GASTON JULIA

Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes (deuxième mémoire)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 37 (1920), p. 165-218
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1920_3_37__165_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS NOUVELLES

DES

FONCTIONS ENTIÈRES OU MÉROMORPHES[1]

(DEUXIÈME MÉMOIRE);

PAR M. GASTON JULIA.

Exposé succinct.

1. J'ai étudié dans un premier Mémoire (*Annales de l'École Normale supérieure*, avril 1919, p. 93-125) l'allure d'une fonction entière ou méromorphe au voisinage de l'infini, quand on chemine sur des *courbes semblables à une courbe donnée aboutissant à l'infini*, et obtenu ainsi des propositions nouvelles qui précisent le théorème classique de M. Picard. Dans ce second Mémoire, on s'approchera du point à l'infini, suivant un *mode discontinu régulier* en considérant, à partir de tout point z_0 du plan, les points successifs $z_0\sigma$, $z_0\sigma^2$, ..., $z_0\sigma^n$, ..., où σ est un nombre complexe de module > 1 et, par ailleurs, quelconque. Pour étudier l'allure d'une fonction entière ou méromorphe, lorsqu'on approche ainsi de l'infini, on continuera d'appliquer la méthode des familles normales de fonctions analytiques, qui a servi au premier Mémoire. Il arrivera souvent que les raisonnements faits au cours de ce premier Mémoire pourront s'appliquer avec des modifications minimes aux questions qui vont nous occuper: dans ces cas-là, on se contentera de renvoyer le lecteur au premier Mémoire,

(1) Le lecteur reconnaîtra aisément que les démonstrations du présent Mémoire s'appliquent aussi bien aux fonctions entières et méromorphes qu'aux *fonctions analytiques uniformes admettant un point singulier essentiel isolé (qui peut être limite de pôles), lorsqu'on suppose ce point singulier essentiel à l'infini.* On a choisi le vocable : *fonction entière ou méromorphe* pour la brièveté de l'exposition.

en y joignant de brèves indications [1] : on insistera davantage sur les particularités de raisonnement propres au cas actuel.

2. Pour les *fonctions entières les plus générales*, comme pour les *fonctions méromorphes douées d'une valeur asymptotique* au moins, on établira, quel que soit le nombre σ $[|\sigma| > 1]$, l'existence d'un ensemble de points $\mathcal{E}_\sigma$ jouissant de la propriété fondamentale suivante :

z_0 étant un point quelconque de $\mathcal{E}_\sigma$, et $\mathcal{D}_0$ une aire arbitrairement petite entourant ce point, dans l'ensemble des aires $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_0\sigma$, $\mathcal{D}_0\sigma^2$, ..., $\mathcal{D}_0\sigma^n$, ... la fonction $f(z)$ étudiée prend toute valeur finie sauf une au plus si elle est entière, et, si elle est méromorphe, toute valeur finie ou infinie, sauf deux au plus (dont l'une peut être ∞).

On étudiera ensuite quelques propriétés de cet ensemble $\mathcal{E}_\sigma$, et notamment sa structure qui dépend des propriétés de la fonction et du nombre σ considérés.

Puis on examinera les fonctions méromorphes sans valeur asymptotique, pour en donner de nouvelles propriétés voisines de la précédente.

Enfin, dans un dernier Chapitre, on étudiera d'autres modes réguliers d'approximation, et notamment par les sommets d'un réseau de parallélogrammes

$$z_0 + p\omega_1 + q\omega_2 \qquad (p, q = \pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm \infty).$$

Ces résultats se trouvent brièvement exposés dans plusieurs Notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (de Paris), t. 168, p. 599, 718, 882, 990.

CHAPITRE PREMIER.

LES FONCTIONS ENTIÈRES GÉNÉRALES.

I. — Existence de l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$.

3. A partir de toute fonction entière $f(z)$, étant donné un nombre complexe σ de module > 1 et, par ailleurs, quelconque, on peut

[1] Pour éviter des longueurs, je désignerai le premier Mémoire par la notation abrégée M_1.

former une famille infinie de fonctions $f_n(z)$, en posant

$$f_n(z) = f(z\sigma^n) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty);$$

ce sont des fonctions entières. Lorsque z décrit une aire Δ du plan, les points $z\sigma$, $z\sigma^2$, ..., $z\sigma^n$, ... décrivent des aires semblables $\Delta\sigma$, $\Delta\sigma^2$, ..., $\Delta\sigma^n$, ..., et l'ensemble des valeurs prises par $f(z)$ dans l'aire $\Delta\sigma^n$ est identique à l'ensemble des valeurs prises par $f_n(z)$ dans l'aire Δ. L'étude des valeurs de $f(z)$ dans la suite des aires Δ, $\Delta\sigma$, ... revient à l'étude des valeurs des $f_n(z)$ dans Δ, pour laquelle on fera intervenir la notion de famille normale (1).

4. Par analogie avec ce qui a été fait précédemment (M_1, n° 13), on fera décrire à z l'aire d'une couronne comprise entre deux courbes C_1, C_2 entourant l'origine : ces deux courbes peuvent être quelconques, et ce n'est pas diminuer la généralité que de les supposer circulaires, de centre O. $z\sigma^n$ décrit la couronne $[C_1\sigma^n, C_2\sigma^n]$, et lorsque $C_2 = C_1\sigma$, c'est-à-dire lorsque C_2 se déduit de C_1 par la substitution $z_2 = z_1\sigma$, il est clair que l'ensemble des aires $(C_1\sigma^n, C_2\sigma^n)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ recouvre toute la partie du plan z extérieure à la courbe C_2. Dans cette partie du plan, $f(z)$ prend toute valeur finie, sauf peut-être une seule, d'après le théorème de M. Picard : donc les $f_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ prennent, dans la couronne $(C_1, C_1\sigma)$, toute valeur finie, sauf peut-être une seule.

On peut aller plus loin et démontrer qu'*il est impossible que dans toute la couronne* $(C_1, C_1\sigma)$ *la famille des* f_n *soit normale*. J'ai fait remarquer [M_1, n^os 14 et 15] que cette propriété entraînait le théorème de M. Picard, mais comportait une précision de plus, d'où résultent les propriétés qui vont nous occuper ici.

5. Considérant d'abord une couronne quelconque (C_1, C_2) entourant l'origine, il peut arriver (2) [et l'on verra plus loin (n° 13) des

(1) Je renvoie le lecteur à mon premier Mémoire pour tout ce qui concerne la bibliographie des familles normales dont on aura besoin ici.

(2) C'est en cela surtout que notre présente analyse va se distinguer de celle qui fut faite dans le premier Mémoire, relativement à l'approximation continue du point à l'infini.

exemples] que si la couronne est bien choisie, la famille des $f_n(z)$ soit normale dans toute la couronne. Il est cependant impossible qu'une fonction limite de cette suite soit une constante finie ou une fonction analytique qui serait alors holomorphe et finie dans toute la couronne (C_1, C_2) [M_1, n° 16]. Toute fonction limite de la suite des $f_n(z)$ est donc identique à la constante infinie. On en déduit immédiatement [*voir* M_1, n° 16] que $f_n(z)$ doit tendre *uniformément vers l'infini* dans toute la couronne (C_1, C_2) quand n tend vers l'infini. On montrera effectivement plus loin qu'il existe des fonctions entières, tendant uniformément vers l'infini, quand z décrit des couronnes convenables $(C_1\sigma^n, C_2\sigma^n)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$.

6. Mais si $C_2 = C_1\sigma$, comme l'ensemble des couronnes $(C_1\sigma^n, C_2\sigma^n)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ recouvre alors toute la partie du plan extérieure à la courbe C_2, la famille des $f_n(z)$ ne peut être supposée normale dans $(C_1 C_2)$ sans que l'on se heurte à une impossibilité. Les valeurs que $f_n(z)$ prend dans (C_1, C_2) sont celles de $f(z)$ dans $(C_1\sigma^n, C_2\sigma^n)$. Si la famille des f_n était normale dans (C_1, C_2), f_n tendrait uniformément vers l'infini dans (C_1, C_2), quand n tendrait vers l'infini, c'est-à-dire que $f(z)$ tendrait uniformément vers l'infini dans les couronnes $(C_1\sigma^n, C_2\sigma^n)$; en d'autres termes, quel que soit z dans $(C_1 C_2)$, on aurait, pour $n > n_0$, $|f_n(z)| > N$ quel que soit le nombre positif N, à condition que n_0 soit pris assez grand; ou bien $|f(z)| > N$, quel que soit z dans l'ensemble des couronnes $(C_1\sigma^n, C_2\sigma^n)$, $n > n_0$. Or, l'ensemble de ces couronnes recouvre toute la partie du plan extérieure à la courbe $C_1\sigma^{n_0}$, et admettre qu'à l'extérieur de la courbe $C_1\sigma^{n_0}$ on a $|f(z)| > N$, c'est se mettre en contradiction avec le théorème de M. Picard. *Il est donc impossible que, dans toute la couronne* $(C_1, C_1\sigma)$ [1] *(quelle que soit d'ailleurs la courbe* C_1 *entourant l'origine), la famille des* $f_n(z)$ *soit normale.*

7. *Il existe alors, dans toute couronne* $(C, C\sigma)$, *un point au moins* z_0, *autour duquel la famille des* $f_n(z)$ *n'est pas normale. Quelque petite que*

---

[1] La réussite du raisonnement tient au fait que toute couronne $(C, C\sigma)$ est un domaine fondamental de la substitution $(z, z\sigma)$.

soit l'aire $\mathcal{D}_0$ entourant z_0, les fonctions $f_n(z)$ prendront dans $\mathcal{D}_0$ toute valeur finie, sauf peut-être une seule. Ceci veut dire que, *dans l'ensemble des aires* $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0\sigma, \mathcal{D}_0\sigma^2, \ldots, \mathcal{D}_0\sigma^n, \ldots,$ $f(z)$ *prendra toute valeur finie, sauf peut-être une seule*. On peut, avec plus de précision, dire que toute valeur finie sera prise par $f(z)$ *une infinité de fois*, sauf peut-être une valeur exceptionnelle, car l'hypothèse contraire, à savoir qu'il y a deux valeurs finies a et b que $f(z)$ ne prend qu'un nombre limité de fois dans les aires $\mathcal{D}_0\sigma^n$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$, équivaudrait encore à dire que la famille des $f_n(z)$ est normale dans $\mathcal{D}_0$. Il est clair que si $f(z)$ admet, dans tout le plan, une valeur exceptionnelle qu'elle ne prend jamais, comme est zéro pour e^z [ou qu'elle ne prend qu'un nombre limité de fois], cette valeur est précisément la seule que $f(z)$ ne prendra pas dans l'ensemble des aires $\mathcal{D}_0\sigma^n$ [ou qu'elle n'y prendra qu'un nombre limité de fois].

8. On peut donc parler de *l'ensemble* $\mathcal{E}_\sigma$ *des points où la famille des fonctions* $f_n(z) = f(z\sigma^n)$ *n'est pas normale*. Cet ensemble possède au moins un point dans toute couronne $(C, C\sigma)$ entourant l'origine, et il est bien évident que, si z_0 est un point de l'ensemble, tous les points $z_0\sigma^{\pm n}$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ sont aussi des points de l'ensemble. L'origine et l'infini sont points limites de $z_0\sigma^{\pm n}$. Il était d'ailleurs évident qu'*à l'origine* les fonctions f_n ne pouvaient former une famille normale, puisqu'elles y ont toutes la même valeur $f(0)$, tandis que leurs dérivées respectives sont $f'(0), \sigma f'(0), \ldots, \sigma^n f'(0), \ldots,$ valeurs qui tendent vers l'infini avec n, si l'on suppose que $f'(0) \neq 0$. [Il suffirait de considérer la première des dérivées de f différente de zéro à l'origine et de faire le même raisonnement pour conclure de la même façon, au cas où $f'(0) = 0$.]

II. — Propriétés de l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$. Sa structure.

9. Il suit de la définition même de $\mathcal{E}_\sigma$: ensemble des points autour desquels la famille des $f_n(z)$ n'est pas normale, que *l'ensemble* $\mathcal{E}_\sigma$ *est fermé*. En un point ζ, limite de points z où la famille des $f_n(z)$ n'est pas normale, cette famille ne saurait, en effet, être normale : tout point limite de points de $\mathcal{E}_\sigma$ appartient à $\mathcal{E}_\sigma$.

10. *Un point de $\mathcal{E}_\sigma$ peut-il être isolé dans $\mathcal{E}_\sigma$?* Supposant qu'un point z_0 de $\mathcal{E}_\sigma$ soit isolé, il est aisé de voir quelles circonstances doivent *nécessairement* se produire. Dans un cercle $\mathcal{D}$ de centre z_0, de rayon assez petit, la suite des $f_n(z)$ sera alors normale en tout point distinct du centre. Si l'on suppose qu'une suite partielle, extraite de la suite des $f_n(z)$, converge dans $\mathcal{D}$, hors z_0, vers une fonction holomorphe, ou vers une constante finie, il suit d'un lemme de Weierstrass, bien connu en théorie des fonctions, que cette suite partielle converge dans tout $\mathcal{D}$, *y compris* z_0, vers une fonction holomorphe, ou vers une constante finie.

On pourrait donc affirmer que la suite des $f_n(z)$, normale en tout point de $\mathcal{D}$ distinct du centre, est encore normale au centre, si l'on était sûr que *toute suite convergente*, extraite de la suite des $f_n(z)$, converge dans $\mathcal{D}$ vers une limite *finie*. En ce cas, z_0 ne saurait être isolé dans $\mathcal{E}_\sigma$ sous peine de contradiction.

11. Mais le lemme de Weierstrass, précédemment invoqué, n'est plus valable si la suite partielle, extraite de la suite des $f_n(z)$, converge dans $\mathcal{D}$ (hors z_0) vers l'infini. Il peut arriver (on en verra plus loin des exemples) que les fonctions de cette suite, *restant finies en* z_0, convergent vers l'infini hors de z_0. Si pareil fait se produit pour une suite extraite de la suite des $f_n(z)$, il pourra arriver que la famille des $f_n(z)$, normale dans $\mathcal{D}$ en tout point distinct du centre, ne soit plus normale au centre. Ce point est alors isolé dans $\mathcal{E}_\sigma$, et c'est le seul cas où z_0 peut être isolé dans $\mathcal{E}_\sigma$.

12. Il peut arriver que des propriétés spéciales de la fonction $f(z)$ étudiée permettent de rejeter cette dernière hypothèse. On sait, en effet, et cela résulte de la définition même de $\mathcal{E}_\sigma$ que les $f_n(z)$, ne formant pas une suite normale dans toute l'aire $\mathcal{D}$, prendront dans cette aire toute valeur finie, sauf peut-être une valeur exceptionnelle au plus. *Si l'on sait*, a priori, *qu'il y a effectivement une valeur exceptionnelle a que les fonctions $f_n(z)$* [1] *ne prennent pas autour de z_0, il*

[1] Cela voudra dire que, $\mathcal{D}$ étant un cercle assez petit, de centre z_0, la fonction $f(z)$ ne prend la valeur a dans aucune des aires $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}\sigma$, $\mathcal{D}\sigma^2$, ..., $\mathcal{D}\sigma^n$, ... La même conclusion s'affirme quand $f(z)$ ne prend, dans l'ensemble de ces aires, qu'un nombre limité de fois la valeur a.

suit que z_0 *ne peut être isolé dans* $\mathcal{E}_\sigma$. Car si z_0 était isolé dans $\mathcal{E}_\sigma$, dans un cercle $\mathcal{D}$ de centre z_0 et de rayon assez petit, la famille des $f_n(z)$, comme celle des $\frac{1}{f_n(z)-a}$, serait composée de fonctions holomorphes et serait normale en tout point distinct du centre. Toute suite extraite de la suite des $f_n(z)$ et convergeant dans $\mathcal{D}$ vers une limite finie devrait converger aussi en z_0, et à toute suite S extraite de la suite des $f_n(z)$, convergeant dans $\mathcal{D}$ (hors z_0) vers l'infini, correspondrait une suite S′ extraite de la suite des $\frac{1}{f_n(z)-a}$, convergeant dans $\mathcal{D}$, (hors z_0) vers *zéro;* S′ devrait donc converger aussi vers zéro en z_0, ce qui implique que la suite S devrait converger vers l'infini, même en z_0. On pourrait donc ici affirmer que toute suite extraite de la suite des $f_n(z)$, et convergeant dans $\mathcal{D}$ partout hors du centre, devrait converger même au centre : la suite des $f_n(z)$ serait *normale en* z_0, contrairement à l'hypothèse faite. Un cas important où l'on pourra affirmer ainsi qu'aucun point de $\mathcal{E}_\sigma$ n'est isolé dans $\mathcal{E}_\sigma$, c'est celui où *la fonction* $f(z)$ *étudiée ne prend nulle part dans le plan* z *la valeur* a, *ou ne la prend dans tout le plan qu'un nombre limité de fois.*

Alors on pourra affirmer que $\mathcal{E}_\sigma$ est un ensemble *parfait*. On verra d'ailleurs plus loin, par la considération des *valeurs asymptotiques*, que cet ensemble est *continu*.

