Annales scientifiques de l'É.N.S.

Elie Cartan

Sur la déformation projective des surfaces

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 37 (1920), p. 259-356

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1920_3_37__259_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR

LA DÉFORMATION PROJECTIVE DES SURFACES

PAR M. E. CARTAN.

M. G. Fubini a publié récemment un Mémoire sur l'*applicabilité projective* des surfaces (1). Pour bien comprendre le problème qu'il s'y est posé, il ne sera pas inutile de donner quelques explications préliminaires.

Dans la théorie classique de la *déformation* de Gauss, deux surfaces (S) et (Σ) sont dites *applicables* si l'on peut établir entre elles une correspondance ponctuelle telle que, si M et P sont deux points correspondants quelconques des deux surfaces, toute portion infiniment petite de (S) entourant M est égale, *aux infiniment petits du second ordre près*, à la portion infiniment petite correspondante de (Σ) entourant P. On peut préciser ce que cet énoncé a d'un peu vague en imaginant qu'on ait transporté la surface (Σ) de manière à réaliser la coïncidence, aux infiniment petits du second ordre près, des deux portions infiniment petites correspondantes des deux surfaces; cela signifie que le point P coïncide avec le point M et que la distance de deux points correspondants M′, P′ de (S) et de (Σ), infiniment voisins l'un de M, l'autre de P, est un infiniment petit du second ordre par rapport à la distance MM′ (ou PP′).

On peut exprimer la propriété précédente d'une manière encore

(1) Guido FUBINI, *Applicabilità proiettiva di due superficie* (*Rendiconti del Circolo matem. di Palermo*, t. XLI, 1916, p. 135-162). Depuis, M. Fubini, dans différents Mémoires sur la Géométrie différentielle projective des surfaces, est revenu incidemment sur les propriétés géométriques de l'applicabilité projective, mais sans aborder le problème de l'existence et du degré de généralité des surfaces projectivement applicables sur une surface donnée.

plus précise, et *beaucoup plus générale*, en imaginant qu'on ait fait choix sur la surface (S) d'un système quelconque de coordonnées curvilignes t_1, t_2 et sur la surface (Σ) du système de coordonnées curvilignes *correspondant* (c'est-à-dire tel que deux points correspondants des deux surfaces aient les mêmes coordonnées curvilignes), en imaginant d'autre part qu'on ait fait choix dans l'espace d'un système de coordonnées (x, y, z) quelconque, cartésien ou non. *Les deux surfaces sont alors applicables si, étant donné un point quelconque* M *de* (S), *on peut déplacer la surface* (Σ) *de manière que les coordonnées* X, Y, Z *d'un point de la surface* (Σ) *dans sa nouvelle position et leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport à* t_1, t_2 *aient les mêmes valeurs numériques que les coordonnées* x, y, z *d'un point de* (S) *et leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport à* t_1, t_2, *lorsqu'on donne à* t_1 *et* t_2 *les valeurs numériques qui correspondent au point* M.

Dans l'énoncé précédent, la notion euclidienne de *distance* n'intervient plus pour exprimer l'égalité (euclidienne) des deux portions infiniment petites correspondantes de la surface (S) et de la surface (Σ) *transportée, parce que cette relation d'égalité se conserve quand on soumet les deux surfaces à une même transformation ponctuelle quelconque*. La propriété des deux surfaces (S) et (Σ) d'être applicables l'une sur l'autre reste cependant une propriété *métrique euclidienne* parce qu'on *déplace* (Σ) suivant les lois de la géométrie euclidienne, sans qu'elle cesse d'être égale à elle-même.

Formulé ainsi, le problème de la déformation admet évidemment une double généralisation :

1° D'une part, on peut remplacer l'espace euclidien par un autre espace (non euclidien, projectif, affine, etc.); autrement dit, on peut substituer au groupe des déplacements euclidiens un autre groupe fondamental G.

2° D'autre part, on peut considérer, en même temps que les dérivées partielles du premier ordre de x, y, z, par rapport à t_1 et t_2, les dérivées partielles jusqu'à un certain ordre h.

Pour énoncer simplement le problème général auquel on arrive, empruntons à M. Fubini la définition suivante :

Étant données deux surfaces (S) et (S′) entre lesquelles on a établi une correspondance ponctuelle, et telles que deux points correspondants des deux surfaces coïncident en un même point A, nous dirons que ces deux surfaces ont en A un contact analytique d'ordre h si deux portions infiniment petites correspondantes des deux surfaces entourant le point A sont égales *aux infiniment petits près d'ordre* $h+1$; d'une manière plus précise si, étant choisi sur la première un système quelconque de coordonnées curvilignes (t_1, t_2) et sur la seconde un système correspondant tel que deux points correspondants des deux surfaces aient les mêmes coordonnées curvilignes, les coordonnées x, y, z d'un point de (S) ainsi que toutes leurs dérivées partielles par rapport à t_1, t_2, jusqu'au $h^{\text{ième}}$ ordre inclus, sont numériquement égales aux quantités analogues relatives à (S′) quand on donne à t_1, t_2 les valeurs numériques qui correspondent au point commun A.

D'après cela, *deux surfaces* (S) *et* (Σ) *seront dites applicables d'ordre* h *relativement au groupe fondamental* G, *si l'on peut établir entre ces deux surfaces une correspondance ponctuelle jouissant de la propriété suivante : Étant donné un point quelconque* M *de la première surface* (S), *on peut effectuer sur la surface* (Σ) *une transformation du groupe* G *telle que la surface* (Σ') *transformée de* (Σ) *ait avec la surface* (S) *au point* M *un contact analytique d'ordre* h.

Si l'on prend $h = 1$ et le groupe des transformations par similitude, la notion d'applicabilité se confond avec celle de *représentation conforme;* il en est de même si l'on prend pour G le groupe plus général des transformations conformes [1].

On peut rendre les considérations précédentes plus intuitives en employant un langage cinématique; il suffit pour cela de donner, par convention, à toute transformation du groupe G, le nom de *déplacement* dans l'espace (c'est en réalité un déplacement de la Géométrie qui admet le groupe G comme groupe fondamental). La surface (Σ) peut ainsi être regardée comme animée d'un mouvement à deux paramètres (t_1, t_2), et *elle est applicable d'ordre* h *sur* (S) *si l'on peut choisir ce mouvement à deux paramètres de manière qu'à chaque instant* (t_1, t_2)

---

(1) C'est à ce point de vue que je me suis placé pour étudier le problème de la représentation conforme dans un espace à plus de quatre dimensions (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLV, 1917, p. 57-121, et t. XLVI, 1919, p. 84-105).

elle soit tangente à (S) *et ait avec* (S), *au point de contact, un contact analytique d'ordre* h.

Tout mouvement d'un point à plusieurs paramètres comporte, pour ce point *des* vitesses, des accélérations du premier, du second, ... ordre. Si, dans le cas qui nous occupe, on considère le point mobile fictif qui coïncide à chaque instant (t_1, t_2) avec le point de contact de la surface fixe (S) et de la surface mobile (Σ), on voit que le mouvement *absolu* de ce point se fait sur (S), le mouvement *relatif* sur (Σ), et ce qui caractérise l'applicabilité d'ordre h de (Σ) sur (S), c'est qu'*à chaque instant* (t_1, t_2) *le point mobile fictif de contact a ses vitesses relatives, ses accélérations relatives du premier, ..., du* $(h-1)^{\text{ième}}$ *ordre respectivement égales à ses vitesses absolues, à ses accélérations absolues du premier, ..., du* $(h-1)^{\text{ième}}$ *ordre.*

Dans le cas de la déformation du *premier* ordre, la propriété d'égalité des vitesses relatives et des vitesses absolues est équivalente à la propriété des vitesses d'entraînement d'être nulles, c'est-à-dire *à la propriété du mouvement de la surface* (Σ) *de se faire sans glissement;* on retrouve ainsi l'idée physique primitive qui est à la base du problème classique de la déformation. Dans le cas des déformations d'ordre supérieur, il n'existe plus de propriété cinématique aussi intuitive du mouvement (d'entraînement) qui réalise l'application de (Σ) sur (S); à chaque groupe particulier correspondent des propriétés cinématiques particulières.

L'objet des Mémoires cités plus haut de M. Fubini est l'étude de l'applicabilité du second ordre par rapport au groupe des transformations projectives, ou, plus brièvement, de l'applicabilité projective du second ordre. Leur résultat principal est un très intéressant théorème d'après lequel pour que deux surfaces soient projectivement applicables du second ordre l'une sur l'autre, il faut et il suffit qu'il existe entre ces deux surfaces une correspondance ponctuelle transformant une certaine forme différentielle relative à la première surface dans la forme différentielle analogue relative à la seconde surface. Cette forme différentielle est le quotient de deux formes entières, une cubique et une quadratique; la forme quadratique, égalée à zéro, donne les lignes asymptotiques de la surface; la forme cubique, égalée à zéro, donne trois familles de lignes remarquables appelées *lignes de*

Darboux-Segre. Ce théorème de M. Fubini établit ainsi une parenté de plus entre le problème classique de la déformation ordinaire, où intervient le ds^2 de la surface, et le problème de la déformation projective du second ordre. Mais il est loin d'épuiser la question ; d'une part, en effet, la forme cubique de Darboux-Segre s'évanouit pour les *quadriques* et les surfaces développables ; d'autre part, même pour les surfaces non développables, le théorème en question fournit *une propriété* de l'application projective du second ordre plutôt qu'une méthode pour résoudre les problèmes que pose l'applicabilité, à savoir trouver toutes les surfaces applicables sur une surface donnée; reconnaître si deux surfaces données sont applicables l'une sur l'autre; déterminer, dans le cas où elles le sont, la correspondance ponctuelle qui réalise cette application. Ces problèmes sont laissés à l'arrière-plan du Mémoire de M. Fubini. Ils ont cependant une importance fondamentale, car *si par hasard une surface quelconque n'était applicable que sur elle-même* (et sur celles qu'on en déduit par une transformation projective), ou, pour parler plus brièvement, *si toute surface était projectivement indéformable*, il n'y aurait plus lieu de s'occuper des propriétés géométriques de l'application projective. Ce n'est heureusement pas ce qui se passe. Néanmoins, l'étude directe du problème qu'on trouvera dans le présent Mémoire montre que *la propriété d'être projectivement déformable n'appartient, en dehors des surfaces réglées, qu'à des surfaces exceptionnelles*. Ces surfaces dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument. Elles n'admettent du reste, en général, que des déformées formant une famille continue de surfaces dépendant *d'un paramètre;* exceptionnellement, elles peuvent admettre des déformées formant une famille continue dépendant de trois paramètres : les familles de surfaces ainsi privilégiées dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument; on peut former explicitement les équations différentielles linéaires auxquelles satisfont les coordonnées projectives d'un de leurs points.

Les surfaces *réglées* non développables admettent toujours une infinité de déformées dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument. Enfin, deux surfaces *développables* quelconques sont toujours applicables l'une sur l'autre et la correspondance ponctuelle qui réalise l'application dépend encore de trois fonctions arbitraires d'un argument,

M. Fubini considère également, dans ses Mémoires, l'application projective des hypersurfaces dans un espace à plus de trois dimensions. Or, là, le résultat est digne de remarque : *les hypersurfaces non développables* (les seules que M. Fubini considère) *ne sont jamais projectivement déformables;* deux hypersurfaces développables, au contraire, sont en *général* applicables l'une sur l'autre, et la correspondance ponctuelle qui réalise l'application dépend de *deux* fonctions arbitraires d'un argument (au lieu de *trois* dans l'espace à trois dimensions).

J'ai laissé de côté, dans l'exposé précédent, une autre espèce d'applicabilité projective considérée par M. Fubini, et qui repose sur la notion de *contact géométrique* substituée à celle de *contact analytique*. Deux surfaces entre lesquelles on a établi une correspondance ponctuelle et qui ont un point A commun qui est à lui-même son propre correspondant, sont dites avoir en A un contact *géométrique* d'ordre h si deux courbes correspondantes quelconques (passant par A) des deux surfaces ont entre elles un contact *ordinaire* d'ordre h. Il se trouve que si l'on peut, dans l'espace *projectif*, déplacer une surface (Σ) de manière qu'elle ait à chaque instant (t_1, t_2) un contact *géométrique* du second ordre avec une surface (S), on pourra également la déplacer de manière à réaliser un contact *analytique*. Mais c'est là une propriété qui ne se généralise pas pour un groupe fondamental quelconque, par exemple pour le groupe affine qui conserve le plan de l'infini. Il ne me semble pas que cette notion du contact géométrique ait une aussi grande importance que celle du contact analytique, et elle paraît en tout cas beaucoup plus artificielle (1).

Laissons ce point de vue de côté et bornons-nous à la notion de contact analytique. Il est bien évident qu'on peut formuler un problème général de la déformation d'ordre h dans un espace à un nombre quelconque n de dimensions, pour un groupe fondamental quelconque; ce problème pourra être posé pour des variétés à un nombre donné p de dimensions, et même pour la variété formée par l'espace

(1) Peut-être M. Fubini y a-t-il été conduit par le désir de faire rentrer la représentation conforme dans les problèmes de déformation (*géométrique*) du premier ordre de l'espace euclidien; mais elle est à considérer beaucoup plus naturellement comme une déformation (*analytique*) du premier ordre dans l'espace conforme.

lui-même. Le groupe fondamental, d'autre part, pourra être fini ou infini. Il existe des méthodes générales fondées soit, comme celle qui est utilisée ici, sur la théorie généralisée du trièdre mobile, soit, *ce qui revient au même dans le cas des groupes finis*, sur la théorie que j'ai développée de la *structure* des groupes finis ou infinis. Je reviendrai dans un autre Mémoire sur ces questions générales.

Celui-ci se divise en sept Chapitres. Le premier pose la méthode générale. Le Chapitre II a pour objet une première étude du système différentiel qui donne les couples de surfaces projectivement applicables de l'espace à trois dimensions : on a ainsi dès le début le degré de généralité de ces couples de surfaces applicables. Le Chapitre III étudie en détail la déformation projective des surfaces non réglées; il introduit la notion de réseau conjugué de déformation projective; une étude particulière y est faite des surfaces qui admettent le degré maximum de déformabilité. Le Chapitre IV étudie en elles-mêmes, et dans leurs relations avec le problème de la déformation projective, les deux formes différentielles, quadratique et cubique, qui sont des invariants projectifs rationnels des surfaces. Le Chapitre V est consacré à la déformation projective des surfaces réglées; la solution du problème est donnée complètement pour les surfaces dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire. Le Chapitre VI s'occupe de la déformation projective des surfaces développables. Enfin, le Chapitre VII s'occupe de la déformation projective des hypersurfaces dans l'espace à $n \geqq 4$ dimensions : la discussion est faite complètement dans l'espace à quatre dimensions pour les hypersurfaces développables, les seules qui soient projectivement déformables ([1]).

CHAPITRE PREMIER.

PRÉLIMINAIRES. LE SYSTÈME DE PFAFF FONDAMENTAL.

1. Considérons, dans un espace projectif à n dimensions, un sys-

([1]) Les principaux résultats contenus dans ce Mémoire ont fait l'objet de deux Communications à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 1439; t. 171, 1920, p. 27). *Cf.* une Communication de M. Fubini (*Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 88).

tème de coordonnées projectives fixe. Nous désignerons par une lettre majuscule telle que A l'ensemble de $n+1$ coordonnées; les symboles A et mA, où m désigne un coefficient numérique, seront regardés comme distincts, bien qu'ils correspondent à un même point géométrique. Quand il n'y aura pas de confusion à craindre, nous parlerons, pour abréger, du point A, entendant par là le point dont les coordonnées *homogènes* sont les $n+1$ nombres représentés par la lettre A.

Considérons un système mobile formé de $n+1$ points

$$A, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n$$

assujettis à la seule condition que le déterminant de leurs $(n+1)^2$ coordonnées soit égal à 1. Un tel système peut être regardé comme un système de référence mobile, en ce sens que tout point M peut, d'une manière et d'une seule, être mis sous la forme

$$M = xA + x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n;$$

les nombres $x, x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées du point M, et elles sont évidemment proportionnelles aux coordonnées du point mM, qui occupe la même position dans l'espace.

Le système mobile considéré dépend de $(n+1)^2-1=n(n+2)$ paramètres, et, quand on donne à ces paramètres des accroissements infiniment petits, on a des formules de la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} dA\ &= \omega_{00}A + \omega_{01}A_1 + \ldots + \omega_{0n}A_n, \\ dA_1 &= \omega_{10}A + \omega_{11}A_1 + \ldots + \omega_{1n}A_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dA_n &= \omega_{n0}A + \omega_{n1}A_1 + \ldots + \omega_{nn}A_n, \end{aligned} \right.$$

où les ω_{ij} sont des expressions linéaires par rapport aux différentielles des $n(n+2)$ paramètres et liées par la relation identique

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \ldots + \omega_{nn} = 0,$$

qui exprime que le déterminant des coordonnées fixes des points A, ..., A_n reste constant.

Si l'on exprime que les covariants bilinéaires des seconds membres des équations (1) sont identiquement nuls, on obtient les relations fondamentales [1]

$$(2)\qquad \omega'_{ij} = [\omega_{i0}\omega_{0j}] + [\omega_{i1}\omega_{1j}] + \ldots + [\omega_{in}\omega_{nj}] \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n).$$

2. Considérons maintenant une hypersurface à $n-1$ dimensions et faisons correspondre à chaque point M de cette hypersurface un système de référence mobile dont le premier point A coïncide en position avec M.

Nous particulariserons le système de référence en prenant les points $A_1, \ldots, A_{n-1}$ dans l'hyperplan tangent à l'hypersurface. Ce choix se traduit par le fait que le point dA est dans l'hyperplan $[AA_1 \ldots A_{n-1}]$, c'est-à-dire par la relation

$$(3)\qquad \omega_{0n} = 0$$

et la relation quadratique extérieure qui en dérive, d'après (2),

$$(4)\qquad [\omega_{01}\omega_{1n}] + [\omega_{02}\omega_{2n}] + \ldots + [\omega_{0,n-1}\omega_{n-1,n}] = 0.$$

Remarquons enfin que, si l'on donne aux paramètres des accroissements infiniment petits annulant $\omega_{01}, \ldots, \omega_{0,n-1}$, on obtient

$$dA = \omega_{00} A,$$

ce qui prouve que le point *géométrique* A reste fixe en position; autrement dit, que les $n-1$ paramètres dont dépend la position du point sur l'hypersurface ne varient pas. *Les expressions de Pfaff*

$$\omega_{01}, \quad \omega_{02}, \quad \ldots, \quad \omega_{0,n-1}$$

sont donc $n-1$ *expressions linéairement indépendantes par rapport aux différentielles des* $n-1$ *paramètres de position sur l'hypersurface.* Nous écrirons dorénavant ω_i au lieu de ω_{0i}.

Les relations (4) montrent alors que les $n-1$ expressions

$$\omega_{1n}, \quad \omega_{2n}, \quad \ldots, \quad \omega_{n-1,n}$$

sont des formes linéaires en $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$, et que les coefficients de ces $n-1$ formes linéaires forment un tableau symétrique. Autrement

---

[1] *Cf.*, pour ce numéro et les suivants, mon Mémoire : *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XLVIII, 1920), spécialement le Chapitre IV, nos 33-38.

dit, *si l'on considère la forme quadratique en* $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$,

$$\varphi = \omega_1\omega_{1n} + \omega_2\omega_{2n} + \ldots + \omega_{n-1}\omega_{n-1,n},$$

on a

$$(5) \qquad \omega_{1n} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}, \qquad \omega_{2n} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}, \qquad \ldots, \qquad \omega_{n-1,n} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_{n-1}}.$$

L'équation

$$\varphi = 0$$

représente le cône des tangentes asymptotiques à l'hypersurface au point M. Si l'on veut exprimer, en effet, que le point d^2A est dans l'hyperplan tangent $[AA_1 \ldots A_{n-1}]$, qui contient déjà les points A et dA, il suffit d'annuler le coefficient de A_n dans l'expression de d^2A, ce qui donne immédiatement l'équation $\varphi = 0$.

Si $n = 3$, cette équation définit l'ensemble des deux tangentes asymptotiques.

3. Rappelons maintenant la définition, d'après M. Fubini, du contact géométrique et du contact analytique de deux hypersurfaces entre les points desquelles on a établi une correspondance : supposons que deux points correspondants de ces deux hypersurfaces coïncident en O; les deux hypersurfaces sont dites avoir un contact *géométrique* du second ordre en ce point O si deux courbes correspondantes quelconques, tracées sur les deux hypersurfaces et passant par O, ont un contact du second ordre. Elles sont dites avoir un contact *analytique* du second ordre en O si, rapportées à un même système de coordonnées non homogènes et en déterminant sur chaque hypersurface la position d'un point par $n-1$ paramètres $t_1, \ldots, t_{n-1}$ tels qu'à deux points correspondants des deux surfaces correspondent les mêmes valeurs des paramètres, les dérivées premières et secondes des coordonnées (non homogènes) par rapport aux paramètres aient les mêmes valeurs numériques au point O pour l'une et pour l'autre hypersurface.

Désignons par M un point mobile de la première hypersurface, et P un point mobile de la seconde (ce seront en réalité des ensembles de $n+1$ coordonnées projectives rapportées à un système de référence fixe). Les points M et P sont des fonctions des $n-1$ paramètres $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Examinons d'abord les conditions du contact *analytique*.

La définition donnée plus haut revient à dire que les deux points correspondants M' et P' infiniment voisins de M et P,

$$M' = M + dM + \frac{1}{2!} d^2M + \frac{1}{3!} d^3M + \ldots,$$
$$P' = P + dP + \frac{1}{2} d^2P + \frac{1}{3!} d^3P + \ldots,$$

où l'on donne aux t_i les valeurs qui correspondent au point commun O, occupent la même position dans l'espace, *si l'on néglige les infiniment petits du troisième ordre* (en prenant dt_1, ..., dt_{n-1} comme infiniment petits principaux). On a donc

$$P + dP + \frac{1}{2} d^2P = (\rho + \rho_1 + \rho_2)\left(M + dM + \frac{1}{2} d^2M\right) + \ldots,$$

les termes non écrits étant du troisième ordre au moins, ρ étant un coefficient numérique, ρ_1 étant homogène et du premier degré, ρ_2 homogène et du second degré en dt_1, ..., dt_{n-1}. Il en résulte les conditions

$$(6)\qquad \begin{cases} P = \rho M, \\ dP = \rho\, dM + \rho_1 M, \\ d^2P = \rho\, d^2M + 2\rho_1\, dM + 2\rho_2 M, \end{cases}$$

dont la premiére est vérifiée d'elle-même puisqu'en donnant aux t_i les valeurs numériques indiquées les deux points M et P coïncident en position avec O.

Les conditions de contact géométrique s'obtiennent par une analyse analogue, pour laquelle nous renvoyons au Mémoire de M. Fubini; ce sont les suivantes :

$$(7)\qquad \begin{cases} P = \rho M, \\ dP = \rho\, dM + \rho_1 M, \\ d^2P = \rho\, d^2M + 2\rho'_1\, dM + 2\rho_2 M, \end{cases}$$

où ρ est une constante, ρ_1 et ρ'_1 des formes linéaires, et ρ_2 une forme quadratique en dt_1, ..., dt_{n-1}. La comparaison des formules (6) et (7) montre immédiatement la différence qui existe entre le contact géométrique et le contact analytique.

4. Prenons maintenant deux hypersurfaces quelconques (S) et (Σ). Imaginons que l'on puisse établir une correspondance point par point entre les deux hypersurfaces, telle que si M et P sont deux points correspondants quelconques, on puisse déplacer la surface (Σ) dans l'espace projectif (c'est-à-dire lui appliquer une transformation projective) de manière que, dans sa nouvelle position (Σ'), elle ait en M un contact du second ordre avec l'hypersurface (S). Les deux hypersurfaces seront dites alors *projectivement applicables* l'une sur l'autre. Mais il y aura à distinguer le cas où le contact du second ordre réalisé sera géométrique et celui où il sera analytique.

Dans l'un et l'autre cas, faisons correspondre à chaque point M de (S) un système de référence mobile, comme il a été expliqué au n° 2, au moyen de $n+1$ points $A, A_1, \ldots, A_n$, dont le premier a la même position que M. Faisons alors correspondre au point P de (Σ) le système de référence qui se déduit du précédent en lui imprimant le déplacement inverse de celui qui a amené (Σ) sur (Σ'), et soient $B, B_1, \ldots, B_n$ les $n+1$ points qui définissent ce système, le point B occupant la même position que le point P.

