Annales scientifiques de l'É.N.S.

Lucien Godeaux

Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres 1 (deuxième partie)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 36 (1919), p. 51-70

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1919_3_36__51_0>

MÉMOIRE

SUR LES

INVOLUTIONS APPARTENANT A UNE SURFACE DE GENRES 1

(DEUXIÈME PARTIE)

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Dans la première Partie de ce Mémoire([1]), nous avons déterminé les involutions de genres 1 appartenant à une surface de genres 1 ($p_a = P_4 = 1$), non composées au moyen de deux involutions n'ayant aucune coïncidence en commun. Nous avons construit des surfaces normales images de ces involutions et déterminé les singularités que ces surfaces possèdent aux points de diramation. Pour compléter cette étude, il convient de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface de genres 1 soit l'image d'une involution appartenant à une surface de genres 1. Ce sont ces questions qui sont étudiées dans cette seconde Partie. Nous avons en outre déterminé les involutions qui avaient été exclues de nos premières recherches, c'est-à-dire les involutions composées au moyen de deux (ou plusieurs) involutions n'ayant pas de point de coïncidence en commun. Cette dernière recherche n'offre pas grande difficulté, mais elle se présente d'elle-même dans l'étude des surfaces images d'involutions d'ordre 8.

Nous avons été conduit à introduire les définitions suivantes. Une involution, non composée au moyen de deux involutions n'ayant pas de point de coïncidence commun, sera dite *involution de première*

([1]) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXXI, 1914, p. 357-430.

espèce; dans le cas opposé, *de seconde espèce.* Une surface image d'une involution d'ordre n sera dite *surface de rang n.*

CHAPITRE VI.

LES INVOLUTIONS DE SECONDE ESPÈCE.

46. Soit, sur la surface F, de genres 1 ($p_a = P_4 = 1$), une involution I_n, d'ordre n, de genres 1 et de seconde espèce. Désignons par ($T_1 \equiv 1, T_2, \ldots, T_\mu$) une base du groupe de transformations birationnelles de F en elle-même, générateur de I_n, par $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mu$ les périodes respectives des transformations $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$, et supposons que I_n soit composée au moyen d'une involution I_ν, d'ordre ν et de première espèce. Soit ($T_1 \equiv 1, T_2, \ldots, T_\eta$) une base du groupe générateur de I_ν. Par hypothèse, aucun point de coïncidence de l'involution I_ν n'est invariant pour l'une des transformations $T_{\eta+1}, T_{\eta+2}, \ldots, T_\mu$.

Considérons un groupe de I_ν formé de $\frac{\nu}{\tau}$ points de coïncidence d'ordre τ. Les points de ce groupe sont transportés, par $T_{\eta+1}$, $T_{\eta+2}, \ldots, T_\mu$ en $\frac{n-\nu}{\tau}$ nouveaux points qui forment, avec les premiers, un groupe de I_n. Mais I_n étant composée au moyen de I_ν, ce groupe de $\frac{n}{\tau}$ points doit se partager en $\frac{n}{\nu}$ groupes de $\frac{\nu}{\tau}$ points de coïncidence τ-uple de I_ν. Par suite, le nombre de groupes de I_ν formés de points de coïncidence τ-uple, est divisible par $\frac{n}{\nu}$.

Donc, *si une involution de deuxième espèce* I_n *est composée au moyen d'une involution de première espèce* I_ν *et n'est composée avec aucune autre involution de première espèce qui serait elle-même composée au moyen de* I_ν, *le nombre des groupes de* I_ν *formés de points de coïncidence d'ordre* τ *est divisible par* $\frac{n}{\nu}$.

Cette remarque très simple permet de déterminer les involutions de seconde espèce, en se reportant au Tableau du n° 43 de la première Partie de ce Mémoire.

Si l'on suppose $\nu = 2$, $\tau = 2$ et $\frac{n}{2}$ doit diviser 8, donc on peut avoir $n = 4$, 8 ou 16.

Si $\nu = 3$, on a $\tau = 3$ et $\frac{n}{3}$ doit diviser 6; donc $n = 9$ ou $n = 18$.

Lorsque $\nu = 4$, on peut prendre $\tau = 2$ et $\frac{n}{4}$ doit diviser 2. On a donc $n = 8$.

Lorsque $\nu = 6$, $\tau = 2$, $\frac{n}{6}$ doit diviser 2; donc $n = 12$.

Si $\nu = 8$, deux cas peuvent se présenter, les involutions d'ordre 8 et de première espèce étant de deux sortes. Pour la première sorte, si $\tau = 2$, $\frac{n}{8}$ doit diviser 1, ce qui est absurde. Pour la seconde, si $\tau = 4$, $\frac{n}{8}$ doit diviser 3, et, si $\tau = 8$, $\frac{n}{8}$ doit diviser 2, ce qui est également absurde. On ne peut donc avoir $\nu = 8$.

Enfin, si $\nu = 12$, $\tau = 3$, $\frac{n}{12}$ doit diviser 1, ce qui est absurde.

47. Nous venons de voir qu'il pourrait être possible d'avoir $n = 18$. Remarquons que dans ce cas il existe toujours, parmi les transformations génératrices de I_n, une transformation T de période 2; c'est là une propriété bien connue des groupes finis de substitutions. Mais alors, nous venons de voir que l'on a $n = 4$, 8 ou 16. Le cas $n = 18$ ne peut donc se présenter.

Considérons maintenant le cas $n = 12$, $\nu = 6$. Soit T une transformation ne faisant pas partie du groupe générateur de I_6, mais bien de celui de I_{12}. T ne peut avoir la période 2, 3 ou 4, sans quoi on ne pourrait avoir $n = 12$; T a donc la période 6. Mais alors, T transforme un groupe de I_6 formé de deux points de coïncidence triple en cinq autres groupes analogues de I_6; cela est absurde, puisque cette involution ne possède que deux pareils groupes. On ne peut donc avoir $n = 12$.