13. $\mathcal{E}_\sigma$, toujours fermé, se décompose en un ensemble parfait et un ensemble dénombrable. L'ensemble parfait peut être nul, mais on verra qu'*il ne l'est certainement pas si la fonction* $f(z)$ *admet une valeur asymptotique finie.* On ne pourra donc fournir l'exemple d'une fonction $f(z)$ pour laquelle l'ensemble $\overline{\mathcal{E}}_\sigma$, correspondant à une valeur convenable de σ, est dénombrable qu'en s'adressant à une fonction $f(z)$ n'ayant pas de valeur asymptotique finie. On sait que c'est le cas des fonctions entières d'ordre $< \frac{1}{2}$, ainsi que l'a montré notamment M. Wiman, puis M. Lindelöf. La fonction suivante

$$f(z) = \prod_{n=1} \left(1 - \frac{z}{\sigma^n}\right) \qquad |\sigma| > 1,$$

d'ordre zéro, répond à la question.

On a, en effet,

$$f_n(z) = f(\sigma^n z) = (1 - z)(1 - \sigma z)\dots(1 - \sigma^{n-1} z) f(z).$$

Soit Δ une aire finie quelconque du plan z, ne renfermant aucun des points $\sigma^{\pm k}$ $(k = 0, 1, 2, \dots, \infty)$ à son intérieur ou sur sa frontière. Il est clair que, quel que soit z dans Δ ou sur son contour, et quel que soit k, on aura dès lors $|z - \sigma^{\pm k}| > \delta$, δ étant un nombre positif convenable,

$$f(\sigma^n z) = \sigma^{\frac{(n-1)n}{2}} [1 - z][\sigma^{-1} - z]\dots[\sigma^{-(n-1)} - z] f(z)$$

et, par suite, dans Δ,

$$|f(\sigma^n z)| > |\sigma|^{\frac{(n-1)n}{2}} \delta^n A,$$

A désignant la limite inférieure, certainement différente de zéro, de $|f(z)|$ dans Δ. Cette inégalité s'écrit encore

$$|f(\sigma^n z)| > \left[\delta |\sigma|^{\frac{n-1}{2}}\right]^n A,$$

et elle prouve alors que, n tendant vers l'infini, $|\sigma|^{\frac{n-1}{2}}$ tend vers l'infini; il en est de même de $\delta|\sigma|^{\frac{n-1}{2}}$, et du second membre tout entier. Donc, dans Δ, *$f(\sigma^n z)$ tend uniformément vers l'infini avec n.*

En tout point distinct des points $\sigma^{\pm k}$, la famille des $f_n(z) = f(\sigma^n z)$ tend vers l'infini. En un des points $\sigma^{\pm k}$, toutes les fonctions de la famille sont nulles à partir d'un certain rang. La famille cesse donc d'être normale en chacun de ces points.

Ici, l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$, *fermé et dénombrable, se compose des points $\sigma^{\pm k}$ $(k = 0, 1, 2, \dots, \infty)$ et de leurs deux points limites* 0 *et* ∞. *Tous ses points, sauf* 0 *et* ∞ *sont isolés.*

14. Je vais montrer que jamais l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ ne peut être dénombrable, lorsque $f(z)$ admet une *valeur asymptotique finie*. Ainsi s'introduisent une fois de plus ces valeurs asymptotiques des fonctions entières, dont on s'est occupé dans un grand nombre de travaux récents. Leur présence permet d'affirmer que *l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$, quel que soit $|\sigma| > 1$, contient un continu qui est coupé en un point au moins par*

toute courbe C *entourant l'origine*. On est ici, en effet, dans le cas où il existe une courbe continue Γ, allant à l'infini, sur laquelle la fonction $f(z)$ tend vers une valeur finie a, quand z tend vers l'infini. Imaginons qu'en tout point d'une courbe C quelconque entourant l'origine, et par suite en tout point d'une certaine couronne (C_1, C_2) limitée par deux courbes C_1, C_2 entourant l'origine et comprenant C entre elles, la famille des fonctions $f_n(z) = f(z\sigma^n)$ soit normale. On a vu précédemment (n° 5) qu'il faudrait alors admettre nécessairement que $f_n(z)$ *tend uniformément vers l'infini avec* n, quel que soit z dans la couronne; ou bien que dans la couronne $(C_1\sigma^n, C_2\sigma^n)$ $f(z)$ tend vers l'infini avec n. Or, la courbe Γ, allant à l'infini, traverse toutes les couronnes $[C_1\sigma^n, C_2\sigma^n]$ dès que n dépasse une certaine valeur; sur les arcs découpés par les couronnes précédentes sur cette courbe Γ, $f(z)$ tendant vers a, valeur finie, ne pourra tendre vers l'infini quand on envisagera une suite de ces arcs allant à l'infini. Il y a donc contradiction à supposer la famille des $f_n(z)$ normale en tout point de C. C'est dire que toute courbe C, entourant l'origine, renferme au moins un point de $\mathcal{E}_\sigma$. $\mathcal{E}_\sigma$ ne saurait être dénombrable, et l'on peut affirmer qu'il contient un continu coupé, en un point au moins, par toute courbe C.

15. Ce qui précède signifie seulement qu'il est impossible, dans l'hypothèse envisagée, de supposer la famille des $f_n(z)$ normale dans *toute* une couronne (C_1, C_2) entourant l'origine. Mais il peut arriver que la famille considérée soit normale dans *certaines parties* de la couronne, séparées les unes des autres par des continus en chaque point desquels la famille cesse d'être normale. Un exemple bien simple de ce fait est fourni par la fonction entière $f(z) = e^z$, quand σ est choisi réel et > 1. Cette fonction possède la valeur asymptotique finie zéro qui est atteinte, quand z tend vers l'infini, sur tout rayon dont l'argument est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}\cdot$ σ étant choisi réel, on voit de suite que $f_n(z) = e^{z\sigma^n}$ tend vers l'infini avec n si $-\frac{\pi}{2} < \arg z < +\frac{\pi}{2}$, et tend vers zéro quand n tend vers l'infini si $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\cdot$ En tout point du plan situé à droite de l'axe imaginaire, la famille des $f_n(z)$

est normale et tend vers l'infini avec n; en tout point situé à gauche, elle est normale mais tend vers zéro si n devient infini. Il en résulte qu'en aucun point de l'axe imaginaire, la famille ne pourra être normale. L'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ *se réduit ici à l'axe imaginaire :* toute couronne circulaire entourant l'origine est divisée par cet axe en deux parties, dans chacune desquelles la famille est normale, ces deux parties étant séparées par l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$. ω_0 étant une aire arbitrairement petite entourant un point de l'axe imaginaire, la fonction e^z prend, dans l'ensemble des aires ω_0, $\omega_0\sigma$, $\omega_0\sigma^2$, ..., $\omega_0\sigma^n$, ..., toute valeur finie, sauf la valeur zéro, et la prend une infinité de fois. Ceci s'explique aisément, grâce à la périodicité de la fonction e^z, quand on remarque que les dimensions absolues de l'aire $\omega_0\sigma^n$ croissent indéfiniment avec n.

16. *Remarque I.* — Il importe de faire remarquer que si une fonction entière admet une valeur exceptionnelle finie a, qu'elle ne prend pas ou qu'elle ne prend qu'un nombre limité de fois dans tout le plan, cette valeur *est une valeur asymptotique* et à la fonction s'appliquent les considérations des n^{os} 14 et 15. On a d'ailleurs vu, au n° 12, que l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ était alors, quel que soit σ, un ensemble parfait. En rapprochant les conclusions des n^{os} 12, 14 et 15, on pourra affirmer, dans le cas présent, que $\mathcal{E}_\sigma$ est un ensemble *parfait continu reliant l'origine à l'infini.*

17. *Remarque II.* — On peut se poser la question suivante : En un point de $\mathcal{E}_\sigma$, il a été démontré que la famille des $f_n(z)$ n'est pas normale; cela veut dire qu'*une suite partielle au moins*, extraite de la suite des $f_n(z)$, *n'est pas normale* en ce point. Mais peut-il arriver qu'en un tel point, *certaines suites* partielles extraites de la suite des $f_n(z)$ *continuent d'être normales?* L'exemple suivant résout la question par l'affirmative.

Prenons $f(z) = e^z$ et $\sigma = i\mathrm{S}$, S étant réel et > 1.

Alors

$$f_{4p}(z) = e^{z\mathrm{S}^{4p}}, \qquad f_{4p+2}(z) = e^{-z\mathrm{S}^{4p+2}};$$
$$f_{4p+1}(z) = e^{iz\mathrm{S}^{4p+1}}, \qquad f_{4p+3}(z) = e^{-iz\mathrm{S}^{4p+3}}.$$

Il est visible que la famille des $f_{4p}(z)$ et $f_{4p+2}(z)$ pour $p = 1, 2, \ldots, \infty$

est normale en tout point non situé sur l'*axe imaginaire* et n'est normale en aucun point de cet axe imaginaire.

La famille des $f_{4p+1}(z)$ et $f_{4p+3}(z)$ est normale en tout point non situé sur l'*axe réel*, et n'est normale en aucun point de cet axe réel.

L'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ se compose ici de l'ensemble des deux axes réel et imaginaire, mais en tout point de l'axe réel la suite partielle

$$f_{2k}(z)\,(k=1, 2, \ldots, \infty)$$

est normale, alors que la suite partielle

$$f_{2k+1}(z)\,(k=1, 2, \ldots, \infty)$$

ne l'est pas. C'est l'inverse qui a lieu en tout point de l'axe imaginaire.

18. *Remarque III.* — L'exemple précédent prouve que $\mathcal{E}_\sigma$ *dépend essentiellement de la valeur adoptée pour σ, et change quand σ varie, la fonction $f(z)$ restant la même.* On a vu, en effet, que pour $f(z)=e^z$:

1° Si σ est réel, $\mathcal{E}_\sigma$ se confond avec l'axe imaginaire.

2° Si $\sigma = i\mathrm{S}$, S étant réel >1, $\mathcal{E}_\sigma$ se compose de l'axe réel et de l'axe imaginaire.

3° Si $\sigma=\omega \mathrm{S}$, S étant réel >1 et $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, on vérifiera facilement, en considérant les suites partielles $f_{kp}(z)$, $f_{kp+1}(z)$, $\ldots$, $f_{kp+(p-1)}(z)$, pour $k=1, 2, \ldots, \infty$, dont chacune est normale dans tout le plan, sauf sur les droites respectives d'argument $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{p}$, $\pm\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{p}$, $\ldots$, $\pm\frac{\pi}{2}-\frac{2(p-1)\pi}{p}$, que l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ se compose ici suivant les cas :

a. Lorsque p est pair, de $\frac{p}{2}$ droites passant par O, faisant entre elles des angles de $\frac{2\pi}{p}$, l'une d'elles étant l'axe imaginaire.

b. Lorsque p est impair, de p droites passant par O, faisant entre elles des angles de $\frac{2\pi}{2p}$, l'une d'elles étant l'axe imaginaire.

4° Si $\sigma = \mathrm{S}e^{i\theta}$, S réel >1, θ *incommensurable à* 2π, il est aisé de montrer que $\mathcal{E}_\sigma$ *se compose de tout le plan*. Soit, en effet, z_0 un point quelconque du plan, θ_0 son argument.

On peut évidemment, à cause des propriétés d'approximation classiques des incommensurables, choisir une suite infinie d'indices entiers $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ accouplés à des indices entiers $k_1, k_2, \ldots, k_p, \ldots$ tels que

$$\left|\frac{\pi}{2} - (\theta_0 + n_p\theta - 2k_p\pi)\right| < \varepsilon_p,$$

ε_p tendant vers zéro lorsque p grandit indéfiniment; en langage commun, cela voudra dire que l'argument du point

$$z_0\sigma^{n_p} = z_0 S^{n_p} e^{n_p i\theta},$$

qui est égal à $\theta_0 + n_p\theta \pmod{2\pi}$, tendra vers $\frac{\pi}{2}$.

Considérant deux points arbitrairement voisins de z_0 : l'un z_1 d'argument $\theta_0 - \varepsilon$, l'autre z_2 d'argument $\theta_0 + \varepsilon$, il est clair que l'argument de $z_1\sigma^{n_p}$ tendra, pour p infini, vers $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, et celui de $z_2\sigma^{n_p}$ vers $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$; le module de l'un et l'autre de ces points tendra d'ailleurs vers l'infini comme celui de $z_0\sigma^{n_p}$.

Il faut maintenant envisager la suite des $f_{n_p}(z)$. Elle ne peut être normale en z_0. Car $f_{n_p}(z)$ étant égal à $e^{z\sigma^{n_p}}$, il est évident que, pour $z = z_1$, l'argument de $z_1\sigma^{n_p}$ tendant, pour $p = \infty$, vers $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $f_{n_p}(z_1)$ doit tendre, pour $p = \infty$, *vers* $+\infty$. Au contraire, pour $z = z_2$, l'argument de $z_2\sigma^{n_p}$ tendant vers $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, $f_{n_p}(z_2)$ doit tendre, pour $p = \infty$, *vers zéro*. D'ailleurs z_1 et z_2 sont arbitrairement voisins de z_0; il en résulte que la suite partielle $f_{n_p}(z)$, extraite de la suite $f_n(z)$, n'est pas normale au point z_0.

Puisque, en tout point z_0 du plan, il existe une suite partielle, extraite de la suite $f_n(z)$, qui n'est pas normale en z_0, on conclut que tout point z_0 du plan appartient à $\mathcal{E}_\sigma$. $\mathcal{E}_\sigma$ se compose donc de tous les points du plan, sans exception.

Structure géométrique de $\mathcal{E}_\sigma$.

19. Au point de vue géométrique on peut se poser la question de savoir si $\mathcal{E}_\sigma$ peut être superficiel, linéaire ou discontinu. La question est, en partie, résolue par les exemples qui précèdent. En voici d'autres d'un caractère plus général.

20. L'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ peut être *superficiel*. Le n° 18 (4°) fournit l'exemple de la fonction e^z quand on prend pour σ un nombre complexe de module > 1, d'argument incommensurable à 2π. On peut, pour le même objet, considérer la fonction entière elliptique

$$\sigma(z) = z \Pi'_w \left[\left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{w^2}} \right]$$

où l'on pose

$$w = 2h_1\omega_1 + 2h_2\omega_2;$$

$2\omega_1$ et $2\omega_2$ étant les périodes, h_1 et h_2 des entiers quelconques positifs ou négatifs, la combinaison $h_1 = h_2 = 0$ étant exclue. $\sigma(z)$ admet pour zéros simples les sommets de tous les parallélogrammes des périodes. J'ai déjà étudié cette fonction dans mon premier Mémoire.