Cela posé, *si le contact est analytique* et si l'on exprime dA, d^2A en fonctions linéaires de $A, \ldots, A_n$, ainsi que dB, d^2B en fonctions linéaires de $B, \ldots, B_n$, on pourra déterminer, d'après les formules (6), des expressions ρ, ρ_1, ρ_2 telles que les coordonnées relatives de

$$B, \quad dB, \quad d^2B$$

par rapport au système de référence attaché à (Σ) soient les mêmes que les coordonnées relatives de

$$\rho A, \qquad \rho\, dA + \rho_1 A, \qquad \rho\, d^2A + 2\rho_1\, dA + 2\rho_2 A,$$

par rapport au système de référence attaché à (S). On voit ainsi immédiatement, en désignant par Ω_{ij} l'expression de Pfaff qui correspond, dans le déplacement infiniment petit du système de référence attaché à (Σ), à l'expression ω_{ij}, qu'on a

$$\rho = 1,$$

puis

$$\Omega_{00} = \omega_{00} + \rho_1, \qquad \Omega_i = \omega_i \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

enfin

$$d\Omega_i + \sum_{k=0}^{k=n-1} \Omega_{0k}\Omega_{ki} = d\omega_i + \sum_{k=0}^{k=n-1} \omega_{0k}\omega_{ki} + 2\rho_1\omega_i + 2\varepsilon_{0i}\rho_2$$

$$(\varepsilon_{00} = 1, \ \varepsilon_{0i} = 0 \ \text{si} \ i \neq 0).$$

En éliminant les inconnues auxiliaires, il reste les relations

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Omega_i = \omega_i, \\ &d\Omega_i + \Omega_1\Omega_{1i} + \ldots + \Omega_i(\Omega_{ii} - \Omega_{00}) + \ldots + \Omega_{n-1}\Omega_{n-1,i} \\ &\quad = d\omega_i + \omega_1\omega_{1i} + \ldots + \omega_i(\omega_{ii} - \omega_{00}) + \ldots + \omega_{n-1}\omega_{n-1,i}, \\ &\Omega_1\Omega_{1n} + \ldots + \Omega_{n-1}\Omega_{n-1,n} = \omega_1\omega_{1n} + \ldots + \omega_{n-1}\omega_{n-1,n}. \end{aligned} \right.$$

On peut les simplifier en remarquant que l'égalité des covariants bilinéaires Ω'_i et ω'_i donne

$$\begin{aligned} &[\Omega_1\Omega_{1i}] + \ldots + [\Omega_i(\Omega_{ii} - \Omega_{00})] + \ldots + [\Omega_{n-1}\Omega_{n-1,i}] \\ &\quad = [\omega_1\omega_{1i}] + \ldots + [\omega_i(\omega_{ii} - \omega_{00})] + \ldots + [\omega_{n-1}\omega_{n-1,i}] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &[\omega_1(\Omega_{1i} - \omega_{1i})] + \ldots \\ &\quad + [\omega_i(\Omega_{ii} - \Omega_{00} - \omega_{ii} + \omega_{00})] + \ldots + [\omega_{n-1}(\Omega_{n-1,i} - \omega_{n-1,i})] = 0. \end{aligned}$$

Il existe donc une forme quadratique $\Psi_i(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ telle que l'on ait

$$\Omega_{1i} - \omega_{1i} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Psi_i}{\partial \omega_1}, \quad \ldots, \quad \Omega_{ii} - \Omega_{00} - \omega_{ii} + \omega_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Psi_i}{\partial \omega_i}, \quad \ldots,$$
$$\Omega_{n-1,i} - \omega_{n-1,i} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Psi_i}{\partial \omega_{n-1}},$$

et les équations (8) donnent tout simplement

$$\Psi_i(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) = 0,$$

d'où enfin

$$\Omega_{1i} = \omega_{1i}, \quad \ldots, \quad \Omega_{ii} - \Omega_{00} = \omega_{ii} - \omega_{00}, \quad \ldots, \quad \Omega_{n-1,i} = \omega_{n-1,i},$$

et de même

$$\Omega_{1n} = \omega_{1n}, \quad \ldots, \quad \Omega_{n-1,n} = \omega_{n-1,n}.$$

Finalement, *la condition d'applicabilité projective analytique est que le système de référence mobile étant choisi pour l'hypersurface* (S), *on puisse le choisir pour l'hypersurface* (Σ) *de manière à avoir, en tenant* *compte de la correspondance entre les deux hypersurfaces*,

$$
(9)\qquad \begin{cases}
\Omega_n = 0, \\
\Omega_i = \omega_i, \\
\Omega_{in} = \omega_{in}, \\
\Omega_{ii} - \Omega_{00} = \omega_{ii} - \omega_{00}, \\
\Omega_{ij} = \omega_{ij} \\
(i, j = 1, \ldots, n-1).
\end{cases}
$$

Nous pouvons remarquer que si l'on imagine le déplacement à $n-1$ paramètres qui, dans l'espace projectif, amène à chaque instant l'hypersurface (Σ) à avoir un contact analytique du second ordre avec l'hypersurface (S) supposée fixe, les composantes du déplacement d'*entraînement* de l'hypersurface (Σ), composantes rapportées au système de référence associé à (S) [ou à (Σ), puisqu'à l'instant considéré les deux systèmes coïncident] sont les différences $\Omega_{ij} - \omega_{ij}$ entre les composantes du déplacement absolu et celles du déplacement relatif. On a donc, pour les déplacements d'entraînement infiniment petits des points $B, B_1, \ldots, B_n$ regardés comme invariablement liés à (Σ), des expressions de la forme

$$
\delta B = e_{00} B, \qquad \delta B_i = e_{i0} B + e_{00} B_i,
$$
$$
\delta B_n = e_{n0} B + e_{n1} B_1 + \ldots + e_{n,n-1} B_{n-1} - n e_{00} B_n.
$$

On voit que le point B reste fixe et que chaque point de l'hyperplan tangent se déplace sur la droite qui le joint au point B. D'une manière plus précise, le déplacement d'entraînement, pour les points de l'hyperplan tangent, est une *élation* instantanée de centre B, et pour laquelle tous les points d'un hyperplan à $n-2$ dimensions passant par B restent fixes. (Si l'on faisait une projection envoyant cet hyperplan à l'infini, ce déplacement serait, pour les points de l'hyperplan tangent, une *translation* dans la direction du point B.)

On peut se demander si, le système de référence attaché à (S) étant choisi, le système de référence attaché à (Σ) est complètement déterminé; autrement dit, si l'on peut le modifier sans changer les composantes Ω_i, Ω_{in}, $\Omega_{ii} - \Omega_{00}$, Ω_{ij} qui sont les premiers membres des relations (9). Or, on se rend compte immédiatement que ces composantes ne sont pas altérées si l'on prend $B_n + \lambda B$ pour nouveau sommet B_n. Cela revient à dire qu'une *élation* de centre B et laissant fixes tous les points de l'hyperplan tangent à (Σ), n'altère pas le contact analytique du second ordre de (Σ) et de (S). Nous utiliserons un peu plus loin cette propriété, qu'on peut énoncer ainsi :

S'il est possible de déplacer (Σ) dans l'espace projectif de manière qu'elle ait à chaque instant un contact analytique du second ordre avec (S), ce déplacement est possible d'une infinité de manières sans que la correspondance ponctuelle établie entre (S) et (Σ) soit altérée.

5. Passons maintenant au cas du contact *géométrique*. On trouve, par un procédé analogue à celui qui a été employé dans le numéro précédent, les relations

$$(10)\quad \begin{cases} \Omega_n = 0, \\ \Omega_i = \omega_i, \\ \Omega_{in} = \omega_{in}, \\ \Omega_{ii} - \Omega_{00} = \omega_{ii} - \omega_{00} + \lambda_i\omega_i + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} \lambda_k\omega_k, \\ \Omega_{ij} = \omega_{ij} + \lambda_i\omega_j \\ \qquad (i, j = 1, \ldots, n-1) \end{cases}$$

avec $n-1$ paramètres indéterminés $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$.

Nous voyons facilement que si les formules (10) sont vérifiées, on peut choisir le système de référence mobile associé à l'hypersurface (Σ) de manière que les formules (9) soient également vérifiées : il suffit pour cela de prendre $B_i + \lambda_i B_0$ pour nouveau point B_i sans changer B_0 ni B_n. *L'applicabilité projective géométrique entraîne donc l'applicabilité projective analytique.* Autrement dit, si l'on peut imprimer dans l'espace projectif à l'hypersurface (Σ) un déplacement à $n-1$ paramètres tel qu'à chaque instant elle ait un point commun avec l'hypersurface (S) et ait en ce point avec (S) un contact *géométrique* du second ordre, on peut aussi la déplacer de manière à réaliser un contact *analytique*.

Le problème de l'applicabilité projective des hypersurfaces est donc ramené à l'intégration et à la discussion du système de Pfaff (9). Mais l'identité entre les deux problèmes de l'applicabilité projective tels qu'ils ont été définis en partant de la notion du contact géométrique et de celle du contact analytique, ne subsiste pas nécessairement dans un espace dont le groupe fondamental est un sous-groupe G du groupe projectif.

CHAPITRE II.

LE SYSTÈME DIFFÉRENTIEL DES COUPLES DE SURFACES APPLICABLES.

6. Dans le cas de l'espace à trois dimensions, le système de Pfaff fondamental (9) se réduit à

$$(9')\quad \left\{\begin{array}{c} \Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_3 = 0, \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}, \qquad \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}, \\ \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}, \\ \Omega_{13} = \omega_{13}, \qquad \Omega_{23} = \omega_{23}. \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations donnent, au moyen des covariants bilinéaires, naissance aux deux équations quadratiques extérieures

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} [\omega_{13}(\Omega_{33} - \Omega_{00} - \omega_{33} + \omega_{00})] = 0, \\ [\omega_{23}(\Omega_{33} - \Omega_{00} - \omega_{33} + \omega_{00})] = 0. \end{array}\right.$$

Les lignes asymptotiques sont données par l'équation

$$\varphi = \omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23} = 0;$$

si nous excluons provisoirement le cas des surfaces développables, les expressions ω_{13} et ω_{23} sont deux combinaisons linéairement indépendantes de ω_1 et ω_2, et nous avons par suite, d'après (10),

$$(11)\quad \Omega_{33} - \Omega_{00} = \omega_{33} - \omega_{00}.$$

Cela posé, nous allons montrer qu'*en général* il n'existe aucune surface (Σ) applicable projectivement sur une surface donnée (S) et distincte de (S). Pour cela, nous allons former et étudier le système de Pfaff, qui donne tous les couples de surfaces applicables. Ce système est manifestement

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{c} \omega_3 = 0, \qquad \Omega_3 = 0, \\ \Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \\ \Omega_{13} = \omega_3, \qquad \Omega_{23} = \omega_3, \\ \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}, \\ \Omega_{00} - \omega_{00} = \Omega_{11} - \omega_{11} = \Omega_{22} - \omega_{22} = \Omega_{33} - \omega_{33}. \end{array}\right.$$

Il conduit aux équations quadratiques extérieures (¹)

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &[\omega_1\omega_{13}]+[\omega_2\omega_{23}]=0,\\ &-[\omega_2(\Omega_{10}-\omega_{10})]+[\omega_{13}(\Omega_{32}-\omega_{32})]=0,\\ &-[\omega_1(\Omega_{20}-\omega_{20})]+[\omega_{23}(\Omega_{31}-\omega_{31})]=0,\\ &-[\omega_1(\Omega_{10}-\omega_{10})]+[\omega_{13}(\Omega_{31}-\omega_{31})]=0,\\ &-[\omega_2(\Omega_{20}-\omega_{20})]+[\omega_{23}(\Omega_{32}-\omega_{32})]=0,\\ &[\omega_1(\Omega_{10}-\omega_{10})]+[\omega_2(\Omega_{20}-\omega_{20})]=0.\end{aligned}\right.$$

7. Le système de Pfaff (12) fournit les couples de surfaces (S) et (Σ) projectivement applicables *et, en même temps, pour chaque couple, la correspondance ponctuelle qui réalise l'application*. On peut le regarder comme un système à 30 variables, à savoir les 30 paramètres dont dépendent deux systèmes de références mobiles; mais, en réalité, ces paramètres n'interviennent que par un certain nombre de leurs combinaisons. Les équations (12) et (13) montrent que ces combinaisons sont les intégrales premières du système complètement intégrable obtenu en annulant les 19 expressions de Pfaff :

$$\begin{gathered}\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad \omega_{13},\quad \omega_{23};\qquad \Omega_1,\quad \Omega_2,\quad \Omega_3,\quad \Omega_{13},\quad \Omega_{23};\\ \Omega_{12}-\omega_{12},\qquad \Omega_{21}-\omega_{21},\qquad \Omega_{11}-\Omega_{00}-(\omega_{11}-\omega_{00}),\\ \Omega_{22}-\Omega_{00}-(\omega_{22}-\omega_{00}),\qquad \Omega_{33}-\Omega_{00}-(\omega_{33}-\omega_{00});\\ \Omega_{10}-\omega_{10},\qquad \Omega_{20}-\omega_{20},\qquad \Omega_{31}-\omega_{31},\qquad \Omega_{32}-\omega_{32}.\end{gathered}$$

Il est facile d'avoir la signification de ces variables définitives. D'abord, les équations

$$\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_{13}=\omega_{23}=0$$

ont pour intégrales premières les cinq coordonnées de l'*élément* formé par le point A et le plan $[AA_1A_2]$ du premier système de référence [élément qui engendre la surface (S)]; on a de même les cinq coordonnées du point B de (Σ) et du plan tangent en ce point. Si l'on avait ensuite à considérer les équations

$$\Omega_i-\omega_i=0,\qquad \Omega_{ii}-\Omega_{00}=\omega_{ii}-\omega_{00},\qquad \Omega_{ij}=\omega_{ij},\qquad \Omega_{i0}=\omega_{i0}$$
$$(i,j=1,2,3),$$

(¹) *Cf.* le Mémoire cité plus haut (note de la page 367), spécialement le Chapitre III, nos 28-32.

elles exprimeraient que les deux systèmes de référence sont invariablement liés l'un à l'autre dans l'espace projectif.

Si donc l'expression $\Omega_{30} - \omega_{30}$ figurait dans les équations (12) et (13), les vingt variables qui entreraient explicitement dans le système de Pfaff seraient, outre les cinq coordonnées d'un point variable de S et du plan tangent en ce point, les quinze coordonnées du second système de référence mobile *par rapport au premier*. Mais, comme $\Omega_{30} - \omega_{30}$ ne figure pas dans les relations (12) et (13), la position du sommet B_3 par rapport au premier système mobile n'intervient pas elle-même, mais seulement la position de la *droite* $[BB_3]$.

En définitive, le système de Pfaff (12) est à 19 variables, à savoir :

1° Les trois coordonnées non homogènes x, y, z du sommet A du premier système de référence ;

2° Les deux paramètres dont dépend le plan $[AA_1A_2]$ passant par A [plan tangent à (S)];

3° Les douze coordonnées homogènes par rapport au premier système de référence des sommets B, B_1, B_2 du second système;

4° Les deux paramètres dont dépend, par rapport au premier système, la position de la droite $[BB_3]$.

Parmi ces dix-neuf variables, deux sont indépendantes, par exemple x et y, et les dix-sept autres sont dépendantes. Les expressions ω_1 et ω_2 doivent donc être regardées, pour toute solution du système (12), comme linéairement indépendantes.

8. Cherchons maintenant si le système de Pfaff (12) est en involution et quelle est la généralité de ses solutions. Comme les sommets A_1, A_2 du système de référence associé à (S) sont des points arbitraires du plan tangent, tout élément linéaire intégral du système (12) peut être supposé ramené à satisfaire à $\omega_2 = 0$. Soit alors

$$\frac{\omega_1}{1} = \frac{\omega_2}{0} = \frac{\omega_{13}}{a_{13}} = \frac{\omega_{23}}{a_{23}} = \frac{\Omega_{10} - \omega_{10}}{a_{10}} = \frac{\Omega_{20} - \omega_{20}}{a_{20}} = \frac{\Omega_{31} - \omega_{31}}{a_{31}} = \frac{\Omega_{32} - \omega_{32}}{a_{32}}$$

un tel élément linéaire. Les équations qui donnent les éléments linéaires intégraux en involution avec lui sont, d'après (13),

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
\omega_{13} &= a_{13}\omega_1 + a_{23}\omega_2,\\
a_{13}(\Omega_{32}-\omega_{32}) &= - a_{10}\omega_2 + a_{32}\omega_{13},\\
-(\Omega_{20}-\omega_{20}) + a_{23}(\Omega_{31}-\omega_{31}) &= - a_{20}\omega_1 + a_{31}\omega_{23},\\
-(\Omega_{10}-\omega_{10}) + a_{13}(\Omega_{31}-\omega_{31}) &= - a_{10}\omega_1 + a_{31}\omega_{13},\\
a_{23}(\Omega_{32}-\omega_{32}) &= - a_{20}\omega_2 + a_{32}\omega_{23},\\
\Omega_{10}-\omega_{10} &= a_{10}\omega_1 + a_{20}\omega_2.
\end{aligned}
\right.
$$

On voit facilement qu'elles définissent, en général, un élément du second ordre et un seul, car les équations sont résolubles par rapport aux six quantités

$$\omega_{13},\quad \omega_{23},\quad \Omega_{10}-\omega_{10},\quad \Omega_{20}-\omega_{20},\quad \Omega_{31}-\omega_{31},\quad \Omega_{32}-\omega_{32}$$

si l'on a

$$a_{13}a_{32}\neq 0.$$

Par suite, *le système* (12) *est en involution et sa solution générale dépend de six fonctions arbitraires d'un argument*. L'entier 6 indique en effet le nombre des constantes arbitraires qui entrent dans les équations de l'élément intégral le plus général du second ordre.

Les caractéristiques du système de Pfaff.

9. Les éléments linéaires intégraux *singuliers* sont ceux pour lesquels on aurait

$$a_{13}a_{32}=0;$$

ou, plus exactement, l'élément linéaire intégral $\omega_2=0$ est singulier si l'on a, en se déplaçant sur une intégrale dans la direction de cet élément,

$$\omega_{13}(\Omega_{32}-\omega_{32})=0.$$

Cela peut se présenter dans deux cas :

1° On peut avoir

$$\omega_2=0,\qquad \omega_{13}=0,$$

cela revient à dire que la direction $\omega_2=0$ annule la forme quadratique

$$\varphi = \omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23}.$$

Les lignes asymptotiques des surfaces (S) *et* (Σ) *sont donc les caractéristiques de première espèce du système de Pfaff* (12).

2° On peut avoir

$$\omega_2 = 0, \qquad \Omega_{32} - \omega_{32} = 0;$$

cela signifie que si l'on se déplace sur (S) dans la direction $\omega_2 = 0$, c'est-à-dire dans la direction de la droite $[AA_1]$, et si l'on considère le mouvement d'entraînement de (Σ) supposée se déplacer de manière à avoir constamment un contact analytique du second ordre avec (S), la vitesse d'entraînement du point B_3 va couper la droite $[AA_1]$: cela est vrai, du reste, pour n'importe quel point projectivement solidaire de (Σ). On obtient donc les caractéristiques de seconde espèce du système de Pfaff (12) en prenant sur (S) les courbes (C) et sur (Σ) les courbes correspondantes (Γ) telles que, lorsqu'on imprime à (Σ) le mouvement projectif à un paramètre qui amène successivement les différents points de (Γ) en coïncidence avec les points correspondants de (C) et qui réalise à chaque instant le contact analytique du second ordre des deux surfaces, les vitesses d'entraînement de tous les points de l'espace aillent toutes rencontrer à chaque instant la tangente commune à (C) et (Γ).

On peut remarquer que le mouvement précédent jouit d'une autre propriété géométrique remarquable. La deuxième et la cinquième équation (14) montrent en effet que, si a_{32} est nul, on a

$$a_{10} a_{23} - a_{20} a_{13} = 0;$$

cette relation exprime que la direction donnée ($\omega_2 = 0$) est *conjuguée* de la direction

$$\frac{\omega_1}{a_{20}} = \frac{\omega_2}{-a_{10}};$$

or le mouvement instantané de (Σ) par rapport à (S) est, pour les points situés dans le plan tangent commun, une *élation* de centre A, et dont les points invariants sont justement situés sur la tangente qui passe par le point $a_{20}A_1 - a_{10}A_2$. Par suite, *la tangente que rencontrent les vitesses d'entraînement de tous les points de l'espace et la tangente lieu des points du plan tangent commun qui ont une vitesse nulle sont deux tangentes conjuguées.*

Les solutions singulières du système de Pfaff.

10. Une solution singulière du système (12) est une solution dont tous les éléments linéaires intégraux sont singuliers. Ces éléments ne peuvent pas être singuliers de la première espèce : cela supposerait, en effet, que les surfaces (S) et (Σ) sont des plans, cas que nous laissons de côté pour le moment.

Il reste donc le cas où l'on aurait

$$\Omega_{31} - \omega_{31} = 0,$$
$$\Omega_{32} - \omega_{32} = 0;$$

mais alors les équations (13) montrent qu'on aurait aussi

$$\Omega_{10} - \omega_{10} = 0,$$
$$\Omega_{20} - \omega_{20} = 0.$$

Les deux premières de ces quatre équations nouvelles conduisent à leur tour aux nouvelles équations quadratiques extérieures

$$[\omega_1(\Omega_{30} - \omega_{30})] = 0,$$
$$[\omega_2(\Omega_{30} - \omega_{30})] = 0;$$

d'où

$$\Omega_{30} - \omega_{30} = 0.$$

Les deux systèmes de référence seraient alors, dans l'espace projectif, invariablement liés l'un à l'autre; autrement dit, la surface (Σ) se déduirait de (S) par une transformation projective. Nous trouvons ainsi une solution effective du problème proposé, mais une solution banale qui ne nous intéresse pas.

Les solutions singulières du système de Pfaff (12) *sont formées par une surface quelconque* (S) *et une surface* (Σ) *se déduisant de* (S) *par une transformation projective quelconque.*

Le degré de généralité des couples de surfaces projectivement applicables.

11. De la discussion précédente résulte que tout couple de surfaces applicables projectivement *distinctes* provient d'une solution *générale* du système (12). Par suite, *les couples de surfaces distinctes projectivement applicables du second ordre dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument*.

Une conséquence immédiate, extrêmement importante, est que *les surfaces projectivement déformables sont exceptionnelles;* sinon, en effet, les couples de surfaces applicables dépendraient au moins d'une fonction arbitraire de deux arguments.

Il nous reste à voir comment on peut reconnaître si une surface (S) admet une surface (Σ) distincte de (S) et applicable sur (S), le degré de généralité des surfaces (Σ) applicables sur (S) et le degré d'arbitraire de la correspondance ponctuelle qui réalise l'application de chacune de ces surfaces sur (S). Pour cela, nous allons étudier successivement le cas des surfaces non réglées, le cas des surfaces réglées non développables et le cas des surfaces développables; les résultats sont, en effet, tout à fait différents dans ces trois cas.

CHAPITRE III.

L'APPLICABILITÉ PROJECTIVE DES SURFACES NON RÉGLÉES.

La particularisation du système de référence mobile; les invariants fondamentaux.

12. Si une surface (S) *non développable* est donnée, le système de Pfaff qui fournit les surfaces (Σ) applicables sur (S) et donne en même temps la correspondance ponctuelle entre ces deux surfaces, est, d'après (9′) et (11),

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{c} \Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_3 = 0, \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}, \qquad \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}, \qquad \Omega_{33} - \Omega_{00} = \omega_{33} - \omega_{00}, \\ \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}, \\ \Omega_{13} = \omega_{13}, \qquad \Omega_{23} = \omega_{23}. \end{array}\right.$$

Nous voyons déjà que l'équation

$$\varphi = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = 0,$$

qui donne les lignes asymptotiques, est conservée par l'application. C'est pour cela qu'il y a lieu d'étudier à part les surfaces non développables, puis les surfaces développables. Nous verrons dans un instant que la propriété d'une surface d'être réglée se conserve par l'application.

Pour ne pas être arrêtés dans l'étude de la discussion du système (13), nous allons particulariser le choix du système de référence mobile attaché à la surface (S). Nous effectuerons cette particularisation par étapes successives en nous aidant de la remarque suivante. Le système de référence mobile dépend, en outre des paramètres t_1, t_2 qui définissent la position d'un point de (S), d'un certain nombre de paramètres arbitraires $u_1, u_2, \ldots$. Si on laisse t_1 et t_2 fixes et que l'on fasse varier les u, on change le système de référence attaché au point donné (t_1, t_2) de la surface (S). Nous désignerons par δ un symbole de différentiation obtenue *en laissant* t_1, t_2 *fixés* et faisant varier les paramètres u; le symbole d se rapportera à une variation quelconque de tous les paramètres. Nous désignerons, pour abréger, par e_{ij} ce que devient ω_{ij} quand on y utilise le symbole δ de différentiation, en gardant la notation ω_{ij} pour le symbole d. On a manifestement

$$e_1 = e_2 = 0.$$

L'équation

$$\omega_3 = 0$$

entraîne

$$[\omega_1\omega_{13}] + [\omega_2\omega_{23}] = 0,$$

d'où, comme on l'a vu,

$$\omega_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}, \qquad \omega_{23} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2};$$

on a donc, en particulier,

$$e_{13} = 0, \qquad e_{23} = 0.$$

Si l'on change le système de référence mobile, on a

$$\delta\varphi = \delta\omega_1\omega_{13} + \delta\omega_2\omega_{23} + \omega_1\delta\omega_{13} + \omega_2\delta\omega_{23};$$

or les formules (2)

$$\begin{aligned}
\omega'_1 &= [\omega_1(\omega_{11} - \omega_{00})] + [\omega_2\omega_{21}],\\
\omega'_2 &= [\omega_1\omega_{12}] \qquad\qquad\quad + [\omega_2(\omega_{22} - \omega_{00})],\\
\omega'_{13} &= [\omega_{13}(\omega_{33} - \omega_{11})] + [\omega_{12}\omega_{23}],\\
\omega'_{23} &= [\omega_{21}\omega_{13}] \qquad\qquad\quad + [\omega_{23}(\omega_{33} - \omega_{22})]
\end{aligned}$$

donnent

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta\omega_1 &= (e_{00} - e_{11})\omega_1 - e_{21}\omega_2,\\
\delta\omega_2 &= -e_{12}\omega_1 + (e_{00} - e_{22})\omega_2,\\
\delta\omega_{13} &= (e_{11} - e_{33})\omega_{13} + e_{12}\omega_{23},\\
\delta\omega_{23} &= e_{21}\omega_{13} + (e_{22} - e_{33})\omega_{23};
\end{aligned}\right.$$

d'où

$$\delta\varphi = (e_{00} - e_{33})\varphi.$$

Ce résultat n'a rien d'extraordinaire; il était évident, géométriquement, que la forme φ était un invariant relatif. Comme il n'est pas *absolu*, on peut toujours choisir le système de référence de manière à réduire φ à une forme quadratique donnée à l'avance, par exemple

$$\varphi = 2\omega_1\omega_2,$$

d'où

$$(17)\qquad \omega_{13} = \omega_2, \qquad \omega_{23} = \omega_1.$$

Les tangentes asymptotiques sont alors $[AA_1]$ et $[AA_2]$. *Nous avons ainsi obtenu une première particularisation du système de référence mobile* (¹); les équations (17) entraînent du reste, d'après (16),

$$e_{12} = 0, \qquad e_{11} + e_{22} - e_{00} - e_{33} = 0, \qquad e_{21} = 0.$$

13. *Deuxième particularisation du système de référence mobile. La forme cubique* ψ. — Pour aller plus loin, égalons les covariants bilinéaires des équations (17); nous obtenons

$$[\omega_1\omega_{12}] + \frac{1}{2}[\omega_2(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33})] = 0,$$

$$\frac{1}{2}[\omega_1(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33})] + [\omega_2\omega_{21}] = 0.$$

(¹) Il est à remarquer que cette particularisation introduit une irrationnelle quadratique.