48. Nous avons trouvé que, pour $n = 8$, on pourrait avoir $\nu = 4$; nous allons prouver que cette hypothèse conduit à une absurdité.

L'involution I_4 étant cyclique, soit T_2 sa transformation génératrice et soit $(1, T_2, T_3)$ une base du groupe générateur de I_8. T_3 a la période 2 ou 4.

Si T_3 a la période 4, les transformations

$$\begin{array}{llll} T_1 = 1, & T_2, & T_2^2, & T_2^3, \\ T_3, & T_2T_3, & T_2^2T_3, & T_2^3T_3, \\ T_3^2, & T_2T_3^2, & T_2^2T_3^2, & T_2^3T_3^2, \\ T_3^3, & T_2T_3^3, & T_2^2T_3^3, & T_2^3T_3^3 \end{array}$$

appartiennent toutes au groupe générateur de I_8 et doivent donc se réduire à 8 transformations distinctes. On voit facilement que l'on doit avoir $T_2^2 = T_3^2$. Mais alors les involutions engendrées par T_2 et T_3 ont en commun les points de coïncidence de l'involution engendrée par T_2^2. Cela est impossible puisque, alors, I_8 serait de première espèce.

Si T_3 a la période 2, le groupe générateur de l'involution I_8 est formé par les transformations

$$\begin{array}{llll} T_1 = 1, & T_2, & T_2^2, & T_2^3, \\ T_3, & T_2T_3, & T_2^2T_3, & T_2^3T_3. \end{array}$$

Les transformations de la seconde ligne de ce tableau sont certainement de période 2, sans quoi il serait possible de répéter le raisonnement précédent. Par suite, I_8 possède 4 points de coïncidence quadruple (formant 2 groupes) et 36 points de coïncidence double (formant 9 groupes). A l'involution I_8 correspond, sur la surface de genres 1 image de l'involution engendrée par T_3, une involution d'ordre 4 possédant 2 points de coïncidence quadruple et 14 points de coïncidence double, ce qui est impossible. L'involution I_8 ne peut donc exister.

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Une involution de seconde espèce ne peut être composée qu'au moyen d'involutions de première espèce, d'ordre 2 *ou* 3.

49. Considérons, sur la surface F, une involution de seconde espèce I_n, d'ordre $n = 2^\xi$, et soit $(T_1 = 1, T_2, \ldots, T_{\xi+1})$ une base du groupe générateur de cette involution ($\xi = 2, 3, 4$).

La transformation T_iT_k a la période 2, comme nous venons de le voir ; on a donc

$$T_iT_k = T_kT_i,$$

c'est-à-dire que le groupe est abélien.

Les transformations génératrices de I_n sont, outre l'identité, au nombre de $2^\xi - 1$, et, toutes étant de période 2, elles laissent $8(2^\xi - 1)$ points invariants. L'involution I_n possède donc $2^{4-\xi}(2^\xi - 1)$ groupes formés de points de coïncidence double. Nous avons appris à former, dans la première Partie de ce travail (Chap. I), des systèmes linéaires de courbes (incomplets), dépourvus de points-base, composés avec une involution donnée, et, en rapportant projectivement les courbes de tels systèmes aux hyperplans d'un espace linéaire convenablement choisi, des surfaces simples et normales, images de l'involution.

Soit Φ une surface simple et normale, image de l'involution I_n. A chaque groupe formé de points de coïncidence de I_n correspond un point de diramation de Φ qui est un point double conique de cette surface (voir ce *Mémoire*, 1re Partie, Chap. III, § 1); par suite :

Une involution d'ordre 2^ξ, de genres 1 et de seconde espèce, sur une surface de genres 1, est engendrée par des transformations de période 2, formant un groupe abélien. Elle possède $8(2^\xi - 1)$ points de coïncidence double ($\xi = 2$, 3 ou 4).

Une surface de genres 1, de rang 2^ξ et de seconde espèce, simple et normale, possède $2^{4-\xi}(2^\xi - 1)$ points de diramation double qui sont des points doubles coniques de cette surface.

50. Soit I_9 une involution d'ordre 9 et de seconde espèce appartenant à F, et soit $(T_1 = 1, T_2, T_3)$ une base du groupe générateur de cette involution. Les transformations T_2, T_3 sont de période 3 et les deux tableaux

$$\left\{\begin{array}{lll} T_1 = 1, & T_2 & T_2^2, \\ T_3, & T_2T_3, & T_2^2T_3, \\ T_3^2, & T_2T_3^2, & T_2^2T_3^2, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} T_1 = 1, & T_3, & T_3^2, \\ T_2, & T_3T_2, & T_3^2T_2, \\ T_2^2, & T_3T_2^2, & T_3^2T_2^2 \end{array}\right.$$

doivent coïncider. On doit donc avoir $T_2T_3 = T_3T_2$, c'est-à-dire que le groupe générateur est abélien. Toutes les transformations de ce groupe doivent d'ailleurs avoir la période 3.

L'involution I_9 est composée au moyen de quatre involutions cubiques engendrées respectivement par T_2, T_3, T_2T_3 et $T_2^2T_3$; elle possède par suite 24 points de coïncidence triple se répartissant en 8 groupes de 3 points.

Une surface normale et simple Φ, image de l'involution I_9, possède donc 8 points de diramation qui sont des points doubles biplanaires ordinaires de la surface (ce Mémoire, 1re Partie, Chap. II). Donc :

Une involution d'ordre 9, de genres 1 et de seconde espèce, sur une surface de genres 1, est engendrée par un groupe abélien de transformations de période 3; elle possède 8 groupes de 3 points de coïncidence triple.

