HENRI LEBESGUE

Sur une définition due à M. Borel (lettre à M. le Directeur des Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 37 (1920), p. 255-257

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1920_3_37__255_0>

SUR

UNE DÉFINITION DUE A M. BOREL

(Lettre à M. le Directeur des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*);

PAR M. H. LEBESGUE.

J'ai délimité récemment (¹) la classe des fonctions auxquelles s'applique une définition de l'intégrale due à M. Borel; permettez-moi de défendre ce résultat mathématique qui serait mis en défaut par un exemple cité par M. Borel (²).

La définition que j'ai étudiée est extraite, je l'ai dit, du Mémoire « *Le calcul des intégrales définies* » (³); l'exemple que cite M. Borel est relatif à une fonction *à laquelle ne s'applique pas la définition de ce Mémoire* et, comme M. Borel ne relève d'ailleurs aucune erreur dans mes raisonnements, *mes conclusions subsistent entières.*

Prétendre que la définition du Mémoire s'applique à l'exemple cité serait prétendre que le procédé de construction de l'intégrale doit satisfaire, en plus des conditions énoncées dans le Mémoire, à d'autres auxquelles il n'est fait là *aucune* allusion et dont on ne peut avoir idée qu'en se rapportant à une Note antérieure (⁴) qui n'est, à *aucun* moment, citée dans le Mémoire *développé*. Et ce serait se mettre en contradiction presque formelle avec les termes du Mémoire : M. Borel rappelle la définition classique pour le cas où $f(x)$ a un seul infini et il conclut : « L'intégrale existe, par définition, lorsque les limites

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. XXXV, 1918.

(²) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. XXXVI, 1919 (*voir* p. 72).

(³) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6ᵉ série, t. VIII, 1912.

(⁴) *Comptes rendus*, t. 150, 1910, p. 508.

existent. J'ai proposé de remplacer la définition par la suivante... ; supposons qu'on puisse déterminer dans le champ d'intégration une infinité énumérable de points $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ayant la propriété suivante : si l'on entoure le point A_n d'un intervalle d'exclusion B_nC_n, tel que la série ΣB_nC_n soit convergente et de somme ε, les sommes de Riemann généralisées tendent vers une limite, quels que soient les intervalles, et cette limite tend elle-même vers une limite lorsque ε tend vers zéro; cette dernière limite est, par définition, l'intégrale... » (1). Or, il faudrait admettre maintenant que l'intégrale existe même quand n'existent pas les limites précitées.

Je le répète, mes conclusions subsistent; mais je vais à présent examiner la définition de la Note invoquée. En voyant qu'il n'y était fait aucune allusion dans le Mémoire développé, j'avais cru que M. Borel l'abandonnait et je m'étais abstenu d'en parler. Aujourd'hui, je me vois contraint de dire que cette définition est inexistante parce qu'elle fait appel à un procédé opératoire tellement imprécis que, avec lui, on peut obtenir pour l'intégrale tel nombre que l'on veut, tout en prétendant l'avoir appliqué correctement (2). Cette imprécision ne disparaît pas parce que M. Borel a dit, à l'occasion de l'exemple qu'il rappelle, pour telle fonction particulière j'opère de telle manière; cela ne transforme pas son aperçu en une définition. A moins que l'on ne confonde imprécision et généralité, généralité « apparente » en ce cas, — à moins que l'on ne prétende que j'ai eu tort de donner des définitions précises et que j'aurais dû me borner à écrire : « Étant donnée une fonction $f(x)$ dans (a, b), j'appelle intégrale de $f(x)$ dans (a, b) un nombre que je lui attache *par un procédé convenable* », sans rien dire de plus sur ce procédé, — on ne peut admettre que ce soit en pensant à sa Note que M. Borel a écrit, *au présent*, « la théorie ainsi constituée est plus générale que celle de M. Lebesgue... ».

Lorsque, convenablement précisée, la définition de la Note existera,

---

(1) Lire le Mémoire de M. Borel, de la page 200 à la page 202.

(2) Dans une discussion à laquelle M. Borel fait allusion, page 77, j'objectais oralement à M. Hadamard qu'on ne peut considérer comme une définition une phrase qui ne caractérise pas le prétendu défini. M. Borel avait goûté cette objection assez pour la signaler dans une de ses publications; mais, maintenant, M. Borel déclare que mes idées, *à moi*, ont évolué et se sont rapprochées de celles de M. Hadamard?

il sera temps d'examiner sa généralité; mais, dès maintenant, je puis affirmer qu'*elle ne sera jamais plus générale que la mienne*. J'ai en effet fait remarquer, au début du paragraphe 11 de mon Mémoire, que, du seul fait de l'emploi des sommes Riemanniennes, les procédés de M. Borel ne lui permettront jamais d'atteindre même toutes les fonctions sommables *bornées*, à plus forte raison toutes les fonctions sommables. Il est vrai qu'on pourrait à la fois compléter la définition actuelle et modifier ce qu'elle contient déjà; seulement, nul ne doute que si l'on change tout....

Me bornant strictement à me défendre, je proteste contre l'affirmation qu'il m'« arrive peut-être plus fréquemment qu'à d'autres d'avoir à produire des réclamations de priorité »; affirmation qui me serait d'autant plus défavorable que M. Borel a eu soin de dire que, lui, il ne s'occupe jamais de questions de priorité [1]. Dans ma carrière j'ai formulé *deux* réclamations en tout, y compris celle relative de M. Borel; je précise qu'il s'agit de réclamations formulées de manière quelconque, par publication, par lettre ou oralement à cause des souvenirs invoqués par M. Borel, page 90. Page 84, M. Borel parle aussi de souvenirs; qu'il me suffise de dire que je discuterai toute réclamation de priorité qu'on voudra bien formuler, même basée sur des souvenirs, et je précise l'un de ces souvenirs. Page 89, M. Borel réclame l'expression *faite sur mesure;* je l'ai employée à maintes reprises, dans mon cours de 1902-1903, — que M. Borel m'a fait l'honneur de suivre — en même temps que l'expression *presque partout* qui m'a, non pas comme le dit M. Borel, « permis de donner une forme plus maniable à de nombreux énoncés », mais servi à formuler, et pour la première fois, des résultats qui m'étaient dus et d'ailleurs d'un type tout nouveau; ce qui n'est pas la même chose.

---

(1) *Voir* pages 71 et 91 du travail de M. Borel.