Ces équations montrent que les trois expressions

$$\omega_{12}, \qquad \frac{1}{2}(\omega_{11}+\omega_{22}-\omega_{00}-\omega_{33}), \qquad \omega_{21}$$

sont linéaires en ω_1, ω_2 et se déduisent par différentiation de la forme cubique

$$\psi = \omega_1^2\omega_{12} + \omega_1\omega_2(\omega_{11}+\omega_{22}-\omega_{00}-\omega_{33}) + \omega_2^2\omega_{21};$$

on a

$$\omega_{12} = \frac{1}{6}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega_1^2}, \qquad \frac{1}{2}(\omega_{11}+\omega_{22}-\omega_{00}-\omega_{33}) = \frac{1}{6}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega_1\,\partial\omega_2}, \qquad \omega_{21} = \frac{1}{6}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega_2^2}.$$

Or on a maintenant, d'après les formules (2),

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\omega_1 &= (e_{00}-e_{11})\omega_1,\\ \delta\omega_2 &= (e_{00}-e_{22})\omega_2,\\ \delta\omega_{12} &= (e_{10}-e_{32})\omega_2+(e_{11}-e_{22})\omega_{12},\\ \frac{1}{2}\delta(\omega_{11}+\omega_{22}-\omega_{00}-\omega_{33}) &= (e_{10}-e_{32})\omega_1+(e_{20}-e_{31})\omega_2,\\ \delta\omega_{21} &= (e_{20}-e_{31})\omega_1+(e_{22}-e_{11})\omega_{21}, \end{aligned}\right.$$

et par suite,

$$\delta\psi = (e_{00}-e_{33})\psi + \frac{3}{2}(\overline{e_{10}-e_{32}}\,\omega_1 + \overline{e_{20}-e_{31}}\,\omega_2)\varphi.$$

L'involution cubique déterminée par l'équation

$$\psi + (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)\varphi = 0$$

est donc invariante. Or posons

$$\frac{1}{2}(\omega_{11}+\omega_{22}-\omega_{00}-\omega_{33}) = h\,\omega_1 + k\,\omega_2;$$

nous avons, d'après (18),

$$\begin{aligned} \delta h &= e_{10}-e_{32}+(e_{11}-e_{00})h,\\ \delta k &= e_{20}-e_{31}+(e_{22}-e_{00})k, \end{aligned}$$

les coefficients h et k subissent donc chacun, quand on modifie le système de référence mobile, une substitution linéaire entière arbitraire; on peut donc les supposer nuls tous deux; on voit alors que *la* *forme cubique ψ sera réduite à ses deux termes cubiques, et le rapport $\frac{\psi}{\varphi}$ sera un invariant absolu.* On aura en outre

$$(19)\qquad \begin{cases} \psi = a\omega_1^3 + b\omega_2^3, \\ \omega_{12} = a\omega_1, \\ \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33} = 0, \\ \omega_{21} = b\omega_2, \\ e_{10} - e_{32} = e_{20} - e_{31} = 0. \end{cases}$$

14. *Troisième particularisation du système de référence mobile.* — Les formules (18) et (19) donnent

$$(20)\qquad \begin{cases} \delta a = (2e_{11} - e_{00} - e_{22})a, \\ \delta b = (2e_{22} - e_{00} - e_{11})b. \end{cases}$$

Chacune des relations $a = 0$, $b = 0$ a donc une signification invariante. Or la relation

$$\omega_{12} = 0$$

entraîne

$$dA_1 = \omega_{10}A + \omega_{11}A_1 + \omega_2 A_3,$$

ce qui montre que, si l'on se déplace sur la ligne asymptotique $\omega_2 = 0$, la droite $[AA_1]$ reste fixe. Cette relation caractérise donc les surfaces réglées, ou plutôt la propriété des lignes asymptotiques $\omega_2 = 0$ d'être rectilignes. Il importe de remarquer que, pour toute surface (Σ) applicable projectivement sur (S), la même propriété a lieu puisqu'on peut choisir le système de référence associé à (Σ) de manière à avoir $\Omega_{12} = \omega_{12}$, les deux particularisations précédemment effectuées des systèmes de référence se faisant parallèlement dans les deux surfaces.

Nous allons, dans ce Chapitre, nous occuper des surfaces *non réglées*. Les formules (20) montrent alors qu'on peut supposer

$$a = b = 1 \quad (^1),$$

(1) Cette particularisation introduit une nouvelle irrationnelle qui se réduit, du reste, à une racine cubique. Les relations (17) et (21) se conservent si l'on change respectivement ω_1 et ω_2 soit en $\varepsilon\omega_1$ et $\varepsilon^2\omega_2$, soit en $\varepsilon\omega_2$ et $\varepsilon^2\omega_1$, où ε désigne une racine cubique de l'unité. Les seules expressions réellement invariantes sont les deux formes rationnelles φ et ψ.

c'est-à-dire

$$(21)\qquad \begin{cases} \psi = \omega_1^3 + \omega_2^3, \\ \omega_{12} = \omega_1, \\ \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33} = 0, \\ \omega_{21} = \omega_2, \\ e_{11} = e_{22} = e_{00} = e_{33}. \end{cases}$$

15. *Quatrième particularisation du système de référence mobile. La forme biquadratique χ.* — En égalant les covariants bilinéaires des deux membres des relations

$$\omega_{12} = \omega_1,$$
$$\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33} = 0,$$
$$\omega_{21} = \omega_2,$$

on obtient

$$(22)\qquad \begin{cases} [\omega_1(\omega_{00} + \omega_{22} - 2\omega_{11})] + [\omega_2(\omega_{32} - \omega_{10})] = 0, \\ [\omega_1(\omega_{32} - \omega_{10})] + [\omega_2(\omega_{31} - \omega_{20})] = 0, \\ [\omega_1(\omega_{31} - \omega_{20})] + [\omega_2(\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22})] = 0. \end{cases}$$

On voit que les quatre expressions

$$\omega_{00} + \omega_{22} - 2\omega_{11}, \quad \omega_{32} - \omega_{10}, \quad \omega_{31} - \omega_{20}, \quad \omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22}$$

sont des combinaisons linéaires de ω_1 et ω_2; on peut les déduire d'une forme biquadratique

$$\chi = \omega_1^3(\omega_{00} + \omega_{22} - 2\omega_{11}) + 3\omega_1^2\omega_2(\omega_{32} - \omega_{10}) + 3\omega_1\omega_2^2(\omega_{31} - \omega_{20}) + \omega_2^3(\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22})$$

par les formules

$$\omega_{00} + \omega_{22} - 2\omega_{11} = \frac{1}{24}\frac{\partial^3\chi}{\partial\omega_1^3}, \qquad \omega_{32} - \omega_{10} = \frac{1}{24}\frac{\partial^3\chi}{\partial\omega_1^2\,\partial\omega_2},$$
$$\omega_{31} - \omega_{20} = \frac{1}{24}\frac{\partial_3\chi}{\partial\omega_1\,\partial\omega_2^2}, \qquad \omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22} = \frac{1}{24}\frac{\partial^3\chi}{\partial\omega_2^3}.$$

On trouve sans difficulté qu'en faisant varier le système de référence mobile, on obtient

$$\delta\chi = -4e_{10}\omega_1^4 + 8e_{20}\omega_1^3\omega_2 + 12e_{30}\omega_1^2\omega_2^2 + 8e_{10}\omega_1\omega_2^3 - 4e_{20}\omega_2^4.$$

On peut donc disposer de l'indétermination encore subsistante pour annuler dans χ les coefficients de $\omega_1^3\omega_2$, $\omega_1^2\omega_2^2$, $\omega_1\omega_2^3$; on aura alors

$$e_{10} = e_{20} = e_{30} = 0,$$

c'est-à-dire que *le système de référence sera parfaitement déterminé.*

Posons alors

$$\chi = -3\alpha\,\omega_1^4 - 3\beta\,\omega_2^4 ;$$

nous aurons

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega_{00} + \omega_{22} - 2\omega_{11} = -3\alpha\omega_1,\\ &\omega_{32} - \omega_{10} \qquad\quad\;\; = 0,\\ &\omega_{31} - \omega_{20} \qquad\quad\;\; = 0,\\ &\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22} = -3\beta\omega_2 ;\end{aligned}\right.$$

d'où, en prenant les covariants bilinéaires,

$$\begin{gathered} -3\left[\omega_1\left(d\alpha + \overline{1-\alpha\beta}\,\omega_2\right)\right] + 4[\omega_1\omega_{10}] - 2[\omega_2\omega_{20}] = 0,\\ [\omega_1\omega_{20}] + [\omega_2\omega_{30}] = 0,\\ [\omega_1\omega_{30}] + [\omega_2\omega_{10}] = 0,\\ -3\left[\omega_2\left(d\beta + \overline{1-\alpha\beta}\,\omega_1\right)\right] - 2[\omega_1\omega_{10}] + 4[\omega_2\omega_{20}] = 0. \end{gathered}$$

On en déduit enfin

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega_{10} = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2,\\ &\omega_{20} = \nu\omega_1 + \rho\omega_2,\\ &\omega_{30} = \rho\omega_1 + \lambda\omega_2\end{aligned}\right.$$

et

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\omega_1\left(d\alpha + \overline{1-\alpha\beta - \tfrac{4}{3}\mu - \tfrac{2}{3}\nu}\,\omega_2\right)\right] = 0,\\ &\left[\omega_2\left(d\beta + \overline{1-\alpha\beta - \tfrac{2}{3}\mu - \tfrac{4}{3}\nu}\,\omega_1\right)\right] = 0.\end{aligned}\right.$$

Les coefficients α, β, λ, μ, ν, ρ sont les *invariants fondamentaux* de la surface (S) par rapport au groupe projectif [1]. Toutes les composantes ω_{ij} du déplacement infiniment petit du système de référence mobile sont exprimées linéairement au moyen de ω_1 et ω_2, les coefficients introduisant précisément les invariants fondamentaux. On a du reste

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega_1' = \beta[\omega_1\omega_2],\\ &\omega_2' = -\alpha[\omega_1\omega_2].\end{aligned}\right.$$

---

[1] En réalité, les invariants fondamentaux rationnels sont $\alpha\beta$, $\alpha^3+\beta^3$, μ, ν, $\lambda\alpha$, $\rho\beta$.

Le système de Pfaff des surfaces applicables sur une surface non réglée donnée.

16. Soit (S) une surface non réglée. Faisons correspondre à chacun de ses points un système de référence mobile normal. Soit (Σ) une surface applicable sur (S). On aura, de la manière la plus générale possible, la surface (Σ) et la correspondance ponctuelle qui réalise l'application de (Σ) sur (S) en intégrant le système de Pfaff :

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Omega_3 = 0, & \\ \Omega_1 = \omega_1, & \Omega_2 = \omega_2, \\ \Omega_{13} = \omega_{13}, & \Omega_{23} = \omega_{23}, \\ \Omega_{12} = \omega_{12}, & \Omega_{21} = \omega_{21}, \end{array}\right.$$
$$\Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}, \qquad \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}, \qquad \Omega_{33} - \Omega_{00} = \omega_{33} - \omega_{00},$$

les Ω_{ij} désignant les composantes mobiles du déplacement élémentaire d'un système de référence arbitraire.

Les équations quadratiques extérieures qu'entraînent les équations (15) sont, en tenant compte des formules (17), (21) et (23),

$$\begin{array}{l} [\omega_2(\Omega_{32} - \Omega_{10} - \omega_{32} + \omega_{10})] = 0, \\ [\omega_1(\Omega_{31} - \Omega_{20} - \omega_{31} + \omega_{20})] = 0, \\ [\omega_2(\Omega_{31} - \omega_{31})] - [\omega_1(\Omega_{10} - \omega_{10})] = 0, \\ [\omega_1(\Omega_{32} - \omega_{32})] - [\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0, \\ [\omega_1(\Omega_{10} - \omega_{10})] + [\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0. \end{array}$$

On en déduit

$$\begin{array}{l} \Omega_{31} - \Omega_{20} = \omega_{31} - \omega_{20} + k\,\omega_1, \\ \Omega_{32} - \Omega_{10} = \omega_{32} - \omega_{10} + k\,\omega_2, \\ \Omega_{10} = \omega_{10} - \frac{1}{2}k\omega_2 + u\,\omega_1, \\ \Omega_{20} = \omega_{20} - \frac{1}{2}k\,\omega_1 + v\,\omega_2. \end{array}$$

Or on peut, sans changer les conditions du problème, changer le point B_3 en $B_3 + \lambda B$ de manière à annuler k. On aura donc les nouvelles équations de Pfaff

$$(27)\qquad \begin{cases} \Omega_{31}-\Omega_{20}=\omega_{31}-\omega_{20}, \\ \Omega_{32}-\Omega_{10}=\omega_{32}-\omega_{10}; \end{cases}$$

$$(28)\qquad \begin{cases} \Omega_{10}=\omega_{10}+u\,\omega_{1}, \\ \Omega_{20}=\omega_{20}+v\,\omega_{2}. \end{cases}$$

Les équations (27) conduisent aux équations quadratiques extérieures

$$[\omega_1(\Omega_{30}-\omega_{30}-u\,\omega_2)]=0,$$
$$[\omega_2(\Omega_{30}-\omega_{30}-v\,\omega_1)]=0;$$

d'où enfin

$$(29)\qquad \Omega_{30}-\omega_{30}=u\,\omega_2+v\,\omega_1.$$

Les équations (28) et (29) conduisent ensuite à

$$[\omega_1(du+2u\,\overline{\omega_{00}-\omega_{11}})]=0,$$
$$[\omega_2(dv+2v\,\overline{\omega_{00}-\omega_{22}})]=0,$$
$$[\omega_2(du+2u\,\overline{\omega_{00}-\omega_{11}})]+[\omega_1(dv+2v\,\overline{\omega_{00}-\omega_{22}})]=0;$$

d'où

$$(30)\qquad \begin{cases} du+2u(\omega_{00}-\omega_{11})=w\,\omega_1, \\ dv+2v(\omega_{00}-\omega_{22})=w\,\omega_2. \end{cases}$$

Les covariants bilinéaires des équations (30) donnent enfin

$$(31)\qquad dw+w(\omega_{00}-\omega_{33})+2v(2\nu-1)\omega_1+2u(2\mu-1)\omega_2=0,$$

et cette dernière équation entraîne elle-même

$$(32)\qquad u[d\mu\,\omega_2]+v[d\nu\,\omega_1]+\frac{3}{2}w(\mu-\nu)[\omega_1\omega_2]=0.$$

Les trois fonctions inconnues u, v, w dont dépend la solution du problème sont donc données par un système d'équations aux différentielles totales linéaires (30) et (31), avec la condition d'intégrabilité (32). Il en résulte que *la surface cherchée* (Σ) *dépend au plus de trois constantes arbitraires* (indépendamment des constantes qui fixent sa position dans l'espace projectif).

17. La relation (32) est de la forme

$$pu + qv + rw = 0,$$

où les coefficients p, q, r ne dépendent que des paramètres t_1, t_2 qui définissent la position d'un point sur la surface (S). En la différentiant et en tenant compte des expressions fournies par (30) et (31) pour du, dv, dw, on obtient deux nouvelles relations de la même forme

$$p_1 u + q_1 v + r_1 w = 0,$$
$$p_2 u + q_2 v + r_2 w = 0.$$

Chacune de celles-ci donne à son tour naissance à deux nouvelles relations, et ainsi de suite.

Cela posé, on voit que plusieurs cas sont à distinguer :

1° *Il existe entre u, v, w trois relations linéairement indépendantes.* Il n'existe aucune surface (Σ), distincte de (S), qui soit projectivement applicable sur (S). C'est le cas général.

2° *Il existe entre u, v, w deux relations linéairement indépendantes et deux seulement.* Les rapports mutuels de u, v, w sont alors déterminés; quant à u, par exemple, il est donné par une équation complètement intégrable de la forme

$$du = u\varpi, \tag{33}$$

où ϖ est une expression de Pfaff connue. On a alors u par une *quadrature*. Il existe ∞^1 surfaces (Σ) applicables sur (S) et formant une famille continue; elles sont données par l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires du deuxième ordre à quatre fonctions inconnues, les coefficients des fonctions inconnues dans ces équations dépendant linéairement d'une constante arbitraire k. Ce système est symbolisé par les formules

$$dB = \omega_{00} B + \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2,$$
$$dB_1 = (\omega_{10} + ku\omega_1)B + \omega_{11} B_1 + \omega_{12} B_2 + \omega_{13} B_3,$$
$$dB_2 = (\omega_{20} + kv\omega_2)B + \omega_{21} B_1 + \omega_{22} B_2 + \omega_{23} B_3,$$
$$dB_3 = (\omega_{30} + kv\omega_1 + ku\omega_2)B + (\omega_{31} + kv_2)B_1 + (\omega_{32} + ku\omega_1)B_2 + \omega_{33} B_3,$$

où l'on a désigné par u l'une des solutions de (33) et par v la valeur correspondante de v.

Les surfaces de cette catégorie dépendent évidemment de six fonctions arbitraires d'un argument, puisqu'elles forment la généralité des surfaces déformables projectivement. Du reste, nous reviendrons là-dessus plus loin.

3° *Il existe entre u, v, w une seule relation linéaire.* Les quantités u et v sont alors données par l'intégration d'un système complètement intégrable de la forme

$$(34)\qquad \begin{cases} du = u\varpi_{11} + v\varpi_{12}, \\ dv = u\varpi_{21} + v\varpi_{22}, \end{cases}$$

avec quatre expressions de Pfaff connues ϖ_{11}, ϖ_{12}, ϖ_{21}, ϖ_{22}. Il existe ∞^2 surfaces (Σ) applicables sur (S) et formant une famille continue. Les coefficients des équations différentielles linéaires qui donnent (Σ) dépendent linéairement de deux constantes arbitraires k_1 et k_2. Nous verrons que les surfaces (S) de cette catégorie, s'il en existe, ne dépendent que de constantes arbitraires.

4° *La relation* (32) *est identiquement vérifiée.* Alors u, v, w dépendent de trois constantes arbitraires k_1, k_2, k_3 et sont données par l'intégration du système linéaire (30) et (31), intégration sur laquelle nous reviendrons plus loin.

En tout cas, il ressort de ce qui précède que, *si deux surfaces* (S) *et* (Σ) *sont projectivement applicables, elles font partie d'une même famille continue de surfaces toutes projectivement applicables les unes sur les autres.*

Le système différentiel des surfaces non réglées projectivement déformables. Le réseau conjugué de déformation projective.

18. Nous sommes maintenant en mesure de préciser et de compléter les résultats obtenus au Chapitre II sur le degré de généralité des surfaces projectivement déformables.

Si une surface non réglée (S) est projectivement déformable, on peut associer à chacun de ses points un système de référence mobile et déterminer en chacun de ses points trois quantités non toutes nulles u, v, w de telle sorte qu'on ait les équations de Pfaff :

$$
(35)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\omega_3 = 0, & \\
\omega_{13} = \omega_2, & \omega_{23} = \omega_1, \\
\omega_{12} = \omega_1, & \omega_{21} = \omega_2, \\
\omega_{31} = \omega_{20}, & \omega_{32} = \omega_{10}, \\
\omega_{11} - \omega_{00} = 2\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, & \\
\omega_{22} - \omega_{00} = \alpha\omega_1 + 2\beta\omega_2, & \\
\omega_{33} - \omega_{00} = 3\alpha\omega_1 + 3\beta\omega_2, & \\
\omega_{10} = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2, & \\
\omega_{20} = \nu\omega_1 + \rho\omega_2, & \\
\omega_{30} = \rho\omega_1 + \lambda\omega_2, & \\
du = 2u(\omega_{11} - \omega_{00}) + w\omega_1, & \\
dv = 2v(\omega_{22} - \omega_{00}) + w\omega_2, & \\
dw = w(\omega_{33} - \omega_{00}) + 2v(1 - 2\nu)\omega_1 + 2u(1 - 2\mu)\omega_2. &
\end{array}\right.
$$

Ce système de Pfaff définit les surfaces non réglées projectivement déformables.

Les équations quadratiques extérieures auxquelles il conduit, et dont quelques-unes ont déjà été formées, sont :

$$
(36)\quad \left\{\begin{array}{l}
\left[\omega_1\left(d\alpha + \overline{1 - \alpha\beta - \frac{4}{3}\mu - \frac{2}{3}\nu\omega_2}\right)\right] = 0, \\
\left[\omega_2\left(d\beta + \overline{1 - \alpha\beta - \frac{2}{3}\mu - \frac{4}{3}\nu\omega_1}\right)\right] = 0, \\
[\omega_1\, d\nu] + [\omega_2\, d\rho] + (2\rho\alpha - 3\nu\beta)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
[\omega_1\, d\rho] + [\omega_2\, d\lambda] + 4(\lambda\alpha - \rho\beta)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
[\omega_1\, d\lambda] + [\omega_2\, d\mu] + (3\mu\alpha - 2\lambda\beta)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
v[\omega_1\, d\nu] + u[\omega_2\, d\mu] - \frac{3}{2} w(\mu - \nu)\,[\omega_1\omega_2] = 0.
\end{array}\right.
$$

La forme des six équations (36), dans lesquelles interviennent, outre ω_1 et ω_2, six expressions de Pfaff nouvelles, rend vraisemblable la propriété du système (35) d'être en involution et d'admettre une solution dépendant de six fonctions arbitraires d'un argument. Il est du reste facile de mettre en évidence à la fois la propriété d'involution et les six familles de caractéristiques, en écrivant les équations (36) sous la forme

$$
(36')\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[\omega_1\left(d\alpha + \overline{1 - \alpha\beta - \frac{4}{3}\mu - \frac{2}{3}\nu\omega_2}\right)\right] = 0,\\
&\left[\omega_2\left(d\beta + \overline{1 - \alpha\beta - \frac{2}{3}\mu - \frac{4}{3}\nu\omega_1}\right)\right] = 0,\\
&\left[\omega_1\left(u\,d\lambda - v\,d\nu + \overline{3u\mu\alpha - 2u\lambda\beta + \frac{3}{2}w\mu - \frac{3}{2}w\nu\omega_2}\right)\right] = 0,\\
&\left[\omega_2\left(v\,d\rho - u\,d\mu + \overline{3v\nu\beta - 2v\rho\alpha - \frac{3}{2}w\mu + \frac{3}{2}w\nu\omega_1}\right)\right] = 0,\\
&\Bigg[(\sqrt{u}\,\omega_1 - \sqrt{v}\,\omega_2)\Bigg(\sqrt{v}\,d\rho - \sqrt{u}\,d\lambda\\
&\qquad + \overline{4\sqrt{u}\lambda\alpha - 2\sqrt{v}\rho\alpha + 3\sqrt{v}\nu\beta + \frac{3}{2}\frac{w}{\sqrt{v}}\nu\omega_1}\\
&\qquad - \overline{4\sqrt{v}\rho\beta - 2\sqrt{u}\lambda\beta + 3\sqrt{u}\mu\alpha + \frac{3}{2}\frac{w}{\sqrt{u}}\mu\omega_2}\Bigg)\Bigg] = 0,\\
&\Bigg[(\sqrt{u}\,\omega_1 + \sqrt{v}\,\omega_2)\Bigg(\sqrt{v}\,d\rho + \sqrt{u}\,d\lambda\\
&\qquad - \overline{4\sqrt{u}\lambda\alpha + 2\sqrt{v}\rho\alpha - 3\sqrt{v}\nu\beta - \frac{3}{2}\frac{w}{\sqrt{v}}\nu\omega_1}\\
&\qquad - \overline{4\sqrt{v}\rho\beta + 2\sqrt{u}\lambda\beta - 3\sqrt{u}\mu\alpha - \frac{3}{2}\frac{w}{\sqrt{u}}\mu\omega_2}\Bigg)\Bigg] = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les surfaces non réglées projectivement déformables dépendent donc effectivement de six fonctions arbitraires d'un argument.

On voit, de plus, qu'*il y a deux familles doubles de caractéristiques* définies, la première par l'équation $\omega_1 = 0$, la seconde par l'équation $\omega_2 = 0$: *ce sont les asymptotiques des surfaces intégrales.*

Il y a ensuite deux familles simples de caractéristiques définies par les équations

$$\sqrt{u}\,\omega_1 - \sqrt{v}\,\omega_2 = 0, \qquad \sqrt{u}\,\omega_1 + \sqrt{v}\,\omega_2 = 0.$$

Les caractéristiques de ces deux dernières familles forment sur la surface (S) *un réseau conjugué*. On peut l'appeler *réseau conjugué de déformation projective.*

On vérifie immédiatement que les caractéristiques fournies par ce réseau conjugué satisfont à la relation déjà obtenue (n° 9)

$$\omega_1(\Omega_{32}-\omega_{32})-\omega_2(\Omega_{31}-\omega_{31})=0,$$

qui se réduit ici, d'après (27) et (28), à

$$u\omega_1^2-v\omega_2^2=0;$$

on vérifie également la relation

$$\omega_{13}(\Omega_{20}-\omega_{20})-\omega_{23}(\Omega_{10}-\omega_{10})=0,$$

qui se réduit à la même équation.

19. Il est digne de remarque que, si l'on connaît u et v en fonction des paramètres t_1, t_2 qui définissent la position d'un point de la surface (S), *les équations finies du réseau conjugué de déformation projective, ainsi que celles des asymptotiques, s'obtiennent par des quadratures.* On a, en effet, d'après (35),

$$(\sqrt{u}\,\omega_1)'=\sqrt{u}[\omega_1(\omega_{11}-\omega_{00})]+\frac{1}{2\sqrt{u}}[du\,\omega_1]=0;$$

l'expression $\sqrt{u}\,\omega_1$ est donc une différentielle exacte, et il en est de même de $\sqrt{v}\,\omega_2$:

$$\sqrt{u}\,\omega_1=d\xi,\qquad \sqrt{v}\,\omega_2=d\eta.$$

On a ξ et η par deux quadratures; les équations finies des courbes du réseau conjugué de déformation projective sont alors

$$\xi\pm\eta=\text{const.}$$

et celles des lignes asymptotiques sont

$$\xi=\text{const.},\qquad \eta=\text{const.}$$

On a vu plus haut (17) que, si la surface projectivement déformable (S) admet un seul réseau conjugué de déformation projective, la quantité u peut être obtenue par une quadrature. On voit donc que, *pour une surface de cette catégorie, on obtient par trois quadratures les équations finies des courbes qui constituent le réseau conjugué de déformation projective, ainsi que celles des lignes asymptotiques.*

20. *Cas où le réseau conjugué unique de déformation projective se*

réduit à l'une des familles de lignes asymptotiques. — Dans le cas où, pour une surface (S), il y a entre u, v, w deux relations linéairement indépendantes, ces relations ne peuvent pas être

$$u = v = 0,$$

car les équations (35) conduiraient à $w = 0$. Mais il peut arriver que l'une des deux relations soit de la forme

$$v = 0;$$

dans ce cas, le réseau conjugué de déformation projective serait défini par l'équation différentielle

$$\omega_1^2 = 0;$$

il serait formé de l'une des familles de lignes asymptotiques. Voyons si ce cas peut se présenter, et quel est le degré de généralité des surfaces correspondantes.

On aura évidemment, d'après (35) et (36),

$$w = 0, \qquad [\omega_2 \, d\mu] = 0, \qquad 1 - 2\mu = 0;$$

par suite, *l'invariant projectif* μ *est égal à* $\frac{1}{2}$, et il est facile de voir que, réciproquement, s'il en est ainsi, l'équation

$$du = 2u(\omega_{11} - \omega_{00})$$

est complètement intégrable.

Le système de Pfaff qui donne les surfaces cherchées est donc

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \omega_3 = 0, & \\ \omega_{13} = \omega_2, & \omega_{23} = \omega_1, \\ \omega_{12} = \omega_1, & \omega_{21} = \omega_2, \\ \omega_{31} = \omega_{20}, & \omega_{32} = \omega_{10}, \\ \omega_{11} - \omega_{00} = 2\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, & \\ \omega_{22} - \omega_{00} = \alpha\omega_1 + 2\beta\omega_2, & \\ \omega_{33} - \omega_{00} = 3\alpha\omega_1 + 3\beta\omega_2, & \\ \omega_{10} = \lambda\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2, & \\ \omega_{20} = \nu\omega_1 + \rho\omega_2, & \\ \omega_{30} = \rho\omega_1 + \lambda\omega_2, & \end{array} \right.$$

et il conduit aux équations quadratiques extérieures

$$(38)\qquad \begin{cases} \left[\omega_1\left(d\alpha + \overline{\frac{1}{3} - \alpha\beta - \frac{3}{2}\nu}\,\omega_2\right)\right] = 0, \\ \left[\omega_2\left(d\beta + \overline{\frac{2}{3} - \alpha\beta - \frac{4}{3}\nu}\,\omega_1\right)\right] = 0, \\ [\omega_1\, d\nu] + [\omega_2\, d\rho] + (2\rho\alpha - 3\nu\beta)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [\omega_1\, d\rho] + [\omega_2\, d\lambda] + 4(\lambda\alpha - \rho\beta)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [\omega_1\, d\lambda] + \left(\frac{3}{2}\alpha - 2\lambda\beta\right)[\omega_1\omega_2] = 0. \end{cases}$$

Il est manifestement en involution et sa solution générale dépend de cinq fonctions arbitraires d'un argument.

