, P serait aussi un composant de H_0. Comme H_0 est ouvert, P serait ouvert. Il serait aussi fermé comme identique à $P + P'$. On arrive à la contradiction annoncée.

Liste des Mémoires cités.

I. Cours d'Analyse infinitésimale, par de la Vallée Poussin; Gauthier-Villars, Paris, 3[e] édition; deux tomes : IX-452 pages, 1914, et IX-464 pages, 1921.

II. Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, par J. Radon (*Berichten der K. Akad. der Wissenschaften, Math. Klasse*, Bd, CXII, Wien, 1913).

III. Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait, par M. Fréchet (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLIII, 1915, p. 248-265).

IV. Sur la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel et sur la théorie du potentiel, par R. Gateaux, avec Notes de M. P. Lévy (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLVII, 1919, p. 47-69).

V. Sur une définition axiomatique des ensembles mesurables (L), par W. Sierpinski (*Bulletin des Sciences de l'Académie de Cracovie*, Sciences mathématiques, juin-décembre 1918, p. 173-178).

VI. Les dimensions d'un ensemble abstrait, par M. Fréchet (*Mathematische Annalen*, Band LXVIII, 1910, p. 145-168).

VII. Ueber den natürlichen Dimensionsbegriff, par L.-E. Brouwer (*Journal für die reine und ang. Mathem.*, Bd 142, 1913, p. 146-152).

VIII. Ueber den Dimensionentypen des Herrn Fréchet im Gebiete der linearen Mengen, par P. Mahlo (*Berichten der Math.-Phys. Klasse der Kön. Sächs. Gesell. der Wiss. zu Leipzig*, Bd LXIII, 1911, p. 319-347).

IX. Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles, par J. Hadamard (*Verhandlungen des ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses*, 1897, p. 201-202).

X. Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits, par M. Fréchet (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2[e] série, t. XLII, 1918, p. 1-18).

XI Relations entre les notions de limite et de distance, par M. Fréchet (*Transactions of the American Mathematical Society*, vol. XIX, 1918, p. 53-65).

XII. Iterated limits of functions on an abstract range, by R.-E. Root (*Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. XVII, 1911, p. 538-539).

XIII. An introduction to a form of General Analysis, by E.-H. Moore (*The Newhaven mathematical Colloquium*, *Yale University Press* Newhaven, 1910).

XIV. Grundzüge der Mengenlehre, par F. Hausdorff, 1914, Veit, Leipzig, VI-476 pages.

XV. Les principes du Calcul Fonctionnel, par Winter (*Revue de Métaphysique et de Morale*, 21e année, 1913, p. 462-510).

XVI. Le théorème de Borel dans la théorie des ensembles abstraits, par M. Fréchet (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLV, 1917, p. 1-8).

XVII. On the most general class L of Fréchet in which the Heine-Borel-Lebesgue theorem holds true, par R.-L. Moore (*Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. V, 1919, p. 206-210).

XVIII. Sur quelques points du Calcul Fonctionnel, par M. Fréchet (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXII, 1906, p. 1-74).

XIX. Les ensembles abstraits et le Calcul Fonctionnel, par M. Fréchet (*Rend. del Circolo matematico di Palermo*, t. XXX, 1910, p. 1-26).

XX. A contribution to the foundations of Fréchet's Calcul Fonctionnel, par T.-H. Hildebrandt (*American Journal of mathematics*, vol. XXVIV, 1912, p. 237-290).

XXI. On properties of a domain for which any derived set is closed, par E.-R. Hedrick (*Transactions of the Am. Math. Soc.*, vol. XII, 1911, p. 285-294).

XXII. Sur les classes (V) normales, par M. Fréchet (*Transactions of the Am. Math. Soc.*, vol. XIV, 1913, p. 320-324).

XXIII. On the equivalence of ecart and voisinage, par E.-W. Chittenden (*Trans. of the Am. Math. Soc.*, vol. XVIII, 1917, p. 161-166).

XXIV. Sur les continus irréductibles entre deux points, par S. Janizewski (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XVI, 1911, p. 79-170).

XXV. Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, par F. Riesz (*Atti del quatro Congresso Internazionale dei Matematici*, Roma, vol. II, 1909, p. 18).

XXVI. The converse of Heine-Borel theorem, par E.-W. Chittenden (*Bull. Am. Math. Soc.*, t. XXI, 1915, p. 179-181).

XXVII. On the Heine Borel theorem in the theory of abstracts sets, par E.-W. Chittenden (*Bull. Am. Math. Soc.*, vol. XXV, 1918, p. 60-66).

XXVIII. Zur Theorie der Mengen, in denen ein Distanz begriff definiert ist, par W. Gross (*Sitzungsberichten d. k. Akad. der Wissenschaften*, Math. Naturw. *Kl.*, Wien, Bd 123, 1914, p. 801).

XXIX. Limit in terms of continuous transformations, par Norbert Wiener, (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. L, 1922).

XXX. Vorlesungen über reelle Funktionen, par C. Carathéodory, Teubner, Leipzig, 1918.

XXXI. Sur l'homéomorphie des ensembles dénombrables, par M. Fréchet (*Bulletin de l'Académie polonaise des Sciences*, 1920, p. 107).

XXXII. Sur les ensembles abstraits, par M. Fréchet (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXXVIII, 1921, p. 341-388).

XXXIII. Sur les lignes de Jordan, par S. Mazurkiewicz (*Fundamenta Mathematicæ*, t. I, 1920, p. 66).

XXXIV. Ueber die allgemeinste ebene Punktmenge die stetiges Bild einer Strecke ist; par H. Hahn (*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, vol. XXIII, 1914, p. 318-322).

XXXV. Sur une condition pour qu'un continu soit une ligne courbe jordanienne, par W. Sierpinski (*Fundamenta Mathematicæ*, t. I, 1920, p. 45).

XXXVI. Essai de Géométrie analytique à une infinité de coordonnées, par M. Fréchet (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. VIII, 1908).

XXXVII. L'écart de deux fonctions quelconques, par M. Fréchet (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 162, 1916, p. 154).

XXXVIII. Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable, par M. Fréchet (*Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, vol. XI, 1921, p. 187-206).

XXXIX. Esquisse d'une théorie des ensembles abstraits, par M. Fréchet (*Sir Asutosh Mookerjee's Commemoration volumes*, t. II, environ 50 p.; The Baptist Mission Press, Calcutta, 1922).

TABLE DES MATIÈRES