Une surface de genres 1, de rang 9 et de seconde espèce, simple et normale, possède 8 points doubles biplanaires ordinaires.

CHAPITRE VII.

SURFACES DE RANG 2 ET SURFACES DE RANG 2^α, DE SECONDE ESPÈCE.

51. Soit Φ une surface simple, normale, de genres 1 ($p_a = P_4 = 1$), de rang 2, située dans un espace linéaire S_π à π dimensions. Cette surface a, comme on sait, l'ordre $2\pi - 2$ et ses sections hyperplanes ont le genre π. De plus, elle possède 8 points doubles coniques dont chacun est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2. Soient $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ; $A_1, A_2, \ldots, A_8$ les courbes rationnelles auxquelles sont respectivement équivalents les huit points doubles coniques.

Dans un travail sur les surfaces doubles ayant un nombre fini de points de diramation (¹), nous avons établi un théorème qui, dans le cas actuel, devient :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface normale de genres 1, simple, soit de rang 2, sont que :

1° *La surface possède 8 points doubles;*

(¹) *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de*

2° *Parmi les hyperquadriques passant par ces 8 points doubles, il y en a touchant la surface en chaque point de la courbe d'intersection.*

De plus, si l'on désigne par Γ_0 la courbe d'intersection de Φ avec une des hyperquadriques dont il vient d'être question, on a

$$2\Gamma_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_8 \equiv 2\Gamma;$$

$|\Gamma_0|$ est de genre $\pi - 2$ et de degré $2\pi - 6$. Les courbes Γ_0 sont d'ordre $2\pi - 2$ et il y a, le long de chacune d'elles, une hyperquadrique touchant Φ.

Les conditions pour que la surface Φ soit de rang 2 sont donc au nombre de 9, et ce nombre ne peut être réduit.

Tout d'abord, l'existence des 8 points doubles n'entraîne pas l'existence d'une hyperquadrique passant par ces points et touchant Φ en chaque point d'intersection. En effet, si Φ est une surface du quatrième ordre de S_3, il faut, pour qu'elle soit de rang 2, que les 8 points doubles soient les points-base d'un réseau de quadriques. Or, il existe des surfaces du quatrième ordre possédant 8 points doubles coniques non situés sur ∞^2 quadriques (1).

En second lieu, le nombre des points doubles doit être fixé, car il existe des surfaces de genres 1, normales, de $S_r (r \geqq 4)$ possédant 16 points doubles coniques et des hyperquadriques passant par ces points et touchant la surface en chaque point d'intersection ; ce sont des surfaces images d'involutions régulières d'ordre 2 appartenant à une surface de Picard ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$) (2).

52. Considérons maintenant une surface simple, normale, de genres 1, Φ, de rang 4 et de deuxième espèce, située dans un S_π. Cette surface possède 12 points doubles coniques qui sont des points de diramation ordinaire. Désignons par F une surface de genres 1 portant l'involution d'ordre 4 représentée par Φ et telle qu'à une section hyper-

---

diramation (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. V, 1914, p. 289-312).

(1) K. Rohn, *Ueber Flächen 4. Ordnung mit acht bis zechszehn Knotenpuncten* (*Berichte K. Gesell. zu Leipzig*, t. XXXVI, 1884).

(2) *Voir* par exemple notre *Mémoire sur les surfaces doubles* (*loc. cit.*).

plane de Φ corresponde une section hyperplane de F. On doit alors prendre pour modèle projectif de F une surface normale simple de $S_{4\pi-3}$. Soient T_1, T_2 les transformations homographiques involutives engendrant sur F l'involution I_4 considérée ; on a $T_1 T_2 = T_2 T_1$.

Au système $|\Gamma|$ des sections hyperplanes de Φ correspond, dans le système $|C|$ des sections hyperplanes de F, un système $|C_0|$, de dimension π, dépourvu de points-base.

L'homographie T_1 laisse invariantes, dans $|C|$, les courbes de deux systèmes linéaires $|C_{01}|$, $|C_1|$; le premier contient $|C_0|$ et est dépourvu de points-base ; le second possède 8 points-base qui sont les points de F invariants pour T_1. L'involution d'ordre 2 engendrée sur F par T_1 étant de genres 1, $|C_{01}|$ a la dimension $2\pi - 1$ et $|C_1|$ la dimension $2\pi - 3$.

La transformation T_2 agit comme une homographie sur le système $|C_{01}|$ et, par conséquent, ce système contient deux systèmes de courbes invariantes pour T_2, à savoir $|C_0|$ et un système $|C_{12}|$ de dimension $\pi - 2$. Les courbes C_{12} passent par les 16 points invariants pour T_2 ou pour $T_3 = T_1 T_2$. Il leur correspond, sur Φ, des courbes Γ_3, de genre $\pi - 2$ et de degré $2\pi - 6$.

A une courbe C quelconque correspond, sur Φ, une courbe découpée par une hypersurface d'ordre 4. Si, en particulier, cette courbe C est une courbe C_{12}, cette hypersurface devient une hyperquadrique comptée 2 fois, qui touche la surface Φ tout le long de la courbe Γ_3 correspondante. En d'autres termes, le long de chaque courbe du système $|\Gamma_3|$, il y a une hyperquadrique touchant Φ. Ces hyperquadriques passent par 8 des 12 points de diramation de Φ.

Il existe de même, sur Φ, deux systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, de même genre $\pi - 2$, jouissant des mêmes propriétés.