Par suite, *les surfaces non réglées projectivement déformables dont le réseau conjugué de déformation projective se réduit à l'une des familles de lignes asymptotiques dépendent de cinq fonctions arbitraires d'un argument; les caractéristiques du système différentiel qui les définit sont les lignes asymptotiques des surfaces intégrales, les unes comptant quatre fois, les autres une fois.*

Pour ces surfaces, la quantité u est connue par une quadrature, et par suite *les lignes asymptotiques de la première famille par deux quadratures.* On ne peut plus rien dire de particulier relativement à la seconde famille de lignes asymptotiques.

Les surfaces admettant ∞^1 réseaux conjugués de déformation projective.

21. Étant donnée la forme (34) des équations qui donnent les valeurs de u et v pour les différents réseaux conjugués de déformation projective de la surface, on a

$$u = k_1 u_1 + k_2 u_2,$$
$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2$$

avec deux constantes arbitraires k_1, k_2. L'équation différentielle des réseaux conjugués est ici de la forme

$$k_1(u_1\omega_1^2 - v_1\omega_2^2) + k_2(u_2\omega_1^2 - v_2\omega_2^2) = 0.$$

Les deux réseaux conjugués particuliers (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont obtenus par l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre (34). Ce système une fois intégré, *on a, sans nouvelle intégration, les équations finies des lignes asymptotiques.* En effet, les deux expressions $\sqrt{u_1}\,\omega_1$ et $\sqrt{u_2}\,\omega_1$ étant des différentielles exactes, le rapport $\frac{\sqrt{u_2}}{\sqrt{u_1}}$ de deux facteurs intégrants est une intégrale première de l'équation $\omega_1 = 0$, c'est-à-dire de l'équation des lignes asymptotiques de la première famille. On a de même les équations des lignes asymptotiques de la seconde famille. Si alors ξ et η désignent les paramètres, ainsi connus, des asymptotiques, l'équation différentielle du réseau conjugué de déformation le plus général est de la forme

$$[k_1 f_1(\xi) + k_2 f_2(\xi)]\,d\xi^2 - [k_1 \varphi_1(\eta) + k_2 \varphi_2(\eta)]\,d\eta^2 = 0$$

avec des fonctions connues $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$. *Pour chaque valeur numérique du rapport $\frac{k_2}{k_1}$, les équations finies du réseau conjugué correspondant sont données par des quadratures.*

Si l'un des rapports $\frac{u_2}{u_1}$ ou $\frac{v_2}{v_1}$ était constant, les choses seraient un peu modifiées : on aurait alors les lignes asymptotiques par des quadratures.

22. Il importe d'avoir une idée du degré de généralité des surfaces qui admettent ∞^1 réseaux conjugués de déformation projective. Remarquons d'abord que, s'il existe entre u, v, w une seule relation linéaire, cette relation contient nécessairement w; sinon, en effet, elle serait de la forme

$$v = hu,$$

et l'on déduirait des équations (30)

$$w(\omega_2 - h\omega_1) = 0,$$

ce qui est absurde.

Cela étant, soit

$$w + pu + qv = 0,$$

la relation unique qui existe entre u, v, w. On en déduit, d'après (30) et (31),

$$\begin{aligned}
dp &= p(-\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) + p(p\omega_1 + q\omega_2) - 2(1 - 2\mu)\omega_2,\\
dq &= q(\alpha\omega_1 - \beta\omega_2) + q(p\omega_1 + q\omega_2) - 2(1 - 2\nu)\omega_1.
\end{aligned}$$

Le système de Pfaff qui donne les surfaces cherchées est donc

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned}
&\omega_3 = 0,\\
&\omega_{13} = \omega_2, \qquad \omega_{23} = \omega_1,\\
&\omega_{12} = \omega_1, \qquad \omega_{21} = \omega_2,\\
&\omega_{31} = \omega_{20}, \qquad \omega_{32} = \omega_{10},\\
&\omega_{11} - \omega_{00} = 2\alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\\
&\omega_{22} - \omega_{00} = \alpha\omega_1 + 2\beta\omega_2,\\
&\omega_{33} - \omega_{00} = 3\alpha\omega_1 + 3\beta\omega_2,\\
&\omega_{10} = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2,\\
&\omega_{20} = \nu\omega_1 + \rho\omega_2,\\
&\omega_{30} = \rho\omega_1 + \lambda\omega_2,\\
&dp = p(-\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) + p(p\omega_1 + q\omega_2) - 2(1 - 2\mu)\omega_2,\\
&dq = q(\alpha\omega_1 - \beta\omega_2) + q(p\omega_1 + q\omega_2) - 2(1 - 2\nu)\omega_1.
\end{aligned}\right.$$

Il conduit aux équations quadratiques extérieures

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left[\omega_1\left(d\alpha + \overline{1 - \alpha\beta - \tfrac{4}{3}\mu - \tfrac{2}{3}\nu}\,\omega_2\right)\right] = 0,\\
&\left[\omega_2\left(d\beta + \overline{1 - \alpha\beta - \tfrac{2}{3}\mu - \tfrac{4}{3}\nu}\,\omega_1\right)\right] = 0,\\
&[\omega_1\, d\nu] + [\omega_2\, d\rho] + (2\rho\alpha - 3\nu\beta)[\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[\omega_1\, d\rho] + [\omega_2\, d\lambda] + 4(\lambda\alpha - \rho\beta)[\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[\omega_1\, d\lambda] + [\omega_2\, d\mu] + (3\mu\alpha - 2\lambda\beta)[\omega_1\omega_2] = 0,\\
&\left[\omega_1\left(d\nu + \tfrac{3}{2}q\,\overline{\mu - \nu}\,\omega_2\right)\right] = 0,\\
&\left[\omega_2\left(d\mu - \tfrac{3}{2}p\,\overline{\mu - \nu}\,\omega_1\right)\right] = 0.
\end{aligned}\right.$$

Le système (39) n'est manifestement pas en involution. Posons, d'après (40),

$$
(41)\qquad \left\{\begin{aligned}
d\alpha &= \alpha_1\omega_1 + \left(\alpha\beta + \frac{4}{3}\mu + \frac{2}{3}\nu - 1\right)\omega_2,\\
d\beta &= \left(\alpha\beta + \frac{2}{3}\mu + \frac{4}{3}\nu - 1\right)\omega_1 + \beta_2\omega_2,\\
d\mu &= \frac{3}{2}p(\mu-\nu)\omega_1 + \mu_2\omega_2,\\
d\nu &= \nu_1\omega_1 - \frac{3}{2}q(\mu-\nu)\omega_2,\\
d\lambda &= (4\lambda\alpha + \sigma)\omega_1 + \left(2\lambda\beta - 3\mu\alpha + \frac{3}{2}p\overline{\mu-\nu}\right)\omega_2,\\
d\rho &= \left(2\rho\alpha - 3\nu\beta - \frac{3}{2}q\overline{\mu-\nu}\right)\omega_1 + (4\rho\beta + \sigma)\omega_2.
\end{aligned}\right.
$$

Les équations de Pfaff (41) conduisent aux équations quadratiques extérieures

$$
(42)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\left[\omega_1\left(d\alpha_1 - \overline{2\beta\alpha_1 + \frac{2}{3}\nu_1 + 2p\mu - 2p\nu - \frac{2}{3}\alpha\mu + \frac{2}{3}\alpha\nu\omega_2}\right)\right] = 0,\\
&\left[\omega_2\left(d\beta_2 - \overline{2\alpha\beta_2 + \frac{2}{3}\mu_2 - 2q\mu + 2q\nu + \frac{2}{3}\beta\mu - \frac{2}{3}\beta\nu\omega_1}\right)\right] = 0,\\
&[\omega_1 d\nu_1] - \left[\left(\beta + \frac{3}{2}q\right)\nu_1 - \left(\frac{15}{4}pq + 6\nu - 3\right)(\mu-\nu)\right][\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[\omega_2 d\mu_2] + \left[\left(\alpha + \frac{3}{2}p\right)\mu_2 + \left(\frac{15}{4}pq + 6\mu - 3\right)(\mu-\nu)\right][\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[\omega_1 d\sigma] + \Big[3\mu\alpha_1 + \frac{3}{2}p\nu_1 - 3\beta\sigma - 15\mu\alpha^2\\
&\qquad\qquad + \left(\frac{27}{2}\alpha p - \frac{15}{4}p^2\right)(\mu-\nu) + 2\lambda(2\mu-1)\Big][\omega_1\omega_2] = 0,\\
&[\omega_2 d\sigma] - \Big[3\nu\beta_2 + \frac{3}{2}q\nu_2 - 3\alpha\sigma - 15\nu\beta^2\\
&\qquad\qquad - \left(\frac{27}{2}\beta q - \frac{15}{4}q^2\right)(\mu-\nu) + 2\rho(2\nu-1)\Big][\omega_1\omega_2] = 0.
\end{aligned}\right.
$$

On en déduit immédiatement

$$(43)\quad d\sigma = \Big[3\,\nu\beta_2 + \frac{3}{2}q\mu_2 - 3\alpha\sigma - 15\,\nu\beta^2 - \Big(\frac{27}{2}\beta q - \frac{15}{4}q^2\Big)(\mu-\nu) + 2\rho(2\nu-1)\Big]\omega_1 + \Big[3\mu\alpha_1 + \frac{3}{2}p\,\nu_1 - 3\beta\sigma - 15\mu\alpha^2 + \Big(\frac{27}{2}\alpha p - \frac{15}{4}p^2\Big)(\mu-\nu) + 2\lambda(2\mu-1)\Big]\omega_2 = 0;$$

d'où

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} d\alpha_1 &= \alpha_{11}\omega_1 + \Big[2\beta\alpha_1 + \frac{2}{3}\nu_1 + 2\Big(p - \frac{1}{3}\alpha\Big)(\mu-\nu)\Big]\omega_2,\\ d\beta_2 &= \Big[2\alpha\beta_2 + \frac{2}{3}\mu_2 - 2\Big(q - \frac{1}{3}\beta\Big)(\mu-\nu)\Big]\omega_1 + \beta_{22}\omega_2,\\ d\nu_1 &= \nu_{11}\omega_1 + \Big[\Big(\beta + \frac{3}{2}q\Big)\nu_1 - \Big(\frac{15}{4}pq + 6\nu - 3\Big)(\mu-\nu)\Big]\omega_2,\\ d\mu_2 &= \Big[\Big(\alpha + \frac{3}{2}p\Big)\mu_2 + \Big(\frac{15}{4}pq + 6\mu - 3\Big)(\mu-\nu)\Big]\omega_1 + \mu_{22}\omega_2,\end{aligned}\right.$$

avec la relation finie

$$\begin{aligned} &\mu\alpha_{11} + \frac{1}{2}p\nu_{11} - 14\mu\alpha\alpha_1 + 6p(\mu-\nu)\alpha_1 + \Big(\frac{7}{4}p^2 - 7p\alpha\Big)\nu_1\\ &\quad + 2\mu\sigma + 20\mu\alpha^3 - \Big(30p\alpha^2 - \frac{75}{4}p^2\alpha - \frac{35}{8}p^3 + 2\lambda p\Big)(\mu-\nu)\\ &= \nu\beta_{22} + \frac{1}{2}q\mu_{22} - 14\nu\beta\beta_2 - 6q(\mu-\nu)\beta_2 + \Big(\frac{7}{4}q^2 - 7q\beta\Big)\mu_2\\ &\quad + 2\nu\sigma + 20\nu\beta^3 - \Big(30q\beta^2 - \frac{75}{4}q^2\beta - \frac{35}{8}q^3 + 2\rho q\Big)(\mu-\nu).\end{aligned}$$

On déduit de là les deux relations

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu\alpha_{111} + \frac{1}{2}p\,\nu_{111} + \Big[\frac{15}{2}p(\mu-\nu) - 14\mu\alpha\Big]\alpha_{11} + \Big(\frac{9}{4}p^2 - \frac{15}{2}p\alpha\Big)\nu_{11}\\ &\quad = (\nu_1 + 3\,\nu\alpha)\beta_{22} + \Big(\frac{8}{3}\nu + \frac{3}{2}q\alpha + \frac{5}{4}pq - 1\Big)\mu_{22} + \ldots,\\ &\nu\beta_{222} + \frac{1}{2}q\mu_{222} - \Big[\frac{15}{2}q(\mu-\nu) + 14\,\nu\beta\Big]\beta_{22} + \Big(\frac{9}{4}q^2 - \frac{15}{2}q\beta\Big)\mu_{22}\\ &\quad = (\mu_2 + 3\mu\beta)\alpha_{11} + \Big(\frac{8}{3}\mu + \frac{3}{2}p\beta + \frac{5}{4}pq - 1\Big)\nu_{11} + \ldots.\end{aligned}\right.$$

les termes non écrits ne dépendant que des lettres sans indice ou à simple indice, et où les notations α_{111}, ν_{111}, β_{222}, μ_{222} désignent respectivement les coefficients de ω_1, ω_1, ω_2, ω_2 dans $d\alpha_{11}$, $d\nu_{11}$, $d\beta_{22}$, $d\mu_{22}$.

Or on a, en employant des notations analogues,

$$\alpha_{1112} = 4\beta\alpha_{111} + \frac{2}{3}\nu_{111} + \ldots,$$

$$\nu_{1112} = \left(3\beta + \frac{3}{2}q\right)\nu_{111} + \ldots,$$

$$\beta_{2221} = 4\alpha\beta_{222} + \frac{2}{3}\mu_{222} + \ldots,$$

$$\mu_{2221} = \left(3\alpha + \frac{3}{2}p\right)\mu_{222} + \ldots,$$

les termes non écrits contenant deux indices au plus. Les relations (45) différentiées donnent alors

$$(\mu_2 + 3\mu\beta)\alpha_{111} + \left(\frac{8}{3}\mu + \frac{3}{2}p\beta + \frac{5}{4}pq - 1\right)\nu_{111}$$
$$= (\nu_1 + 3\nu\alpha)\beta_{222} + \left(\frac{8}{3}\nu + \frac{3}{2}q\alpha + \frac{5}{4}pq - 1\right)\mu_{222} + \ldots.$$

On obtient ainsi trois relations entre α_{111}, ν_{111}, β_{222}, μ_{222}, et des calculs qui ne présentent aucune difficulté montrent que ces trois relations sont linéairement indépendantes dans tous les cas. Par suite α_{111}, ν_{111}, β_{222}, μ_{222} peuvent s'exprimer au moyen d'une même indéterminée τ et des quantités à simple ou double indice. Mais alors on voit immédiatement que τ_1 et τ_2 sont déterminés au moyen des autres quantités, de sorte que l'on est ramené à un système de Pfaff dans lequel les différentielles des inconnues α, β, μ, ν, λ, ρ, σ, α_1, β_2, μ_2, ν_1, α_{11}, β_{22}, ν_{11}, μ_{22}, τ sont exprimées linéairement en ω_1 et ω_2, les coefficients n'introduisant aucune inconnue nouvelle. Si ce système est complètement intégrable, ce que rien n'oblige à croire *a priori*, les surfaces cherchées dépendent de 15 constantes arbitraires (indépendamment des constantes qui définissent leur position dans l'espace projectif).

Par suite, *les surfaces admettant ∞^1 réseaux conjugués de déformation projective dépendent au plus, si elles existent, de constantes arbitraires.*

Les surfaces admettant ∞^2 réseaux conjugués de déformation projective.

23. Pour ces surfaces, la relation linéaire (32) en u, v, w est identiquement vérifiée. Elles sont donc caractérisées par les relations

$$\mu = \nu,$$
$$[d\mu\,\omega_2] = [d\nu\,\omega_1] = 0,$$

c'est-à-dire par la propriété que *les deux invariants projectifs* μ *et* ν *aient une valeur commune constante*. Elles font partie de la classe plus générale des surfaces nommées par M. Fubini *surfaces asymptotico-isothermes* (*voir* n° 29).

Pour une valeur donnée c de la constante, les surfaces en question sont fournies par le système de Pfaff :

$$(46)\quad \begin{cases} \omega_3 = 0, \\ \omega_{13} = \omega_2, \qquad \omega_{23} = \omega_1, \\ \omega_{12} = \omega_1, \qquad \omega_{21} = \omega_2, \\ \omega_{11} - \omega_{00} = 2\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_{22} - \omega_{00} = \alpha\omega_1 + 2\beta\omega_2, \\ \omega_{33} - \omega_{00} = 3\alpha\omega_1 + 3\beta\omega_2, \\ \omega_{10} = \lambda\omega_1 + c\omega_2, \\ \omega_{20} = c\omega_1 + \rho\omega_2, \\ \omega_{30} = \rho\omega_1 + \lambda\omega_2. \end{cases}$$

Il conduit aux équations quadratiques extérieures

$$(47)\quad \begin{cases} [\omega_1(d\alpha + \overline{1 - 2c - \alpha\beta}\,\omega_2)] = 0, \\ [\omega_2(d\beta + \overline{1 - 2c - \alpha\beta}\,\omega_1)] = 0, \\ [\omega_1(d\lambda + \overline{3c\alpha - 2\lambda\beta}\,\omega_2)] = 0, \\ [\omega_2(d\rho + \overline{3c\beta - 2\rho\alpha}\,\omega_1)] = 0, \\ [\omega_1(d\rho - 4\rho\beta\omega_2)] + [\omega_2(d\lambda - 4\lambda\alpha\omega_1)] = 0. \end{cases}$$

Ces équations conduisent à poser

$$(48)\quad \begin{cases} d\alpha = \alpha_1\omega_1 + (\alpha\beta + 2c - 1)\omega_2, \\ d\beta = (\alpha\beta + 2c - 1)\omega_1 + \beta_2\omega_2, \\ d\lambda = (4\lambda\alpha + \sigma)\omega_1 + (2\lambda\beta - 3c\alpha)\omega_2, \\ d\rho = (2\rho\alpha - 3c\beta)\omega_1 + (4\rho\beta + \sigma)\omega_2. \end{cases}$$

On voit ensuite facilement que l'on doit avoir

$$(49)\qquad \begin{aligned} d\sigma = {} & (-3c\beta_2 + 3\alpha\sigma + 15c\beta^2 + 2\rho - 4\rho c)\omega_1 \\ & + (-3c\alpha_1 + 3\beta\sigma + 15c\alpha^2 + 2\lambda - 4\lambda c)\omega_2. \end{aligned}$$

Les équations (48) et (49) conduisent alors aux équations quadratiques extérieures

$$(50)\qquad \begin{cases} [\omega_1(d\alpha_1 - 2\beta\alpha_1\omega_2)] = 0, \\ [\omega_2(d\beta_2 - 2\alpha\beta_2\omega_1)] = 0; \end{cases}$$

$$(51)\qquad c[\omega_1\, d\beta_2] + c[\omega_2\, d\alpha_1] + 2c(7\alpha\alpha_1 - 7\beta\beta_2 - 10\alpha^3 + 10\beta^3)[\omega_1\omega_2] = 0.$$

Cela posé, deux cas sont à distinguer :

1° *La valeur constante des deux invariants* μ *et* ν *est nulle*. Dans ce cas, il ne reste que les équations quadratiques extérieures (50) et *les surfaces correspondantes dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument :* les caractéristiques du système de Pfaff qui les donne sont les lignes asymptotiques.

2° *La valeur constante de* μ *et* ν *n'est pas nulle*. Dans ce cas, les équations (50) et (51) permettent de poser

$$(52)\qquad \begin{cases} d\alpha_1 = (\gamma + 14\alpha\alpha_1 - 20\alpha^3)\omega_1 + 2\beta\alpha_1\omega_2, \\ d\beta_2 = 2\alpha\beta_2\omega_1 + (\gamma + 14\beta\beta_2 - 20\beta^3)\omega_2; \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(53)\qquad \begin{aligned} d\gamma = {} & [3\alpha\gamma + (60\beta^2 - 12\beta_2)(2c - 1)]\omega_1 \\ & + [3\beta\gamma + (60\alpha^2 - 12\alpha_1)(2c - 1)]\omega_2. \end{aligned}$$

Le système de Pfaff formé des équations (46), (48), (49), (52), (53) est alors complètement intégrable. *Les surfaces* (S) *cherchées dépendent essentiellement de huit constantes arbitraires,* mais se partagent en classes de surfaces toutes projectivement applicables les unes sur les autres, ces classes dépendant de cinq constantes arbitraires.

En réalité, les seules constantes essentielles, pour ces classes de surfaces applicables les unes sur les autres, sont celles qui interviennent dans les relations qui existent entre $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_2, \gamma$ (*voir* n° 26); or ces relations s'obtiennent en intégrant le système de Pfaff obtenu en éliminant ω_1 et ω_2 entre les deux premières équations (48) et les trois équations (52) et (53). *Il ne reste donc que trois constantes arbitraires* *pour les classes de surfaces projectivement applicables les unes sur les autres et correspondant à la même valeur $c \neq 0$ des invariants μ et ν.*

24. La recherche effective des surfaces en question est liée à des problèmes classiques. *La forme différentielle quadratique*

$$\varphi = 2\,\omega_1\,\omega_2$$

est, en effet, de courbure constante (¹). On a

$$\omega_1' = [\omega_1 \varpi], \qquad \omega_2' = -[\omega_2 \varpi],$$

en posant

$$\varpi = \beta\omega_2 - \alpha\omega_1\,;$$

les équations (41) donnent alors

$$\varpi' = 2(\mu + \nu - 1)[\omega_1 \omega_2].$$

La courbure de la forme φ est donc $2(\mu + \nu - 1)$, qui se réduit ici à la valeur *constante* $2(2c - 1)$.

Cela posé, on trouve, par un calcul que j'omets, les expressions générales de ω_1, ω_2, α, β, λ, ρ.

Supposons d'abord la courbure $2(2c-1)$ *différente de zéro.* On obtient

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned}
&\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{1-2c}}\sqrt[6]{\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}}\,\frac{dx}{x-y}, \qquad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{1-2c}}\sqrt[6]{\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}}\,\frac{dy}{y-x};\\
&\alpha = \sqrt{1-2c}\,\sqrt[6]{\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}}\left(1 + \frac{1}{6}\,\overline{y-x}\,\frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}}\right),\\
&\beta = \sqrt{1-2c}\,\sqrt[6]{\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}}\left(1 + \frac{1}{6}\,\overline{x-y}\,\frac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{Y}}\right),\\
&\lambda = (x-y)^2\,\mathrm{X}^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{Y}^{-\frac{1}{3}}\left[\frac{3}{2}c\,\frac{\mathrm{X}}{(x-y)^2} - \frac{1}{2}c\,\frac{\mathrm{X}'}{x-y} + \frac{c}{480}x^4\,\mathrm{X}^{\mathrm{VI}}(0)\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{c}{120}x^3\,\mathrm{X}^{\mathrm{V}}(0) + k_1x^2 + k_2x + k_3\right],\\
&\rho = (x-y)^2\,\mathrm{X}^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{Y}^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{3}{2}c\,\frac{\mathrm{Y}}{(y-x)^2} - \frac{1}{2}c\,\frac{\mathrm{Y}'}{y-x} + \frac{c}{480}y^4\,\mathrm{Y}^{\mathrm{VI}}(0)\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{c}{120}y^3\,\mathrm{Y}^{\mathrm{V}}(0) + k_1y^2 + k_2y + k_3\right],
\end{aligned}\right.$$

(¹) *Voir* ci-après, n° 33.

où X et Y sont, *si c n'est pas nul* (1), deux polynomes du sixième degré au plus, le premier en x, le second en y, *les coefficients de ces deux polynomes étant les mêmes*. On obtient une classe de surfaces applicables en prenant pour X et Y des fonctions déterminées, et en faisant varier les constantes k_1, k_2, k_3.

Les équations des réseaux conjugués de déformation projective sont

$$(k_1 x^2 + k_2 x + k_3)\frac{dx^2}{X} = (k_1 y^2 + k_2 y + k_3)\frac{dy^2}{Y};$$

quant aux lignes de Darboux-Segre, elles sont données par l'équation

$$\frac{dx^3}{X} = \frac{dy^3}{Y}.$$

Il semble, dans le cas $c \neq 0$, qu'il y ait ∞^7 classes de surfaces applicables les unes sur les autres; mais il faut remarquer que l'on peut multiplier X et Y par un même facteur constant et que, de plus, on peut effectuer sur x et y une même substitution homographique. Autrement dit, on peut poser

$$\bar{x} = \frac{h_1 x + h_2}{h_3 x + h_4}, \qquad \bar{X} = \frac{mX}{(h_3 x + h_4)^6},$$
$$\bar{y} = \frac{h_1 y + h_2}{h_3 y + h_4}, \qquad \bar{Y} = \frac{mY}{(h_3 y + h_4)^6},$$

ce qui réduit de quatre unités le nombre des constantes essentielles. On peut encore dire que le paramètre x des lignes asymptotiques de la première famille n'est défini qu'à une transformation homographique près (2).

On obtient sans difficulté le système d'équations aux dérivées partielles linéaires complètement intégrable auquel satisfont les coordonnées homogènes fixes d'un point de la surface. En posant $\omega_{00} = 0$, ce qui est permis, étant donné le facteur arbitraire par lequel on peut

(1) Si c est nul, X et Y sont deux fonctions *arbitraires*, la première de x, la seconde de y.

(2) Les paramètres x et y sont les paramètres projectifs des génératrices rectilignes de la sphère qui admet pour ds^2 la forme $(2c-1)\omega_1\omega_2 = \dfrac{dx\,dy}{(x-y)^2}$.

multiplier toutes les coordonnées homogènes, on trouve, en posant

$$\xi = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad \eta = \int \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

le système

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\sqrt{X}}{x-y}\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{1}{\sqrt{1-2c}}\frac{\sqrt{X}}{x-y}\frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{1}{1-2c}\left[\frac{3}{2}c\frac{X}{(x-y)^2} - \frac{1}{2}c\frac{X'}{x-y} + \ldots\right]\theta = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\sqrt{Y}}{x-y}\frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{1}{\sqrt{1-2c}}\frac{\sqrt{Y}}{x-y}\frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{1}{1-2c}\left[\frac{3}{2}c\frac{Y}{(x-y)^2} + \frac{1}{2}c\frac{Y'}{x-y} + \ldots\right]\theta = 0,$$

où les fonctions entre crochets sont celles qui entrent dans les expressions de λ et de ρ.