Soient $\mathcal{D}_0$ une aire arbitraire entourant un point z_0 du plan, et Σ un nombre complexe de module > 1. Lorsque n devient infini, l'aire $\mathcal{D}_0\Sigma^n$ croît indéfiniment dans toutes ses dimensions et comprend à son intérieur un nombre de parallélogrammes des périodes qui devient infini. C'est-à-dire que $\sigma(z)$ a dans $\mathcal{D}_0\Sigma^n$ un nombre de zéros qui devient infini avec n. Dans $\mathcal{D}_0$ la fonction $\sigma_n(z) = \sigma[z\Sigma^n]$ aura donc un nombre de zéros qui devient infini avec n, la plus petite distance de deux de ces zéros devenant nulle, de façon que ces zéros finissent par être denses dans toute l'aire $\mathcal{D}_0$. Si, dans $\mathcal{D}_0$, la famille des $\sigma_n(z)$ était normale, toute fonction limite de fonction $\sigma_n(z)$ devrait être nulle dans toute l'aire $\mathcal{D}_0$. C'est-à-dire que $\sigma_n(z)$ devrait tendre uniformément vers zéro dans $\mathcal{D}_0$; ou encore que $\sigma(z)$ devrait tendre uniformément vers zéro dans les aires $\mathcal{D}_0\Sigma^n$, quand n devient infini. Or, cela est impossible sous des conditions très générales imposées à Σ.

On a, en effet,

$$\sigma(z_0+2h_1\omega_1+2h_2\omega_2)=(-1)^{h_1h_2+h_1+h_2}\,e^{(2h_1\eta_1+2h_2\eta_2)(z_0+h_1\omega_1+h_2\omega_2)}\,\sigma(z_0).$$

z_0 étant pris fixe, $\sigma(z_0)\neq 0$, les valeurs de $\sigma(z_0+2h_1\omega_1+2h_2\omega_2)$ pour h_1 et h_2 très grands dépendent essentiellement du terme

$$e^{(2h_1\eta_1+2h_2\eta_2)(z_0+h_1\omega_1+h_2\omega_2)},$$

dont la valeur absolue est

$$e^{\mathcal{R}[(2h_1\eta_1+2h_2\eta_2)(z_0+h_1\omega_1+h_2\omega_2)]}.$$

Or, quel que soit z_0 fixe, l'équation en h_1, h_2 (rapportée à deux axes parallèles aux vecteurs périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$),

$$\mathcal{R}[(2h_1\eta_1+2h_2\eta_2)(z_0+h_1\omega_1+h_2\omega_2)]=0$$

représente une conique dont le genre ne dépend pas de z_0. La région $\mathcal{R}$ définie par

$$\mathcal{R}[(2h_1\eta_1+2h_2\eta_2)(z_0+h_1\omega_1+h_2\omega_2)]>0$$

ne peut être finie, sans quoi $\sigma(z)$ serait bornée dans tout le plan. Cette région $\mathcal{R}$, allant à l'infini, est, ou l'extérieur d'une ellipse, ou une portion infinie de plan limitée par une parabole ou une hyperbole (qu'on peut supposer non dégénérée, pourvu que ω_1 et ω_2 ne satisfassent pas à certaines relations particulières, ou que z_0 n'occupe pas certaines positions particulières). Sur cette région infinie $\mathcal{R}$, pourvu que Σ soit soumis à certaines restrictions d'ordre assez général (1) [par exemple, lorsque $\mathcal{R}$ est hyperbolique, qu'une des puissances de Σ ait un argument assez petit, afin que deux certaines puissances de Σ aient des arguments différant assez peu (mod 2π), de manière que cette différence soit inférieure à l'angle des asymptotes de $\mathcal{R}$], il y aura une infinité de régions $\mathcal{D}_0\Sigma^n$ qui viendront empiéter, et de telle sorte qu'*il sera loisible de trouver une infinité de points congruents à z_0, intérieurs à $\mathcal{R}$ et à ces aires $\mathcal{D}_0\Sigma^n$*. En ces points, il est visible que $|\sigma(z)|$

(1) Lorsque Σ est d'argument incommensurable à 2π, aucune condition supplémentaire n'est nécessaire.

reste $> |\sigma(z_0)|$. Ceci contredit l'hypothèse que la famille des $\sigma_n(z)$ est normale dans $\mathfrak{O}_0$, d'où l'on a déduit que $\sigma(z)$ devrait tendre uniformément vers zéro dans $\mathfrak{O}_0\Sigma''$ quand n devient infini (¹).

On vient donc de démontrer que l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ se confond ici avec le plan tout entier.

21. Que $\mathcal{E}_\sigma$ puisse être *continu linéaire*, on l'a déjà vu par de nombreux exemples, et notamment e^z lorsque σ a un argument commensurable à 2π. Ce continu peut être d'une nature très complexe, ainsi qu'on va le voir par les exemples généraux suivants.

Il résulte des travaux de Poincaré, et, notamment, d'un Mémoire du *Journal de Liouville*, 1890, intitulé : *Sur une classe nouvelle de fonctions uniformes*, que, P(Z) étant un polynome quelconque, nul à l'origine,

$$P(Z) = \sigma Z + a_2 Z^2 + \ldots + a_n Z^n,$$

$|\sigma|$ étant supposé > 1, l'équation fonctionnelle

$$f(\sigma z) = P[f(z)]$$

possède une solution $f(z)$ nulle à l'origine, $[f'(0) \neq 0]$, *qui est une fonction entière*. Cette classe de fonctions entières est particulièrement intéressante.

Soit z_0 un point de l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ d'une telle fonction. En ce point, la famille des $f_n(z) = f(\sigma^n z)$ n'est pas normale. Or, si l'on désigne par $P_2(Z)$, $P_3(Z)$, ..., $P_n(Z)$, ... les polynomes itérés successifs du polynome P, c'est-à-dire

$$P_2(Z) = P[P(Z)], \qquad P_n(Z) = P_{n-1}[P(Z)],$$

on aura

$$\begin{aligned} f(\sigma z) &= P[f(z)], \\ f(\sigma^2 z) &= P[f(\sigma z)] = P\{P[f(z)]\} = P_2[f(z)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(\sigma^n z) &= P_n[f(z)]\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

(¹) On rapprochera ce raisonnement de celui qui a été fait dans le premier Mémoire (n° 20).

et, par conséquent, les fonctions $f_n(z)$ dérivent des fonctions $P_n(Z)$ par la transformation $Z = f(z)$.

Il est visible que, les $f_n(z)$ ne formant pas une famille normale au point z_0, les $P_n(Z)$ ne peuvent former une famille normale au point $Z_0 = f(z_0)$. Le point Z_0 est donc un point de l'ensemble que j'ai appelé E′ dans mon Mémoire « sur l'itération des fonctions rationnelles [1] ». Réciproquement, d'ailleurs, par la transformation $Z = f(z)$, l'ensemble E′ du plan Z devient l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ du plan z relatif à la fonction $f(z)$. J'ai montré, dans le Mémoire ci-dessus, que, suivant le choix de $P(Z)$, E′ pouvait être un continu linéaire de nature assez compliquée : j'ai fourni des exemples [2] où c'était une courbe de Jordan simple formée non analytique, et n'ayant même pas de tangente; j'en ai fourni d'autres où c'était une courbe de Jordan ayant des points doubles partout denses sur elle-même. M. Fatou, de son côté, a montré, dans diverses Notes des *Comptes rendus* [3], que le continu linéaire E′ ne pouvait être analytique que s'il se réduisait à un cercle, et il a fourni des cas très généraux où ce continu n'a de tangente en aucun point. Il est évident qu'un continu E′ non analytique se transforme, par $Z = f(z)$, en un continu $\mathcal{E}_\sigma$ non analytique, et que, si E′ n'a de tangente en aucun point, $\mathcal{E}_\sigma$ n'en a pas non plus. On voit ainsi que la nature du continu linéaire $\mathcal{E}_\sigma$ peut être très compliquée.

22. La classe de fonctions entières qui vient de nous occuper, fournit également, par des choix convenables du polynome $P(Z)$, des exemples assez généraux pour lesquels l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ est *parfait discontinu*. J'ai déjà donné l'exemple de la fonction $\pi\left(1 - \frac{z}{\sigma^n}\right)$, d'ordre zéro, pour laquelle $\mathcal{E}_\sigma$ était dénombrable, et, par conséquent, discontinu. Les exemples que je vais maintenant fournir sont plus intéressants parce que leur ensemble $\mathcal{E}_\sigma$, tout en étant parfait, reste discontinu : ils sont relatifs, d'ailleurs, à des fonctions entières dont

(1) Publié dans le *Journal de M. Jordan*, 7e série, t. IV, 1918.

(2) Pour ne pas allonger outre mesure le présent Mémoire, je prie le lecteur de se reporter au Mémoire cité, où il trouvera lesdits exemples.

(3) *C. R. Acad. Sc.*, t. 166, p. 204, et t. 167, p. 1025.

l'ordre peut être arbitrairement élevé, et ceci aussi est un fait assez remarquable, dont on verra les conséquences. Certaines propriétés de l'itération des fractions rationnelles, en particulier des polynomes, sont nécessaires à l'intelligence des exemples qui suivent. Le lecteur trouvera ces propriétés dans mon Mémoire (précédemment cité) « sur l'itération des fractions rationnelles ».

23. Soit le polynome

$$Z_1 = P(Z) = sZ + Z^p, \tag{1}$$

où s est un nombre complexe de module $\sigma = |s| > 1$ et p un entier qu'on choisira tout à l'heure assez grand.

Je vais d'abord montrer que, si p est assez grand, l'itération de ce polynome présente des circonstances assez simples.

24. L'infini est un point de convergence régulière. Si $|Z| = \rho$ on a

$$\rho_1 = |Z_1| > \rho^p - \rho\sigma$$

et pourvu que $\rho^p - \rho\sigma > \rho k$, c'est-à-dire $\rho > (k+\sigma)^{\frac{1}{p-1}}$, on sera sûr que $\rho_1 > k\rho$; si k est un nombre réel > 1, on sera sûr que tout point extérieur au cercle C, $\rho = (k+\sigma)^{\frac{1}{p-1}}$, ou situé sur ce cercle, a des conséquents qui tendent régulièrement vers l'infini. k peut être supposé aussi voisin de 1 qu'on voudra.

Ce qui importe avant tout dans l'étude de l'itération, c'est de connaître l'allure des conséquents des points où $\frac{dZ_1}{dZ} = 0$. Ces points sont les racines de

$$s + pZ^{p-1} = 0, \tag{2}$$

leur module est $\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$.

Le conséquent d'un point Z racine de cette équation (2) sera

$$Z_1 = Z(s + Z^{p-1}) = s\left(1 - \frac{1}{p}\right)Z,$$

son module est $\sigma\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$.

Les conséquents des points où $\frac{dZ_1}{dZ} = 0$ sont régulièrement distribués sur le cercle de centre O, de rayon $\sigma\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$. *Ce sont les points critiques de la fonction* $Z(Z_1)$ *inverse de* $Z_1 = P(Z)$.

Ces points critiques appartiendront tous [1] au domaine du point à l'infini si l'on a

$$\sigma\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} > (k+\sigma)^{\frac{1}{p-1}}$$

ou bien

$$\sigma^{p-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{p-1}\frac{\sigma}{p} > k + \sigma. \tag{3}$$

k peut être choisi arbitrairement pourvu qu'il soit > 1. Supposons donc $1 < k < \sigma$, alors $k + \sigma < 2\sigma$, et l'on réalisera certainement la condition (3) si la condition

$$\sigma^{p-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{p-1}\frac{\sigma}{p} > 2\sigma \tag{4}$$

se trouve réalisée.

Or, pour réaliser (4), il suffit que l'on ait

$$\sigma^{p-1} > \frac{2p}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{p-1}}$$

ou encore

$$\sigma > \frac{(2p)^{\frac{1}{p-1}}}{1 - \frac{1}{p}}. \tag{5}$$

Or, s étant fixé, et, par suite, $\sigma > 1$, si l'on fait croître p indéfiniment par valeurs entières, la quantité $\frac{(2p)^{\frac{1}{p-1}}}{1 - \frac{1}{p}}$ tend vers l'unité. Il existe donc une valeur p_0 telle que, quel que soit $p > p_0$, l'inégalité (5) et, par suite, les inégalités (4) et (3) soient satisfaites.

---

(1) Je m'inspire ici d'un exemple indiqué par M. Fatou dans sa Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 15 octobre 1906.

p étant ainsi choisi, tous les conséquents des points où $\frac{dZ_1}{dZ} = 0$ appartiennent au domaine du point à l'infini, car ils sont extérieurs au cercle C de centre O de rayon $(k + \sigma)^{\frac{1}{p-1}}$.

25. Prenant maintenant un cercle γ de centre O, de rayon $R < 1$, mais aussi voisin de 1 qu'on voudra [1], il est clair, à cause de

$$Z_1 = sZ + Z^p,$$

que, pour une valeur de p assez grande, le point Z_1 décrira une courbe γ_1 *arbitrairement voisine du cercle* $s\gamma$, lorsque Z décrira le cercle γ. Comme $|s| > 1$, le cercle $s\gamma$ a un rayon σR arbitrairement voisin de σ, et, par conséquent, > 1, pourvu que R soit assez voisin de 1. D'autre part, le cercle C de rayon $(k + \sigma)^{\frac{1}{p-1}}$ tend vers le cercle de rayon 1 lorsque p tend vers l'infini. En définitive, p peut être choisi assez grand pour que la courbe γ_1 entoure complètement le cercle C et le contienne à son intérieur : c'est-à-dire que le cercle γ appartiendra au domaine du point à l'infini. On peut préciser davantage en envisageant la détermination de la fonction $Z(Z_1)$ inverse de $P(Z)$ qui s'annule à l'origine. Il est clair, en effet, que tous les points critiques de la fonction $Z(Z_1)$ étant extérieurs au cercle C, la détermination envisagée sera holomorphe dans C. Lorsque Z_1 décrit le cercle C, il est impossible que Z vienne sur le cercle γ de rayon R puisque tout point de γ a son conséquent *extérieur à* C. On en déduit que, Z_1 décrivant l'intérieur et la circonférence du cercle C, le point Z, qui représente la détermination de $Z(Z_1)$ nulle à l'origine, décrira une aire (C_{-1}) simplement connexe, limitée par un contour C_{-1} simple, fermé et analytique : cette aire (C_{-1}) ne se recouvrira nulle part et sera tout entière, contour compris, intérieure au cercle γ. [Les $(p-1)$ autres déterminations de $Z(Z_1)$ décriront aussi chacune une aire plane ne se recouvrant nulle part, limitée par un contour simple, fermé et analytique : ces $(p-1)$ aires étant deux à deux extérieures, et toutes extérieures à l'aire (C_{-1}). Toutes ces aires seront, d'ailleurs, intérieures à C.]

---

[1] En fait, il suffira de choisir R tel que $\sigma R > 1$, ce qui est toujours possible.

Mais d'autre part, puisque $\frac{dZ_1}{dZ} = s + pZ^{p-1}$, on voit immédiatement que, à l'intérieur du cercle γ, de rayon $R < 1$, la quantité pZ^{p-1}, dont le module est $\leqq pR^{p-1}$, tendra uniformément vers zéro quand p tendra vers l'infini. On en conclut que *p peut être pris assez grand, pour que l'on ait en tout point intérieur à γ, $\left|\frac{dZ_1}{dZ}\right| > \sigma_1 > 1$, σ_1 étant inférieur à σ et d'ailleurs aussi voisin de σ que l'on voudra. Supposons p ainsi choisi.*

26. En se référant à l'exemple de M. Fatou cité précédemment [n° 24, note (1)] et sans qu'il soit maintenant nécessaire d'insister longuement, on peut tirer la conclusion suivante :

L'antécédente C_{-1} de C, prise à l'aide de la détermination de $Z(Z_1)$ qui s'annule à l'origine, étant intérieure au cercle γ, à l'intérieur duquel $\left|\frac{dZ_1}{dZ}\right| > \sigma_1 > 1$, les antécédentes successives de C_{-1}, prises avec la même détermination de $Z(Z_1)$, seront des courbes simples, fermées, analytiques, emboîtées les unes dans les autres, et *tendront vers zéro et vers zéro seul,* uniformément. Cela résulte de ce qu'à l'intérieur de C_{-1}, on a $\left|\frac{dZ}{dZ_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1} < 1$.