Si l'on désigne par $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{21}, \ldots, A_{34}$ les courbes rationnelles de degré -2 auxquelles sont équivalents les points de diramation de Φ, on a les relations fonctionnelles

$$\begin{aligned}
2\Gamma_3 + A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{21} + \ldots + A_{24} &\equiv 2\Gamma,\\
2\Gamma_1 + A_{21} + \quad \ldots \quad + A_{24} + A_{31} + \ldots + A_{34} &\equiv 2\Gamma,\\
2\Gamma_2 + A_{31} + \quad \ldots \quad + A_{34} + A_{11} + \ldots + A_{14} &\equiv 2\Gamma.
\end{aligned}$$

Soient :

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_{\pi-2} = 0$$

les équations de la surface Φ;

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0, \qquad f_2(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0$$

les équations de deux hyperquadriques touchant Φ respectivement le long d'une courbe Γ_1 et d'une courbe Γ_2. Les équations

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ \ldots, \ \varphi_{\pi-2} = 0, \ x_{\pi+1}^2 = f_1, \ x_{\pi+2}^2 = f_2$$

représentent une surface F′ de genres 1, contenant une involution I_4 dont Φ est l'image.

Pour le démontrer, observons que dans la correspondance (1, 4) définie entre Φ et F′, il n'y a diramation que dans le domaine des 12 points doubles de Φ. Par suite, les courbes canonique et pluricanoniques de F′ sont, d'après un théorème bien connu de M. Enriques, d'ordre zéro. F′ a donc les genres $p_g = P_2 = \ldots = P_i = 1$ et, de plus, $p^{(1)} = 1$.

Considérons ensuite un faisceau de sections hyperplanes de Φ; on sait qu'il y en a $6(\pi - 1)$ qui ont un point double en un point simple de Φ. Considérons les courbes qui correspondent, sur F′, à ces sections hyperplanes. Si l'on désigne par I l'invariant de Zeuthen-Segre de F′, on trouve qu'il y a $I + 24\pi - 20$ de ces courbes ayant un point double. Observons qu'à une section hyperplane ayant un point double en un point simple de Φ correspond une courbe de F′ ayant 4 points doubles, et qu'à une section hyperplane de Φ passant par un des points de diramation correspond sur F′ une courbe ayant 2 points doubles. Par suite, on a

$$I + 24\pi - 20 = 24(\pi - 1) + 24, \qquad \text{d'où} \qquad I = 20.$$

On en conclut

$$p_a = \frac{1}{12}(I + p^{(1)} - 9) = 1.$$

La surface F′ ayant les genres $p_a = P_4 = 1$ est bien une surface de genres 1.

Les conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une surface normale de genres 1 *soit de rang* 4 *et de seconde espèce, sont :*

1° *Que la surface possède* 12 *points doubles coniques ;*

2° *Que l'on puisse répartir ces* 12 *points doubles en* 2 *groupes de* 8 *ayant* 4 *points communs, et que parmi les hyperquadriques passant par les points de chacun de ces groupes, il y en ait qui touchent la surface en chaque point d'intersection.*

53. Soit maintenant Φ une surface normale de genres 1, de rang 8 et de seconde espèce, située dans un espace S_π. Nous savons qu'elle possède 14 points doubles coniques qui sont les points de diramation. En raisonnant comme on vient de le faire dans le cas d'une surface de rang 4 et de seconde espèce, on arrive aux résultats suivants :

Désignons par A_{11}, A_{12} ; A_{21}, A_{22} ; ... ; A_{71}, A_{72} les 14 courbes rationnelles de degré -2 auxquelles sont équivalents les 14 points doubles coniques. Il existe 7 systèmes linéaires de genre $\pi - 2$ tels que

$$
\begin{aligned}
&2\Gamma_{123} + A_{41} + A_{42} + A_{51} + A_{52} + A_{61} + A_{62} + A_{71} + A_{72} \equiv 2\Gamma,\\
&2\Gamma_{246} + A_{11} + A_{12} + \dots\dots\dots\dots + A_{71} + A_{72} \equiv 2\Gamma,\\
&2\Gamma_{145} + A_{21} + A_{22} + \dots\dots\dots\dots + A_{71} + A_{72} \equiv 2\Gamma,\\
&2\Gamma_{167} + A_{21} + A_{22} + \dots\dots\dots\dots + A_{51} + A_{52} \equiv 2\Gamma,\\
&2\Gamma_{257} + A_{11} + A_{12} + \dots\dots\dots\dots + A_{61} + A_{62} \equiv 2\Gamma,\\
&2\Gamma_{347} + A_{11} + A_{12} + \dots\dots\dots\dots + A_{61} + A_{62} \equiv 2\Gamma,\\
&2\Gamma_{356} + A_{11} + A_{12} + \dots\dots\dots\dots + A_{71} + A_{72} \equiv 2\Gamma,
\end{aligned}
$$

$|\Gamma|$ étant le système des sections hyperplanes de Φ.

Le long de chacune des courbes Γ_{ikl}, il y a une hyperquadrique touchant la surface Φ.

Enfin,

Les conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une surface normale de genres 1 *soit de rang* 8 *et de seconde espèce, sont :*

1° *Que la surface possède* 14 *points doubles coniques ;*

2° *Que l'on puisse répartir les* 14 *points doubles en* 3 *groupes de* 8 *points ayant deux à deux* 4 *points communs, et que parmi les hyperquadriques passant par les points de chacun de ces groupes, il y en ait qui touchent la surface en chaque point d'intersection.*

54. On parvient de la même manière à des résultats analogues pour les surfaces normales Φ, de rang 16 et de seconde espèce.