Si la surface (S) est donnée, on obtient facilement les quantités x, y, X, Y. En effet, une première quadrature donne

$$H = \frac{x-y}{\sqrt[6]{XY}} = e^{\int \alpha\omega_1 + \beta\omega_2}.$$

On a ensuite

$$H\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{1-2c}}\frac{dx}{\sqrt[3]{X}}, \qquad H\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{1-2c}}\frac{dy}{\sqrt[3]{Y}},$$

ce qui permet, par deux nouvelles quadratures, d'avoir les paramètres des lignes asymptotiques et les équations des lignes de Darboux-Segre. Supposons ces opérations effectuées et donnons au paramètre d'une ligne asymptotique de la seconde famille une valeur numérique fixe; on a alors, en désignant par H_0 et $(\omega_1)_0$ ce que deviennent H et ω_1, et par y_0, Y_0 les valeurs numériques que prennent y et Y,

$$\sqrt{1-2c}\,\frac{(\omega_1)_0}{H_0} = \sqrt[3]{Y_0}\,\frac{dx}{(x-y_0)^2},$$

d'où l'on tire x par une quadrature; on a ensuite

$$X = \frac{(x-y_0)^6}{Y_0 H_0^6}.$$

On peut, du reste, donner à y_0 et Y_0 des valeurs numériques arbitraires. On a par un procédé analogue y et Y.

25. *Supposons maintenant* $c = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire la courbure de la forme $\varphi = 2\omega_1\omega_2$ nulle. On trouve

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} &\omega_1 = \sqrt[6]{\frac{Y}{X}}\,dx, \qquad \omega_2 = \sqrt[6]{\frac{X}{Y}}\,dy, \\ &\alpha = -\frac{1}{6}\sqrt[6]{\frac{X}{Y}}\,\frac{X'}{X}, \qquad \beta = -\frac{1}{6}\sqrt[6]{\frac{Y}{X}}\,\frac{Y'}{Y}, \\ &\lambda = X^{-\frac{2}{3}}Y^{-\frac{1}{3}}\left[\frac{1}{4}yX' + \frac{1}{8}x^2\,X''(0) + k_3x + k_1\right], \\ &\rho = X^{-\frac{1}{3}}Y^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{1}{4}xY' + \frac{1}{8}y^2\,Y''(0) + k_3y + k_2\right], \end{aligned}\right.$$

où X et Y sont des polynomes entiers, respectivement en x et en y, *du troisième degré,* les coefficients de x^3 et de y^3 étant les mêmes. Il entre dans ces polynomes sept constantes, mais on peut poser

$$\begin{aligned} \bar{x} &= h_3\,x + h_1, \qquad \bar{X} = m\,h_3^3\,X, \\ \bar{y} &= \frac{1}{h_3}\,y + h_2, \qquad \bar{Y} = m\,\frac{1}{h_3^3}\,Y, \end{aligned}$$

ce qui réduit de quatre unités le nombre des constantes arbitraires.

Les équations des lignes de Darboux-Segre sont ici

$$\frac{dx^3}{X} + \frac{dy^3}{Y} = 0$$

et celles des réseaux conjugués de déformation projective sont

$$(k_3x + k_1)\frac{dx^2}{X} = (k_3y + k_2)\frac{dy^2}{Y};$$

les unes et les autres sont obtenues par des intégrales *elliptiques*.

On trouverait, comme dans le cas $c \neq \frac{1}{2}$, le système d'équations linéaires auxquelles satisfont les coordonnées homogènes d'un point de la surface; en posant

$$\xi = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad \eta = \int \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

il s'écrit

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \sqrt{X}\frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \left[\frac{1}{4}y X' + \frac{1}{8}x^2 X''(0) + k_3 x + k_1\right]\theta = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - \sqrt{Y}\frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \left[\frac{1}{4}x Y' + \frac{1}{8}y^2 Y''(0) + k_3 y + k_2\right]\theta = 0.$$

Les coefficients sont des fonctions elliptiques uniformes de ξ, η.

Si la surface (S) est donnée, on obtient par une première quadrature

$$H = \frac{1}{\sqrt[6]{XY}} = e^{\int \alpha\omega_1 + \beta\omega_2},$$

puis

$$H\omega_1 = \frac{dx}{\sqrt[3]{X}}, \qquad H\omega_2 = \frac{dy}{\sqrt[3]{Y}},$$

ce qui donne, par deux nouvelles quadratures, les paramètres des lignes asymptotiques et les équations des lignes de Darboux-Segre. En donnant au paramètre des lignes de la deuxième famille une valeur numérique fixe, on a

$$dx = \frac{(\omega_1)_0}{H_0\sqrt[3]{Y_0}}, \qquad X = \frac{1}{Y_0 H_0^3},$$

et l'on a de même y et Y.

Conditions d'applicabilité projective de deux surfaces non réglées données.

26. Plaçons-nous maintenant à un autre point de vue. Donnons-nous deux surfaces (S) et (Σ) et cherchons :

1° A reconnaître si elles sont projectivement applicables l'une sur l'autre ;

2° Dans le cas où elles le sont, à déterminer la correspondance ponctuelle qui réalise l'application.

Remarquons d'abord que, si deux surfaces sont projectivement applicables l'une sur l'autre, les invariants projectifs α, β, μ, ν ont, d'après (15) et (28), les mêmes valeurs numériques en deux points correspondants des deux surfaces. Il en est de même pour tous les invariants qui en sont dérivés, en convenant d'appeler *dérivés d'un* *invariant* I les quantités I_1 et I_2 définies par

$$dI = I_1\omega_1 + I_2\omega_2.$$

Remarquons du reste que, d'après (25), μ et ν peuvent être regardés comme dérivés de α et β, puisqu'on a

$$\alpha_2 = \frac{4}{3}\mu + \frac{2}{3}\nu + \alpha\beta - 1,$$
$$\beta_1 = \frac{2}{3}\mu + \frac{4}{3}\nu + \alpha\beta - 1.$$

Cela posé, plusieurs cas sont à distinguer.

I. *Les invariants projectifs α et β de la surface* (S) *ne sont liés par aucune relation.* — Il faudra alors que les invariants correspondants α' et β' de (Σ) ne soient non plus liés par aucune relation. Formons alors pour chacune des surfaces les quatre invariants dérivés

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \beta_1, \quad \beta_2.$$

Il faudra, pour l'applicabilité des deux surfaces, que les quatre invariants α_1, α_2, β_1, β_2 soient, pour les deux surfaces, les mêmes fonctions de α, β.

Réciproquement, s'il en est ainsi, les deux surfaces sont projectivement applicables et l'on a sans intégration la correspondance ponctuelle qui réalise l'application. En effet, établissons la correspondance ponctuelle définie par les relations

$$\alpha' = \alpha, \qquad \beta' = \beta;$$

on aura en même temps

$$\alpha'_1 = \alpha_1, \qquad \alpha'_2 = \alpha_2, \qquad \beta'_1 = \beta_1, \qquad \beta'_2 = \beta_2.$$

Or, de

$$d\alpha = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2, \qquad d\alpha' = \alpha'_1\Omega_1 + \alpha'_2\Omega_2,$$
$$d\beta = \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2, \qquad d\beta' = \beta'_1\Omega_1 + \beta'_2\Omega_2,$$

on tire évidemment

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2,$$

et par suite la correspondance ponctuelle considérée réalise effectivement l'application des deux surfaces.

Il est à peine besoin de faire remarquer que nous avons supposé particularisé complètement le système de référence mobile attaché à chaque surface.

II. *Les invariants projectifs α et β de* (S) *sont liés par une relation et une seule.* — Il faudra alors que les invariants α' et β' de (Σ) soient liés par la même relation unique. Supposons alors, pour fixer les idées, que l'invariant α ne soit pas constant. Formons ses invariants dérivés α_1 et α_2. Il y aura deux cas à distinguer :

1° *Les invariants α_1 et α_2 ne sont pas tous les deux des fonctions de α:* Supposons, par exemple, α_1 indépendant de α. Nous formerons les invariants dérivés de α_1, soit α_{11} et α_{12}. Il faudra et il suffira alors, pour l'applicabilité des deux surfaces, que α'_2, α'_{11}, α'_{12} s'expriment en fonctions de α', α'_1 de la même manière que α_2, α_{11}, α_{12} s'expriment en fonctions de α, α_1. La correspondance ponctuelle qui réalise l'application des deux surfaces est définie par les formules

$$\alpha' = \alpha, \qquad \alpha'_1 = \alpha_1.$$

2° *Les invariants α_1 et α_2 sont des fonctions de α* : Il faudra que α'_1 et α'_2 soient aussi des fonctions de α' et s'expriment en fonctions de α' de la même manière que α_1 et α_2 en fonctions de α.

Réciproquement, s'il en est ainsi, supposons $\alpha_1 \neq 0$ et considérons entre les deux surfaces (S) et (Σ) une correspondance définie par les équations

$$\alpha' = \alpha, \qquad \Omega_2 = \omega_2;$$

cette correspondance réalise l'application des deux surfaces, car des équations précédentes et des identités

$$d\alpha = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2, \qquad d\alpha' = \alpha'_1\Omega_1 + \alpha'_2\Omega_2,$$

on déduit

$$\Omega_1 = \omega_1.$$

La correspondance qui réalise l'application dépend donc d'une constante arbitraire.

Il semble que, pour obtenir cette correspondance, il faille intégrer une équation différentielle absolument quelconque; or *on peut se ramener à des quadratures*. Cherchons en effet, pour ω_2, un facteur intégrant de la forme $f(\alpha)$. On a, d'après (26),

$$[f(\alpha)\omega_2]' = -\alpha f(\alpha)[\omega_1\omega_2] + f'(\alpha)\alpha_1[\omega_1\omega_2];$$

il suffit donc de prendre

$$\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{\alpha}{\alpha_1},$$

ce qui donne $f(\alpha)$ par une quadrature.

III. *Les invariants projectifs α et β de* (S) *sont des constantes.* — Il faut alors que α' et β' soient aussi constants et que les valeurs des constantes soient les mêmes.

Réciproquement, s'il en est ainsi, la correspondance définie par le système de Pfaff, complètement intégrable,

$$\Omega_1 = \omega_1,$$
$$\Omega_2 = \omega_2$$

réalise l'application. Cette correspondance dépend de deux paramètres arbitraires. On peut l'obtenir par des quadratures.

Supposons d'abord, en effet, $\alpha = \beta = 0$; alors on a

$$\omega_1' = 0, \qquad \omega_2' = 0,$$

de sorte que si l'on détermine sur chaque surface, par deux quadratures, les coordonnées curvilignes x, y; x', y' définies par

$$dx = \omega_1, \qquad dy = \omega_2,$$
$$dx' = \Omega_1, \qquad dy' = \Omega_2,$$

la correspondance ponctuelle qui réalise l'application est donnée par les équations

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b.$$

Supposons maintenant α et β non nuls tous les deux. Les formules

$$\omega_1' = \beta[\omega_1\omega_2], \qquad \omega_2' = -\alpha[\omega_1\omega_2]$$

permettent, par deux quadratures, de poser

$$\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 = dH, \qquad e^H\omega_2 = dy,$$

et en posant (si $\alpha \neq 0$)

$$x = \frac{1}{\alpha}(e^{u} - \beta y),$$

on a

$$\omega_1 = \frac{dx}{\alpha x + \beta y}, \qquad \omega_2 = \frac{dy}{\alpha x + \beta y}.$$

On obtiendra de même pour (Σ) deux coordonnées curvilignes x', y'. La correspondance qui réalise l'application est alors

$$x' = ax + b\beta, \qquad y' = ay - b\alpha$$

avec deux constantes arbitraires a, b.

Remarquons que, dans le troisième cas qui vient d'être examiné, les deux invariants μ et ν sont égaux et constants; les surfaces qui jouissent de cette propriété ont été examinées plus haut en détail (23-25).

Il peut arriver du reste que des surfaces, sans admettre un groupe continu de déformations projectives, admettent un groupe discontinu; il en est ainsi, par exemple, des surfaces correspondant aux formules (54), si l'on prend pour X un polynome tel que $x^6 - 1$ ou $x^5 - x$; la surface admet un groupe discontinu de déformations projectives isomorphe dans le premier cas au groupe fini tétraédrique, dans le second cas au groupe octaédrique. La transformation $x' = y$, $y' = x$ correspond aussi à une déformation projective, mais qui se réduit à une homographie.

Surfaces admettant un groupe à deux paramètres de déformations projectives.

27. Ces surfaces, d'après ce qui précède, sont celles pour lesquelles α et β sont constants. On a

$$\alpha\beta = 1 - 2c, \qquad \mu = \nu = c.$$

Si nous nous reportons, dans le cas $c \neq 0$, aux formules (52) et (53), où α_1 et β_2 doivent être nuls, nous trouvons

$$\gamma = 20\alpha^3 = 20\beta^3.$$

d'où, sans restreindre la généralité,

$$\beta = \alpha = \sqrt{1-2c} \qquad (c \neq 0).$$

Cela posé, on a les trois cas suivants :

I. $\mu = \nu = 0$, $\alpha\beta = 1$. — Dans ce cas on n'a qu'à donner, dans les formules (54), aux fonctions arbitraires X et Y, des valeurs constantes. On trouve alors

$$\omega_1 = \beta \frac{dx}{x-y}, \qquad \omega_2 = \alpha \frac{dy}{y-x},$$
$$\lambda = \beta(x-y)^2(k_1 x^2 + k_2 x + k_3),$$
$$\rho = \alpha(x-y)^2(k_1 y^2 + k_2 y + k_3).$$

Cherchons d'abord si les surfaces ainsi obtenues sont toutes projectivement distinctes. Deux d'entre elles sont projectivement identiques si l'on peut passer des fonctions λ, ρ relatives à la première aux fonctions λ, ρ relatives à la seconde par un changement de variables conservant ω_1 et ω_2. On voit facilement alors que le polynome

$$k_1 x^2 + k_2 x + k_3$$

peut se ramener à l'un des types

$$x^2 + m,$$
$$x,$$
$$1,$$
$$0.$$

Les déformations projectives qui laissent la surface invariante sont données par des formules de la forme

$$x' = ax + b, \qquad y' = ay + b;$$

ce sont des déformations proprement dites (c'est-à-dire elles ne se réduisent pas à des transformations projectives) si elles ne reproduisent pas identiquement λ et ρ.

Les surfaces des deux premiers types admettent alors un groupe à deux paramètres de déformations projectives proprement dites; celles du troisième type n'admettent qu'un groupe à un paramètre ($x' = ax$, $y' = ay$), *et celles du quatrième type n'en admettent pas.* Inversement, *les surfaces du quatrième type admettent un groupe projectif à deux paramètres et celles du troisième type un groupe projectif à un paramètre.*

II. $\mu = \nu = c \neq 0$, $\beta = \alpha = \sqrt{1-2c} \neq 0$. — Il n'y a dans ce cas qu'à donner, dans les formules (54), aux polynomes X et Y, la valeur 1. On trouve

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{1-2c}}\frac{dx}{x-y}, \qquad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{1-2c}}\frac{dy}{y-x},$$

$$\lambda = (x-y)^2(k_1x^2+k_2x+k_3)+\frac{3}{2}c,$$

$$\rho = (x-y)^2(k_1y^2+k_2y+k_3)+\frac{3}{2}c.$$

La discussion du polynome $k_1x^2+k_2x+k_3$ est la même que dans le cas précédent et les conclusions sont les mêmes.

III. $\mu = \nu = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = 0$. — Il suffit dans ce cas de donner, dans les formules (55), aux polynomes X et Y, la valeur 1. On a alors

$$\omega_1 = dx, \qquad \omega_2 = dy,$$

$$\lambda = k_3x+k_1, \qquad \rho = k_3y+k_2.$$

On peut toujours réduire les fonctions λ et ρ soit à

$$\lambda = mx, \qquad \rho = my \qquad (m \neq 0),$$

soit à

$$\lambda = k_1, \qquad \rho = k_2.$$

Les surfaces du premier type admettent un groupe mixte à deux paramètres de déformations projectives proprement dites défini par

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon x + a, & y' &= \varepsilon^2 y + b \\ x' &= \varepsilon y + a, & y' &= \varepsilon^2 x + b \end{aligned} \qquad (\varepsilon^3 = 1);$$

celles du second type n'admettent aucune déformation projective proprement dite, mais en revanche admettent un groupe projectif à deux paramètres.

Les surfaces du premier type s'obtiennent en prenant pour coordonnées d'un de leurs points quatre solutions linéairement indépendantes du système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial y} + m x \theta, \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial \theta}{\partial x} + m y \theta.$$

Celles du second type ont leurs équations de la forme

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} = 1 \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0)$$

ou d'une forme dégénérée de celle-là.

CHAPITRE IV.

LES FORMES DIFFÉRENTIELLES INVARIANTES φ ET ψ.

28. Nous avons vu (14) que, si l'on fait varier le système de référence mobile associé à une surface (S) non réglée, pourvu toutefois qu'il satisfasse aux relations

$$(56) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \omega_3 = 0, \\ \omega_{13} = \omega_2, \qquad \omega_{23} = \omega_1, \\ \omega_{12} = \omega_1, \qquad \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33} = 0, \qquad \omega_{21} = \omega_2, \end{array} \right.$$

les deux formes différentielles quadratique et cubique

$$\varphi = 2\omega_1\omega_2,$$
$$\psi = \omega_1^3 + \omega_2^3$$

restent invariantes : ce sont des invariants projectifs absolus de la surface. Ces invariants sont *rationnels;* quant aux expressions ω_1 et ω_2, elles ne sont pas absolument déterminées, car on peut remplacer respectivement ω_1 et ω_2 soit par $\varepsilon\omega_1$ et $\varepsilon^2\omega_2$, soit par $\varepsilon^2\omega_2$ et $\varepsilon\omega_1$, où ε est une quelconque des racines cubiques de l'unité.

La forme φ égalée à zéro donne les lignes asymptotiques de la surface; la forme ψ, égalée à zéro, donne les lignes de Darboux-Segre. On peut remarquer que la forme φ est, à un facteur numérique constant près, le hessien de la forme cubique ψ des deux variables ω_1 et ω_2.

Ces formes φ et ψ posent un certain nombre de problèmes que nous allons rapidement passer en revue, parce que certains d'entre eux ont un rapport étroit avec la théorie de l'application projective. Remarquons auparavant que la forme ψ n'admet qu'un nombre fini de substitutions linéaires en ω_1 et ω_2; ces substitutions se partagent en trois catégories, les unes reproduisant la forme φ (ce sont les six substitutions dont il est question plus haut), les autres multipliant la forme φ par l'une ou l'autre des racines cubiques imaginaires de l'unité. On peut dire encore que, *la forme* ψ *étant donnée* a priori, *la forme* φ *est déterminée à une racine cubique près de l'unité*. Si l'on porte son attention seulement sur l'*équation* $\psi = 0$, on voit que toute substitution linéaire qui laisse cette équation invariante laisse également invariante l'équation $\varphi = 0$. Autrement dit, *si deux surfaces non réglées se correspondent avec conservation des lignes de Darboux-Segre, la correspondance conserve également les lignes asymptotiques.*

Le théorème de M. Fubini.

29. Le théorème qui constitue en quelque sorte la théorie de la déformation projective de M. Fubini est le suivant :

Pour que deux surfaces soient projectivement applicables, il faut et il suffit que l'on puisse établir entre elles une correspondance ponctuelle transformant le rapport $\frac{\psi}{\varphi}$ *des deux formes* φ *et* ψ *relatives à la première surface dans le rapport* $\frac{\psi}{\varphi}$ *relatif à la deuxième surface.*

Il nous est facile de démontrer ce théorème. D'abord la condition est nécessaire, car si deux surfaces (S) et (Σ) sont applicables, on peut choisir les systèmes de référence mobile associés aux deux surfaces de manière à avoir

$$\Omega_1 = \omega_1, \quad \Omega_2 = \omega_2, \quad \Omega_{13} = \omega_{13}, \quad \Omega_{23} = \omega_{23}, \quad \Omega_{12} = \omega_{12}, \quad \Omega_{21} = \omega_{21},$$
$$\Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}, \quad \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}, \quad \Omega_{33} - \Omega_{00} = \omega_{32} - \omega_{00}.$$

Si donc le système de référence associé à (S) est choisi de manière à satisfaire aux relations (56), celui qui est associé à (Σ) satisfera aux relations analogues; par suite, les formes quadratique et cubique Φ et Ψ relatives à (Σ) satisferont à

$$\Phi = 2\Omega_1\Omega_2 = 2\omega_1\omega_2 = \varphi, \qquad \Psi = \Omega_1^3 + \Omega_2^3 = \omega_1^3 + \omega_2^3 = \psi.$$

Réciproquement, supposons l'existence entre les deux surfaces d'une correspondance ponctuelle telle que l'on ait

$$\frac{\Psi}{\Phi} = \frac{\psi}{\varphi}.$$

Rien n'empêche de supposer que l'on a associé à chaque surface un système de référence normal ; on aura alors

$$\frac{\Omega_1^3 + \Omega_2^3}{\Omega_1 \Omega_2} = \frac{\omega_1^3 + \omega_2^3}{\omega_1 \omega_2};$$

en tenant compte du sextuple choix que l'on peut faire de ω_1 et ω_2, on voit facilement que l'égalité précédente entraîne

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2;$$

on en déduit

$$\alpha' = \alpha, \qquad \beta' = \beta,$$

en désignant par α' et β' les coefficients de la forme biquadratique X associée à (Σ) ; mais alors on a, d'après (23),

$$\Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}, \qquad \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00},$$

et de plus, d'après les équations (56) et celles analogues relatives à (Σ),

$$\Omega_{13} = \omega_{13}, \qquad \Omega_{23} = \omega_{23}, \qquad \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}.$$

Les conditions d'applicabilité projective des deux surfaces sont donc réalisées.

Les surfaces admettant une forme cubique ψ donnée à l'avance.

30. Toute forme cubique qui n'est ni un cube parfait ni divisible par un carré parfait peut évidemment se mettre sous la forme $\varpi_1^3 + \varpi_2^3$, en désignant par ϖ_1 et ϖ_2 deux formes linéaires convenablement choisies. Les surfaces, s'il en existe, qui admettent pour forme ψ cette forme donnée à l'avance, se partagent en trois catégories, suivant que la forme quadratique φ est égale à $2\varpi_1\varpi_2$, ou $2\varepsilon\varpi_1\varpi_2$ ou $2\varepsilon^2\varpi_1\varpi_2$. Les surfaces d'une même catégorie sont toutes applicables les unes sur les autres. Il résulte immédiatement de là que les surfaces de chaque

catégorie dépendent *au maximum* de trois constantes arbitraires; mais, en général, s'il y a une surface dans une des trois catégories, cette surface est unique, et il est même à prévoir qu'*en général il n'y aura aucune surface admettant la forme cubique donnée*. Cela tient à ce que, si l'on désigne par ξ et η deux intégrales premières des équations $\varpi_1 = 0$ et $\varpi_2 = 0$, on peut prendre

$$\varpi_1 = f(\xi, \eta)\, d\xi, \qquad \varpi_2 = \varphi(\xi, \eta)\, d\eta$$

avec deux fonctions arbitraires de deux arguments; il est vrai que l'on peut particulariser f et φ en remplaçant ξ par une fonction de ξ, et η par une fonction de η; mais cela ne diminue pas essentiellement l'arbitraire des éléments qui entrent dans ϖ_1 et ϖ_2. On peut dire, en somme, que *la forme cubique* $\varpi_1^3 + \varpi_2^3$ *dépend essentiellement de deux fonctions arbitraires de deux arguments;* comme les surfaces (S) ne dépendent que d'une fonction arbitraire de deux arguments, il est évident qu'il n'y a, en général, aucune surface (S) admettant une forme cubique ψ donnée à l'avance.

Les résultats obtenus aux n$^{\text{os}}$ 24 et 25 montrent que les formes cubiques qui appartiennent à ∞^3 surfaces non réglées sont données par l'une des deux formules

$$\psi = \frac{1}{(1-2c)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{XY}}{(x-y)^3}\left(\frac{dx^3}{X} - \frac{dy^3}{Y}\right),$$

$$\psi = \sqrt{XY}\left(\frac{dx^3}{X} + \frac{dy^3}{Y}\right);$$

dans la première, X et Y désignent, si $c = 0$, deux fonctions arbitraires, l'une de x, l'autre de y; et, si $c \neq 0$, deux polynomes entiers du sixième degré au plus ayant les mêmes coefficients; dans la deuxième formule, X et Y désignent deux polynomes, le premier en x, le second en y du troisième degré au plus, ayant le même coefficient pour le terme du troisième degré.

Les transformations de surfaces qui conservent les lignes de Darboux-Segre.

31. On peut se proposer de déterminer, non les surfaces qui possèdent une forme cubique ψ donnée à l'avance, mais les *surfaces pour*

lesquelles l'équation différentielle $\psi = 0$ *des lignes de Darboux-Segre est donnée à l'avance.* Si l'une de ces surfaces est connue, toutes les autres pourront être mises avec celle-là en correspondance ponctuelle conservant les lignes de Darboux-Segre. Réciproquement, la recherche des surfaces (Σ) qui peuvent être mises, avec une surface donnée (S), en correspondance ponctuelle conservant les lignes de Darboux-Segre, revient au problème énoncé. Remarquons qu'une telle correspondance conserve également les lignes asymptotiques.

Si l'équation différentielle donnée est mise sous la forme

$$\varpi_1^3 + \varpi_2^3 = 0,$$

où ϖ_1 et ϖ_2 sont des expressions de Pfaff formées au moyen de deux variables indépendantes ξ et η, il est évident que les surfaces cherchées seront données par l'intégration du système de Pfaff

$$(57)\qquad \left\{\begin{array}{c} \omega_3 = 0, \\ \omega_{13} = \omega_2, \qquad \omega_{23} = \omega_1, \\ \omega_{12} = \omega_1, \qquad \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33} = 0, \qquad \omega_{21} = \omega_2, \\ \omega_1 = t\varpi_1, \qquad \omega_2 = t\varpi_2, \end{array}\right.$$

où les fonctions inconnues sont les paramètres du système de référence mobile associé à la surface et le coefficient t.