27. Mais si l'on ne prend pas quelques précautions supplémentaires, il n'est pas sûr qu'à l'intérieur des $(p-1)$ courbes antécédentes de C distinctes de C_{-1}, on ait aussi $\left|\frac{dZ_1}{dZ}\right| > 1$, et l'on ne serait pas alors sûr, en prenant *toutes les antécédentes successives de* C, qui définissent à la limite l'ensemble E' (E' comprend tout point intérieur à une infinité de ces antécédentes), d'aboutir à un ensemble E', parfait, discontinu, ne contenant aucune portion de continu. Il est facile de pallier à cet inconvénient.

1° *A condition de supposer* $\sigma > 2$, il est clair que la courbe conséquente du cercle $|Z| = 1$ entourera le cercle $|Z| = 1$ *et n'aura avec lui aucun point commun.* Elle restera à une distance finie de ce cercle. *Supposons σ ainsi choisi.*

2° On a vu que, lorsque p est assez grand, C, de rayon $(k+\sigma)^{\frac{1}{p-1}}$, est arbitrairement voisin du cercle $|Z| = 1$, p peut donc être choisi assez grand pour que la courbe conséquente du cercle $|Z| = 1$ soit *tout entière à l'extérieur de* C.

3° A cause de $\frac{dZ_1}{dZ} = s + pZ^{p-1}$, il est visible qu'en tout point $|Z| \geqq 1$, on a

$$\left|\frac{dZ_1}{dZ}\right| > p - \sigma,$$

et dès que p est pris assez grand,

$$\left|\frac{dZ_1}{dZ}\right| > A > 1.$$

Supposons donc $p - \sigma > 1$.

4° Les antécédents de l'origine, distincts de o, sont racines de l'équation

$$s + Z^{p-1} = 0.$$

Ils sont régulièrement répartis sur le cercle de rayon $(\sigma)^{\frac{1}{p-1}}$, ce rayon, supérieur à 1, tendant vers 1 quand p croît indéfiniment.

5° Il est maintenant facile de situer les p antécédentes d'ordre un de C. La première $|C_{-1}|$ est intérieure au cercle (γ).

Les $(p-1)$ autres sont des courbes analytiques, simples, fermées, entourant chacune un antécédent de l'origine (ces antécédents sont extérieurs à $|Z| = 1$). Aucune de ces courbes ne peut avoir de point commun avec le cercle $|Z| = 1$, sans quoi C aurait un point commun avec la conséquente de $|Z| = 1$, ce qui n'est pas. Chacune des $(p-1)$ courbes envisagées est donc tout entière extérieure au cercle $|Z| = 1$; on sait d'ailleurs qu'elles sont deux à deux extérieures et qu'elles sont toutes intérieures à C.

En définitive, σ étant supposé > 2, p peut être choisi assez grand pour qu'à l'intérieur de chacune des p antécédentes du cercle C, *de rayon* $(k + \sigma)^{\frac{1}{p-1}}$, *on ait* $\left|\frac{dZ_1}{dZ}\right| > \lambda > 1$.

28. Dans ces conditions, le mode de génération indiqué par M. Fatou dans sa Note est parfaitement valable. *Tout point du plan* Z *appartient au domaine du point à l'infini, sauf un ensemble parfait partout discontinu* E′ *ainsi défini :*

On prendra les p antécédentes d'ordre un de C, puis les p^2 antécédentes d'ordre deux, les p^3 antécédentes d'ordre trois, etc., indéfiniment. Chaque antécédente d'ordre i contient p antécédentes d'ordre $(i+1)$, et une antécédente d'ordre i tend vers zéro *dans toutes ses dimensions* (c'est-à-dire sa plus grande corde tend vers zéro) lorsque i augmente indéfiniment; E′ comprendra *tout point intérieur à une infinité d'antécédentes de* C dont les ordres vont nécessairement grandir au delà de toute limite. L'ensemble E′, cela est visible, ne peut renfermer aucune portion de continu [1].

D'après la façon même dont E′ est engendré, on peut tracer une infinité de couronnes (Γ_1, Γ_2) entourant l'origine, séparant E′ en deux parties, l'une intérieure à Γ_1, l'autre extérieure à Γ_2, telles qu'entre Γ_1 et Γ_2 ne figure aucun point de E′. On peut, par exemple, choisir la couronne limitée par C_{-1} et le cercle de rayon 1. On peut substituer à ces couronnes des aires multiplement connexes à trous, dont l'un entoure l'origine : de ce type est l'aire comprise entre C et ses p antécédentes : il n'y a dans l'aire signalée aucun point de E′. Les couronnes ou les aires dont on parle ici appartiennent d'ailleurs au domaine du point à l'infini.

Cet ensemble E′ comprend tous les points où la famille des polynomes itérés $P_n(Z)$ cesse d'être normale. On sait qu'on peut l'engendrer, par un nombre fini d'itérations, à partir de toute portion de lui-même intérieure à un cercle arbitrairement petit de centre O.

29. Les préliminaires relatifs à l'itération de $P(Z)$ étant acquis, on peut considérer la solution entière $f(z)$, nulle à l'origine, de l'équation fonctionnelle

$$f(sz) = P[f(z)]$$

dont on a déjà signalé l'existence au nº 21.

L'ensemble $\mathcal{E}_s$ relatif à la fonction $f(z)$ résulte de l'ensemble E′ qu'on vient d'étudier, par la transformation analytique $Z = f(z)$. Notamment, la portion de $\mathcal{E}_s$, intérieure à un cercle assez petit de

---

(1) Cet ensemble E′ renferme les racines de toutes les équations $Z = P_n(Z)$ et les antécédents successifs de l'origine. Ces deux classes de points sont, l'une et l'autre, partout denses sur E′.

centre O, résulte, par la *transformation conforme* $Z = f(z)$, de la portion de E′ intérieure à un contour analytique fermé, entourant l'origine et très voisin de cette origine. La structure de $\mathcal{E}_s$ et celle de E′ seront donc les mêmes. *$\mathcal{E}_s$ sera un ensemble parfait partout discontinu, ne contenant aucune portion de continu.* Il restera invariant par la substitution (z, zs) et comprendra l'origine et l'infini. Aux couronnes du plan Z, intérieures à C, entourant l'origine et ne contenant pas de point de E′, correspondront des couronnes du plan z limitées par deux courbes entourant l'origine et ne contenant entre elles aucun point de $\mathcal{E}_s$. Les conséquentes de ces couronnes, obtenues par l'application indéfinie de la substitution (z, zs), s'entoureront mutuellement et tendront vers l'infini. (Leurs antécédentes tendent vers zéro.) Comment se comporte $f(z)$ à l'intérieur de ces couronnes?

Soit $(\mathfrak{S}_1\, \mathfrak{S}_2)$ l'une d'elles, assez voisine de l'origine. Les valeurs de $f(z)$ dans $(s^n \mathfrak{S}_1, s^n \mathfrak{S}_2)$ sont identiques à celles de $f(s^n z)$ dans $(\mathfrak{S}_1\, \mathfrak{S}_2)$. Soit $(\Gamma_1 \Gamma_2)$ la couronne qui dérive de $(\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2)$ par la transformation conforme $Z = f(z)$.

On a

$$\begin{aligned} f(sz) &= P[f(z)] = P(Z), \\ f(s^2 z) &= P_2[f(z)] = P_2(Z), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f(s^n z) &= \dots\dots\dots = P_n(Z). \end{aligned}$$

Les valeurs de $f(s^n z)$ dans $(\mathfrak{S}_1\, \mathfrak{S}_2)$ sont celles de $P_n(Z)$ dans $(\Gamma_1 \Gamma_2)$. Or, l'étude de l'itération de $P(Z)$ faite précédemment prouve que dans $(\Gamma_1 \Gamma_2)$, $P_n(Z)$ *tend uniformément vers l'infini* avec n.

La fonction entière $f(z)$ considérée tendra donc uniformément vers l'infini dans l'ensemble des couronnes $(s^n \mathfrak{S}_1, s^n \mathfrak{S}_2)$, lorsque n grandit indéfiniment. Ces couronnes ont toutes même épaisseur relative puisqu'elles sont semblables.

L'ordre de $f(z)$ est d'ailleurs bien connu. On montre aisément (*voir* par exemple Valiron, *Thèse*, p. 87 et 88) que cet ordre est $\frac{Lp}{L\sigma}$. On a supposé seulement, σ étant donné > 2, que p était supérieur à une certaine limite p_0. On peut donc obtenir par ce procédé des fonctions entières *$f(z)$ d'ordre fini arbitrairement élevé* pour lesquelles existe une infinité de couronnes entourant l'origine et s'en allant à l'infini, dans lesquelles $f(z)$ tend uniformément vers l'infini. C'est là une conséquence assez remarquable des recherches précédentes, si l'on songe que c'est seulement pour les fonctions d'ordre $< \frac{1}{2}$ que M. Wiman d'abord, puis M. Lindelöf, avaient montré l'existence d'une infinité de *cercles* concentriques sur lesquels la fonction tend uniformément vers l'infini.

Propriétés analytiques des points de $\mathcal{E}_\sigma$. Approximation simultanée des racines des équations $f(z) = a$.

30. En un point z_0 quelconque de $\mathcal{E}_\sigma$, la famille des $f_n(z) = f(z\sigma^n)$ n'est pas normale. Dans un cercle quelconque entourant z_0, on est donc sûr que toute valeur finie, sauf peut-être une, est prise par une certaine fonction de la famille. C'est-à-dire que pour toute valeur de a, sauf peut-être une, *l'ensemble des racines des équations* $f(z\sigma^n) = a$, *pour* $n = 1, 2, \ldots, \infty$, *admet* z_0 *pour point limite*. $\varphi(z)$ étant une autre fonction quelconque, holomorphe autour de z_0 et $\neq 0$ en z_0, il est clair que la famille des $\frac{f(z\sigma^n)}{\varphi(z)}$ n'est pas normale en z_0 et elle est formée de fonctions holomorphes dans un certain cercle entourant z_0. z_0 sera donc point limite pour les racines des équations $\frac{f(z\sigma^n)}{\varphi(z)} = \lambda$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$, λ ayant une valeur finie quelconque, sauf peut-être une valeur exceptionnelle. La restriction imposée à $\varphi(z)$, d'être $\neq 0$ en z_0, n'est d'ailleurs nullement essentielle. En particulier, on pourra prendre pour $\varphi(z)$ une des fonctions $f(z\sigma^k)$ (k fixe) ou la fonction $f(z)$ elle-même et obtenir des propositions analogues aux précédentes, relatives à la répartition des racines des équations

$$f(z\sigma^n) = \lambda f(z).$$

En particulier, les fonctions entières étudiées aux n^{os} 23 et suivants, qui naissent de certaines équations fonctionnelles simples, ont un ensemble $\mathcal{E}_s$ jouissant de cette propriété que tout point de $\mathcal{E}_s$ est point limite de racines des équations $f(zs^n) = f(z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ et aussi de racines des équations $f(zs^n) = a$, *quelle que soit la valeur finie* a sans exception.

31. Considérant maintenant l'ensemble des racines de l'équation $f(z) = a$ on peut distinguer deux cas.

1° La fonction entière $f(z)$ a, dans tout le plan, une valeur exceptionnelle a_0, c'est-à-dire qu'il existe une valeur finie a_0 telle que l'équation $f(z) = a_0$ n'ait qu'un nombre limité de racines. Alors cette valeur a_0 est aussi l'unique valeur que les fonctions $f(z\sigma^n)$ ne prennent qu'un nombre limité de fois dans un cercle arbitraire entourant un point de $\mathcal{E}_\sigma$. (On sait d'ailleurs que, dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ a la puissance du continu.) Pour toute valeur de $a \neq a_0$ on peut donc trouver un entier n tel que, dans un cercle de centre z_0, de rayon ε donné, la fonction $f(z\sigma^n)$ prend une fois au moins la valeur a. Choisissant alors une suite de nombres ε_p positifs, décroissants et tendant vers zéro, on peut leur faire correspondre une suite d'entiers

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

croissant vers $+\infty$ et tels que dans le cercle de centre z_0 de rayon ε_p la fonction $f(z\sigma^{n_p})$ prenne la valeur a en un point au moins ζ_p,

$$f(\zeta_p\sigma^{n_p}) = a.$$

Les nombres $\zeta_p\sigma^{n_p}$ sont tous des racines de l'équation $f(z) = a$. On peut poser $\zeta_p\sigma^{n_p} = z_p$, les z_p étant parmi les racines de $f(z) = a$, mais ne constituant pas nécessairement *toutes les racines de* $f(z) = a$. Il est clair, par construction même, que le rapport $\frac{\zeta_p}{z_0}$ tend vers *un* quand p augmente indéfiniment. Il en résulte que le rapport $\frac{z_p}{z_0\sigma^{n_p}}$ qui lui est égal, tend aussi vers *un* quand p augmente indéfiniment. On peut énoncer ainsi ce fait :

z_0 étant un point fixe quelconque de $\mathcal{E}_\sigma$ donné *a priori*, on peut choisir dans l'ensemble infini des racines de l'équation $f(z) = a$ (*quelle que soit la valeur non exceptionnelle* a), un ensemble infini $z_1^{(a)}, z_2^{(a)}, \ldots, z_p^{(a)}, \ldots$ et lui faire correspondre une suite d'entiers indéfiniment croissants $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ tels que le rapport

$$\frac{z_0\sigma^{n_p}}{z_p^{(a)}}$$

tende vers *un* quand p augmente indéfiniment.

Il est clair que la suite $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ dépendra en général de la valeur a choisie, mais le fait important c'est qu'*il en existe une pour chaque valeur de a non exceptionnelle*.

On peut traduire en abrégé le fait précédent en disant : *quelle que soit la valeur non exceptionnelle a de $f(z)$, on peut trouver dans la suite des multiples de $z_0, z_0\sigma, z_0\sigma^2, \ldots, z_0\sigma^p, \ldots$ une suite infinie $z_0\sigma^{n_p}$* qui tende asymptotiquement *vers une infinité de racines de l'équation $f(z) = a$*, et ceci quel que soit le point z_0 choisi dans l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$. La suite des multiples $z_0\sigma^n$ de z_0 se rapproche donc asymptotiquement des racines *de toute équation* non exceptionnelle $f(z) = a$ en ce sens qu'elle se rapproche asymptotiquement d'une *infinité de racines de toute équation $f(z) = a$*.

Ceci constitue, comme on s'en rendra compte aisément, une *approximation asymptotique simultanée* des racines *de toutes les équations $f(z) = a$* (a non exceptionnel) par les multiples $z_0\sigma^n$ de tout nombre z_0 appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$, et limite d'une façon curieuse la répartition dans le plan des racines des équations $f(z) = a$ qui correspondent aux valeurs non exceptionnelles de a. J'ai déjà fait observer dans un premier Mémoire qu'on ne connaissait pas jusqu'ici de proposition *générale* réglant la distribution dans le plan (en *module* et en *argument*) des racines des équations $f(z) = a$ pour une fonction entière *quelconque*.

2° Le résultat établi au 1° pour une fonction entière admettant une valeur exceptionnelle finie a_0 s'étend à une *fonction entière quelconque*, mais son énoncé nécessite *quelques précautions dans la forme*. Au 1°, en effet, a_0 était valeur exceptionnelle de $f(z)$ *dans tout le plan* et, par suite, autour *de tout point* z_0 de $\mathcal{E}_\sigma$ les $f(z\sigma^n)$ admettaient a_0 et a_0 seulement comme valeur exceptionnelle. Si $f(z)$ n'a pas de valeur exceptionnelle dans tout le plan, l'équation $f(z) = a$ aura, dans le plan, une infinité de racines quel que soit a, mais il pourrait se faire que les fonctions $f_n(z) = f(z\sigma^n)$ admettent *autour d'un point* z_0 de $\mathcal{E}_\sigma$ une valeur exceptionnelle a_{z_0} *dépendant de* z_0 et variable avec z_0. Dans ces conditions, la suite des multiples $z_0\sigma^n$ de z_0 *se rapprochera asymptotiquement des racines de toutes les équations $f(z) = a$, sauf peut-être pour une valeur a_{z_0} de a dépendant de z_0*.