Une surface normale de genres 1, Φ, simple, de rang 16 et de seconde espèce, possède 15 points de diramation qui sont des points doubles coniques. Désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_{15}$ les courbes rationnelles de degré -2 équivalentes à ces points. Il existe sur Φ 15 systèmes linéaires de genre $\pi - 2$ tels que

$$\begin{array}{l} 2\Gamma_{1234567} + A_8 + A_9 + A_{10} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{15} \equiv 2\Gamma, \\ 2\Gamma_{12489,10,12} + A_3 + A_5 + A_6 + A_7 + A_{11} + A_{13} + A_{14} + A_{15} \equiv 2\Gamma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Le long de chacune de ces courbes, il y a une hyperquadrique touchant Φ.

Les conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une surface normale de genres 1 *soit de rang* 16 *et de deuxième espèce, sont :*

1° *Que la surface possède* 15 *points doubles coniques ;*

2° *Que l'on puisse partager ces* 15 *points en* 4 *groupes de* 8 *points ayant deux à deux* 4 *points communs, et que parmi les hyperquadriques passant par les points de chacun de ces groupes, il y en ait qui touchent la surface en chaque point d'intersection.*

CHAPITRE VIII.

SURFACES DE RANG 3 ET DE RANG 9.

55. Soit Φ une surface simple, normale, de genres 1 et de rang 3, située dans un espace linéaire S_π à π dimensions. Cette surface possède 6 points doubles biplanaires ordinaires qui sont les points de diramation. Soit F une surface normale, de genres 1, contenant une involution I_3, d'ordre 3, dont Φ est l'image, et telle qu'à une section hyperplane de Φ corresponde une section hyperplane de F. Il en résulte que F est d'ordre $6(\pi - 1)$, à sections hyperplanes de genre $3\pi - 2$, située dans un espace linéaire à $3\pi - 2$ dimensions, et que cette surface est simple.

L'involution I_3 est cyclique et la transformation birationnelle T qui l'engendre, échangeant entre elles les sections hyperplanes de F, est une homographie cyclique de période 3.

Aux sections hyperplanes Γ de Φ correspondent, sur F, des sections hyperplanes C formant un système incomplet de dimension π, dépourvu de points-base. Les hyperplans contenant ces courbes C forment un système uni de l'homographie T. Les six points de coïncidence P_1, $P_2, \ldots, P_6$ de I_3 sont situés sur un espace uni E et les hyperplans passant par cet espace E sont échangés entre eux par T. Nous avons vu (première Partie) qu'il y a deux directions issues de chacun des points $P_1, \ldots, P_6$, unies pour T, par conséquent, il y aura deux systèmes d'hyperplans dont chaque élément sera transformé en lui-même par T. Les hyperplans d'un système passeront par une des directions unies de chacun des points $P_1, P_2, \ldots, P_6$; les hyperplans de l'autre système par les autres directions unies.

Considérons un de ces systèmes d'hyperplans et soit $|C_1|$ le système de courbes qu'il découpe sur F. Le système $|C_1|$ possède six points-base $P_1, P_2, \ldots, P_6$, où ses courbes ont mêmes tangentes fixes. Soit $|\Gamma_1|$ le système de courbes de Φ qui correspond à $|C_1|$. Entre une courbe Γ_1 et la courbe C_1, de genre $3\pi - 2$, homologue, nous avons une correspondance $(1, 3)$, possédant six points de coïncidence, donc Γ_1 a le genre $\pi - 2$. Φ étant de genres 1, $|\Gamma_1|$ a le degré $2\pi - 6$ et la dimension $\pi - 2$, $|C_1|$ a donc le degré effectif $6\pi - 18$ et la dimension $\pi - 2$.

De même, Φ possède un deuxième système $|\Gamma_2|$, de mêmes caractères que $|\Gamma_1|$ et qui correspond à l'autre système d'hyperplans rencontré plus haut.

Un point double biplanaire ordinaire est équivalent à un couple de courbes rationnelles de degré -2, ayant un point commun. Désignons par A_{i1}, A_{i2} le couple de courbes équivalant au $i^{\text{ième}}$ point double de Φ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$.

Les courbes Γ_1 rencontrent en un point chacune des courbes A_{11}, $A_{21}, \ldots, A_{61}$, mais ne rencontrent pas $A_{12}, A_{22}, \ldots, A_{62}$. Inversement, les courbes Γ_2 rencontrent $A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{62}$, mais ne rencontrent pas $A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{61}$.

Pour découvrir une relation fonctionnelle entre Γ et Γ_1, ou Γ et Γ_2, observons qu'à une section hyperplane C quelconque de F correspond, sur Φ, une courbe C^* découpée par une hypersurface cubique. En particulier, si C coïncide avec une section hyperplane de F transformée d'une section hyperplane de Φ, C^* se réduit à 3Γ et l'hypersurface cubique à un hyperplan compté trois fois. Si, au contraire, C coïncide avec une nouvelle courbe C_1, C^* se réduit à une courbe $3\Gamma_1$ et l'hypersurface cubique oscule Φ en chaque point d'intersection. Il en résulte que sur Φ, les courbes 3Γ et $3\Gamma_1$ ne diffèrent que par une somme de courbes d'ordre o, $A_{11}, \ldots, A_{62}$.

En tenant compte de ce qui a été dit plus haut sur les points communs à Γ_1 et aux courbes $A_{11}, \ldots, A_{62}$, on trouve

$$3\Gamma_1 + 2(A_{11} + A_{21} + \ldots + A_{61}) + (A_{21} + A_{22} + \ldots + A_{62}) \equiv 3\Gamma.$$

De même, on a

$$3\Gamma_2 + (A_{11} + A_{21} + \ldots + A_{61}) + 2(A_{21} + A_{22} + \ldots + A_{62}) \equiv 3\Gamma.$$

56. Nous allons voir que l'existence des six points doubles et d'une hypersurface cubique, osculant Φ en chaque point d'intersection, est une condition suffisante.