Les équations quadratiques extérieures qu'entraînent les équations (57) sont, d'après les formules (22),

$$(58)\qquad \left\{\begin{array}{l} [\omega_1(\omega_{00} + \omega_{22} - 2\omega_{11})] + [\omega_2(\omega_{32} - \omega_{10})] = 0, \\ [\omega_1(\omega_{32} - \omega_{10})] \qquad\qquad + [\omega_2(\omega_{31} - \omega_{20})] = 0, \\ [\omega_1(\omega_{31} - \omega_{20})] + [\omega_2(\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22})] = 0, \\ \left[\omega_1\left(\dfrac{dt}{t} + \omega_{11} - \omega_{00} - \dfrac{b}{t}\omega_2\right)\right] = 0, \\ \left[\omega_2\left(\dfrac{dt}{t} + \omega_{22} - \omega_{00} - \dfrac{a}{t}\omega_1\right)\right] = 0, \end{array}\right.$$

où l'on a désigné par a et b les coefficients qui interviennent dans les expressions

$$\varpi_1' = b[\varpi_1\varpi_2], \qquad \varpi_2' = -a[\varpi_1\varpi_2].$$

Il entre dans les formules (58) cinq expressions de Pfaff indépendantes de ω_1, ω_2 et des premiers membres des équations (57). Il est donc à présumer que le système (57) est en involution et que *sa solution dépend de cinq fonctions arbitraires d'un argument.*

On peut mettre ces résultats en évidence en écrivant les équations (58) sous la forme

$$\left[\omega_1\left(\frac{dt}{t}+\omega_{11}-\omega_{00}-\frac{b}{t}\omega_2\right)\right]=0,$$

$$\left[\omega_2\left(\frac{dt}{t}+\omega_{22}-\omega_{00}-\frac{a}{t}\omega_1\right)\right]=0,$$

$$\left[(\omega_1+\omega_2)\left(3\frac{dt}{t}+\omega_{11}+\omega_{22}-2\omega_{00}+\omega_{31}-\omega_{20}+\omega_{32}-\omega_{10}-\frac{a}{t}\omega_1-\frac{b}{t}\omega_2\right)\right]=0,$$

$$\left[(\omega_1+\varepsilon\,\omega_2)\left(3\frac{dt}{t}+\omega_{11}+\omega_{22}-2\omega_{00}+\varepsilon\,\overline{\omega_{31}-\omega_{20}}+\varepsilon^2\,\overline{\omega_{32}-\omega_{10}}-\frac{a}{t}\omega_1-\frac{b}{t}\omega_2\right)\right]=0.$$

$$\left[(\omega_1+\varepsilon^2\omega_2)\left(3\frac{dt}{t}+\omega_{11}+\omega_{22}-2\omega_{00}+\varepsilon^2\,\overline{\omega_{31}-\omega_{20}}+\varepsilon\,\overline{\omega_{32}-\omega_{10}}-\frac{a}{t}\omega_1-\frac{b}{t}\omega_2\right)\right]=0.$$

On voit qu'*il y a cinq familles de caractéristiques, qui sont les deux familles de lignes asymptotiques et les trois familles de lignes de Darboux-Segre.*

32. *Étant données deux surfaces* (S) *et* (Σ), *peut-on reconnaître s'il existe entre ces deux surfaces une correspondance ponctuelle conservant les lignes de Darboux-Segre, et dans l'affirmative comment peut-on déterminer cette correspondance ?*

Supposons qu'on ait rapporté chacune des deux surfaces à un système de référence normal. La correspondance cherchée, si elle existe, sera donnée par deux relations de la forme

$$\Omega_1=t\omega_1,\qquad \Omega_2=t\omega_2, \tag{59}$$

qui entraînent, d'après (26),

$$\frac{dt}{t}+\alpha'\Omega_1+\beta'\Omega_2-\alpha\omega_1-\beta\omega_2=0, \tag{60}$$

en désignant par α' et β' les invariants projectifs analogues à α et β relatifs à (Σ). Cette dernière relation entraîne à son tour

$$(\mu'-\nu')[\Omega_1\Omega_2]-(\mu-\nu)[\omega_1\omega_2]=0, \tag{61}$$

Cela posé, deux cas sont à distinguer :

1° *Si les deux invariants projectifs* μ *et* ν *relatifs à* (S) *sont égaux*, il faudra qu'il en soit de même pour (Σ). Les équations (59) et (60) sont alors complètement intégrables. *Il y a une infinité de correspondances conservant les lignes de Darboux-Segre, et elles dépendent de trois constantes arbitraires.* Remarquons que l'équation (60) s'intègre d'elle-même par deux quadratures, car $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$ et $\alpha'\Omega_1 + \beta'\Omega_2$ sont des différentielles exactes $-\frac{dk}{k}$, $-\frac{dk'}{k'}$. On a alors

$$t = C\frac{k'}{k};$$

les équations (59), qui prennent la forme

$$\frac{1}{k'}\Omega_1 = C\frac{1}{k}\omega_1, \qquad \frac{1}{k'}\Omega_2 = C\frac{1}{k}\omega_2,$$

s'intègrent par des nouvelles quadratures, car chacun des membres de ces équations est une différentielle exacte, puisqu'on a par exemple

$$\left(\frac{1}{k}\omega_1\right)' = \frac{1}{k}\beta[\omega_1\omega_2] - \frac{1}{k^2}[dk\,\omega_1] = \frac{1}{k}\beta[\omega_1\omega_2] - \frac{1}{k}[\omega_1(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)] = 0.$$

Les ∞^3 *correspondances cherchées s'obtiennent donc par des quadratures.*

Remarquons qu'en posant

$$\frac{1}{k}\omega_1 = d\xi \qquad \frac{1}{k}\omega_2 = d\eta,$$

l'équation des lignes de Darboux-Segre se réduit à la forme

$$d\xi^3 + d\eta^3 = 0, \tag{62}$$

et les correspondances entre les deux surfaces sont

$$\xi' = C\xi + a, \qquad \eta' = C\eta + b;$$

en réalité, ces correspondances sont données par les formules plus générales

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= C\varepsilon\xi + a, & \eta' &= C\varepsilon^2\eta + b \\ \xi' &= C\varepsilon\eta + a, & \eta' &= C\varepsilon^2\xi + b \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon^3 = 1).$$

En particulier, toute surface dont les deux invariants μ et ν sont égaux admet avec elle-même ∞^3 correspondances laissant invariantes les lignes de Darboux-Segre. *Ces surfaces sont caractérisées par la propriété de l'équation des lignes de Darboux-Segre d'être réductible à la forme* (62); en effet, cette propriété entraîne l'existence d'un facteur k tel que $\frac{1}{k}\omega_1$ et $\frac{1}{k}\omega_2$ soient des différentielles exactes; cette dernière propriété donne

$$\frac{1}{k}\beta[\omega_1\omega_2]+\frac{1}{k^2}[\omega_1\, dk]=0, \qquad \frac{1}{k}\alpha[\omega_1\omega_2]+\frac{1}{k^2}[\omega_2\, dk]=0,$$

d'où

$$\frac{dk}{k}=-\alpha\omega_1-\beta\omega_2;$$

le second membre étant une différentielle exacte, on doit avoir $\mu=\nu$.

Ces surfaces ont été appelées par M. Fubini *asymptotico-isothermes*. Elles dépendent évidemment de cinq fonctions arbitraires d'un argument puisqu'elles correspondent à une même équation différentielle des lignes de Darboux-Segre. Les surfaces qui admettent ∞^2 réseaux conjugués de déformation projective sont des surfaces asymptotico-isothermes particulières.

2° *Si l'on n'a pas* $\mu=\nu$, on ne devra pas avoir non plus $\mu'=\nu'$. L'équation (61), en tenant compte de (59), donne la valeur de t,

$$t^2=\frac{\mu-\nu}{\mu'-\nu'}.$$

La correspondance cherchée, si elle existe, conserve donc les expressions de Pfaff

$$\varpi_1=\sqrt{\mu-\nu}\,\omega_1, \qquad \varpi_2=\sqrt{\mu-\nu}\,\omega_2.$$

On est alors ramené à un problème classique. On formera pour chacune des surfaces les quantités a et b définies par

$$\varpi'_1=b[\varpi_1\varpi_2], \qquad \varpi'_2=-a[\varpi_1\varpi_2],$$

ainsi que les quantités $a_1, a_2, b_1, b_2, \ldots$, qui en dérivent :

$$\begin{aligned} da &= a_1\,\varpi_1+a_2\,\varpi_2,\\ db &= b_1\,\varpi_1+b_2\,\varpi_2,\\ da_1 &= a_{11}\varpi_1+a_{12}\varpi_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si les quantités a et b ne sont liées par aucune relation, il faudra que les quantités a' et b' relatives à (Σ) ne soient également liées par aucune relation et, pour l'existence de la correspondance cherchée, il faudra et il suffira que a'_1, a'_2, b'_1, b'_2 soient les mêmes fonctions de a' et b' que a_1, a_2, b_1, b_2 le sont de a et b. Dans ce cas la correspondance est unique et connue sans intégration.

Les autres cas se traitent de la même manière.

On peut remarquer ici que *les quantités a et b ne peuvent pas être constantes toutes les deux*. On a en effet

$$\beta - \frac{\mu_2 - \nu_2}{2(\mu - \nu)} = b\sqrt{\mu - \nu},$$

$$\alpha - \frac{\mu_1 - \nu_1}{2(\mu - \nu)} = a\sqrt{\mu - \nu},$$

d'où

$$\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 - \frac{d\mu - d\nu}{2(\mu - \nu)} = a\varpi_1 + b\varpi_2;$$

or le second membre serait une différentielle exacte si a et b étaient des constantes, comme le montre le calcul de son covariant bilinéaire, et le premier membre ne peut pas l'être, car cela entraînerait $\mu = \nu$.

On peut déduire de là en particulier que *si une surface n'est pas asymptotico-isotherme, elle admet au plus avec elle-même ∞^1 correspondances conservant les lignes de Darboux-Segre*.

Les surfaces qui admettent une forme quadratique φ donnée à l'avance.

33. Nous avons porté jusqu'à présent notre attention sur la forme cubique ψ. Nous pouvons nous poser sur la forme quadratique φ des problèmes analogues à ceux qui viennent d'être résolus.

Il n'y a pas lieu de chercher les surfaces pour lesquelles l'équation différentielle des lignes asymptotiques soit donnée à l'avance, car cette équation différentielle est pour toutes les surfaces non réglées de la même forme

$$d\xi\, d\eta = 0.$$

Proposons-nous donc de chercher, s'il en existe, les surfaces admettant une forme quadratique φ donnée à l'avance, forme qu'on peut toujours supposer être

$$\varphi = 2\varpi_1\varpi_2,$$

où ϖ_1 et ϖ_2 désignent deux expressions de Pfaff données. Les surfaces cherchées s'obtiennent évidemment par l'intégration du système de Pfaff :

$$(63)\quad \left\{\begin{array}{c} \omega_3 = 0, \\ \omega_{13} = \omega_2, \qquad \omega_{23} = \omega_1, \\ \omega_{12} = \omega_1, \qquad \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33} = 0, \qquad \omega_{21} = \omega_2, \\ \omega_1 = t\varpi_1, \qquad \omega_2 = \frac{1}{t}\varpi_2. \end{array}\right.$$

Ce système conduit (*cf.* n° 31) aux équations quadratiques extérieures

$$(64)\quad \left\{\begin{array}{l} [\omega_1(\omega_{00} + \omega_{22} - 2\omega_{11})] + [\omega_2(\omega_{32} - \omega_{10})] = 0, \\ [\omega_1(\omega_{32} - \omega_{10})] \qquad\qquad + [\omega_2(\omega_{31} - \omega_{20})] = 0, \\ [\omega_1(\omega_{31} - \omega_{20})] + [\omega_2(\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22})] = 0, \\ \left[\omega_1\left(\dfrac{dt}{t} + \omega_{11} - \omega_{00} - bt\omega_2\right)\right] = 0, \\ \left[\omega_2\left(\dfrac{dt}{t} - \omega_{22} + \omega_{00} + \dfrac{a}{t}\omega_1\right)\right] = 0. \end{array}\right.$$

On voit ainsi que *les surfaces cherchées dépendent de cinq fonctions arbitraires d'un argument*. On peut du reste mettre en évidence les cinq familles de caractéristiques en écrivant les équations (64) sous la forme

$$(64')\quad \left\{\begin{array}{l} \left[\omega_1\left(\dfrac{dt}{t} + \omega_{11} - \omega_{00} - bt\omega_2\right)\right] = 0, \\ \left[\omega_2\left(\dfrac{dt}{t} - \omega_{22} + \omega_{00} + \dfrac{a}{t}\omega_1\right)\right] = 0, \\ \left[(\omega_1 - \omega_2)\left(\dfrac{dt}{t} + \omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{32} + \omega_{10} + \omega_{31} - \omega_{20}\right)\right] = 0, \\ \left[(\omega_1 - \varepsilon\,\omega_2)\left(\dfrac{dt}{t} + \omega_{22} - \omega_{11} - \varepsilon\,\overline{\omega_{32} - \omega_{10}} + \varepsilon^2\,\overline{\omega_{31} - \omega_{20}}\right)\right] = 0, \\ \left[(\omega_1 - \varepsilon^2\omega_2)\left(\dfrac{dt}{t} + \omega_{22} - \omega_{11} - \varepsilon^2\,\overline{\omega_{32} - \omega_{10}} + \varepsilon\,\overline{\omega_{31} - \omega_{20}}\right)\right] = 0, \end{array}\right.$$

où ε est une des racines cubiques imaginaires de l'unité.

Sous cette forme, on voit que *les cinq familles de caractéristiques des* *surfaces intégrales sont les deux familles de lignes asymptotiques et les trois familles de courbes conjuguées des lignes de Darboux-Segre.*

Étant données deux surfaces (S) et (Σ), la question de savoir si l'on peut établir entre elles une correspondance ponctuelle transformant l'une dans l'autre les formes φ qui leur correspondent est un problème classique. Si la courbure de l'une des formes φ est constante, la courbure de l'autre forme Φ doit avoir la même valeur constante, et la correspondance dépend alors de trois constantes arbitraires; cette courbure se calcule facilement; elle est égale à $2(\mu + \nu - 1)$. *Les surfaces qui admettent ∞^2 réseaux conjugués de déformation projective sont les surfaces asymptotico-isothermes dont la forme φ est de courbure constante.*

CHAPITRE V.

L'APPLICABILITÉ DES SURFACES RÉGLÉES NON DÉVELOPPABLES.

La particularisation du système de référence mobile.

34. Revenons au n° 13, où nous avions réalisé les deux premières particularisations du système de référence mobile attaché à une surface (S) quelconque non développable. Nous avions obtenu les relations

$$(65)\qquad \begin{cases} \omega_{13} = \omega_2, & \omega_{23} = \omega_1, \\ \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{00} - \omega_{33} = 0, \end{cases}$$

et nous avions été conduits à un invariant absolu

$$(66)\qquad \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\omega_1^2 \omega_{12} + \omega_2^2 \omega_{21}}{2\omega_1 \omega_2}.$$

Supposons maintenant qu'on ait affaire à une surface réglée et que les génératrices rectilignes soient les lignes asymptotiques données par l'équation

$$\omega_2 = 0;$$

on aura alors

et l'on pourra supposer, d'après (18), qu'on a

$$\omega_{21} = \omega_2.$$

Nous aurons ainsi la troisième particularisation du système de référence mobile caractérisée par les relations

$$(67) \qquad \omega_{12} = 0, \qquad \omega_{21} = \omega_2, \qquad \psi = \omega_2^3.$$

Nous aurons de plus, par un calcul analogue à celui du n° 15,

$$\begin{aligned}
[\omega_2(\omega_{32} - \omega_{10})] &= 0,\\
[\omega_1(\omega_{32} - \omega_{10})] + [\omega_2(\omega_{31} - \omega_{20})] &= 0,\\
[\omega_1(\omega_{31} - \omega_{20})] + [\omega_2(\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22})] &= 0.
\end{aligned}$$

35. *Quatrième particularisation du système de référence mobile.* — Les formules précédentes entraînent les suivantes :

$$\begin{aligned}
\omega_{32} - \omega_{10} &= a'\omega_2,\\
\omega_{31} - \omega_{20} &= a'\omega_1 + b'\omega_2,\\
\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22} &= b'\omega_1 + c'\omega_2,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
&[\omega_2(da' - 2\omega_{30} + 3a'\overline{\omega_{00} - \omega_{22}})] = 0,\\
&[\omega_1(da' - 2\omega_{30} + 3a'\overline{\omega_{00} - \omega_{22}})]\\
&\quad + [\omega_2(db' - 2\omega_{10} + 2b'\overline{\omega_{00} - \omega_{22}} + c'a'\omega_1)] = 0,\\
&[\omega_1(db' - 2\omega_{10} + 2b'\overline{\omega_{00} - \omega_{22}} + c'a'\omega_1)]\\
&\quad + [\omega_2(dc' + 4\omega_{20} + c'\overline{\omega_{00} - \omega_{22}} + \overline{b'c' + 3a'}\omega_1)] = 0.
\end{aligned}$$

Une variation infiniment petite du système de référence mobile entraîne pour les coefficients a', b', c' des variations $\delta a'$, $\delta b'$, $\delta c'$ fournies par

$$\begin{aligned}
\delta a' &= 2e_{30} + 3(e_{22} - e_{00})a',\\
\delta b' &= 2e_{10} + 2(e_{22} - e_{00})b',\\
\delta c' &= -4e_{20} + (e_{22} - e_{00})c'.
\end{aligned}$$

On voit immédiatement par suite qu'on peut choisir le système de référence mobile de manière à annuler a', b', c'. On aura alors les formules

$$(68) \qquad \begin{cases} \omega_{32} - \omega_{10} = 0, \qquad \omega_{31} - \omega_{20} = 0,\\ \omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22} = 0, \end{cases}$$

lesquelles entraîneront

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} & [\omega_2\omega_{30}] = 0, \\ [\omega_1\omega_{30}] + {} & [\omega_2\omega_{10}] = 0, \\ [\omega_1\omega_{10}] - 2{} & [\omega_2\omega_{20}] = 0. \end{aligned}\right.$$

Le système de référence mobile ne sera pas encore complètement déterminé, mais on aura

$$e_{10} = e_{20} = e_{30} = 0.$$

36. *Particularisation définitive du système de référence mobile.* — Les formules (69) donnent

$$\begin{aligned} \omega_{30} &= \alpha\omega_2, \\ \omega_{10} &= \alpha\omega_1 + 2k\omega_2, \\ \omega_{20} &= -k\omega_1 + \beta\omega_2, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} & [\omega_2(d\alpha + 4\alpha\overline{\omega_{00} - \omega_{22}})] = 0, \\ [\omega_1(d\alpha + 4\alpha\overline{\omega_{00} - \omega_{22}})] + 2 & [\omega_2(dk + 3k\overline{\omega_{00} - \omega_{22}})] = 0, \\ -[\omega_1(dk + 3k\overline{\omega_{00} - \omega_{22}})] + {} & [\omega_2(d\beta + 2\beta\overline{\omega_{00} - \omega_{22}})] = 0. \end{aligned}$$

1° *Cas général : $k \neq 0$.* — On peut choisir le système de référence de manière à rendre k égal à 1. On a alors les formules

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_{30} &= \alpha\omega_2, \\ \omega_{10} &= \alpha\omega_1 + 2\omega_2, \\ \omega_{20} &= -\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_{22} - \omega_{00} &= \lambda\omega_1 + \mu\omega_2, \end{aligned}\right.$$

avec quatre invariants fondamentaux α, β, λ, μ.

2° $k = 0$. — On aura dans ce cas

$$\begin{aligned} d\alpha + 4\alpha(\overline{\omega_{00} - \omega_{22}}) &= 0, \\ [\omega_2(d\beta + 2\beta\overline{\omega_{00} - \omega_{22}})] &= 0. \end{aligned}$$

Ce cas se subdivise lui-même en deux autres :

a. $\alpha \neq 0$. — Alors on peut supposer choisi le système de référence de manière à avoir $\alpha = 1$, ce qui entraîne les formules définitives

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_{30} &= \omega_2,\\ \omega_{10} &= \omega_1,\\ \omega_{20} &= \beta\omega_2,\\ \omega_{22} - \omega_{00} &= 0, \end{aligned}\right.$$

avec un seul invariant fondamental β.

b. $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. — On peut supposer β réduit à l'unité avec

$$(72)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_{10} &= 0,\\ \omega_{20} &= \omega_2,\\ \omega_{30} &= 0,\\ \omega_{22} - \omega_{00} &= \lambda\omega_2, \end{aligned}\right.$$

avec un invariant fondamental λ.

c. $\alpha = \beta = 0$. — Dans ce cas il est impossible de particulariser complètement le système de référence mobile. On a

$$\omega_{10} = \omega_{20} = \omega_{30} = 0.$$

Toutes les surfaces qui correspondent à ce cas sont équivalentes vis-à-vis du groupe projectif et chacune d'elles admet un groupe projectif à trois paramètres dont la structure est donnée par les formules

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= 2[\omega_1(\omega_{22} - \omega_{00})],\\ \omega'_2 &= [\omega_2(\omega_{22} - \omega_{00})],\\ \omega'_{22} - \omega'_{00} &= 0, \end{aligned}$$

Pour avoir ces surfaces, on peut prendre par exemple

$$\omega_1 = dt_1, \qquad \omega_2 = dt_2, \qquad \omega_{22} = \omega_{00} = 0,$$

de sorte que les formules de Frenet généralisées deviennent ici

$$\begin{aligned} dA &= dt_1 A_1 + dt_2 A_2,\\ dA_1 &= dt_2 A_3,\\ dA_2 &= dt_2 A_1 + dt_1 A_3,\\ dA_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations s'intègrent immédiatement et donnent en particulier

$$A = C + \left(t_1 + \frac{1}{2}t_2^2\right)C_1 + t_2 C_2 + \left(t_1 t_2 + \frac{1}{6}t_3^2\right)C_3,$$

en désignant par C, C_1, C_2, C_3 quatre points fixes. On a ainsi les coordonnées fixes d'un point de la surface en fonction de deux paramètres. C'est la *surface réglée de Cayley* dont l'équation est réductible à la forme

$$z = xy - \frac{1}{3}x^3.$$

37. Les surfaces pour lesquelles $k = 0$ sont caractérisées par une propriété géométrique intéressante. Cherchons en effet, étant donnée une surface réglée quelconque, si les génératrices de cette surface appartiennent à un complexe linéaire fixe. La génératrice variable étant $[AA_1]$, le complexe fixe sera défini par la forme géométrique

$$a[AA_1] + b[AA_2] + c[AA_3] + f[A_1A_2] + g[A_1A_3].$$

En exprimant que cette forme est fixe, on obtient

$$\begin{aligned}
&(da + a\overline{\omega_{00} + \omega_{11}} + b\omega_2 + \overline{c - f}\,\omega_{20} - g\omega_{30})[AA_1] \\
&+ (db + b\overline{\omega_{00} + \omega_{22}} + \overline{c + f}\,\omega_{10})[AA_2] \\
&+ (dc + a\omega_2 + b\omega_1 + c\overline{\omega_{00} + \omega_{33}} + g\omega_{10})[AA_3] \\
&+ (df - a\omega_2 + b\omega_1 + f\overline{\omega_{11} + \omega_{22}} + g\omega_{10})[A_1A_2] \\
&+ (dg + \overline{f + c}\,\omega_1 + g\overline{\omega_{11} + \omega_{33}})[A_1A_3] + (c - f)\omega_2[A_2A_3] = 0.
\end{aligned}$$

On en déduit successivement

$$\begin{gathered}
f = c, \\
a = 0, \\
b = g\alpha, \\
g(d\alpha + 4\alpha\overline{\omega_{00} - \omega_{22}}) + 4ck\omega_2 = 0.
\end{gathered}$$

On voit que si k n'est pas nul, il y a *au plus* un complexe linéaire fixe auquel appartiennent les génératrices de la surface.

Cherchons dans quel cas les génératrices appartiendraient à une *congruence linéaire*. Il faut pour cela qu'on ait $k = 0$, et cela suffit, car on vérifie facilement alors que la congruence formée par les deux complexes

$$[AA_3]+[A_1A_2] \quad \text{et} \quad [A_1A_3]+\alpha[AA_2]$$

est fixe. On a en effet

$$d([A\,A_3]+\ [A_1A_2]) = (\omega_{11}+\omega_{22})([AA_3]+[A_1A_2])+2\omega_1([A_1A_3]+\alpha[AA_2]),$$
$$d([A_1A_3]+\alpha[A\,A_2]) = 2\alpha\omega_1([AA_3]+[A_1A_2])+(\omega_{11}+\omega_{33})([A_1A_3]+\alpha[AA_2]).$$

Si α est différent de zéro, ce qui correspond au cas *a*, dans lequel on peut supposer $\alpha=1$, les génératrices rencontrent les deux droites fixes

$$[(A_1+A)(A_3+A_2)] \quad \text{et} \quad [(A_1-A)(A_3-A_2)];$$

on a une surface transformée d'un *conoïde* par homographie.

Si $\alpha=0$, les génératrices rencontrent la droite fixe $[A_1A]$ et appartiennent en outre au complexe linéaire $[AA_3]+[A_1A_2]$.

Le théorème de M. Fubini.

38. L'invariant absolu $\frac{\psi}{\varphi}$ donné par la formule (66), une fois qu'on suppose les relations (65) vérifiées peut, comme dans le cas des surfaces non réglées, être utilisé pour la condition d'applicabilité de deux surfaces.

Supposons en effet deux surfaces réglées (S) et (Σ) applicables, et admettons que nous ayons choisi le système de référence associé à (S) de manière à avoir les relations (65). Le système de référence associé à (Σ) qui réalise l'application est tel qu'on ait

$$\Omega_1=\omega_1, \qquad \Omega_2=\omega_2, \qquad \Omega_{13}=\omega_{13}, \qquad \Omega_{23}=\omega_{23},$$
$$\Omega_{12}=\omega_{12}, \qquad \Omega_{21}=\omega_{21};$$

on aura donc

$$\Omega_{13}=\Omega_2, \qquad \Omega_{23}=\Omega_1, \qquad \Omega_{11}+\Omega_{22}+\Omega_{00}-\Omega_{33}=0,$$

et par suite

$$\frac{\Psi}{\Phi}=\frac{\psi}{\varphi}.$$

Réciproquement, supposons qu'il soit possible d'établir une correspondance ponctuelle entre les deux surfaces telle que par cette correspondance on ait

$$\frac{\Psi}{\Phi} = \frac{\psi}{\varphi};$$

nous pouvons admettre qu'on a, pour chacune des deux surfaces, particularisé le système de référence mobile de manière à avoir les relations (65), (67), (68); on aura, pour toute variation permise de l'un ou de l'autre des systèmes de référence,

$$(73)\qquad \begin{cases} \delta\omega_1 = (e_{00} - e_{11})\omega_1 = 2(e_{00} - e_{22})\omega_1, \\ \delta\omega_2 = (e_{00} - e_{22})\omega_2, \\ \delta\Omega_1 = 2(e'_{00} - e'_{22})\Omega_1, \\ \delta\Omega_2 = \ (e'_{00} - e'_{22})\Omega_2. \end{cases}$$

Or l'égalité

$$\frac{\Psi}{\Phi} = \frac{\psi}{\varphi} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1}$$

entraîne

$$\Omega_1 = u^2\omega_1, \qquad \Omega_2 = u\,\omega_2;$$

mais on peut, d'après (73), modifier le système de référence associé à (Σ') de manière à avoir $u = 1$. On aura donc

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_{13} = \omega_{13}, \qquad \Omega_{23} = \omega_{23}, \qquad \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21};$$

et de plus en prenant les covariants bilinéaires des deux membres des deux premières équations et tenant compte de (65), (67) et (68),

$$2[\omega_1(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] = 0,$$
$$[\omega_2(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] = 0;$$

d'où

$$\Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00} \qquad \text{et} \qquad \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}.$$

Les conditions d'application sont donc vérifiées.