32. Tous les résultats du présent Chapitre s'appliquent, sans aucune modification, à toute *fonction méromorphe* $f(z)$ ayant une valeur exceptionnelle finie a, car la fonction $\frac{1}{f(z)-a}$ est alors une fonction méromorphe dépourvue de pôles, c'est-à-dire une fonction entière, et l'on passe aisément de $\frac{1}{f(z)-a}$ à $f(z)$.

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS MÉROMORPHES AYANT DES VALEURS ASYMPTOTIQUES.

I. — Existence de l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$.

33. Les propriétés établies dans le précédent Chapitre pour les fonctions entières générales sont encore valables *pour les fonctions méromorphes ayant une valeur asymptotique au moins*. Seulement il faut modifier un peu les raisonnements qui ont fourni ces propriétés, comme on l'a fait dans le premier Mémoire (n$^{\text{os}}$ 24 et suivants) auquel je renvoie le lecteur.

En vertu de l'hypothèse il existe un chemin continu Γ, allant à l'infini, sur lequel la fonction méromorphe $\varphi(z)$ tend vers une limite ω, finie ou infinie, mais qu'on peut (sans restreindre la généralité) supposer finie, moyennant une transformation homographique de $\varphi(z)$.

On formera la famille de fonctions méromorphes $\varphi_n(z) = \varphi(z\sigma^n)$, σ étant un nombre complexe quelconque de module > 1, et l'on montrera qu'*il est impossible de supposer cette famille normale en tous les points d'une couronne limitée par deux courbes* $(C, C\sigma)$, C étant une courbe fermée quelconque (par exemple un cercle de centre O) entourant l'origine. Cela tient à ce que la courbe Γ, allant à l'infini, traverse toutes les couronnes $(C\sigma^n, C\sigma^{n+1})$, et si l'on considère dans la couronne $(C, C\sigma)$ l'arc $\widehat{A_nB_n} = \frac{\widehat{\alpha_n\beta_n}}{\sigma^n}$, image d'un arc $\alpha_n\beta_n$ de Γ qui traverse la couronne $(C\sigma^n, C\sigma^{n+1})$, de $C\sigma^n$ à $C\sigma^{n+1}$, l'hypothèse faite sur $\varphi(z)$ entraîne, sur A_nB_n, $|\varphi_n(z) - \omega| < \varepsilon_n$, ε_n tendant vers zéro quand n tend vers l'infini. Par conséquent, en raisonnant comme au n° 24 du premier Mémoire, on obtiendrait cette conclusion absurde que les fonctions $\varphi_n(z)$ devraient converger uniformément vers ω, dans toute la couronne $(C, C\sigma)$, lorsque n tend vers l'infini, c'est-à-dire que $\varphi(z)$ devrait tendre uniformément vers ω lorsque z tend vers l'infini [1].

34. Dans toute couronne $(C, C\sigma)$, d'épaisseur σ, il existe donc au moins un point z_0 où la famille des $\varphi_n(z)$ n'est pas normale, et l'on en déduit que quelque petit que soit le cercle $\mathcal{D}_0$ de centre z_0, dans l'ensemble des aires $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_0\sigma$, $\mathcal{D}_0\sigma^2$, ..., $\mathcal{D}_0\sigma^n$, ... la fonction $\varphi(z)$ prendra une infinité de fois toute valeur finie ou infinie, sauf peut-être deux valeurs au plus.

Si la fonction $\varphi(z)$ admet deux valeurs exceptionnelles dans tout le plan, ces valeurs seront précisément les deux valeurs que $\varphi(z)$ ne prendra pas dans l'ensemble des aires $\mathcal{D}_0\sigma^n$ (ou qu'elle ne prendra qu'un nombre limité de fois). Si $\varphi(z)$ admet une valeur exceptionnelle seulement dans tout le plan, elle sera certainement l'une des deux valeurs que $\varphi(z)$ pourra ne pas prendre (ou ne prendre qu'un nombre limité de fois) dans les aires $\mathcal{D}_0\sigma^n$.

35. On introduit ici encore comme au n° 8 l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ formé des points où la famille des $\varphi_n(z) = \varphi(z\sigma^n)$ n'est pas normale. Il y a un point au moins de $\mathcal{E}_\sigma$ dans toute couronne $(C, C\sigma)$ entourant l'origine. Si z_0 est un point de $\mathcal{E}_\sigma$, tous les $z_0\sigma^{\pm n}$ sont points de $\mathcal{E}_\sigma$: l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ reste invariable par toutes les transformations $(z, z\sigma^{\pm n})$.

II. — Propriétés de $\mathcal{E}_\sigma$. Structure.

36. Il est évident que tout point limite de points de $\mathcal{E}_\sigma$ appartient à $\mathcal{E}_\sigma$: *$\mathcal{E}_\sigma$ est fermé* (*voir* n° 9).

37. *Un point de $\mathcal{E}_\sigma$ peut-il être isolé dans $\mathcal{E}_\sigma$?* Oui, puisqu'on a vu

---

[1] Il n'est pas inutile de faire remarquer que la démonstration du n° 33 s'applique exactement aux fonctions méromorphes ayant une valeur exceptionnelle finie a, et aux fonctions entières générales, car, pour ces fonctions, la valeur a, ou bien l'infini, sont des valeurs asymptotiques.

qu'il y a des fonctions entières dont l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ est dénombrable, et puisque par transformation homographique à coefficients constants, on déduit d'une fonction entière une fonction méromorphe. On peut reconnaître aisément les circonstances *nécessaires* qui doivent se présenter pour qu'un point de $\mathcal{E}_\sigma$ soit isolé; il suffit de faire des raisonnements analogues à ceux des nos 10, 11 et 12.

En effet, soit z_0 le point considéré et $\mathcal{O}$ un cercle, de centre z_0, ne contenant aucun point de $\mathcal{E}_\sigma$ autre que z_0. De toute suite infinie de fonctions $\varphi_n(z)$ on peut extraire une suite partielle $\varphi_{n_i}(z)$ qui converge en tout point de $\mathcal{O}$ distinct du centre, vers une fonction méromorphe $F(z)$ qui peut être une constante finie ou infinie. Par une même transformation homographique à coefficients constants effectuée sur les φ_n on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $F(z)$ n'est pas une constante infinie. L'existence de la limite $F(z)$ pour la suite $\varphi_{n_i}(z)$ sur tout cercle de centre z_0 intérieur à $\mathcal{O}$ n'entraine pas l'existence de cette limite au centre lorsque le centre z_0 est *point limite de pôles d'une infinité de fonctions* φ_{n_i}, alors qu'en vertu du lemme de Weierstrass, elle l'entraînerait si z_0 n'était pas point limite de pôles d'une infinité de fonctions $\varphi_{n_i}(z)$. On reconnaîtra donc aisément que, si z_0 est isolé dans $\mathcal{E}_\sigma$, l'une ou l'autre des deux circonstances suivantes doit se présenter.

1° Ou bien une suite infinie extraite de la suite des φ_n et convergente autour de z_0 prend, dans le voisinage de z_0, toute valeur finie ou infinie *sans en excepter aucune ;*

2° Ou bien, si toute suite infinie de fonctions φ_{n_i} convergente dans $\mathcal{O}$, hors z_0, est telle que, dans un certain voisinage de z_0, aucune des fonctions φ_{n_i} de la suite ne prenne une certaine valeur a [1], finie ou infinie, il faudra nécessairement que, pour l'une au moins de ces suites, la limite vers laquelle elle tend, au voisinage de z_0, soit précisément la constante a.

L'une ou l'autre de ces deux circonstances suffit en effet à empêcher de conclure, à l'aide du lemme de Weierstrass, qu'une suite φ_{n_i}, convergente autour de z_0, converge en z_0.

---

[1] La valeur exceptionnelle a, dépendant évidemment de la suite considérée.

C'est évident pour la première, car si elle se trouve réalisée pour une suite infinie φ_{n_i} convergente autour de z_0, aucune des suites transformées homographiques de la suite des φ_{n_i} ne sera formée de fonctions *holomorphes* autour de z_0.

Pour la deuxième il est clair, la suite des $\frac{1}{\varphi_{n_i}-a}$ étant formée de fonctions holomorphes autour de z_0, que si cette suite converge *autour de* z_0 vers une fonction holomorphe $F(z)$ ou vers une constante finie, elle convergera aussi *en* z_0, soit vers la valeur en z_0 de $F(z)$, soit vers la constante finie précédente. Et si cette circonstance se produisait pour toute suite convergente φ_{n_i} extraite de la suite des $\varphi_n(z)$, la famille des φ_n serait normale en z_0, ce qui est absurde. Il faut, pour empêcher la contradiction précédente, que l'une au moins des suites $\frac{1}{\varphi_{n_i}-a}$ converge, autour de z_0, vers l'infini ([1]), c'est-à-dire que l'une au moins des suites φ_{n_i}, admettant autour de z_0 la valeur exceptionnelle a, converge, autour de z_0, vers la constante a.

38. Il suit de là qu'*aucun point* z_0 *de* $\mathcal{E}_\sigma$ *ne pourra être isolé dans* $\mathcal{E}_\sigma$ si, par exemple, autour de chacun de ces points z_0, la famille des $\varphi_n(z)$ admet *deux valeurs exceptionnelles distinctes, finies ou infinies* (valeurs qui peuvent varier avec le point considéré).

Si a et b sont en effet ces deux valeurs, qu'on peut supposer égales à o et ∞ en faisant sur $\varphi(z)$ une transformation homographique préalable, on verra que les $\varphi_n(z)$ sont holomorphes autour de z_0 et admettent autour de z_0 la valeur exceptionnelle zéro. Cela suffit pour qu'on puisse conclure, comme au n° 12, que z_0 ne peut être isolé dans $\mathcal{E}_\sigma$.

En particulier, si la fonction méromorphe $\varphi(z)$ admet, dans tout le plan z, *deux valeurs exceptionnelles distinctes* ([2]) qu'elle ne prend pas ou qu'elle ne prend qu'un nombre limité de fois, aucun point de $\mathcal{E}_\sigma$ ne peut être isolé : $\mathcal{E}_\sigma$ *est alors parfait.*

39. L'ensemble fermé $\mathcal{E}_\sigma$ se décompose en un ensemble parfait et

([1]) *Voir* n° 11 du présent Mémoire.

([2]) Ces deux valeurs sont alors des valeurs asymptotiques de $\varphi(z)$.

un ensemble dénombrable. *L'ensemble parfait peut être nul :* en voici un exemple où les points de $\mathcal{E}_\sigma$ forment un ensemble dénombrable dont tous les points sont isolés, excepté les deux points limites o et ∞.

q étant un nombre réel > 1, il suffit de prendre

$$\varphi(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{q-z} + \ldots + \frac{1}{q^n - z} + \ldots.$$

On voit aisément que la série converge uniformément dans toute région finie du plan qui ne contient aucun des points q^n $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$. Elle définit donc une fonction méromorphe $\varphi(z)$ dont les pôles sont les q^n. On a

$$\varphi(qz) = \frac{1}{1-qz} + \frac{1}{q-qz} + \ldots + \frac{1}{q^n - qz} + \ldots,$$

$$\varphi_1(z) = \varphi(qz) = \frac{1}{1-qz} + \frac{1}{q}\varphi(z),$$

$$\varphi_2(z) = \varphi(q^2 z) = \frac{1}{1-q^2 z} + \frac{1}{q}\varphi(qz) = \frac{1}{1-q^2 z} + \frac{1}{q}\frac{1}{1-qz} + \frac{1}{q^2}\varphi(z),$$

et, en général,

$$\varphi_n(z) = \varphi(q^n z) = \frac{1}{1-q^n z} + \frac{1}{q}\frac{1}{1-q^{n-1}z} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}}\frac{1}{1-qz} + \frac{1}{q^n}\varphi(z)$$
$$= \psi_n(z) + \frac{1}{q^n}\varphi(z),$$

en posant

$$\psi_n(z) = \frac{1}{1-q^n z} + \frac{1}{q}\frac{1}{1-q^{n-1}z} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}}\frac{1}{1-qz}.$$

Dans toute aire finie Δ du plan, ne renfermant aucun des points $q^{\pm k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$, ou de leurs points limites o et ∞, $\psi_n(z)$ tend uniformément vers zéro quand n tend vers l'infini.

En effet, on a

$$\psi_n(z) = \left[\frac{1}{1-q^n z} + \frac{1}{q}\frac{1}{1-q^{n-1}z} + \ldots + \frac{1}{q^p}\frac{1}{1-q^{n-p}z}\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{q^{p+1}}\frac{1}{1-q^{n-p-1}z} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}}\frac{1}{1-qz}\right].$$

Pour la deuxième partie

$$\left[\frac{1}{q^{p+1}}\frac{1}{1-q^{n-p-1}z}+\ldots+\frac{1}{q^{n-1}}\frac{1}{1-qz}\right],$$

il est visible d'abord que, quel que soit l'entier positif k et le point z dans l'aire Δ, on a

$$\left|\frac{1}{1-q^k z}\right|<\lambda,$$

λ étant un nombre positif fixe, indépendant de k et de z : cela résulte de ce que

$$\frac{1}{1-q^k z}=\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-q^k},$$

et puisque z reste dans Δ, qui ne contient aucun des $q^{\pm k}$, $\frac{1}{z}$ reste dans Δ' finie qui ne renferme aucun des $q^{\pm k}$; donc $\left|\frac{1}{z}-q^k\right|>\lambda_2$, tandis que $\left|\frac{1}{z}\right|<\lambda_1$, et par conséquent

$$\left|\frac{1}{1-q^k z}\right|<\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\lambda.$$

La série $\sum\frac{1}{q^k}$ étant d'ailleurs convergente, on peut trouver un nombre p assez grand pour que, quel que soit $n>p$, on ait

$$\frac{1}{q^{p+1}}+\frac{1}{q^{p+2}}+\ldots+\frac{1}{q^{n-1}}<\varepsilon,$$

ε étant donné arbitrairement petit. p étant ainsi fixé après la donnée de ε, on aura, quel que soit $n>p$,

$$\left|\frac{1}{q^{p+1}}\frac{1}{1-q^{n-p-1}z}+\ldots+\frac{1}{q^{n-1}}\frac{1}{1-qz}\right|<\lambda\varepsilon;$$

mais, p étant fixé, on pourra évidemment choisir n assez grand pour que

$$\left|\frac{1}{1-q^n z}+\frac{1}{q}\frac{1}{1-q^{n-1}z}+\ldots+\frac{1}{q^p}\frac{1}{1-q^{n-p}z}\right|<\varepsilon,$$

puisque cette somme est composée d'un nombre fini de termes dont chacun tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

On peut donc, quel que soit z dans Δ, déterminer n assez grand pour que

$$|\psi_n(z)| < (\lambda + 1)\varepsilon,$$

c'est-à-dire que $\psi_n(z)$ tend uniformément vers zéro dans Δ quand n tend vers l'infini.

$\varphi(z)$ étant d'ailleurs holomorphe dans Δ, il en résulte que

$$\varphi_n(z) = \psi_n(z) + \frac{1}{q^n}\varphi(z)$$

tend aussi uniformément vers zéro dans Δ quand n tend vers l'infini.