Soient :

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-2} = 0$$

les équations de Φ;

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0$$

l'équation d'une hypersurface cubique passant par les six points doubles biplanaires et osculant Φ en chaque point d'intersection.

Considérons la surface F' définie par les équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-2} = 0, \qquad x_{\pi+1}^2 = f(x_1, \ldots, x_\pi).$$

L'hypersurface f osculant Φ en chaque point d'intersection, il n'y aura diramation qu'aux six points doubles de Φ et, par conséquent, la surface F' existera effectivement. De plus, la courbe de diramation étant d'ordre zéro, de même que les courbes canonique et pluricanoniques de Φ, F' aura des courbes canonique et pluricanoniques d'ordre zéro; par suite, on a, pour F',

$$p_g = P_4 = 1, \qquad p^{(1)} = 1.$$

D'autre part, on peut calculer l'invariant de Zeuthen-Segre de F'

en partant du faisceau correspondant à un faisceau de sections hyperplanes de Φ. Si S est la classe de Φ, on a $S = 6\pi$, car l'invariant de Zeuthen-Segre de Φ est égal à 20 et un point double biplanaire ordinaire abaisse la classe de trois unités. Dans un faisceau de courbes de F' correspondant à un faisceau de sections hyperplanes de Φ, il y a six courbes ayant un point double correspondant aux sections hyperplanes passant par les points doubles biplanaires, et $S = 6\pi$ courbes ayant trois points doubles, correspondant aux hyperplans tangents à Φ. Le faisceau considéré ayant le degré $6\pi - 6$ et le genre $3\pi - 2$, l'invariant de Zeuthen-Segre I de F' est

$$I = 6 + 18\pi - 6(\pi - 1) - 4(3\pi - 2) = 20.$$

Par suite, le genre arithmétique de F' est

$$p_a = \frac{1}{12}(p^{(1)} + I - 9) = 1.$$

La surface F'_1 ayant les genres $p_a = P_4 = 1$, est de genres 1; donc

Pour qu'une surface de genres 1 *soit de rang* 3, *il faut et il suffit que :*

1° *La surface possède* 6 *points doubles biplanaires ordinaires;*

2° *Parmi les hypersurfaces cubiques passant par ces points doubles, il y en ait qui osculent la surface en chaque point d'intersection.*

57. Passons à l'étude d'une surface normale simple, de genres 1, de S_π, de rang 9 (nécessairement de seconde espèce). Une telle surface, Φ, possède 8 points de diramation qui sont des points doubles biplanaires ordinaires. Soit F une surface de genres 1 contenant une involution d'ordre 9, I_9, dont Φ est l'image. Désignons par $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ, par C_0 les courbes qui correspondent sur F aux courbes Γ, par T_1, T_2 deux transformations birationnelles cycliques de F en elle-même, de période 3, engendrant I_9. On sait que l'on a $T_1 T_2 = T_2 T_1$.

Le système $|C|$, contenant les C_0 comme courbes totales, est transformé en lui-même par T_1. Il contient trois systèmes $|C_{00}|, |C_1|, |C_2|$ de courbes invariantes pour T_1, car T_1 engendre sur F une involution I_3 de genres 1. $|C|$ étant de genre $9\pi - 8$, $|C_{00}|, |C_1|, |C_2|$ ont respectivement les dimensions $3\pi-2$, $3\pi-4$, $3\pi-4$, et $|C_{00}|$ est celui des trois systèmes dépourvu de points-base.

Le système $|C_{00}|$ est tranformé en lui-même par T_2, et cette transformation laisse invariantes les courbes de trois systèmes dont l'un est $|C_0|$. Les deux autres, que nous désignerons par $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, ont la même dimension $\pi-2$. Chacun de ces systèmes a pour points-base les 18 points de F invariants pour T_2, $T_1 T_2$, $T_1^2 T_2$, et en chacun de ces points, touche une des directions unies. Désignons par Γ_{11}, Γ_{12} les courbes de Φ qui correspondent respectivement aux courbes C_{11}, C_{12}. En répétant le même raisonnement que celui fait à propos des surfaces de rang 3, on voit que le long de Γ_{11} (ou de Γ_{12}), il y a une hypersurface cubique osculant Φ en chaque point d'intersection. Dans le cas actuel, ces hypersurfaces passent par 6 des 8 points doubles de Φ.

Désignons par A_{i1}, A_{i2} les deux courbes rationnelles de degré -2 qui équivalent au $i^{\text{ième}}$ point double de Φ ($i=1, 2, \ldots, 8$). On déduit de ce que nous avons vu pour les surfaces de rang 3, sans difficulté, que l'on a

$$3\Gamma_{11}+2(A_{31}+A_{41}+\ldots+A_{81})+(A_{32}+\ldots+A_{82})\equiv 3\Gamma,$$
$$3\Gamma_{12}+(A_{31}+\ldots\ldots\ldots+A_{81})+2(A_{32}+\ldots+A_{82})\equiv 3\Gamma.$$

Il existe de même, sur Φ, trois couples de systèmes linéaires $|\Gamma_{21}|$, $|\Gamma_{22}|$; $|\Gamma_{31}|$, $|\Gamma_{32}|$; $|\Gamma_{41}|$, $|\Gamma_{42}|$, de genre $\pi-2$, analogues à $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{12}|$. On a, par exemple,

$$3\Gamma_{21}+2(A_{11}+A_{21}+A_{51}+\ldots+A_{81})+(A_{21}+A_{22}+A_{52}+\ldots+A_{82})\equiv 3\Gamma,$$

etc.