On ne peut pas ici, comme dans le cas des surfaces non réglées, ramener les conditions d'applicabilité à celles d'égalité de deux formes *entières*.

Le système de Pfaff des surfaces applicables sur une surface réglée donnée.

39. Partons d'une surface (S) pour laquelle nous aurons particularisé complètement le système de référence mobile. Les surfaces (Σ)

qui admettent une application du second ordre sur (S), sont données par l'intégration du système de Pfaff

$$(74)\quad \left\{\begin{array}{l} \Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_3 = 0, \\ \Omega_{13} = \omega_{13}, \qquad \Omega_{23} = \omega_{23}, \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}, \qquad \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}, \\ \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}. \end{array}\right.$$

Les deux équations de la seconde ligne entraînent les équations quadratiques extérieures

$$[\omega_1(\Omega_{33} - \Omega_{00} - \omega_{33} + \omega_{00})] = 0,$$
$$[\omega_2(\Omega_{33} - \Omega_{00} - \omega_{33} + \omega_{00})] = 0;$$

d'où l'on déduit immédiatement la nouvelle équation de Pfaff :

$$(75)\quad \Omega_{33} - \Omega_{00} = \omega_{33} - \omega_{00}.$$

Les calculs faits au n° 16 se reproduisent ici sans modification et conduisent, en changeant au besoin le sommet B_3 du système de référence attaché à (Σ), à

$$(76)\quad \left\{\begin{array}{l} \Omega_{31} - \Omega_{20} = \omega_{31} - \omega_{20}, \\ \Omega_{32} - \Omega_{10} = \omega_{32} - \omega_{10}. \end{array}\right.$$

Les équations quadratiques extérieures auxquelles donne naissance le système de Pfaff (74), (75), (76), sont

$$(77)\quad \left\{\begin{array}{l} [\omega_1(\Omega_{10} - \omega_{10})] = 0, \\ [\omega_1(\Omega_{30} - \omega_{30})] + [\omega_2(\Omega_{10} - \omega_{10})] = 0, \\ [\omega_2(\Omega_{30} - \omega_{30})] = 0, \end{array}\right.$$

$$(78)\quad [\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0.$$

On en déduit

$$(79)\quad \left\{\begin{array}{l} \Omega_{10} - \omega_{10} = u\omega_1, \\ \Omega_{30} - \omega_{30} = u\omega_2; \end{array}\right.$$

d'où

$$[\omega_1(du + 4u\overline{\omega_{00} - \omega_{22}})] = 0,$$
$$[\omega_2(du + 4u\overline{\omega_{00} - \omega_{22}})] = 0;$$

d'où enfin

$$(80)\quad du + 4u(\omega_{00} - \omega_{22}) = 0.$$

Cette dernière équation conduit à son tour à l'équation quadratique extérieure

$$u[\omega_2\omega_{20}] = 0. \tag{81}$$

Cas d'une surface réglée dont les génératrices n'appartiennent pas à une congruence linéaire.

40. Dans le cas général où les formules (70) s'appliquent, l'équation (81) donne

$$u = 0.$$

Le système de Pfaff, formé des équations (74), (75), (76), (79) (où les seconds membres sont supprimés), conduit alors à la seule équation quadratique extérieure (78) :

$$[\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0. \tag{78}$$

Par suite, *il admet une infinité de solutions dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument;* les caractéristiques de ce système de Pfaff sont les génératrices rectilignes de la surface (S).

41. *Conditions d'applicabilité de deux surfaces réglées données.* — Les formules (74), (75), (76), (79) montrent que, si le système de référence attaché à (S) a été particularisé de manière à satisfaire aux relations (65), (67), (68), (70), il en sera de même du système de référence correspondant attaché à une autre surface réglée (Σ) applicable sur (S); de plus, pour les deux surfaces, les trois invariants α, λ, μ auront mêmes valeurs numériques en deux points correspondants. Réciproquement, *si deux surfaces réglées sont telles que l'on puisse établir entre elles une correspondance ponctuelle conservant les valeurs numériques des invariants α, λ, μ, ces deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre.* On déduit de là les conditions effectives d'applicabilité par la considération des invariants *dérivés* de α, λ, μ (*cf.* n° 36). Bornons-nous, sans traiter le problème général, à examiner les cas les plus simples.

Les formules (70) conduisent à

$$\begin{aligned}
d\alpha &= 4\alpha\lambda\omega_1 + (4\alpha\mu - 6\lambda)\omega_2,\\
d\lambda &= \left(5\lambda^2 - \frac{4}{3}\alpha\right)\omega_1 + \lambda_2\omega_2,\\
d\mu &= (\lambda_2 - \lambda\mu - 2)\omega_1 + \mu_2\omega_2.
\end{aligned}$$

De là résulte que les trois invariants α, λ, μ ne peuvent être tous constants.

Si α, λ, μ étaient fonctions de l'un d'entre eux, on aurait, soit

$$\alpha = \lambda = 0, \qquad d\mu = -2\omega_1 + (C - \mu^2)\omega_2,$$

soit

$$\lambda^2 = \frac{4}{9}\alpha + C\alpha^{\frac{5}{2}}, \qquad \mu = \left(C' + \frac{15}{8\alpha}\right)\lambda.$$

Dans le premier cas, deux surfaces réglées pour lesquelles C aurait la même valeur constante seraient applicables; dans le second cas, il faudrait que les deux constantes C et C′ aient respectivement les mêmes valeurs sur les deux surfaces. Dans l'un et l'autre cas, chacune des surfaces considérées admet ∞^1 applications sur elle-même.

Si enfin deux des trois invariants α, λ, μ sont indépendants, par exemple α et λ, il faut et il suffit, pour l'applicabilité, que μ et λ_2 soient pour les deux surfaces les mêmes fonctions de α et λ.

42. *La correspondance ponctuelle qui réalise l'application de deux surfaces réglées applicables.* — Les composantes du mouvement instantané du système de référence mobile sont les mêmes pour les deux surfaces, sauf ω_{20} et ω_{31} : on a, en effet,

$$\Omega_{20} - \omega_{20} = \Omega_{31} - \omega_{31} = \varpi\omega_2.$$

On voit donc déjà que, si l'on se déplace sur une génératrice rectiligne ($\omega_2 = 0$), le mouvement d'entraînement de (Σ) par rapport à (S) est nul; cela signifie que *la correspondance ponctuelle entre deux génératrices correspondantes des deux surfaces est projective.*

Le mouvement de (Σ) par rapport à (S) est un mouvement à un paramètre dans lequel chaque point de la génératrice commune a une vitesse nulle; les différents points d'un plan quelconque passant par cette génératrice commune subissent une *élation* instantanée dont le centre est sur cette génératrice : il y a une correspondance projective entre les plans variables autour de la génératrice et les centres des élations correspondantes.

Si l'on sait d'avance que deux surfaces réglées (S) et (Σ) sont applicables l'une sur l'autre, la correspondance qui réalise l'application peut, en général, être obtenue sans intégration : il suffit de faire correspondre les points pour lesquels les invariants α, λ, μ ont les mêmes valeurs. Il n'y a d'exception que si les trois invariants sont fonctions de l'un d'entre eux : dans ce cas, la correspondance cherchée s'obtient par des quadratures.

Si, par exemple, on a (n° 41)

$$\alpha = \lambda = 0, \qquad d\mu = -2\omega_1 + (C - \mu^2)\omega_2,$$

la correspondance sera donnée par

$$\mu' = \mu, \qquad \Omega_2 = \omega_2;$$

or la dernière équation s'intègre par quadratures, puisque l'on a

$$\omega'_2 = 0, \qquad \Omega'_2 = 0.$$

Étudions d'un peu plus près cette catégorie de surfaces et supposons, pour simplifier, que la constante C soit nulle. Nous pouvons poser

$$\omega_2 = dt.$$

On voit alors sans difficulté que la surface est engendrée par le point

$$A = P(t) - \frac{1}{2}\mu[P''(t) - \varphi(t)P(t)],$$

où $\varphi(t)$ est une fonction arbitraire de t et où le point variable $P(t)$ est donné par l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^4P}{dt^4} - 2\varphi\frac{d^2P}{dt^2} - 2(\varphi' + 2)\frac{dP}{dt} + (\varphi^2 - \varphi'')P = 0.$$

La courbe décrite par le point P est manifestement une ligne asymptotique, les autres lignes asymptotiques étant données par l'équation

$$\frac{1}{\mu} = t + \text{const.}$$

L'application entre deux surfaces de la famille précédente est réalisée par la correspondance ponctuelle

$$\mu' = \mu, \qquad t' = t + a.$$

Surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire.

43. Revenons au système de Pfaff formé des équations (74), (75), (76), (79), (80). Dans le cas des surfaces qui nous occupent, l'équation quadratique extérieure (81) est identiquement vérifiée. L'équation (80) donne l'inconnue u avec une constante arbitraire, et les autres équations, conduisant à la seule équation quadratique extérieure

$$[\omega_2(\Omega_{20}-\omega_{20})]=0, \tag{78}$$

admettent une infinité de solutions dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument. Il est, du reste, facile de voir que *toutes les surfaces dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire sont applicables les unes sur les autres*. Particularisons, en effet, les systèmes de référence mobiles associés à deux de ces surfaces de manière à avoir pour chacune d'elles les relations (65), (67), (68), et, par suite, des relations de la forme

$$\left\{\begin{array}{l}\omega_{30}=\alpha\omega_2,\\ \omega_{10}=\alpha\omega_1,\\ \omega_{20}=\beta\omega_2.\end{array}\right. \tag{82}$$

Les équations de Pfaff,

$$\Omega_1=\omega_1,\qquad \Omega_2=\omega_2,\qquad \Omega_{22}-\Omega_{00}=\omega_{22}-\omega_{00}, \tag{83}$$

entraînent alors toutes les relations (74), (75), (76), (79), (80). Or, on vérifie facilement que le système (83) est complètement intégrable, si l'on tient compte des relations (82) pour chacune des deux surfaces.

On voit, de plus, que *la correspondance ponctuelle que réalise l'application de deux surfaces données dépend de trois constantes arbitraires*. Ici, *la correspondance ponctuelle entre deux génératrices correspondantes n'est plus nécessairement projective*. Quand on se déplace, en effet, le long d'une génératrice commune à (S) et à la surface (Σ) déplacée, le mouvement instantané de la génératrice de (Σ) n'est plus nul, puisque les composantes

$$\omega_1,\quad \omega_{10},\quad \omega_{11}-\omega_{00}$$

ne sont pas toutes les mêmes pour les deux surfaces quand on fait $\omega_2 = 0$.

44. *Détermination de la correspondance ponctuelle qui réalise l'application de deux surfaces données.* — Prenons une surface (S); nous allons supposer le système de référence choisi de manière à satisfaire aux formules

$$(65) \qquad \omega_{13} = \omega_2, \qquad \omega_{23} = \omega_1, \qquad \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33} = 0,$$

et nous formerons la forme différentielle de M. Fubini

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\omega_2 \omega_{21}}{2\omega_1}.$$

Soit d'abord une surface dont les génératrices rencontrent deux droites fixes et dont on peut supposer l'équation ramenée à la forme

$$(84) \qquad y = xZ,$$

où Z est une fonction de z. Désignons par M le point de la surface de coordonnées fixes

$$x, \quad xZ, \quad z, \quad 1,$$

et considérons les points $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 M}{\partial x\, \partial z}$; on a

$$\left[M \frac{\partial M}{\partial x} \frac{\partial M}{\partial z} \frac{\partial^2 M}{\partial x\, \partial z}\right] = Z'$$

et

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = \frac{xZ''}{Z'} \frac{\partial^2 M}{\partial x\, \partial z}.$$

Posons

$$\begin{aligned}
A &= kM,\\
A_1 &= k_1 \frac{\partial M}{\partial x} + k_4 M,\\
A_2 &= k_2 \frac{\partial M}{\partial z} + k_5 \frac{\partial M}{\partial x} + k_6 M,\\
A_3 &= k_3 \frac{\partial^2 M}{\partial x\, \partial z} + k_7 \frac{\partial M}{\partial z} + k_8 \frac{\partial M}{\partial x} + k_9 M,
\end{aligned}$$

avec

$$k k_1 k_2 k_3 = \frac{1}{Z'}.$$

On trouve sans difficulté les expressions suivantes des ω_{ij} :

$$\omega_1 = \frac{k}{k_1} dx - \frac{k k_5}{k_1 k_2} dz,$$

$$\omega_2 = \frac{k}{k_2} dz,$$

$$\omega_{00} = \frac{dk}{k} - \frac{k_4}{k_1} dx + \left(\frac{k_4 k_5}{k_1 k_2} - \frac{k_6}{k_2}\right) dz,$$

$$\omega_{11} = \frac{dk_1}{k_1} + \frac{k_4}{k_1} dx + \left(\frac{k_5 k_7}{k_2 k_3} - \frac{k_4 k_5}{k_1 k_2} - \frac{k_8}{k_3}\right) dz,$$

$$\omega_{12} = \left(\frac{k_4}{k_2} - \frac{k_1 k_7}{k_2 k_3}\right) dz,$$

$$\omega_{13} = \frac{k_1}{k_3} dz,$$

$$\omega_{21} = \frac{dk_5}{k_1} + \frac{k_6}{k_1} dx - \frac{k_5}{k_1}\left(\frac{dk_2}{k_2} + \frac{k_6}{k_2} dz\right) + \left(\frac{k_5 k_7}{k_1 k_2} - \frac{k_8}{k_1}\right)\left[\frac{k_2}{k_3} dx + \left(\frac{k_5}{k_3} + \frac{k_2}{k_3} x \frac{Z''}{Z'}\right) dz\right],$$

$$\omega_{22} = \frac{dk_2}{k_2} + \frac{k_6}{k_2} dz - \frac{k_7}{k_3} dx - \frac{k_7}{k_2}\left(\frac{k_5}{k_3} + \frac{k_2}{k_3} x \frac{Z''}{Z'}\right) dz,$$

$$\omega_{23} = \frac{k_2}{k_3} dx + \left(\frac{k_5}{k_3} + \frac{k_2}{k_3} x \frac{Z''}{Z'}\right) dz.$$

Les relations

$$\omega_{13} = \omega_2, \qquad \omega_{23} = \omega_1$$

conduisent d'abord à

$$k k_3 = k_1 k_2 = \frac{1}{\sqrt{Z'}};$$

$$k_5 = -\frac{1}{2} k_2 x \frac{Z''}{Z'};$$

la relation

$$\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \omega_{11} + \omega_{22} = 0$$

donne enfin, en tenant compte des résultats qui viennent d'être obtenus,

$$k_1 k_7 = k_3 k_4,$$

$$\frac{k_6}{k_2} - \frac{k_8}{k_3} - \frac{1}{2} \frac{k_4}{k_1} x \frac{Z''}{Z'} = \frac{1}{2} \frac{Z''}{Z'}.$$

On en déduit

$$\omega_1 = \frac{k}{k_1}\left(dx + \frac{1}{2}x\frac{Z''}{Z'}dz\right),$$

$$\omega_2 = \frac{k}{k_2}dz,$$

$$\omega_{21} = -\frac{1}{2}\frac{k_2}{k_1}x\frac{Z'Z''' - \frac{3}{2}Z''^2}{Z'^2}dz$$

et, par suite,

(85) $$\frac{\psi}{\varphi} = -\frac{1}{4}\frac{\dfrac{Z'Z''' - \frac{3}{2}Z''^2}{Z'^2}dz^2}{\dfrac{dx}{x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{Z''}{Z'}dz}.$$

Dans le cas d'une surface réglée dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire parabolique, surface dont on peut supposer l'équation ramenée à la forme

(86) $$y = xz + Z,$$

on trouve, par un calcul analogue,

(87) $$\frac{\psi}{\varphi} = -\frac{1}{4}\frac{Z'''dz^2}{dx + \frac{1}{2}Z''dz}.$$

Posons alors, dans le cas d'une surface d'équation (84),

$$\xi = \log(x\sqrt{Z'}), \qquad \eta = \int\sqrt{\frac{Z'Z''' - \frac{3}{2}Z''^2}{Z'^2}}dz;$$

et, dans le cas d'une surface d'équation (86),

$$\xi = x + \frac{1}{2}Z', \qquad \eta = \int\sqrt{Z'''}\,dz.$$

La correspondance qui réalise l'application de deux surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire (non nécessairement la même pour les deux surfaces) *est définie par les équations*

$$\xi' = c^2\xi + a, \qquad \eta' = c\eta + b,$$

avec trois constantes arbitraires a, b, c.

Considérons, par exemple, un hélicoïde réglé à plan directeur défini en coordonnées cylindriques par

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$
$$z = h\theta;$$

on a ici

$$Z = \operatorname{tang}\frac{z}{h},$$

$$\xi = \log\frac{r}{\sqrt{h}}, \qquad \eta = \sqrt{2}\,\theta.$$

L'hélicoïde admet ∞^3 applications sur lui-même par les formules

$$\theta' = c\theta + b, \qquad r' = a r^{c^2}.$$

On voit bien la nature non projective de la correspondance ponctuelle entre deux génératrices qui se correspondent.

On peut remarquer, du reste, que, dans le cas d'une congruence linéaire non parabolique, ξ est le logarithme du rapport anharmonique formé par le point M, le point où la génératrice rencontre une asymptotique fixe $(x\sqrt{Z'} = 1)$ et les deux points où la génératrice rencontre les deux directrices rectilignes de la surface : c'est donc, en un certain sens, l'abscisse cayleyenne du point M sur la génératrice dont les deux points à l'infini seraient sur les directrices de la surface. Si la congruence linéaire est parabolique, ξ est encore l'abscisse, mais dans la métrique dont l'absolu serait formé par un point double situé sur la directrice rectiligne de la surface.

Les surfaces du second ordre.

45. Avant de passer aux surfaces développables, nous avons à dire un mot des surfaces doublement réglées pour lesquelles la forme cubique ψ est identiquement nulle : ce sont les surfaces du second ordre. Elles sont évidemment toutes applicables les unes sur les autres, et un calcul facile montre que, pour réaliser l'application, il suffit de faire correspondre les génératrices des deux surfaces suivant des lois *arbitraires. La correspondance dépend ainsi de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

CHAPITRE VI.

L'APPLICABILITÉ DES SURFACES DÉVELOPPABLES.

46. Nous n'avons pas ici besoin de particulariser complètement le système de référence mobile attaché à la surface (S). Nous ne le ferons que dans la mesure où cela sera utile pour l'étude de l'applicabilité. Il est en effet possible, comme nous allons le voir, d'appliquer l'une sur l'autre deux surfaces développables quelconques.

Partons de deux surfaces développables (S) et (Σ). Nous supposons en principe le système de référence choisi, d'une manière déterminée, en chaque point de (S) et nous laissons pour le moment, au système de référence attaché à (Σ), tout l'arbitraire possible. La forme quadratique

$$\varphi = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23}$$

est ici un carré parfait et nous pouvons choisir le système de référence associé à (S) de manière à avoir

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_{13} = 0, \\ &\omega_{23} = \omega_2; \end{aligned}\right. \tag{88}$$

il sera toujours possible de choisir le système de référence associé à (Σ) de manière à avoir également

$$\left\{\begin{aligned} &\Omega_{13} = 0, \\ &\Omega_{23} = \Omega_2; \end{aligned}\right. \tag{88'}$$

mais nous continuerons, cette condition réalisée, à laisser à ce système de référence tout l'arbitraire possible.

Les équations (88) donnent

$$[\omega_2\omega_{12}] = 0,$$
$$-[\omega_1\omega_{12}] + [\omega_2(\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{22})] = 0,$$

et les équations (88′) donnent des formules analogues. Il en résulte, en particulier, que ω_{12} est linéaire en ω_2 et Ω_{12} linéaire en Ω_2; soit, par exemple,

$$\omega_{12} = a'\omega_2.$$

De cette relation, on tire

$$[\omega_2(da' - \omega_{10} + a' \overline{2\omega_{00} + \omega_{33} - \omega_{11} - 2\omega_{22}})] = 0,$$

ce qui montre que l'on peut supposer $a' = 0$. On peut donc choisir les deux systèmes de référence de manière à avoir

$$(89) \qquad \omega_{12} = 0,$$

$$(89') \qquad \Omega_{12} = 0,$$

et l'on aura alors

$$(90) \qquad [\omega_2 \omega_{10}] = 0, \qquad [\Omega_2 \Omega_{10}] = 0,$$

avec

$$(91) \qquad [\omega_2(\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{22})] = 0, \qquad [\Omega_2(\Omega_{00} + \Omega_{33} - 2\Omega_{22})] = 0.$$

Cela posé, supposons toujours le système de référence associé à (S) choisi d'une manière déterminée, mais sous la condition que l'on ait les relations (88) et (89), et le système de référence associé à (Σ) choisi de *la manière la plus générale possible* compatible avec les relations (88') et (89').

Les expressions Ω_{ij} seront, en dehors des relations (88') et (89'), liées par deux seules relations de la forme

$$\Omega_{10} = \alpha' \Omega_2, \qquad \Omega_{00} + \Omega_{33} - 2\Omega_{22} = \beta' \Omega_2,$$

tirées de (90) et (91); on aura, du reste, aussi

$$\omega_{10} = \alpha \omega_2, \qquad \omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{22} = \beta \omega_2.$$

47. Cela posé, si nous voulons établir entre les deux surfaces une correspondance ponctuelle réalisant l'application de (Σ) sur (S), nous aurons à déterminer les paramètres qui définissent le système de référence attaché à (Σ) par les équations de Pfaff :

$$(92) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_1 = \omega_1, & \Omega_2 = \omega_2, \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}, & \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}, \\ \multicolumn{2}{c}{\Omega_{21} = \omega_{21}.} \end{array} \right.$$

Ce système entraîne les équations quadratiques extérieures

$$(93)\quad \begin{cases} [\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20} + 2\,\overline{\alpha - \alpha'}\,\omega_1)] = 0, \\ [\omega_2(\Omega_{32} - 2\Omega_{20} - \omega_{32} + 2\,\omega_{20} + \overline{\alpha' - \alpha}\,\omega_1)] = 0, \\ [\omega_2(\Omega_{31} - \omega_{31})] - [\omega_1(\Omega_{20} - \omega_{20} + 2\,\overline{\alpha - \alpha'}\,\omega_1)] = 0, \end{cases}$$

où s'introduisent les trois expressions de Pfaff nouvelles :

$$\Omega_{20} - \omega_{20} + 2(\alpha - \alpha')\omega_1,$$
$$\Omega_{32} - 2\,\Omega_{20} - \omega_{32} + 2\,\omega_{20} + (\alpha' - \alpha)\omega_1, \qquad \Omega_{31} - \omega_{31}.$$

On voit immédiatement, d'après la forme des équations (93), que le système de Pfaff (92) est en involution et que sa solution générale dépend de trois fonctions arbitraires d'un argument.

Par conséquent, *deux surfaces développables sont toujours applicables l'une sur l'autre et la correspondance ponctuelle qui réalise l'application dépend de trois fonctions arbitraires d'un argument.*

48. Pour voir quelle est cette correspondance, remarquons d'abord que les équations (88) et (89) entraînent

$$dA_1 = \omega_{10}A + \omega_{11}A_1;$$

cela montre que le point A_1 décrit une *courbe* et que le point A est sur la tangente à cette courbe : c'est donc le point de contact de la génératrice de la surface avec son arête de rebroussement. Comme ce point A_1 est parfaitement déterminé *en position* dans le système de référence mobile, on voit que, dans les deux surfaces développables, *les arêtes de rebroussement se correspondent.*

Remarquons maintenant en second lieu que, si l'on se déplace sur une génératrice ($\omega_2 = 0$), les composantes

$$\Omega_{10} - \omega_{10}, \qquad \Omega_1 - \omega_1, \qquad \Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00}$$

du déplacement d'entraînement sont nulles; par suite, *la correspondance ponctuelle entre deux génératrices correspondantes des deux surfaces est projective.*

Ces deux remarques suffisent pour la résolution du problème. Soit, en effet, t le paramètre qui définit les génératrices, et, sur chaque génératrice, soit u un paramètre projectif devenant infini au point de contact de la génératrice avec l'arête de rebroussement. Soient de même t' et u' les coordonnées curvilignes définies d'une manière analogue sur la seconde surface. On aura

$$t' = f(t);$$

de plus, si t reste constant, u' sera une fonction homographique de u telle qu'à $u = \infty$ corresponde $u' = \infty$; on aura donc

$$u' = u\varphi(t) + \psi(t),$$

et, d'après l'indétermination de la correspondance, il faut que $f(t)$, $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ soient trois fonctions arbitraires de t.

On peut encore définir la correspondance *en faisant correspondre, suivant une loi arbitraire, les points de l'arête de rebroussement de* (Σ) *aux points de l'arête de rebroussement de* (S); *on peut alors faire correspondre à deux courbes* (C_1) *et* (C_2) *données sur* (S) *deux courbes arbitraires* (Γ_1) *et* (Γ_2) *tracées sur* (Σ). *Si* P *et* Q *sont deux points correspondants des deux arêtes de rebroussement, si les génératrices menées par ces deux points rencontrent respectivement les courbes* (C_1) *et* (C_2), (Γ_1) *et* (Γ_2) *en* P_1 *et* P_2, Q_1 *et* Q_2, *la relation entre deux points correspondants* M *et* N *des deux génératrices sera*

$$(\mathrm{M}\,\mathrm{P}\,\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_2) = (\mathrm{N}\,\mathrm{Q}\,\mathrm{Q}_1\,\mathrm{Q}_2).$$

Rien ne s'oppose, du reste, à ce qu'une des deux surfaces soit un cône, l'arête de rebroussement se réduisant au sommet du cône, les génératrices du cône correspondant suivant une loi arbitraire aux génératrices de l'autre surface.

Le plan.

49. Nous avons laissé de côté le cas du plan, que l'on peut regarder comme caractérisé par la propriété que la forme quadratique φ est identiquement nulle, ou encore par la relation

$$\omega_{13} = \omega_{23} = 0.$$

Cherchons quelle est la correspondance ponctuelle la plus générale réalisant l'application projective du second ordre d'un plan sur un autre plan. Remarquons pour cela que les équations

$$\begin{aligned} \Omega_{11} - \Omega_{00} &= \omega_{11} - \omega_{00}, \\ \Omega_{22} - \Omega_{00} &= \omega_{22} - \omega_{00}, \\ \Omega_{12} &= \omega_{12}, \\ \Omega_{21} &= \omega_{21} \end{aligned}$$

conduisent aux relations quadratiques extérieures

$$\begin{aligned} [\omega_1(\Omega_{10} - \omega_{10})] &= [\omega_2(\Omega_{10} - \omega_{10})] = 0, \\ [\omega_1(\Omega_{20} - \omega_{20})] &= [\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Omega_{10} &= \omega_{10}, \\ \Omega_{20} &= \omega_{20}. \end{aligned}$$

Dans le mouvement projectif d'entraînement du plan (Σ) qui réalise son application sur le plan (S), on voit que les huit composantes

$$\begin{gathered} \Omega_1 - \omega_1, \quad \Omega_2 - \omega_2, \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} - (\omega_{11} - \omega_{00}), \qquad \Omega_{22} - \Omega_{00} - (\omega_{22} - \omega_{00}), \\ \Omega_{12} - \omega_{12}, \quad \Omega_{21} - \omega_{21}, \\ \Omega_{10} - \omega_{10}, \quad \Omega_{20} - \omega_{20} \end{gathered}$$

sont toutes nulles; par suite, le plan (Σ) reste fixe; autrement dit, *la correspondance qui réalise l'application du second ordre de* (Σ) *sur* (S) *est projective*.