La famille des φ_n est normale dans toute aire finie Δ ne renfermant aucun des points 0 et $q^{\pm k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$. *L'ensemble* $\mathcal{E}_q$ *relatif à la fonction* $\varphi(z)$ *ne se compose que des points* $q^{\pm k}$ *et de leurs deux points limites* 0 *et* ∞. Il est, en effet, visible que les pôles de $\varphi_n(z) = \varphi(q^n z)$ sont les points q^{k-n} $(k = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$. Donc, en un point q^p (p entier réel, positif, nul ou négatif quelconque), toutes les fonctions φ_n, d'indice $n \geqq -p$, ont un pôle simple, et, comme autour de ce point q^p elles tendent vers zéro, elles ne peuvent former une famille normale en ce point lui-même. On se rend compte aisément *qu'autour de tout point* $q^{\pm k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ *les fonctions* $\varphi_n(z)$ *prennent toute valeur finie ou infinie, sauf peut-être la valeur zéro.* Zéro est d'ailleurs une valeur asymptotique de $\varphi(z)$, atteinte sur tout rayon issu de l'origine, et distinct de l'axe réel positif. Ce n'est pas une valeur exceptionnelle de $\varphi(z)$ dans tout le plan, car il y a évidemment sur l'axe réel positif une infinité de zéros de $\varphi(z)$, séparant les points q^k $(k = 0, 1, 2, \infty)$. C'est la seule valeur asymptotique de $\varphi(z)$, puisque, s'il y en avait une autre, on va voir (n° 40) que $\mathcal{E}_\sigma$ *serait continu.*

Il est bon de remarquer que la fonction $\varphi(z)$ étudiée ici n'est autre, au signe près, que la dérivée logarithmique de la fonction entière

$$f(z) = \prod^{\infty} \left(1 - \frac{z}{q^n}\right)$$

étudiée au n° 13 du présent Mémoire, et pour laquelle il avait déjà été remarqué que l'ensemble $\mathcal{E}_q$ se composait des seuls points $q^{\pm k}$ et de leurs points limites.

Il ne serait pas difficile de généraliser beaucoup l'exemple actuel en considérant des séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{a_n - z}$, souvent étudiées par les géomètres.

40. Mais l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ relatif à une fonction méromorphe $\varphi(z)$ *contiendra certainement un ensemble parfait non nul lorsque la fonction $\varphi(z)$ aura au moins deux valeurs asymptotiques distinctes a et b finies ou infinies, et cet ensemble parfait sera continu quel que soit σ.* On peut, en effet, montrer alors que sur toute courbe fermée entourant l'origine existe au moins un point où la famille des $\varphi_n(z) = \varphi(z\sigma^n)$ n'est pas normale. Car si la famille était normale en tout point de C, elle le serait en tout point d'un anneau $\mathcal{C}$ assez étroit contenant C. Or si l'on désigne par Γ_1 et Γ_2 les courbes allant à l'infini, sur lesquelles $\varphi(z)$ tend respectivement vers a et b, ces courbes traverseront tous les anneaux $\mathcal{C}\sigma^n$ pour $n \geqq n_0$ et le raisonnement utilisé au n° 33 du présent Chapitre, appliqué à ces deux courbes Γ_1 et Γ_2, prouverait que $\varphi_n(z)$ devrait, dans $\mathcal{C}$, tendre uniformément vers a d'une part, vers b d'autre part, quand n tend vers l'infini, ce qui est manifestement absurde. Il en résulte que, sur toute courbe C entourant l'origine existe un point au moins de $\mathcal{E}_\sigma$, et par suite $\mathcal{E}_\sigma$ contient un continu unissant l'origine au point à l'infini du plan des z.

41. Ce qui précède n'empêche d'ailleurs pas que les $\varphi_n(z)$ puissent être normales dans des régions distinctes de l'anneau $\mathcal{C}$, séparées par des continus où ladite famille cesse d'être normale. Cela arrivera, par exemple, pour la fonction très simple $\operatorname{th} z = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$, qui admet les valeurs exceptionnelles $+1$ et -1, valeurs qui sont des valeurs asymptotiques atteintes respectivement sur l'axe réel positif et l'axe réel négatif.

Si l'on choisit σ réel et > 1, l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ se compose ici de *l'axe imaginaire.*

En tout point situé à droite de cet axe, les $\varphi_n(z) = \operatorname{th}(\sigma^n z)$ forment une famille normale qui tend vers $+1$ quand n tend vers l'infini. En tout point situé à gauche, ladite famille est normale et tend vers -1.

Pour la fonction $\operatorname{tang} z = -i \operatorname{th} iz$, on a des conclusions analogues. Si σ réel > 1, la famille des $\operatorname{tang} \sigma^n z$ est normale : 1° au-dessus de l'axe réel et tend vers $+i$ quand n tend vers l'infini; $+i$ est la valeur asymptotique de $\operatorname{tang} z$ atteinte sur tout rayon du demi-plan supérieur; 2° au-dessous de l'axe réel et tend vers $-i$ quand n tend vers l'infini; $-i$ est la deuxième valeur asymptotique de $\operatorname{tang} z$.

$+i$ et $-i$ sont d'ailleurs deux valeurs exceptionnelles que $\operatorname{tang} z$ ne prend en aucun point du plan.

$\mathcal{E}_\sigma$ se compose ici de *tous les points de l'axe réel*, sur lequel $\operatorname{tang} z$ ne prend d'ailleurs que des valeurs réelles.

42. Les remarques faites aux nos 16, 17, 18 du précédent Chapitre conservent ici toute leur valeur; il suffira donc de les signaler.

Structure géométrique de $\mathcal{E}_\sigma$.

$\mathcal{E}_\sigma$ peut être superficiel, linéaire ou discontinu. On a fourni déjà des exemples pour les deux dernières circonstances. Voici un exemple où $\mathcal{E}_\sigma$ est superficiel.

43. Quel que soit $\sigma (|\sigma| > 1)$, *l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ relatif à la fonction elliptique classique $\zeta(z)$ se compose de tous les points du plan.*

Ceci n'a rien qui nous surprenne puisqu'on a déjà vu, au n° 20, que l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ relatif à la fonction entière elliptique $\sigma(z)$ était (pour des conditions très générales imposées à σ), lui aussi, identique au plan tout entier; et l'on sait que

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}.$$

Mais on voit mieux directement que, *quel que soit* σ, tout point du plan fait partie de l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ relatif à la fonctien $\zeta(z)$. Il suffit de répéter un raisonnement déjà fait dans le premier Mémoire au n° 26, pour le même objet. La fonction $\zeta(z)$ prend, en effet, toute valeur finie ou infinie dans un certain parallélogramme D formé de N parallélogrammes de périodes accolés et dans tout parallélogramme équipollent à D.

Si $\mathcal{D}_0$ est une aire arbitrairement petite du plan, l'aire $\mathcal{D}_0 \sigma^n$ sera, dès que n sera assez grand, assez grande pour contenir un parallélogramme équipollent à D. $\zeta(z)$ prendra dans $\mathcal{D}_0 \sigma^n$ toute valeur finie ou infinie, en particulier o et ∞, dès que $n > n_0$, c'est-à-dire que, pour $n > n_0$, les $\zeta_n(z) = \zeta(\sigma^n z)$ prendront dans $\mathcal{D}_0$ toute valeur finie ou infinie.

Mais $\mathcal{D}_0 \sigma^n$ contenant un nombre de parallélogrammes des périodes (ou un nombre de parallélogrammes D) qui tend vers l'infini avec n, $\zeta(z)$ aura dans $\mathcal{D}_0 \sigma^n$ un nombre de pôles grandissant indéfiniment avec n (aussi un nombre de zéros qui tend vers l'infini). On verra que les pôles de $\zeta_n(z)$ dans $\mathcal{D}_0$ sont en nombre indéfiniment croissant avec n, pendant que leurs distances mutuelles tendent toutes vers zéro.

Si les $\zeta_n(z)$ étaient une famille normale dans $\mathcal{D}_0$, toute fonction limite devrait donc être identique à la constante infinie.

Mais ce qui a été dit des pôles se répète pour les zéros (ou toute autre valeur finie) et toute fonction limite de la suite des ζ_n devrait être identique à la constante zéro.

Cette contradiction prouve que, dans aucune aire $\mathcal{D}_0$ du plan z, la famille des $\zeta_n(z)$ ne peut être normale. *L'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ se compose de tout ce plan.* $\mathcal{D}_0$ étant une aire quelconque du plan z et σ un nombre complexe quelconque de module > 1, la fonction $\zeta(z)$ prendra une infinité de fois toute valeur finie ou infinie dans l'ensemble des aires $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0\sigma, \ldots, \mathcal{D}_0\sigma^n, \ldots$. Cela s'explique de soi-même puisqu'on a vu que $\mathcal{D}_0\sigma^n$ finit par contenir un nombre de parallélogrammes D indéfiniment croissant.

44. J'ai donné les exemples des fonctions $\operatorname{th} z$ et $\operatorname{tang} z$ où, avec σ réel, on obtenait un ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ composé respectivement des axes imaginaire et réel. Il s'en faut que l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$, lorsqu'il est continu linéaire, soit toujours d'une structure aussi simple.

On peut, en effet, fournir facilement des exemples très nombreux et très généraux de fonctions méromorphes pour lesquels *l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ est un continu linéaire d'une nature très compliquée.* Ces exemples s'obtiennent par des fonctions méromorphes satisfaisant à des équations fonctionnelles simples qu'on étudie à propos de la théorie de l'itération des fractions rationnelles (pour laquelle je renvoie le lecteur à un Mémoire cité déjà au Chapitre I, n° 21). On sait en effet que, si $R(z)$ est une fraction rationnelle telle seulement que

$$R(0) = 0 \qquad \text{avec} \qquad |\sigma| = |R'(0)| > 1,$$

il existe une fonction méromorphe $\varphi(z)$ pour laquelle

$$\varphi(\sigma z) = R[\varphi(z)].$$

Il me suffira dès lors de renvoyer le lecteur au n° 21 du Chapitre I du présent Mémoire, où toutes les observations faites pour le cas où $R(z)$ est un polynome, valent pour le cas où $R(z)$ est une fraction rationnelle. On pourra avoir aisément pour $\mathcal{E}_\sigma$ des continus de Jordan sans points doubles, mais n'ayant pas de tangente, ou des continus ayant des points doubles partout denses sur eux-mêmes, etc.

45. On pourra également, comme au n° 22 du présent Mémoire et par les mêmes voies, former des fonctions méromorphes pour lesquelles *l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ est parfait discontinu*. Il suffira de s'adresser à des fractions rationnelles $R(z)$ pour l'itération desquelles l'ensemble que j'ai dénommé E′ est parfait discontinu. M. Fatou en a donné de nombreux exemples (*C. R. Acad. Sc.*, 15 octobre 1906 et 21 mai 1917); il suffirait, par exemple, de s'adresser à des fractions $R(z)$ à cercle fondamental ou bien de transformer le polynome $P(z) = SZ + Z^p$ qui a servi à former l'exemple du n° 22 par une transformation homographique comme suit :

Posant

$$Z = \frac{a\zeta}{c\zeta + d}$$

[a, b, c, d constantes ($ad \neq 0$)] et

$$Z_1 = \frac{a\zeta_1}{c\zeta_1 + d},$$

la relation

$$Z_1 = P(Z) = SZ + Z^p$$

devient

$$\zeta_1 = R(\zeta),$$

ζ étant rationnel, et l'on a

$$R(0) = 0, \qquad S = R'(0), \qquad |S| > 1,$$

et la fonction méromorphe $\varphi(z)$ définie par

$$\varphi(Sz) = R[\varphi(z)]$$

n'est autre que la transformée de $f(z)$, fonction entière solution de

$$f(sz) = P[f(z)],$$

par la transformation homographique

$$f(z) = \frac{a\varphi(z)}{c\varphi(z) + d}.$$

Cette fonction φ *admet une valeur exceptionnelle* qui est évidemment la valeur $-\frac{d}{c}$ correspondant à la valeur infinie que f ne prend jamais. C'est une valeur asymptotique. Il est clair que les fonctions f et φ admettent le même ensemble $\mathcal{E}_s$ (1) et l'on a vu au n° 22 que cet ensemble, pour p assez grand, était *parfait discontinu*. En tout point du plan qui n'est pas de $\mathcal{E}_s$, la famille des $\varphi(s^n z) = \varphi(z)$ est normale et tend vers $-\frac{d}{c}$ quand n tend vers l'infini.

Remarquons que déjà la fonction $\varphi(z) = \sum_0^\infty \frac{1}{q^n - z}$ (n° 39) avait un ensemble $\mathcal{E}_q$ *partout discontinu*, mais cet ensemble était dénombrable, non parfait.

---

(1) Si l'on veut éviter d'avoir des fonctions méromorphes qui soient de simples transformées homographiques de fonctions entières, on s'adressera à des fractions rationnelles qui ne soient pas transformables homographiquement en polynomes. C'est facile avec des fractions à cercle fondamental (*voir* Note de M. Fatou, 21 mai 1917, où l'on a des exemples d'ensembles E' parfaits discontinus situés sur le cercle fondamental).

Propriétés analytiques des points de $\mathcal{E}_\sigma$. Approximation simultanée des racines des équations $f(z) = a$.

46. Il me suffira de renvoyer aux nos 30, 31, 32 du premier Chapitre, car tout ce qu'on y a dit de l'*approximation asymptotique simultanée par les points* $z_0\sigma^n$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ (z_0 point quelconque de $\mathcal{E}_\sigma$) *des racines de toutes les équations* $f(z) = a$, *s'applique ici aux racines de toutes les équations* $\varphi(z) = a$, *hormis peut-être pour les deux valeurs (ou l'unique valeur) de* a *que les fonctions* $\varphi_n(z) = \varphi(\sigma^n z)$ *pourraient ne pas prendre autour de* z_0.

CHAPITRE III.

LES FONCTIONS MÉROMORPHES SANS VALEUR ASYMPTOTIQUE.

47. J'ai déjà fait remarquer (M_1, n° 32) que l'hypothèse de l'existence d'une valeur asymptotique n'était pas un pur artifice de démonstration. Il est aisé de montrer, ici aussi, que si l'on abandonne cette hypothèse, le théorème fondamental peut n'être pas vrai : l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$ peut cesser d'exister, ou du moins être réduit à l'origine et au point à l'infini, ce qui n'a plus d'intérêt.

En effet, la fonction qu'on a tirée des fonctions elliptiques (1) au n° 32 du premier Mémoire satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f(qz) = f(z),$$

q étant un nombre de module > 1. Elle est méromorphe en tout point distinct de zéro et de l'infini. L'origine et l'infini sont points singuliers essentiels isolés de $f(z)$, limites de pôles de $f(z)$; pour aucun de ces points, $f(z)$ ne possède de valeur asymptotique.

Il est bien clair que l'ensemble $\mathcal{E}_q$ ne possède aucun point distinct de 0 et ∞. Car dans toute aire finie du plan, ne contenant pas l'origine,

(1) $\varphi(Z)$ étant doublement périodique, périodes $2\pi i$ et a, $f(z) = \varphi(\log z)$ satisfait à l'équation $f(qz) = f(z)$, où $q = e^a$.

la famille des $f_n(z)$ est formée de fonctions toutes identiques à $f(z)$. Cette famille est normale, $\mathcal{E}_\sigma$ cesse d'exister.

Il est vrai que dans toute couronne circulaire concentrique à l'origine, limitée par deux cercles (C, Cq) la fonction $f(z)$ prend toute valeur finie ou infinie, un nombre de fois égal à l'ordre de la fonction elliptique $\varphi(z)$ dont on a tiré $f(z)$. Ainsi on peut encore *réduire le domaine où il est possible d'affirmer que $f(z)$ prend toute valeur finie ou infinie,* à une couronne circulaire, c'est-à-dire *à un domaine fini*, au lieu de considérer tout le voisinage du point singulier essentiel, c'est-à-dire l'extérieur d'un grand cercle, domaine infini.

48. Et à ce sujet, il suffira de se reporter au n° 29 du premier Mémoire pour voir que pareille réduction à un domaine fini est possible pour toute fonction méromorphe n'ayant aucune valeur asymptotique : le plan z a été découpé en polygones finis contigus tels que dans chacun d'eux $f(z)$ prend toute valeur finie ou infinie. Cette division remplace, dans le cas présent, la propriété reconnue dans les Chapitres précédents aux points de $\mathcal{E}_\sigma$, sans être aussi précise.

49. Aussi y a-t-il lieu de se demander, lorsque la fonction $f(z)$ n'a pas de valeur asymptotique, si l'existence de $\mathcal{E}_\sigma$ peut résulter de considérations autres que celle des valeurs asymptotiques de $f(z)$. L'étude des zéros, des pôles de $f(z)$, et de leur allure autour du point à l'infini, qu'on peut déduire de renseignements sommaires sur la croissance de $f(z)$ rendra de grands services ici. Voici quelques indications rapides à ce sujet.

