J. Boussinesq

Poussée des terres : recherche des lois générales de l'état ébouleux produit dans un massif de sable par des déformations planes parallèles à un plan vertical

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 34 (1917), p. 1-79

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1917_3_34__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

POUSSÉE DES TERRES :

RECHERCHE DES LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉTAT ÉBOULEUX PRODUIT DANS UN MASSIF DE SABLE PAR DES DÉFORMATIONS PLANES, PARALLÈLES A UN PLAN VERTICAL;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

I. — Cas d'un massif pesant, à profil supérieur rectiligne : équations aux dérivées partielles de l'équilibre-limite.

1. Lorsqu'une masse pulvérulente moyennement homogène, telle qu'un amas de sable ou de terre sablonneuse soutenu d'un côté par un

mur, et d'une épaisseur verticale assez modérée pour garder une densité à peu près constante, éprouve, par suite d'un commencement d'ébranlement du mur, ce genre de rupture qui lui est propre et qu'on appelle *éboulement*, les glissements mutuels de ses couches ou, plutôt (ce qui en est corrélatif), les deux dilatations principales extrêmes, l'une positive, l'autre, négative et sensiblement pareille, de ses petits agrégats de grains de sable, atteignent, à partir de l'état isotrope où l'agrégat, pour même densité, ne serait soumis en tous sens qu'à sa *pression moyenne*, une *certaine* grandeur (*limite d'élasticité*), grandeur qu'on peut qualifier de *dangereuse* en ce sens qu'elle amène l'équilibre-limite ou extrême dit *état ébouleux*. Or cet état se produit autant dans les parties du massif sablonneux non chargées, ou superficielles, que dans les parties plus chargées et profondes. Car les déformations des agrégats *incohérents*, même non dangereuses ou *élastiques*, paraissent y dépendre uniquement des rapports des pressions mutuelles s'exerçant en divers sens, ou, autrement dit, du rapport de la demi-différence des deux forces principales extrêmes P_1, P_2 (toujours *négatives* ou consistant en pressions *proprement dites*) à leur moyenne arithmétique, dont la valeur absolue $p = -\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$ est aussi, dans le cas simple (auquel on se borne) des *déformations planes*, la valeur absolue de la force principale intermédiaire normale aux deux autres, ou au plan des déformations, et constitue, par conséquent, ce qu'on appelle la *pression moyenne* exercée sur l'agrégat (1).

---

(1) *Hypothèses fondamentales de la Mécanique des masses pulvérulentes.* — Quelques explications me semblent ici nécessaires, sur les hypothèses fondamentales de la Mécanique des masses pulvérulentes comme est notamment un tas de sable. Ces hypothèses me paraissent être les suivantes.

1° Il existe pour chaque *particule* d'un tel massif (composée d'une multitude de grains sablonneux), du moins quand on la conçoit isolée de ses voisines, un *état naturel* dans lequel aucun action ne s'exerce entre ses grains, chacun n'étant alors soumis qu'à la pression atmosphérique, mais uniquement pour son propre compte ou sans action des grains entre eux.

2° La particule peut éprouver, à partir de cet état naturel, *d'invisibles* contractions d'ensemble, moyennement pareilles en tous sens, capables d'y produire entre les grains, à travers tous les éléments plans menés à son intérieur (mais localement et invisiblement déviés de manière à ne pas couper les grains), et par unité d'aire de ces éléments plans, une pression normale commune p, que nous appellerons sa *pression moyenne*. Les grains

On peut admettre comme vraisemblable que, dès le commencement de l'ébranlement du mur, la rupture atteindra, à la fois ou presque à la

---

seront, d'ailleurs, assez peu compressibles, pour que la compression cubique (ou *dilatation cubique* négative) de la particule, correspondant à cette pression p, échappe à nos mesures et soit regardée comme négligeable dans les calculs que l'on a ordinairement en vue.

3° La particule comporte, en outre, de *petites* déformations d'ensemble *beaucoup plus sensibles* ne modifiant pas (en moyenne) sa densité, réductibles à trois *dilatations* (ou contractions) *principales* ∂_1, ∂_2, ∂_3 suivant trois directions rectangulaires, dilatations corrélatives à des roulements limités des grains les uns devant les autres et à l'existence, sur les éléments plans de la particule respectivement perpendiculaires à ces directions, de trois *pressions principales* P_1, P_2, P_3, censées positives ou comptées positivement (en raison d'une habitude des mécaniciens géomètres) quand ce sont des *tractions*, mais, en réalité, *toujours négatives*, ou *pressions proprement dites*, dans les milieux *sans cohésion* considérés.