CHAPITRE VII.

L'APPLICABILITÉ DU SECOND ORDRE DES HYPERSURFACES DANS UN ESPACE PROJECTIF A $n \geqq 4$ DIMENSIONS.

L'indéformabilité des hypersurfaces non développables.

50. Nous allons montrer d'abord que si une hypersurface à $n - 1$ dimensions de l'espace à $n \geqq 4$ dimensions n'est pas développable, elle n'admet aucune déformation projective du second ordre.

Les équations fondamentales (9)

$$(9)\quad \begin{cases} \Omega_i = \omega_i & (i=1, \ldots, n-1), \\ \Omega_n = 0, & \\ \Omega_{in} = \omega_{in} & (i=1, \ldots, n-1), \\ \Omega_{ii} - \Omega_{00} = \omega_{ii} - \omega_{00} & (i=1, \ldots, n-1), \\ \Omega_{ij} = \omega_{ij} & (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n-1) \end{cases}$$

qui donnent les hypersurfaces (Σ) applicables sur une hypersurface donnée (S) conduisent en effet aux équations quadratiques extérieures

$$(94)\quad \begin{cases} [\omega_{in}(\Omega_{nn} - \Omega_{00} - \omega_{nn} + \omega_{00})] = 0, \\ -[\omega_i(\Omega_{i0} - \omega_{i0})] - \sum_{k=1}^{k=n-1} [\omega_k(\Omega_{k0} - \omega_{k0})] + [\omega_{in}(\Omega_{ni} - \omega_{ni})] = 0 \\ \qquad (i, j = 1, \ldots, n-1), \\ -[\omega_j(\Omega_{i0} - \omega_{i0})] + [\omega_{in}(\Omega_{nj} - \omega_{nj})] = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que la forme quadratique

$$\varphi = \omega_1\omega_{1n} + \omega_2\omega_{2n} + \ldots + \omega_{n-1}\omega_{n-1,n}$$

relative à l'hypersurface (S) a été ramenée à une somme de carrés, de telle sorte qu'on ait

$$\omega_{in} = \varepsilon_i\omega_i.$$

Les dernières équations (94) montrent alors que $\Omega_{i0} - \omega_{i0}$ ne peut dépendre que de ω_i

$$\Omega_{i0} - \omega_{i0} = u_i\omega_i,$$

et l'on a

$$\varepsilon_i[\omega_i(\Omega_{ni} - \omega_{ni})] = 0,$$
$$[\omega_i(u_i\omega_j + \varepsilon_i\overline{\Omega_{nj} - \omega_{nj}})] = 0.$$

Désignons par les lettres $i, j, \ldots$ ceux des indices $1, \ldots, n-1$ pour lesquels ε n'est pas nul, et par les lettres $\alpha, \beta, \ldots$ ceux pour lesquels ε est nul (s'il y en a). On voit tout de suite que, pour ces derniers indices, u_α est nul. On a de plus

$$\begin{aligned}
&[\omega_i(\Omega_{ni} - \omega_{ni})] &&= 0,\\
&\left[\omega_i\left(\Omega_{nj} - \omega_{nj} + \frac{u_i}{\varepsilon_i}\omega_j\right)\right] &&= 0,\\
&\left[\omega_i\left(\Omega_{n\alpha} - \omega_{n\alpha} + \frac{u_i}{\varepsilon_i}\omega_\alpha\right)\right] &&= 0.
\end{aligned}$$

Si trois au moins des coefficients ε_i ne sont pas nuls, on a

$$\Omega_{ni} - \omega_{ni} = -\frac{u_j}{\varepsilon_j}\omega_i = -\frac{u_k}{\varepsilon_k}\omega_i,$$

c'est-à-dire que tous les coefficients $\frac{u_i}{\varepsilon_i}$ sont égaux entre eux; mais en remplaçant B_n par $B_n + \frac{u_i}{\varepsilon_i}B_0$, ce qui est permis (nº 4), l'expression Ω_{i0} est diminuée de $u_i\omega_i$, ce qui montre qu'on peut réduire à zéro tous les coefficients u_i. Si deux seulement des coefficients ε ne sont pas nuls, il y en a un au moins qui est nul (à cause de $n - 1 \geqq 3$) et par suite on a

$$\Omega_{n\alpha} - \omega_{n\alpha} = -\frac{u_i}{\varepsilon_i}\omega_\alpha = -\frac{u_j}{\varepsilon_j}\omega_\alpha,$$

et l'on arrive à la même conclusion.

Donc *si deux au moins des coefficients ε sont différents de zéro, c'est-à-dire si la forme φ est réductible à une somme de deux ou de plus de deux carrés indépendants, on peut supposer choisi le système de référence mobile associé à* (Σ) *de manière à adjoindre aux équations* (9) *les suivantes :*

$$(95)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Omega_{i0} = \omega_{i0} \qquad (i = 1, \ldots, n-1),\\ &\Omega_{ni} = \omega_{ni} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)\end{aligned}\right.$$

et, aussi, d'après les premières équations (94),

$$(96)\qquad \Omega_{nn} - \Omega_{00} = \omega_{nn} - \omega_{00}.$$

Les équations précédentes entraînent alors l'équation quadratique extérieure

$$[\omega_i(\Omega_{n0} - \omega_{n0})] = 0$$

qui entraîne elle-même

$$(97)\qquad \Omega_{n0} = \omega_{n0}.$$

Les composantes du déplacement infiniment petit des systèmes mobiles attachés aux deux hypersurfaces (S) et (Σ) étant les mêmes, *ces deux hypersurfaces ne diffèrent l'une de l'autre que par leur position dans l'espace*. Autrement dit, *une hypersurface non développable n'admet pas de déformation du second ordre dans un espace projectif à $n \geqq 4$ dimensions.*

Nous avons admis implicitement que la propriété de la forme quadratique φ d'être un carré parfait caractérise les hypersurfaces développables, définies comme enveloppes d'une famille d'hyperplans dépendant d'un paramètre. C'est qu'en effet si l'on considère l'hyperplan tangent $[AA_1 \ldots A_{n-1}]$, défini analytiquement par les déterminants formés avec les coordonnées des points $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$, on a

$$d[AA_1 \ldots A_{n-1}] = \omega_{1n}[AA_nA_2 \ldots A_{n-1}] + \ldots + \omega_{n-1,n}[AA_1 \ldots A_{n-2}A_n].$$

Par suite, le nombre des paramètres dont dépend l'hyperplan tangent est le nombre de celles des expressions ω_{in} qui sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire le nombre des carrés indépendants dans lesquels peut se décomposer la forme quadratique φ.

La déformation des hypersurfaces développables dans l'espace à quatre dimensions.

51. Nous allons maintenant examiner en détail le cas des hypersurfaces développables, et nous nous bornerons à traiter le problème pour l'espace à quatre dimensions.

Voici à quel point de vue nous allons nous placer. Partons de deux hypersurfaces développables *données* (S) et (Σ); nous allons :

1° Chercher à reconnaître si elles sont applicables l'une sur l'autre;
2° Dans l'affirmative, déterminer la correspondance ponctuelle la plus générale qui réalise l'application.

La forme quadratique φ étant, pour chacune des hypersurfaces, un carré parfait, on peut déjà choisir les systèmes de référence mobiles de manière qu'on ait

$$\varphi = \omega_1\omega_{14} + \omega_2\omega_{24} + \omega_3\omega_{34} = \omega_3^2,$$

c'est-à-dire

$$
(98) \qquad \begin{cases} \omega_{14} = 0, \\ \omega_{24} = 0, \\ \omega_{34} = \omega_3. \end{cases}
$$

Si ce choix est fait pour (S), le système de référence correspondant associé à (Σ) devra satisfaire aux conditions analogues

$$
(98') \qquad \begin{cases} \Omega_{14} = 0, \\ \Omega_{24} = 0, \\ \Omega_{34} = \Omega_3, \end{cases}
$$

ce qui est toujours possible, l'hypersurface (Σ) étant développable.

Les équations (98) conduisent aux équations quadratiques extérieures

$$
(99) \qquad \begin{cases} [\omega_3 \omega_{13}] = 0, \\ [\omega_3 \omega_{23}] = 0, \\ [\omega_3(\omega_{44} + \omega_{00} - 2\omega_{33})] - [\omega_1 \omega_{13}] - [\omega_2 \omega_{23}] = 0. \end{cases}
$$

On aura donc, en particulier, des relations de la forme

$$
(100) \qquad \begin{cases} \omega_{13} = a\,\omega_3, \\ \omega_{23} = b\,\omega_3 \end{cases}
$$

et des relations analogues pour (Σ). Si (S) et (Σ) sont applicables l'une sur l'autre et si l'on a choisi les systèmes de référence mobiles correspondants, les coefficients a et b seront les mêmes pour les deux hypersurfaces en deux points correspondants.

Or les équations (99) conduisent aux équations

$$
\begin{gathered}
[\omega_3(da - \omega_{10} + a\overline{\omega_{00} - \omega_{11}} - b\,\omega_{12} + a^2\omega_1 + ab\,\omega_2)] = 0, \\
[\omega_3(db - \omega_{20} - a\,\omega_{21} + b\,\overline{\omega_{00} - \omega_{22}} + ab\,\omega_1 + b^2\omega_2)] = 0,
\end{gathered}
$$

qui montrent que, pour toute variation du système de référence mobile, on a

$$
\begin{aligned}
\delta a &= e_{10} + (e_{11} - e_{00})a + e_{12}b, \\
\delta b &= e_{20} + e_{21}a + (e_{22} - e_{00})b;
\end{aligned}
$$

autrement dit, les coefficients a et b subissent une substitution linéaire (non homogène) arbitraire. On peut donc supposer $a = b = 0$, et cela pour chacune des deux hypersurfaces (S) et (Σ). On aura, par suite,

$$(101) \qquad \begin{cases} \omega_{13} = 0, \\ \omega_{23} = 0; \end{cases}$$

$$(101') \qquad \begin{cases} \Omega_{13} = 0, \\ \Omega_{23} = 0, \end{cases}$$

avec

$$(102) \qquad \begin{cases} [\omega_3(\omega_{44} + \omega_{00} - 2\omega_{33})] = 0, \\ [\omega_3\omega_{10}] = 0, \\ [\omega_3\omega_{20}] = 0; \end{cases}$$

$$(102') \qquad \begin{cases} [\Omega_3(\Omega_{44} + \Omega_{00} - 2\Omega_{33})] = 0, \\ [\Omega_3\Omega_{10}] = 0, \\ [\Omega_3\Omega_{20}] = 0. \end{cases}$$

52. Cela posé, si l'on suppose choisi le système de référence associé à (S) [de manière toutefois à satisfaire aux relations (98) et (101)], la détermination du système de référence correspondant associé à (Σ) [en laissant à ce système tout l'arbitraire compatible avec les relations (98′) et (101′)] revient à l'intégration du système de Pfaff :

$$(103) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = \omega_1, \quad \Omega_2 = \omega_2, \quad \Omega_3 = \omega_3; \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}, \\ \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}, \\ \Omega_{33} - \Omega_{00} = \omega_{33} - \omega_{00}; \\ \Omega_{12} = \omega_{12}, \quad \Omega_{21} = \omega_{21}; \\ \Omega_{31} = \omega_{31}, \quad \Omega_{32} = \omega_{32}. \end{cases}$$

Ce système conduit aux équations quadratiques extérieures

$$(104) \qquad \begin{cases} 2[\omega_1(\Omega_{10} - \omega_{10})] + [\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] + [\omega_3(\Omega_{30} - \omega_{30})] = 0, \\ [\omega_1(\Omega_{10} - \omega_{10})] + 2[\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] + [\omega_3(\Omega_{30} - \omega_{30})] = 0, \\ [\omega_1(\Omega_{10} - \omega_{10})] + [\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] + [\omega_3(2\Omega_{30} - \Omega_{43} - 2\omega_{30} + \omega_{43})] = 0, \\ [\omega_2(\Omega_{10} - \omega_{10})] = 0, \\ [\omega_1(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0, \\ [\omega_3(\Omega_{41} - \omega_{41})] - [\omega_1(\Omega_{30} - \omega_{30})] = 0, \\ [\omega_3(\Omega_{42} - \omega_{42})] - [\omega_2(\Omega_{30} - \omega_{30})] = 0. \end{cases}$$

Les relations (104) montrent qu'on doit avoir

$$(105)\qquad \begin{cases} \Omega_{10} = \omega_{10}, \\ \Omega_{20} = \omega_{20}. \end{cases}$$

Or les deux dernières relations (102) montrent qu'on a

$$(106)\qquad \begin{cases} \omega_{10} = a'\omega_3, \\ \omega_{20} = b'\omega_3, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} &[\omega_3(da' + a'\overline{2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{33}} - b'\omega_{12})] = 0, \\ &[\omega_3(db' - a'\omega_{21} + b'\overline{2\omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{33}})] = 0. \end{aligned}$$

Les coefficients a' et b' subissent donc, pour toute variation du système de référence, une transformation définie par

$$\begin{aligned} \delta a' &= (e_{11} + e_{33} - 2e_{00})a' + e_{12}b', \\ \delta b' &= e_{21}a' + (e_{22} + e_{33} - 2e_{00})b', \end{aligned}$$

c'est-à-dire une substitution linéaire et homogène arbitraire. Il y a donc lieu de distinguer plusieurs cas.

53. *Les hypersurfaces enveloppes d'un hyperplan contenant une droite fixe.* — Supposons d'abord

$$(107)\qquad a' = b' = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \omega_{10} = \omega_{20} = 0.$$

Si ces relations ont lieu pour l'hypersurface (S), elles devront avoir lieu, en vertu de (105), pour l'hypersurface applicable (Σ). Elles sont caractérisées géométriquement par ce fait que *l'hyperplan générateur* $[AA_1A_2A_3]$ *passe par une droite fixe.* En effet, les relations (98), (101), (107) entraînent

$$\begin{aligned} dA_1 &= \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2, \\ dA_2 &= \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2, \end{aligned}$$

ce qui montre que la droite $[A_1A_2]$ reste fixe en position. Réciproquement, si l'hyperplan $[AA_1A_2A_3]$ passe par une droite fixe, cette droite fixe sera contenue dans le plan caractéristique de cet hyperplan : or on a

$$\begin{aligned} d[AA_1A_2A_3] &= \omega_{14}[AA_4A_2A_3] + \omega_{24}[AA_1A_4A_3] + \omega_{34}[AA_1A_2A_4] \\ &= \omega_3\,[AA_1A_2A_4]. \end{aligned}$$

Le plan caractéristique cherché est donc $[AA_1A_2]$. D'autre part, la droite caractéristique de ce plan s'obtient en calculant

$$d[AA_1A_2] = \omega_3[A_1A_2A_3];$$

c'est donc la droite $[A_1A_2]$. Si cette dernière droite est fixe, c'est que dA_1 et dA_2 ne dépendent que de A_1 et A_2, c'est-à-dire qu'on a les relations (107).

Dans ces conditions, les équations (103), qui définissent la correspondance, si elle existe, qui réalise l'application de (S) sur (Σ), conduisent aux seules équations quadratiques extérieures

$$(108)\quad \left\{\begin{aligned} &[\omega_3(\Omega_{30}-\omega_{30})] = 0,\\ &[\omega_3(\Omega_{43}-\omega_{43})] = 0,\\ &[\omega_3(\Omega_{41}-\omega_{41})] - [\omega_1(\Omega_{30}-\omega_{30})] = 0,\\ &[\omega_3(\Omega_{42}-\omega_{42})] - [\omega_2(\Omega_{30}-\omega_{30})] = 0.\end{aligned}\right.$$

Par suite, *deux hypersurfaces dont chacune est l'enveloppe d'un hyperplan dépendant d'un paramètre et contenant une droite fixe sont applicables du second ordre l'une sur l'autre et la correspondance qui réalise l'application dépend de quatre fonctions arbitraires d'un argument.*

En ce qui concerne cette correspondance, on peut déjà remarquer que si l'on se déplace sur un des plans générateurs $[AA_1A_2]$, le mouvement instantané de (Σ) par rapport à (S) est nul grâce aux formules (103) et (105) : la correspondance ponctuelle entre deux plans générateurs est donc projective. On démontre sans difficulté que si l'hypersurface (S) est engendrée par le point variable

$$A = P(t) + uC_1 + vC_2,$$

où C_1 et C_2 sont deux points fixes, $P(t)$ un point mobile décrivant une courbe plane, et si l'hypersurface (Σ) est engendrée de même par le point mobile

$$B = Q(t') + u'D_1 + v'D_2,$$

les formules qui réalisent l'application des deux hypersurfaces sont

$$\begin{aligned} t' &= f(t),\\ u' &= (a\,u + b\,v)\chi(t) + \varphi(t),\\ v' &= (a'u + b'v)\chi(t) + \psi(t),\end{aligned}$$

avec quatre fonctions arbitraires $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$, et quatre constantes a, b, a', b'.

54. Revenons aux formules (106) et supposons maintenant les coefficients a' et b' non nuls tous les deux. On pourra alors supposer ces coefficients réduits à o et 1, et l'on aura

$$
(108) \qquad \begin{cases} \omega_{10} = 0, \\ \omega_{20} = \omega_3, \end{cases}
$$

avec les relations analogues

$$
(108') \qquad \begin{cases} \Omega_{10} = 0, \\ \Omega_{20} = \Omega_3. \end{cases}
$$

On en déduit les relations quadratiques extérieures

$$
[\omega_3 \omega_{12}] = 0,
$$
$$
[\omega_3(2\omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{33})] = 0
$$

et

$$
[\Omega_3 \Omega_{12}] = 0,
$$
$$
[\Omega_3(2\Omega_{00} - \Omega_{22} - \Omega_{33})] = 0.
$$

On pourra donc poser

$$
\omega_{12} = a'' \omega_3,
$$
$$
2\omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{33} = b'' \omega_3,
$$

avec les relations

$$
[\omega_3(da'' + a'' \overline{\omega_{00} + \omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{33}})] = 0,
$$
$$
[\omega_3(db'' - \omega_{43} + 3\omega_{30} - 3\omega_2 + a'' \omega_{21} + b'' \overline{\omega_{00} - \omega_{33}})] = 0.
$$

On pourra toujours supposer b'' nul; quant à a'', on pourra le supposer égal à o ou à 1. Il y a donc une nouvelle classification à faire.

55. *Les hypersurfaces développables dont le plan générateur passe par un point fixe.* — Supposons d'abord a'' nul; si cette propriété appartient à (S), elle devra appartenir à (Σ). Elle exprime géométriquement que le plan générateur $[AA_1A_2]$ passe par un point fixe.

En effet, si a'' est nul, c'est-à-dire si l'on a

$$
\omega_{12} = 0,
$$

on a

$$
dA_1 = \omega_{11} A_1,
$$

et, par suite, le point A_1 est fixe. Réciproquement si le plan $[AA_1A_2]$ passe par un point fixe, il en est de même de sa caractéristique $[A_1A_2]$. Or on a, d'après (108),

$$d[A_1A_2] = (\omega_{11} + \omega_{22})[A_1A_2] + \omega_3[A_1A];$$

le point caractéristique de la droite $[A_1A_2]$ est donc A_1. Si ce point est fixe, c'est qu'on a $\omega_{12} = 0$.

Cela posé, supposons qu'on ait

$$(109)\qquad \begin{cases} \omega_{12} = 0, \\ 2\omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{33} = 0; \end{cases}$$

$$(109')\qquad \begin{cases} \Omega_{12} = 0, \\ 2\Omega_{00} - \Omega_{22} - \Omega_{33} = 0 \end{cases}$$

avec

$$[\omega_3(\omega_{43} - 3\,\omega_{20} + 3\,\omega_2)] = 0,$$
$$[\Omega_3(\Omega_{43} - 3\Omega_{30} + 3\Omega_2)] = 0.$$

La correspondance, si elle existe, qui réalise l'application de (Σ) sur (S) est donnée par l'intégration du système de Pfaff

$$(110)\qquad \begin{cases} \Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_3 = \omega_3, \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}, \qquad \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}, \\ \Omega_{21} = \omega_{21}, \qquad \Omega_{31} = \omega_{31}, \qquad \Omega_{32} = \omega_{32}. \end{cases}$$

Il conduit aux équations quadratiques extérieures

$$(111)\qquad \begin{cases} [\omega_3(\Omega_{30} - \omega_{30})] = 0, \\ [\omega_3(\Omega_{41} - \omega_{41})] - [\omega_1(\Omega_{30} - \omega_{30})] = 0, \\ [\omega_3(\Omega_{42} - \omega_{42})] - [\omega_2(\Omega_{30} - \omega_{30})] = 0. \end{cases}$$

Par suite, *deux hypersurfaces développables, dont le plan générateur passe par un point fixe (hypercônes), sont toujours applicables et la correspondance ponctuelle qui réalise l'application dépend de trois fonctions arbitraires d'un argument.*

La correspondance est analogue à celle qui réalise l'application de deux surfaces développables de l'espace à trois dimensions, qui peuvent du reste être regardées comme les projections des deux hypersurfaces données sur deux hyperplans fixes.

56. *Les hypersurfaces développables à arête de rebroussement proprement dite.* — Venons enfin au cas général. On aura les formules

(112)
$$\begin{cases} \omega_{12} = \omega_3, \\ 2\omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{33} = 0; \end{cases}$$

(112′)
$$\begin{cases} \Omega_{12} = \Omega_3, \\ 2\Omega_{00} - \Omega_{22} - \Omega_{33} = 0 \end{cases}$$

avec

(113)
$$\begin{cases} [\omega_3(\omega_{00} + \omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{33})] = 0, \\ [\omega_3(\omega_{43} - 3\omega_{30} - \omega_{21} + 3\omega_2)] = 0 \end{cases}$$

et

(113′)
$$\begin{cases} [\Omega_3(\Omega_{00} + \Omega_{22} - \Omega_{11} - \Omega_{33})] = 0, \\ [\Omega_3(\Omega_{43} - 3\Omega_{30} - \Omega_{21} + 3\Omega_2)] = 0. \end{cases}$$

On tire en particulier des formules (113)

$$\omega_{00} + \omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{33} = a''' \omega_3$$

avec

$$[\omega_3(da''' - \omega_{43} + 2\omega_{30} - 2\omega_{21} + a'''\,\overline{\omega_{00} - \omega_{33}})] = 0$$

ce qui, en tenant compte de (113), donne

$$[\omega_3(da''' - \omega_{30} - 3\omega_{21} + 3\omega_2 + a'''\,\overline{\omega_{00} - \omega_{33}})] = 0.$$

On peut donc supposer $a''' = 0$. On aura par suite

(114)
$$\omega_{00} + \omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{33} = 0,$$

(114′)
$$\Omega_{00} + \Omega_{22} - \Omega_{11} - \Omega_{33} = 0$$

avec

(115)
$$[\omega_3(\omega_{30} + 3\omega_{21} - 3\omega_2)] = 0,$$

(115′)
$$[\Omega_3(\Omega_{30} + 3\Omega_{21} - 3\Omega_2)] = 0.$$

Le système de Pfaff qui donne, si elle existe, la correspondance ponctuelle qui réalise l'application de deux hypersurfaces développables données (S) et (Σ) sera

(116)
$$\begin{cases} \Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_3 = \omega_3, \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}, \\ \Omega_{21} = \omega_{21}, \\ \Omega_{31} = \omega_{31}, \qquad \Omega_{32} = \omega_{32}. \end{cases}$$

Il conduit, en tenant compte de (115) et (115′), aux équations quadratiques extérieures

$$
(117) \qquad \begin{cases} [\omega_3(\Omega_{41}-\omega_{41})]=0, \\ [\omega_3(\Omega_{42}-\omega_{42})]=0. \end{cases}
$$

Par suite, *deux hypersurfaces quelconques* (S) *et* (Σ) *sont toujours applicables et la correspondance ponctuelle qui réalise l'application dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

57. On peut, par un calcul que nous omettons, déterminer effectivement la correspondance qui réalise l'application. Supposons que l'arête de rebroussement de (S) soit engendrée par le point mobile $H(t)$, le facteur arbitraire qui entre dans les coordonnées projectives de ce point étant choisi de telle sorte que le déterminant $[HH'H''H'''H^{\text{iv}}]$ soit égal à l'unité, et soit

$$
A = H''(t) + uH'(t) + vH(t)
$$

le point qui engendre l'hypersurface (S). Soit de même

$$
B = K''(t') + u'K'(t') + v'K(t')
$$

le point qui engendre (Σ), en supposant $[KK'K''K'''K^{\text{iv}}]=1$. La correspondance qui réalise l'application des deux hypersurfaces est définie par les formules

$$
(118) \qquad \begin{cases} t' = f(t), \\ u' = \dfrac{u}{f'(t)} + \varphi(t), \\ v' = \dfrac{v}{f'^2(t)} + \dfrac{1}{2}u\left[\dfrac{\varphi(t)}{f'(t)} - \dfrac{f''(t)}{f'^3(t)}\right] \\ \qquad + \dfrac{1}{4}\varphi^2(t) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi'(t)}{f'(t)} - \dfrac{f'''(t)}{2f'^3(t)} + \dfrac{3f''^2(t)}{4f'^4(t)}, \end{cases}
$$

où $f(t)$ et $\varphi(t)$ désignent deux fonctions arbitraires de t. On constate, ce qu'on pouvait prévoir *a priori*, que la correspondance ponctuelle entre deux plans générateurs correspondants est projective.

On peut toujours en particulier réaliser une application de (Σ) sur (S) telle qu'une courbe (Γ) de (Σ) vienne coïncider avec une courbe (C) de (S). La courbe (C) est en effet déterminée par deux fonctions u et v de t, la courbe (Γ) par deux fonctions u' et v' de t'. Si alors on pose

$$2v - \frac{du}{dt} - \frac{1}{2}u^2 = \mathrm{F}(t), \qquad 2v' - \frac{du'}{dt'} - \frac{1}{2}u'^2 = \Phi(t'),$$

la fonction $t' = f(t)$ est donnée par l'équation différentielle du troisième ordre

$$\frac{f'f''' - \frac{3}{2}f''^2}{f'^2} + f'^2\,\Phi(f) = \mathrm{F}(t),$$

et la fonction $\varphi(t)$ par l'équation

$$\varphi(t) = u' - \frac{u}{f'(t)}.$$

La forme de l'équation différentielle en $f(t)$ montre que, les courbes (C) et (Γ) étant choisies, on peut définir paramétriquement les arêtes de rebroussement des deux hypersurfaces de manière que la réalisation la plus générale de l'application cherchée soit obtenue en prenant pour t' une fonction homographique arbitraire de t.