50. Soit $f(z) = \frac{G(z)}{G_1(z)}$ une fonction méromorphe, quotient des deux fonctions entières $G(z)$ et $G_1(z)$. Formant la famille des $f_n(z) = f(\sigma^n z)$ avec $|\sigma| > 1$, on peut se proposer de voir *quelles conditions doit remplir $f(z)$ pour que l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$, signalé aux Chapitres précédents, n'ait aucun point distinct de* 0 *et* ∞. En tout point du plan distinct de 0 et ∞, les $f_n(z)$ formeraient alors une famille normale. Soit z_0 un pareil point, d'ailleurs quelconque.

La suite des valeurs $Z_n = f_n(z_0)$ peut être dense dans tout le plan des Z ou ne pas l'être. Les deux cas méritent un examen.

51. Premier cas. — Si la suite de $Z_n = f_n(z_0)$ n'est pas dense dans tout le plan des Z, soit a une valeur dont les Z_n ne s'approchent pas indéfiniment. Cela veut dire que, quel que soit n,

$$|f_n(z_0) - a| > \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ fixe} \neq 0).$$

Si a était la valeur infinie, l'inégalité précédente serait remplacée par

$$|f_n(z_0)| < \mathrm{M} \qquad (\mathrm{M} \text{ fixe}),$$

les f_n seraient bornées en z_0.

Alors la suite des $\frac{1}{f_n(z_0) - a}$ est bornée, car $\left|\frac{1}{f_n(z_0) - a}\right| < \varepsilon$.

Les fonctions $\varphi_n(z) = \frac{1}{f_n(z) - a}$ formeraient une famille normale dans tout le plan des z (sauf o et ∞), comme la famille des $f_n(z)$. De plus, en z_0, ces fonctions seraient bornées.

Un théorème connu (¹) permet de conclure que, dans toute région Δ du plan contenant z_0, et ne contenant ni o ni ∞, le nombre des pôles de toute fonction $\varphi_n(z)$ reste inférieur à un nombre fixe M indépendant de n, dépendant naturellement de la région Δ. Il sera commode de choisir pour Δ une couronne circulaire de centre O limitée par deux cercles de rayons r et R.

Le résultat précédent signifie que dans toute couronne $(r\sigma^n, \mathrm{R}\sigma^n)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ le nombre des pôles de $\varphi(z)$ restera inférieur à un nombre fixe $\mathrm{M}(\mathrm{R}, r)$, ne dépendant que des rayons R et r et de la fonction φ, mais ne dépendant pas de n. Les pôles de $\varphi(z)$ étant d'ailleurs les racines de $f(z) - a = 0$, le résultat précédent prouve que les racines de l'équation $f(z) - a = 0$ doivent être assez régulièrement réparties dans tout le plan, et, en tout cas, que leur nombre, dans toute couronne $(r\sigma^n, \mathrm{R}\sigma^n)$, reste inférieur à un nombre fixe $\mathrm{M}(\mathrm{R}, r)$.

(¹) Montel, *Sur les familles normales de fonctions analytiques* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1916, nᵒˢ 33 et 34).

52. Toutes les fois qu'une propriété connue des zéros de $f(z) - a = 0$ contredira le résultat précédent, on pourra affirmer l'existence de points de $\mathcal{E}_\sigma$ distincts de 0, ∞, ou bien on devra conclure que l'hypothèse faite sur les valeurs de $f_n(z_0)$ n'est pas justifiée, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de points $Z_{n_i} = f_{n_i}(z_0)$ tendant vers a quand i tend vers l'infini. On cherchera à remplacer la valeur a par une autre valeur et le point z_0 par un autre point z'_0. On ne devra renoncer à utiliser le critérium précédent que dans le cas très intéressant suivant : *quel que soit $z_0 \neq 0$, la suite des valeurs $Z_n = f_n(z_0)$ est dense dans tout le plan des Z*; réservons ce cas pour la suite.

53. On peut, de suite, indiquer des exemples assez généraux qu'éclaire une utilisation judicieuse du critérium précédent. Au préalable, ce critérium peut être transformé et rendu plus simple. r et R sont des nombres positifs arbitraires à l'aide desquels on forme les couronnes $(r\sigma^n, R\sigma^n)$. Il n'est pas essentiel que la couronne (r, R) contienne z_0, car une couronne quelconque (r, R) contient toujours un antécédent ou un conséquent de z_0, soit $z_0\sigma^{\pm k}$, et cela suffit pour la validité du raisonnement précédent.

On peut même montrer que la limite supérieure du nombre des racines de $f(z) - a = 0$ dans une couronne quelconque (r, R) ne dépend que du rapport des rayons $\frac{R}{r}$; autrement dit, on peut trouver un nombre $M\left(\frac{R}{r}\right)$ tel que dans toute couronne (r, R) d'épaisseur relative donnée $\frac{R}{r}$, et quel que soit r, le nombre des racines de $f(z) - a = 0$ ne surpasse pas $M\left(\frac{R}{r}\right)$. Car, si l'on pouvait trouver une suite de couronnes (r_n, R_n) $(n = 1, 1, \ldots, \infty)$ $(r_n \to \infty)$, d'épaisseur $\frac{R_n}{r_n} = \frac{R}{r}$ dans lesquelles le nombre des racines de $f(z) - a = 0$ tende vers l'infini avec n, il serait évidemment possible de choisir une couronne initiale (r_0, R_0) d'épaisseur initiale finie $\frac{R_0}{r_0} > \frac{R}{r}$ assez grande pour que chacune des couronnes (r_n, R_n) soit composée de points intérieurs à une couronne $(r_0\sigma^{k_n}, R_0\sigma^{k_n})$ conséquente de (r_0, R_0). $\left(\text{Prendre par exemple } \frac{R_0}{r_0} > |\sigma| + \frac{R}{r}.\right)$ Alors le nombre des zéros de $f(z) - a$ dans la couronne $(r_0\sigma^{k_n}, R_0\sigma^{k_n})$ devrait tendre vers l'infini avec n, ce qui est contradictoire avec le résultat précédemment obtenu.

54. En définitive, voici comment se résume le critérium précédent : S'il existe un point z_0 du plan, tel que les $f_n(z_0)$ ne s'approchent pas indéfiniment de la valeur a, et si les $f_n(z)$ forment une famille normale dans tout le plan, hors o et ∞, le nombre des racines de $f(z) - a = 0$ dans toute couronne de centre O d'épaisseur relative $\frac{R}{r}$, ne pourra surpasser une limite fixe $M\left(\frac{R}{r}\right)$, quelle que soit la position de la couronne, fixée par la grandeur de r. L'épaisseur $\frac{R}{r}$ peut, d'ailleurs, être prise arbitrairement.

55. Il en résulte que le nombre des racines de $f(z) - a = 0$ dans un cercle de rayon ρ est une fonction croissante de ρ *dont la croissance est limitée supérieurement*. Si l'on prend, par exemple, pour simplifier, $\frac{R}{r} = |\sigma|$, et si, partant d'un cercle de rayon r_0, on considère les cercles $r_0|\sigma|^n$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$; m_0 étant le nombre des racines de $f(z) - a = 0$ dans le cercle de rayon r_0, le nombre des racines de $f(z) - a = 0$ dans le cercle $r_n = r_0|\sigma|^n$ sera évidemment

$$N(r_n) \leqq m_0 + nM(|\sigma|).$$

Ceci peut s'écrire, en remarquant que $n = \frac{\log r_n - \log r_0}{\log|\sigma|}$,

$$N(r_n) \leqq m_0 + M(|\sigma|)\frac{\log r_n - \log r_0}{\log|\sigma|},$$
$$N(r_n) \leqq A \log r_n + B,$$

A et B étant deux constantes,

En somme, le nombre des zéros de $f(z) - a$ dans un cercle de rayon r *croît moins vite que* $A \log r + B$. Ces zéros DOIVENT DONC ÊTRE ASSEZ RARES.

56. Si l'on prend $f = \frac{G(z)}{G_1(z)}$ quotient des deux fonctions entières G et G_1, les zéros de $f - a$ sont les zéros de la fonction entière $G - aG_1$,

et du critérium précédent résulte que, dans les hypothèses faites, $G - aG_1$ *est d'ordre nul*. On aurait pu le voir directement, en remarquant que, si les a_n sont les racines de $G - aG_1 = 0$, la série $\sum \frac{1}{|a_n|^\varepsilon}$ converge quel que soit ε positif.

En effet, r_0 étant pris arbitraire, en ne conservant de la série précédente que les a_n de module $> r_0$, on voit qu'il y a $M(\sigma) = M$ nombres a_n au plus dont les modules sont entre $r_0\sigma^n$ et $r_0\sigma^{n+1}$.

Donc

$$\sum \frac{1}{|a_n|^\varepsilon} < M\left[\frac{1}{r_0^\varepsilon} + \frac{1}{r_0^\varepsilon|\sigma|^\varepsilon} + \frac{1}{r_0^\varepsilon|\sigma|^{2\varepsilon}} + \ldots\right].$$

Ce second membre est une progression géométrique de raison $\frac{1}{|\sigma|^\varepsilon} < 1$ quel que soit le nombre positif ε. Donc $\sum \frac{1}{|a_n|^\varepsilon}$ converge pour toute valeur positive de ε.

Ce qu'on vient de dire de a s'applique à toute valeur b suffisamment voisine de a.

57. *Conclusion*. — Toutes les fois que, pour une certaine valeur a, la fonction entière $G - aG_1$ ne sera pas *d'ordre nul* (G, si $a = 0$; G_1, si $a = \infty$), on pourra affirmer :

1° Ou bien que l'ensemble appelé $\mathcal{E}_\sigma$ existe, avec toutes les conséquences indiquées aux précédents Chapitres;

2° Ou bien, si $\mathcal{E}_\sigma$ n'a pas de points distincts de 0 et ∞, que, quel que soit le point z_0 du plan qu'on choisisse ($z_0 \neq 0$ et $\neq \infty$), la suite des valeurs $f(z_0)$, $f(z_0\sigma)$, ..., $f(z_0\sigma^n)$, ... admet la valeur a pour valeur limite.

Cette conclusion pourra s'affirmer *dans le cas très général où* G *et* G_1 *ne seront pas tous deux d'ordre nul*. Dans ce cas, $G - aG_1$ n'est pas d'ordre nul (sauf pour deux valeurs exceptionnelles de a au plus) et le critérium s'applique, il indique :

1° Ou bien que $\mathcal{E}_\sigma$ existe et qu'alors il existe des points z_0 distincts de 0 tels que, si petit que soit $\mathcal{D}_0$ entourant z_0, la fonction $f = \frac{G}{G_1}$ prend dans l'ensemble des domaines $\mathcal{D}_0\sigma^n$ ($n = 1, 2, \ldots, \infty$) toute valeur finie ou infinie, sauf peut-être deux au plus ;

2° Ou bien que, quel que soit le point z_0 du plan ($\neq 0$ et $\neq \infty$), la suite des valeurs $Z_n = f(z_0\sigma^n)$ ($n = 1, 2, \ldots, \infty$) est *dense dans tout le plan Z*, conclusion qui est à la précédente, comme le théorème de M. Picard est à celui de Weierstrass.

Il est assez curieux de voir s'introduire ici, comme fonctions pouvant créer des exceptions, les *fonctions méromorphes quotient de deux fonctions entières d'ordre nul*. On verra, dans un troisième Mémoire, que dans certains modes d'approximation du point à l'infini, les *fonctions entières d'ordre nul* interviennent elles-mêmes directement (et non par leurs quotients), pour créer aussi des cas d'exception. Au point de vue actuel, ces fonctions *d'ordre nul* apparaissent, une fois de plus, comme des fonctions singulières après avoir été maintes fois signalées comme telles par les géomètres qui se sont occupés des fonctions entières.

58. Deuxième cas. — Que pourrait-on dire, dans le cas où, *quel que soit $z_0 \neq 0$, les valeurs $Z_n = f(z_0\sigma^n)$ seraient denses dans tout le plan, la famille des $f_n(z) = f(z\sigma^n)$ étant cependant normale dans tout le plan*, sauf à l'origine et à l'infini.

Si l'on prend une valeur quelconque a, finie ou infinie, il existe une suite

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots,$$

qui converge uniformément dans tout domaine fini ne contenant pas l'origine, vers une fonction limite méromorphe (pouvant être constante) prenant en z_0 la valeur a :

1° Si la limite est constante, il peut se faire que les fonctions $f_{n_p}(z)$ ne prennent pas au voisinage de z_0 la valeur a, c'est-à-dire qu'on puisse trouver un cercle $\mathcal{D}_0$ de centre z_0 tel que, dans aucun des domaines $\mathcal{D}_0\sigma^{n_p}$, la fonction $f(z)$ ne prenne la valeur a. Mais alors, quel que soit ce domaine $\mathcal{D}_0$, pourvu qu'il ne contienne pas l'origine, *$f(z)$ tendra uniformément vers a dans les domaines $\mathcal{D}_0\sigma^{n_p}$ lorsque p tendra vers l'infini ;*

2° Si la limite n'est pas constante, elle prend en z_0 la valeur a, et, par suite, dans un cercle $\mathcal{D}_0$, arbitrairement petit, contenant z_0, les fonctions $f_{n_p}(z)$ *prennent toutes, pour* $p > p_0$, *la valeur* a, c'est-à-dire que, dans l'ensemble des domaines $\mathcal{D}_0\sigma^{n_p}$, si petit que soit $\mathcal{D}_0$ entourant z_0, la fonction $f(z)$ prend, effectivement, une infinité de fois, la valeur a.

On peut résumer l'alternative précédente de la façon suivante :

59. Si la famille des $f_n(z) = f(z\sigma^n)$ est normale dans tout le plan (hors o et ∞), en considérant un domaine *quelconque* $\mathcal{D}_0$, arbitrairement petit, ne contenant pas l'origine, et les domaines $\mathcal{D}_0\sigma^n$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$, on peut dire :

1° *Ou bien que* $f(z)$ *prend dans l'ensemble des domaines*

$$\mathcal{D}_0\sigma^n \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

toute valeur finie ou infinie sans exception. Ceci se produit, en particulier, lorsqu'il n'y a aucune *constante* parmi les fonctions limites de la famille $f_n(z)$. Tout point du plan z (hors o et ∞) jouit alors de la propriété remarquable reconnue dans les Chapitres précédents aux points de l'ensemble $\mathcal{E}_\sigma$, sans que, cependant, la famille des f_n cesse d'être normale en ces points;

2° Ou bien, *s'il y a des valeurs exceptionnelles, que* $f(z)$ *ne prend dans aucun des domaines* $\mathcal{D}_0\sigma^n$ (ou n'y prend qu'un nombre fini de fois), *chacune de ces valeurs est une constante limite de la famille des* f_n, *vers laquelle* $f(z)$ *tend uniformément dans une suite de domaines* $\mathcal{D}_0\sigma^{n_p}$ *quand* p *devient infini*. Cette conclusion est vraie alors, quelque grand qu'on choisisse ce domaine $\mathcal{D}_0$ initial, pourvu qu'il ne contienne pas l'origine.

CHAPITRE IV.

INDICATIONS SUCCINCTES SUR QUELQUES AUTRES MODES RÉGULIERS D'APPROXIMATION.

I.

60. Supposons que le point singulier essentiel de la fonction uniforme $f(z)$ soit à l'origine, et envisageons une substitution

$$(1) \qquad z_1 = S(z) = sz + a_2 z^2 + \ldots, \qquad \text{où} \qquad |s| < 1,$$

pour laquelle l'origine soit un *point double attractif*.

Partant d'un point z suffisamment voisin de l'origine, les propriétés élémentaires de l'itération de la substitution (1) prouvent que les conséquents $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ de z tendent vers l'origine, et de telle façon que

$$|z_1| < \mathrm{H}|z|, \qquad 0 < \mathrm{H} < 1$$

dès que $|z| \leqq r$, et par suite $|Z_n| < \mathrm{H}^n|z|$.