Inversement, on montre que l'existence de deux hypersurfaces cubiques osculant Φ en chaque point d'intersection et passant chacune par 6 des 8 points doubles (chacun de ceux-ci étant au moins sur une des hypersurfaces) suffit à caractériser l'existence d'une surface birationnellement identique à F. L'analogie de la démonstration de ce fait avec les démonstrations faites plus haut nous a conduit à énoncer simplement le théorème :

Les conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une surface de genres 1 *soit de rang* 9 *et de seconde espèce, sont :*

1° *Que la surface possède* 8 *points doubles biplanaires ordinaires ;*

2° *Que l'on puisse partager les 8 points en deux groupes de 6, et que parmi les hypersurfaces cubiques passant par les points de chaque groupe, il y en ait quelques-unes osculant la surface en chaque point d'intersection.*

CHAPITRE IX.

SURFACES DE RANG 4 ET DE RANG 6, DE PREMIÈRE ESPÈCE.

58. Soit Φ une surface d'ordre $2\pi - 2$, de genres 1, simple, normale, de S_π, de rang 4 et de première espèce. Elle possède par suite 4 points doubles biplanaires de deuxième espèce [1] et 2 points doubles coniques. Les premiers sont des points de diramation quadruple, les seconds des points de diramation ordinaire.

Soit F une surface de genres 1 possédant une involution I_4 d'ordre 4 dont Φ est l'image, et soit T la transformation birationnelle engendrant cette involution (cyclique puisque de première espèce). L'involution I_4 possède quatre points de coïncidence quadruple, P_1, P_2, P_3, P_4, et deux couples de points de coïncidence double Q_{11}, Q_{12} et Q_{21}, Q_{22}.

Aux sections hyperplanes Γ de Φ correspondent, sur F, des courbes totales d'un système $|C|$, de degré $8\pi - 8$ et de genre et dimension $4\pi - 3$.

La transformation T^2 engendre sur F une involution d'ordre 2 et de genres 1, possédant les 8 points de coïncidence P_1, P_2, P_3, P_4, Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}. Nous pouvons construire une surface $\Phi^\star$, simple et normale, d'ordre $4\pi - 4$, à sections hyperplanes de genre $2\pi - 1$, dans un espace linéaire à $2\pi - 1$ dimensions, image de cette involution et telle qu'à ses sections hyperplanes $\Gamma^\star$ correspondent des courbes de $|C|$. $\Phi^\star$ possède 8 points doubles coniques $P_1^\star$, $P_2^\star$, $P_3^\star$, $P_4^\star$, $Q_{11}^\star$, $Q_{12}^\star$, $Q_{21}^\star$, $Q_{22}^\star$ correspondant aux points de coïncidence. Il existe un second système $|\Gamma_1^\star|$, de genre $2\pi - 3$, sur $\Phi^\star$. Ainsi qu'on l'a vu au Chapitre VII, les courbes de ce système rencontrent en un point

[1] Un point double biplanaire d'espèce 2 est formé d'un point double biplanaire auquel est infiniment voisin successif un point double conique (*voir* première Partie, p. 398, note au bas de la page).

chacune des courbes rationnelles de degré -2 équivalentes aux points $P_1^\star$, ..., $Q_{22}^\star$.

A l'involution I_4 correspond, sur la surface $\Phi^\star$, une involution d'ordre 2, engendrée par une transformation birationnelle θ, et donc Φ est l'image. Les points de coïncidence de cette involution correspondent évidemment aux points de coïncidence quadruple de I_4. Or, nous savons qu'il existe deux de ces points dans le domaine de chacun des points P_1, P_2, P_3, P_4. On en conclut que θ transforme en elle-même la courbe rationnelle de degré -2, équivalente à P_1, par exemple, et qu'elle laisse invariants deux points de cette courbe. Les 8 points ainsi obtenus sont les points de coïncidence de l'involution d'ordre 2 existant sur $\Phi^\star$. Par contre, θ transforme Q_{11} en Q_{12} et Q_{21} en Q_{22}.

Le système $|C|$ étant invariant pour T, θ transforme en eux-mêmes les systèmes $|\Gamma^\star|$ et $|\Gamma_1^\star|$.

Rapportons projectivement les courbes $\Gamma_1^\star$ aux hyperplans d'un espace à $2\pi - 3$ dimensions. A $\Phi^\star$ correspond une surface $\Phi_1^\star$ sur laquelle se trouvent 8 droites p_1, p_2, ..., q_{22} correspondant aux point $P_1^\star$, $P_2^\star$, ..., $Q_{22}^\star$. A θ correspond une transformation homographique θ_1. Il est maintenant facile de voir que, dans le système des sections hyperplanes de $\Phi_1^\star$, il y a deux systèmes de courbes invariantes pour θ_1. D'après ce que nous venons de voir, il y a, sur chacune des droites p_1, p_2, p_3, p_4, deux points invariants pour θ_1. Les sections hyperplanes invariantes pour θ_1 doivent passer par un de ces points. Si donc on se reporte à la surface $\Phi^\star$, on voit qu'il existe, dans $|\Gamma_1^\star|$, deux systèmes linéaires $|\Gamma_{11}^\star|$, $|\Gamma_{12}^\star|$, de courbes invariantes pour θ. Ces courbes passent simplement par les 8 points doubles, mais dans les cônes tangents à chacun des points $P_1^\star$, ..., $P_4^\star$, il y a deux génératrices invariantes pour θ. Les courbes $\Gamma_{11}^\star$ touchent l'une de ces génératrices, les courbes $\Gamma_{12}^\star$ l'autre.

Aux systèmes $|\Gamma_{11}^\star|$, $|\Gamma_{12}^\star|$ correspondent, sur Φ, deux systèmes que nous désignerons respectivement par $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{12}|$. Il résulte de ce qui précède que chaque courbe Γ_{11} (ou Γ_{12}) passe simplement par les points doubles de Φ; les courbes Γ_{11} touchent un des points tangents, les courbes Γ_{12} l'autre plan tangent, en chacun des points doubles biplanaires d'espèce 4. De plus, on voit facilement que les systèmes $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{12}|$ ont tous deux la même dimension $\pi - 2$.

