ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE PICARD

Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie de la distribution de l'électricité avec la loi de Neumann

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 34 (1917), p. 355-361

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1917_3_34__355_0>

SUR

UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

SE PRÉSENTANT DANS

LA THÉORIE DE LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ

AVEC LA LOI DE NEUMANN;

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. J'ai étudié dans mon cours en 1908 le problème de la distribution de l'électricité, en envisageant une loi d'attraction relative à un potentiel plus général que le potentiel newtonien, je veux parler du potentiel (envisagé d'abord par Neumann) de la forme

$$\frac{e^{-kr}}{r} \quad (k > 0). \tag{1}$$

La loi des attractions électriques correspond alors à la fonction de la distance

$$-\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right) \quad \text{au lieu de} \quad \frac{1}{r^2}.$$

J'ai montré [1] que le problème général de la distribution électrique avec le potentiel (1) se ramène à une équation intégrale de Fredholm. Le problème est d'ailleurs différent du cas classique, car il y a ici à trouver une couche *superficielle* à la surface du conducteur et une

---

[1] E. PICARD, *Sur la distribution de l'électricité avec la loi de Neumann et sur le pouvoir refroidissant d'un courant fluide* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXV, 1908).

distribution à l'*intérieur* du conducteur, l'*électricité*, *pour* $k \neq 0$, *ne se portant pas uniquement à la surface*. Dans le Mémoire cité, j'ai seulement énoncé certains résultats concernant une équation fonctionnelle qui se présentait dans mon analyse, résultats que j'avais démontrés dans mon cours. Je vais ici indiquer ces démonstrations. Posons

$$f(r) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)$$

et désignons par s un point quelconque de la surface du conducteur. L'équation fonctionnelle en question est l'équation intégrale du type de Fredholm :

$$\rho_s - \frac{\lambda}{2\pi}\int\int f(r)\cos\psi . \rho_\sigma \, d\sigma = \mathrm{U}_s, \tag{2}$$

où ψ désigne l'angle que fait avec la normale intérieure en s la droite joignant le point s à l'élément $d\sigma$, et U_s une fonction donnée sur la surface. Il s'agit de démontrer que les valeurs singulières de λ, c'est-à-dire les valeurs de λ, pour lesquelles l'équation sans second membre

$$\rho_s - \frac{\lambda}{2\pi}\int\int f(r)\cos\psi . \rho_\sigma \, d\sigma = 0 \tag{3}$$

admet une solution ρ non identiquement nulle, *sont réelles et ont une valeur absolue supérieure à l'unité*.

2. Rappelons d'abord quelques propriétés du potentiel de simple couche

$$\mathrm{V} = \int\int \rho_\sigma \frac{e^{-kr}}{r} \, d\sigma$$

[r étant la distance du point (x, y, z) à l'élément $d\sigma$].

Ce potentiel satisfait à l'équation $\Delta \mathrm{V} = k^2 \mathrm{V}$; en outre il est continu pour le passage à travers la surface, mais il n'en est pas de même pour la dérivée normale. En désignant par $\frac{d\mathrm{V}}{dn}$ et $\frac{d\mathrm{V}'}{dn}$ les dérivées limites pour l'intérieur et l'extérieur de la surface (la normale étant prise vers l'intérieur), on a en un point s de la surface

$$\frac{dV'}{dn} - \frac{dV}{dn} = 4\pi\rho_s,$$

$$\frac{dV'}{dn} + \frac{dV}{dn} = 2\int\int f(r)\cos\psi.\rho_\sigma\, d\sigma.$$

On peut d'ailleurs écrire $V' = V$, à cause de la continuité pour le passage par la surface.