Si C est un cercle de centre O de rayon $< r$, ses courbes conséquentes seront des courbes fermées analytiques $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ s'entourant mutuellement, entourant l'origine et tendant vers zéro quand n devient infini. Il y a correspondance analytique et biunivoque entre les couronnes $(C, C_1)(C_1, C_2)\ldots(C_{n-1}, C_n)\ldots$. Il est visible, dès lors, qu'on peut appliquer à la famille des fonctions

$$f[S_n(z)] = f_n(z)$$

les raisonnements appliqués dans les précédents Chapitres à la famille des

$$f_n(z) = f(zs^n).$$

61. Toutes les propriétés établies dans les Chapitres précédents pour l'approximation du point singulier essentiel $z = 0$ par des points zs^n ($|s| < 1$; $n = 1, 2, \ldots, \infty$) sont valables quand on opère l'approximation de ce même point par les points $Z_n = S_n(z)$ conséquents de z par les itérées de la substitution $Z_1 = S(z) = sz + \ldots$.

En particulier, pour toute fonction $f(z)$ uniforme autour de O, et pour laquelle existe un chemin tendant vers O sur lequel $f(z)$ tend vers une limite, on peut toujours, dans un cercle $|z| \leqq r$ si petit qu'il soit, trouver un ensemble E_s de points, invariant par la substitution $z_1 = S(z)$ et tel que, si l'on entoure un quelconque de ses points z_0, d'une aire arbitrairement petite ω_0, dont les itérées successives, par les $S_n(z)$, soient les aires $\omega_0 S_n$, la fonction $f(z)$ prenne dans l'ensemble des aires $\omega_0 S_n$ toute valeur finie ou infinie, sauf peut-être deux valeurs au plus.

La famille des fonctions $f_n(z) = f[S_n(z)]$ n'est normale en aucun point de E_s, elle est normale en tout point voisin de O n'appartenant pas à E_s.

Remarque. — Le mode actuel d'approximation ne diffère, d'ailleurs pas, essentiellement, du mode régulier utilisé aux précédents Chapitres.

En effet, si pour $|z| \leqq r$ le développement (1) converge (r assez petit), les développements de toutes les itérées

$$z_n = S_n(z) = s^n z + \ldots$$

convergent aussi dans $|z| \leqq r$, et il résulte des travaux de M. Kœnigs que la limite de $\frac{S_n(z)}{s^n}$ est une fonction analytique de z dans le cercle $|z| \leqq r$. Cette fonction diffère aussi peu qu'on le veut de z pourvu que r soit assez petit. On voit donc que l'on aura, pour $n > n_0$,

$$\left| \frac{S_n(z)}{s^n z} - 1 \right| < \varepsilon(r)$$

quel que soit z dans $|z| \leqq r$, pourvu que r ait été pris assez petit, $\varepsilon(r)$ étant infiniment petit avec r.

La suite des points $z, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ différera donc asymptotiquement aussi peu qu'on voudra de la suite

$$sz, \quad s^2 z, \quad \ldots, \quad s^n z, \quad \ldots,$$

pourvu que le point initial z reste à une distance assez petite de l'origine.

II.

62. Supposons maintenant le point singulier essentiel rejeté à l'infini. Un mode régulier d'approximation du point à l'infini, souvent utilisé, consiste à prendre les points $z + n\omega$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$) déduits d'un point quelconque z par addition indéfinie d'un nombre ω appelé souvent *période*.

$f(z)$ étant une fonction entière ou méromorphe quelconque, si l'on forme la famille des $f_n(z) = f(z + n\omega)$, y a-t-il lieu d'espérer qu'il existe toujours un ensemble de points E_ω où la famille des $f_n(z)$ cesse d'être normale.

L'exemple immédiat des fonctions périodiques montre *qu'il faut renoncer à obtenir ici des théorèmes aussi généraux que ceux qui font* *l'objet des deux premiers Chapitres du présent Mémoire*. En effet, si $f(z)$ est une fonction entière admettant la période ω, les $f_n(z)$ sont toutes identiques à $f(z)$, et par suite E_ω n'a aucun point à distance finie; même conclusion si $f(z)$ est méromorphe, doublement périodique, ω étant une période quelconque.

On peut même affirmer, sur l'exemple bien simple de la fonction e^z, dont la période est $2\pi i$, que pour *aucune valeur de* ω, les

$$f_n(z) = e^{z+n\omega}$$

n'admettent d'ensemble E_ω.

En effet,

$$f_n(z) = e^{n\omega} f(z).$$

Donc :

1° Si $\mathcal{R}(\omega) > 0$, $e^{n\omega}$ devient infini avec n, si $n > 0$; donc dans une *aire quelconque du plan* z, les $f_n(z)$ tendent uniformément vers l'infini avec n positif;

2° Si $\mathcal{R}\omega < 0$, $e^{n\omega}$ tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$; donc $f_n(z)$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$, dans une aire quelconque du plan. Les conclusions du 1° et du 2° sont inversées pour $n \to -\infty$;

3° Si $\mathcal{R}\omega = 0$, $|e^{n\omega}| = 1$; donc $|f_n(z)| = |f(z)|$ et par conséquent dans toute aire du plan les $|f_n(z)|$ sont bornés.

Dans tous les cas, la famille des $f_n(z)$ est normale dans tout le plan.

63. L'ensemble E_ω des points autour desquels la famille des $f_n(z)$ n'est pas normale n'existe donc que pour des classes *particulières* de fonctions entières ou méromorphes. A cause de cela, la recherche des conditions dans lesquelles on peut affirmer l'existence de cet ensemble présente moins d'intérêt que la recherche qui fait l'objet des Chapitres I et II, le résultat à espérer devant être moins général. Il ne serait cependant pas sans intérêt de chercher des classes assez générales de fonctions entières pour lesquelles E_ω existe, car pour une telle fonction, c'est dans un ensemble *d'aires toutes infiniment petites* ($\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}_0 \pm n\omega$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$) que $f(z)$ prendrait toute valeur finie, sauf peut-être une, $\mathfrak{D}_0$ étant prise arbitrairement petite autour d'un point z_0 de E_ω.

Les conséquences tirées de là, relativement à l'approximation *simultanée* des racines de toutes les équations $f(z) - a = 0$ (quel que soit a) par des nombres $z_0 \pm n\omega$, seraient plus précises que celles qu'on a obtenues aux Chapitres I et II, *l'approximation obtenue étant plus serrée* qu'aux Chapitres cités. z_0 étant point de E_ω, on peut affirmer en effet que, sauf peut-être pour une valeur finie de a, il y a parmi les racines de cette équation $f(Z) - a = 0$, une infinité de nombres $Z_1(a)$, $Z_2(a)$, ..., $Z_n(a)$, ... auxquels correspond une infinité de points $z_0 + p_1\omega$, $z_0 + p_2\omega$, ..., $z_0 + p_n\omega + \ldots$ ($|p_n|$ tendant vers l'infini sans que l'entier p_n ait nécessairement un signe défini) tels que

$$|Z_n(a) - (z_0 + p_n\omega)|$$

tende vers zéro quand n devient infini. (Bien entendu, la suite des entiers positifs ou négatifs dépendrait de la valeur a considérée.) On se rappelle qu'aux Chapitres I et II, c'était seulement

$$|\log Z_n(a) - \log(z_0 \sigma^{p_n})|$$

qui tendait vers zéro.

III.

64. On pourrait aussi utiliser des suites d'approximation à double indice entier $Z_{pq} = Z + p\omega_1 + q\omega_2$, p et q étant deux entiers positifs ou négatifs quelconques, ω_1 et ω_2 deux périodes complexes fondamentales dont le rapport ne soit pas réel.

On formerait la famille des

$$f_{p,q}(z) = f(z + p\omega_1 + q\omega_2)$$

et l'on chercherait pour quelles catégories de fonctions entières ou méromorphes il existe un ensemble de points E_{ω_1,ω_2} tels que la famille des $f_{p,q}(z)$ ne soit normale en aucun point de l'ensemble.

L'exemple des fonctions simplement ou doublement périodiques montre que E_{ω_1,ω_2} n'existe pas toujours. Si, par exemple, $f(z) = e^z$, E_{ω_1,ω_2} n'existe jamais, quels que soient ω_1 et ω_2. Si $f(z)$ est une fonction elliptique dont ω_1, ω_2 sont deux périodes quelconques, E_{ω_1,ω_2} n'existe pas non plus.

Les fonctions entières ou méromorphes pour lesquelles E_{ω_1,ω_2} existe jouiraient de cette remarquable propriété qu'on pourrait approcher indéfiniment par les sommets d'un même réseau de parallélogrammes, d'une infinité de racines de toute équation $f(z)=a$, sauf peut-être pour une ou deux valeurs de a.

65. C'est plus particulièrement pour le mode d'approximation par les

$$z_{p,q}=z+p\omega_1+q\omega_2 \qquad (p,q=\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty)$$

que les notions de croissance, d'ordre, etc., dont on a fait usage au troisième Chapitre, trouveront un emploi facile et pourront conduire à des résultats satisfaisants.

En voici un exemple simple.

Soit $f(z)$ une *fonction entière ou méromorphe pour laquelle* E_{ω_1,ω_2} *n'existe pas*. Alors, dans un parallélogramme de périodes, les $f_{pq}(z)$ sont toutes normales. Soit z_0 un point quelconque du plan ; deux cas seulement sont possibles :

1° *La suite des nombres* $Z_{pq}=f_{pq}(z_0)$ *est dense dans tout le plan des* Z, *quel que soit* z_0.

C'est là déjà une propriété bien remarquable, puisque $f(z)$ pourrait approcher indéfiniment de toute valeur finie ou infinie, aux sommets d'un réseau de parallélogrammes de périodes (ω_1, ω_2) construit à partir d'une *origine quelconque* du plan.

66. 2° Il existe un point z_0 au moins tel que la suite des

$$Z_{p,q}=f_{p,q}(z_0)$$

ne soit pas dense dans tout le plan Z.

Soit a une valeur telle que $|f_{p,q}(z_0)-a|>\varepsilon$ quels que soient p et q [si a est infini, l'inégalité précédente est remplacée par $|f_{p,q}(z_0)|<M$].

Les $\dfrac{1}{f_{p,q}(z)-a}$ sont des fonctions méromorphes, bornées au point z_0, et formant une famille normale dans tout le plan, au même titre que les $f_{p,q}(z)$.

Dans un parallélogramme de périodes contenant z_0, le nombre des pôles de toute fonction $\frac{1}{f_{p,q}(z)-a}$ est limité supérieurement par un nombre fixe. On en déduit que *dans un parallélogramme de périodes quelconque, il ne peut exister qu'un nombre de racines de* $f(z)-a=0$ *inférieur à un nombre fixe* M.

Un cercle de rayon r de centre O contient un nombre de parallélogrammes de périodes asymptotiquement égal à $\frac{\pi r^2}{Q}$, Q désignant l'aire d'un parallélogramme de périodes. Le nombre des racines que l'équation $f(z)-a=0$ possède dans un cercle de rayon r ne peut donc surpasser asymptotiquement $\frac{\pi r^2 M}{Q}$. Si l'on désigne par $N(r)$ ce nombre, on voit que son ordre de croissance, par rapport à r, ne peut surpasser 2.

Il est visible d'ailleurs que la série $\sum \frac{1}{|z_n(a)|^\rho}$ converge pour $\rho > 2$, en désignant par $z_n(a)$ les racines de l'équation $f(z)-a=0$; car dès que $|z_n(a)|$ surpasse une certaine limite, on majore la série précédente en remplaçant les $z_n(a)$, situés dans un parallélogramme du réseau, par M points confondus avec un sommet du réseau. *L'ordre de la suite des* $z_n(a)$ *ne peut donc en aucun cas surpasser* 2.

Ce qui s'est dit de a peut se dire de toute valeur b différant de a de moins de ε : car, d'une telle valeur b, les $f_{p,q}(z_0)$ ne peuvent s'approcher à moins de $\varepsilon-|b-a|$.

On sait d'ailleurs (*voir* BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 66) que, pour une fonction méromorphe d'ordre ρ, il y a au plus deux valeurs a pour lesquelles la suite des racines de $f(z)-a=0$ ne soit pas d'ordre ρ.

L'hypothèse que nous avons posée au début du numéro précédent [c'est-à-dire que l'ensemble des $Z_{p,q}=f_{p,q}(z_0)$ n'est pas dense dans tout le plan] *n'est donc possible que si l'ordre de* $f(z)$ *ne surpasse pas* 2 (c'est d'ailleurs le cas de toute fonction elliptique).

Conclusion.

67. *Pour toute fonction méromorphe d'ordre* > 2, on peut affirmer la conclusion remarquable qui suit.

1° Ou bien pour toute valeur z_0 la suite des $Z_{p,q} = f(z_0 + p\omega_1 + q\omega_2)$ est dense dans tout le plan des Z : c'est-à-dire que *les valeurs de $f(z)$ aux sommets d'un réseau quelconque de parallélogrammes* (ω_1, ω_2) *s'approchent autant qu'on le veut de toute valeur finie ou infinie ;*

2° Ou bien il existe un ensemble E_{ω_1,ω_2} (invariant par toute translation $p\omega_1 + q\omega_2$) en chaque point duquel la famille des $f_{p,q}(z)$ cesse d'être normale. *Si petite que soit l'aire* $\mathcal{D}_0$ *entourant un point* z_0 *de* E_{ω_1,ω_2}, *la fonction $f(z)$ prendra une infinité de fois dans l'ensemble des aires* $\mathcal{D}_0 + p\omega_1 + q\omega_2$ $(p, q = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty)$ *toute valeur finie ou infinie, sauf peut-être deux valeurs au plus.*

La suite des sommets du réseau $z_0 + p\omega_1 + q\omega_2$ jouit alors de la propriété d'approximation suivante :

Quelle que soit la valeur a (hormis les deux valeurs exceptionnelles possibles), on peut choisir parmi les racines de $f(z) - a = 0$ une infinité de racines $z_1(a), z_2(a), \ldots, z_n(a), \ldots$ auxquelles correspondront une infinité de sommets du réseau $Z_0 + p_1\omega_1 + q_1\omega_2, \ldots, Z_0 + p_n\omega_1 + q_n\omega_2, \ldots$ (dépendant de la valeur a considérée), tels que la différence

$$|Z_n(a) - (z_0 + p_n\omega_1 + q_n\omega_2)|$$

tende vers zéro lorsque n grandira indéfiniment.

En abrégé : *la suite des sommets du réseau* $z_0 + p\omega_1 + q\omega_2$ *s'approche indéfiniment d'une infinité de racines de toute équation* $f(z) - a = 0$ *non exceptionnelle.*

68. *Remarque.* — Dans le cas 1°, où les $f(z_0 + p\omega_1 + q\omega_2) = Z_{p,q}$ sont denses dans tout le plan Z quel que soit z_0, sans que cependant l'ensemble E_{ω_1,ω_2} existe, on montrera aisément, par un raisonnement en tout pareil à celui des nos 58 et 59 du présent Mémoire que, $\mathcal{D}_0$ étant un domaine quelconque du plan z (arbitrairement petit si l'on veut), et $\mathcal{D}_0 + p\omega_1 + q\omega_2$ les domaines qu'on en déduit par toutes les translations $p\omega_1 + q\omega_2$:

A. Ou bien $f(z)$ *prendra dans l'ensemble de tous ces domaines toute valeur finie ou infinie sans exception.* Cela arrivera *toujours* si la suite des fonctions

$$f_{p,q}(z) = f(z + p\omega_1 + q\omega_2)$$

n'admet *aucune constante parmi ses fonctions limites*. Tout point du plan jouit alors de la propriété d'approximation indiquée ci-dessus, puisqu'on peut supposer $\mathcal{D}_0$ arbitrairement petit.

B. Ou bien, s'il y a des valeurs exceptionnelles que $f(z)$ ne prend dans aucun des domaines $\mathcal{D}_0 + p\omega_1 + q\omega_2$ (ou n'y prend qu'un nombre fini de fois), chacune de ces valeurs est une *constante limite* pour la famille des fonctions $f_{p,q}(z)$, vers laquelle $f(z)$ tend uniformément dans une suite convenable de domaines $\mathcal{D}_0 + p_n\omega_1 + q_n\omega_2$ allant à l'infini ($\mathcal{D}_0$ pouvant ici être arbitrairement grand).