Reprenons la surface Φ^*. Dans le système $|\Gamma^*|$, il y a deux systèmes de courbes invariantes pour θ; l'un correspond à $|\Gamma|$, les courbes de l'autre passent par les huit points invariants pour θ, et les hyperplans qui les découpent passent donc par les points doubles $P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*$. Il en résulte que chacune de ces courbes se compose d'une courbe variable Γ_0^* et des quatre courbes rationnelles équivalentes aux points $P_1^*, \ldots, P_4^*$; ces quatre courbes ont deux points communs, variables, avec Γ_0^*. Au système linéaire $|\Gamma_0^*|$ correspond, sur Φ, un système $|\Gamma|$ de genre $\pi - 2$, car $|\Gamma_0^*|$ a la dimension $\pi - 2$, comme on le voit facilement d'après la théorie des homographies involutives. Les courbes Γ_0 ont un point double en chacun des points doubles biplanaires de Φ.

Si une surface normale, simple, de S_π, *est de rang* 4 *et de première espèce, il existe sur cette surface trois systèmes linéaires de genre* $\pi - 2$. *Les courbes de deux de ces systèmes passent simplement par les points doubles et touchent un des plans tangents en chaque point biplanaire. Les courbes de l'autre système ont un point double en chaque point biplanaire.*

59. Soient:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-2} = 0$$

les équations de la surface Φ (en coordonnées non homogènes);

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0$$

l'équation d'une hypersurface d'ordre 4, ayant un contact du quatrième ordre avec Φ le long d'une courbe Γ_{11}.

Considérons la surface F' représentée par les équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-2} = 0, \qquad x_{\pi+1}^4 = f(x_1, \ldots, x_\pi),$$

dans un espace linéaire à $\pi + 1$ dimensions. Nous allons démontrer que cette surface est de genres 1.

Observons tout d'abord que la surface F' existe, car il y a diramation dans le domaine des 6 points doubles de Φ. De plus, comme les courbes de diramation sont infiniment petites, les courbes canonique et pluricanoniques de F′ sont, comme celles de Φ, d'ordre zéro et l'on a, pour F′,

$$p_g = P_2 = \ldots P_i = \ldots = p^{(1)} = 1.$$

D'autre part, on peut calculer l'invariant de Zeuthen-Segre de F′ en se servant d'un faisceau de courbes transformé d'un faisceau de sections hyperplanes de Φ, comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois. On trouve $I = 20$, et par conséquent $p_a = 1$, ce qui démontre le théorème :

Pour qu'une surface simple, normale, de genres 1, *soit de rang* 4 *et de première espèce, il faut et il suffit que :*

1° *La surface possède quatre points doubles biplanaires d'espèce* 2 *et deux points doubles coniques;*

2° *Parmi les hypersurfaces d'ordre* 4 *passant par ces six points doubles, il en existe qui aient un contact quartiponctuel avec la surface en chaque point d'intersection.*

Remarquons, avant de passer aux surfaces de rang 6, que le long d'une courbe Γ_0 il y a une hyperquadrique touchant la surface Φ. L'existence d'une telle hyperquadrique entraîne celle d'une surface birationnellement identique à Φ*.

60. L'étude des systèmes de courbes tracées sur une surface simple, normale, de genres 1 et de rang 6, Φ, de S_π, se fait d'une manière analogue. Nous ne la reprendrons pas en détail et nous bornerons à donner les résultats. Rappelons que la surface Φ possède deux points de diramation d'ordre 6 qui sont deux points doubles biplanaires de 4ᵉ espèce (formés de trois points doubles infiniment voisins successifs, le dernier étant conique), deux points de diramation cubique qui sont deux points doubles biplanaires ordinaires, deux points de diramation double qui sont des points doubles coniques.

Si une surface Φ normale, simple, de S_π, est de rang 6, il existe sur cette surface cinq systèmes linéaires de genre $\pi - 2$. Les courbes de deux de ces systèmes passent simplement par chacun des six points doubles de la surface. Les courbes de deux des autres systèmes passent par les quatre points doubles biplanaires. Les courbes du dernier système passent par les deux points doubles biplanaires de 4^e espèce et par les points doubles coniques.

Le long de chaque courbe de chacun des deux premiers systèmes, il y a une hypersurface d'ordre 6 ayant un contact du 6^e ordre avec la surface. Le long de chaque courbe des 3^e et 4^e systèmes, il y a une hypersurface cubique osculant la surface Φ. Enfin, le long des courbes du dernier système, il y a une hyperquadrique touchant la surface Φ.

61. Soient encore :

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-2} = 0$$

les équations de la surface Φ ;

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0$$

l'équation d'une hypersurface d'ordre 6 ayant un contact du sixième ordre avec la surface Φ le long d'une courbe (d'ordre $2\pi - 2$) passant par les six points doubles. Les équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-2} = 0, \qquad x_{\pi+1}^6 = f(x_1, x_2, \ldots, x_\pi)$$

représentent une surface de genres 1. On le démontre en suivant la même voie que précédemment.

Pour qu'une surface simple, normale, de genres 1, *soit de rang* 6, *il faut et il suffit que :*

1° *La surface possède six points doubles : deux points doubles biplanaires de* 4^e *espèce, deux points doubles biplanaires ordinaires et deux points doubles coniques ;*

2° *Parmi les hypersurfaces d'ordre* 6 *passant par les six points doubles, il en existe qui ont un contact d'ordre* 6 *en chaque point d'intersection.*

(*A suivre.*)