Si donc ρ satisfait à l'équation (3) pour une certaine valeur λ_0 de λ, sans être identiquement nul, on aura

$$(4) \qquad \frac{dV'}{dn} - \frac{dV}{dn} = \lambda_0\left(\frac{dV'}{dn} + \frac{dV}{dn}\right).$$

Démontrons tout d'abord que λ_0 ne peut être complexe. Soit en effet $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, on aura $\rho = \rho_1 + i\rho_2$, d'où deux potentiels V_1 et V_2 correspondant à ρ_1 et ρ_2. On écrira les deux équations résultant de (4) en posant $V = V_1 + iV_2$. Multipliant ces équations par V_2 et V_1, les retranchant et intégrant après multiplication par $d\sigma$, on obtient la relation

$$(5) \qquad \beta\left[\int\int V_1 \frac{dV_1}{dn}\, d\sigma + \int\int V_2 \frac{dV_2}{dn}\, d\sigma + \int\int V_1' \frac{dV_1'}{dn}\, d\sigma + \int\int V_2' \frac{dV_2'}{dn}\, d\sigma\right] = 0.$$

La quantité entre crochets est donc nulle, puisque β est supposé différent de zéro.

De même, en multipliant les mêmes équations par V_1 et V_2, les ajoutant et intégrant après multiplication par $d\sigma$, on obtient la relation

$$(6) \qquad (1+\alpha)\left[\int\int V_1 \frac{dV_1}{dn}\, d\sigma + \int\int V_2 \frac{dV_2}{dn}\, d\sigma\right] = (1-\alpha)\left[\int\int V_1' \frac{dV_1'}{dn}\, d\sigma + \int\int V_2' \frac{dV_2'}{dn}\, d\sigma\right].$$

Comme $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ n'est pas égal à -1, on déduit de (5) et de (6)

$$(\mathrm{E})\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\int V_1 \frac{dV_1}{dn}\,d\sigma + \int\int V_2 \frac{dV_2}{dn}\,d\sigma = 0,\\ &\int\int V_1' \frac{dV_1'}{dn}\,d\sigma + \int\int V_2' \frac{dV_2'}{dn}\,d\sigma = 0.\end{aligned}\right.$$

Mais pour une fonction U satisfaisant à $\Delta U = k^2 U$, la formule de Green donne de suite

$$(7)\qquad \int\int\int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + k^2 U^2\right] dx\,dy\,dz + \int\int U \frac{dU}{dn}\,d\sigma = 0.$$

On en conclut que dans la première des équations (E) les deux termes sont négatifs, tandis qu'ils sont positifs dans la seconde. Les quatre intégrales figurant dans les équations (E) sont donc nulles séparément. Il en résulte, au moyen de l'équation (7), que les potentiels V_1 et V_2 sont identiquement nuls dans tout l'espace et par suite que la densité ρ est nulle, ce qui est contraire au fait que λ_0 est une valeur singulière. *Tous les λ singuliers sont donc réels.*

3. Montrons maintenant que, λ_0 étant une valeur singulière, on a

$$|\lambda_0| > 1,$$

l'égalité étant exclue.

A cet effet, revenons à l'équation (4), dont nous multiplierons les deux membres par V (ou son égal V'), et intégrons après multiplication par $d\sigma$; on a

$$\lambda_0 = \frac{\int\int V' \frac{dV'}{dn}\,d\sigma - \int\int V \frac{dV}{dn}\,d\sigma}{\int\int V' \frac{dV'}{dn}\,d\sigma + \int\int V \frac{dV}{dn}\,d\sigma}.$$

Or nous avons vu qu'on avait l'inégalité

$$\int\int V \frac{dV}{dn}\,d\sigma < 0,$$

tandis que

$$\int\int V' \frac{dV'}{dn}\,d\sigma > 0,$$

et il résulte aussi de la formule de Green, qu'*aucune de ces intégrales n'est nulle*. Donc *la valeur absolue de* λ_0 *est supérieure à l'unité*, et $\lambda = \pm 1$ n'est pas une valeur singulière.

4. Pour le problème concernant la distribution électrique, l'équation fonctionnelle intéressante est l'équation (2) pour $\lambda = 1$, c'est-à-dire l'équation

$$\rho_s - \frac{1}{2\pi}\int\int f(r)\cos\psi.\rho_\sigma\, d\sigma = \mathrm{U}_s. \tag{8}$$

La recherche de ρ se fait ici très facilement. Il suffit de développer, dans l'équation (2), ρ suivant les puissances de λ; les coefficients se calculent de proche en proche. On est assuré, d'après le théorème ci-dessus, que la série ainsi obtenue converge pour $\lambda = 1$, et la résolution de l'équation (8) est effectuée.

De ce qui précède, il résulte que le problème de la distribution de l'électricité est, au point de vue analytique, plus facile pour le potentiel $\frac{e^{-kr}}{r}$ $(k > 0)$ que pour le potentiel newtonien $\frac{1}{r}$. Il en est de même d'ailleurs de tous les problèmes aux limites concernant l'équation

$$\Delta \mathrm{V} = k^2 \mathrm{V} \qquad (k^2 \neq 0); \tag{9}$$

ils sont beaucoup plus simples que les problèmes analogues relatifs à l'équation de Laplace

$$\Delta \mathrm{V} = 0.$$

Ainsi, pour l'équation (9), on peut se donner arbitrairement les valeurs de $\frac{d\mathrm{V}}{dn}$ sur la surface, tandis qu'il y a une condition bien connue pour l'équation de Laplace.

5. Indiquons, en terminant, la manière dont on peut traiter le problème classique de la distribution électrique suivant la loi de Coulomb ($k = 0$), qui fera ressortir la différence avec le cas étudié ci-dessus. On sait que la distribution est ici superficielle, et que la densité ρ satisfait à *l'équation de Robin*

$$\rho_s = \frac{1}{2\pi}\int \rho_\sigma \frac{\cos\psi}{r^2}\, d\sigma.$$

Revenons aux équations (2) et (3), en y faisant $k = 0$, c'est-à-dire

$$f(r) = \frac{1}{r^2}.$$

On établit que, dans ce cas, l'équation (2) admet la valeur singulière $\lambda = 1$, que nous n'avions pas pour $k \neq 0$. De plus, $\lambda = 1$ est un pôle simple de la solution ρ_s de cette équation.

Écrivons l'équation (2), correspondant au cas actuel

$$\rho_s - \frac{\lambda}{2\pi}\int\int \rho_\sigma \frac{\cos\psi}{r^2}\,d\sigma = U_s,$$

et développons ρ_s suivant les puissances de λ. Nous aurons

$$(10) \qquad \rho_s = \rho_s^{(0)} + \rho_s^{(1)}.\lambda + \ldots + \rho_s^{(n)}.\lambda^n + \ldots,$$

on a $\rho_s^0 = U_s$ et les ρ se déterminent par la récurrence

$$(11) \qquad \rho_s^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int\int \rho_\sigma^{(n-1)} \frac{\cos\psi}{r^2}\,d\sigma.$$

Le développement (10) est valable pour $|\lambda| < 1$. La valeur $\lambda = 1$ est un pôle simple de la fonction analytique définie par ce développement. Soit

$$\frac{C_s}{1-\lambda}$$

la partie devenant infinie pour $\lambda = 1$. On a

$$C_s - \frac{1}{2\pi}\int\int C_\sigma \frac{\cos\psi}{r^2}\,d\sigma = 0.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\rho_s^0 + \lambda\rho_s^{(1)} + \ldots + \lambda^n\rho_s^{(n)} + \ldots = \frac{C_s}{1-\lambda} + \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots,$$

et la série entière dans le second membre

$$\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots$$

a un rayon de convergence supérieur à l'unité.

Or cette série peut s'écrire

$$\rho_s^0 + \lambda(\rho_s^{(1)} - C_s) + \ldots + \lambda^n(\rho_s^{(n)} - C_s) + \ldots.$$

Puisqu'elle converge pour $\lambda = 1$, on a

$$C_s = \lim_{n=\infty} \rho_s^n.$$

Ainsi les itérations (11), en partant d'un U_s arbitraire, conduisent à C_s, c'est-à-dire à la solution de l'équation de Robin, et par suite à la solution du problème de la distribution électrique. Cette solution n'est déterminée qu'à un facteur constant près; on achève de la déterminer en écrivant que la masse électrique sur le conducteur a une valeur donnée.