Par suite, et d'après les lois générales, bien connues, des pressions dans tous les corps, la moyenne arithmétique de ces trois forces principales P_1, P_2, P_3 n'est autre que la pression moyenne même p, changée de signe; en sorte que les déformations *un peu sensibles* dont il s'agit, qui modifient la figure, mais non d'une manière appréciable le volume, de la particule, paraissent y inégaliser les trois pressions principales P_1, P_2, P_3 sans changer leur moyenne $-p$. Il leur correspond assurément des déformations des grains inégales dans les divers sens et véritablement productrices des différences $P_1 - P_2$, $P_2 - P_3$, mais invisibles comme la contraction cubique à laquelle est dû p.

4° Le massif pulvérulent, à grains sans actions mutuelles quand s'annulent $-P_1$, $-P_2$, $-P_3$ et leur moyenne p, acquiert au contraire, dès que cette pression p devient positive, une *rigidité*, ou une résistance au glissement mutuel moyen des couches contiguës, *proportionnelle à* p; ce qui revient à dire, comme on sait, que le rapport des différences $P_1 - P_2$, $P_2 - P_3$ des pressions principales aux doubles différences correspondantes, $2(\partial_1 - \partial_2)$, $2(\partial_2 - \partial_3)$, des dilatations admet une expression commune mp, où m désigne un coefficient *unique*, caractérisant la matière pulvérulente considérée, *prise à son degré effectif de tassement*.

5° Si chaque particule, à part, comporte, pour la densité qu'elle a, un *état naturel* où s'annulent P_1, P_2, P_3 avec leur moyenne $-p$, ainsi que les déformations ∂_1, ∂_2, ∂_3, et à partir duquel ∂_1, ∂_2, ∂_3 restent insensibles, quel que devienne p, pourvu que P_1, P_2, P_3 conservent leur égalité, il n'en est généralement pas de même d'un massif entier, qu'on forme d'ordinaire en déposant et superposant peu à peu, en un même endroit, des couches sablonneuses ou terreuses qui se tassent à mesure et irrégulièrement sous leur propre poids ou sous leur choc; en sorte que des particules contiguës ainsi déformées, si on les portait à l'état naturel en les isolant, prendraient des figures incapables de se juxtaposer ensuite ou de constituer un massif d'apparence continue.

6° Toutefois, quand il s'agit, comme ici, d'étudier des *déformations planes*, où toutes les couches minces parallèles au plan vertical des xy sont déformées de même en restant dans leurs plans respectifs, il convient d'admettre aussi, à titre d'hypothèse la plus simple et la première à examiner, que chaque particule de ces couches a perdu son état naturel fois, sur toute la profondeur et sur l'épaisseur du massif, un volume considérable de matière pulvérulente, contrairement à ce qui arriverait

---

par des déformations analogues, ou sans sortir de son plan, et pareilles pour toutes les particules juxtaposées suivant une normale à ce plan. Par suite, si l'on amenait une telle particule, en l'isolant de ces voisines, à son état naturel, puis de cet état à celui qui est effectivement le sien, ces changements se feraient par de pareilles déformations la laissant dans son plan et déplaçant de la même manière, dans leurs plans respectifs parallèles, les particules alignées en file perpendiculaire à ces plans.

Ceux-ci seraient dès lors, pour les phénomènes étudiés, des plans de symétrie sur lesquels s'exercerait une *pression principale*, que nous supposerons être P_3; et, de plus, à partir de l'état naturel, la dilatation correspondante ∂_3 serait nulle. La densité n'ayant guère changé, ou la dilatation cubique, qui est *sensiblement* $\partial_1 + \partial_2 + \partial_3$, se réduisant à zéro *environ*, on aurait donc $\partial_1 + \partial_2 = 0$, c'est-à-dire une valeur positive pour ∂_1, par exemple, et, à très peu près, la valeur négative contraire pour ∂_2. Dès lors, la double égalité

$$(\alpha) \qquad \frac{P_1 - P_2}{2(\partial_1 - \partial_2)} = \frac{P_2 - P_3}{2(\partial_2 - \partial_3)} = mp$$

prend (vu $\partial_3 = 0$ et $\partial_2 = -\partial_1$) la forme

$$(\beta) \qquad \frac{P_1 - P_2}{4\partial_1} = \frac{P_2 - P_3}{-2\partial_1} = mp$$

et donne

$$P_1 - P_2 = 2(P_3 - P_2) \qquad \text{ou} \qquad P_3 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2).$$

Donc la pression moyenne p, ou $-\frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3)$, devient

$$-\frac{1}{3}\,\frac{3}{2}(P_1 + P_2) = -\frac{1}{2}(P_1 + P_2) = -P_3.$$

Ainsi, la *troisième* pression principale P_3, *celle qui est normale au plan des déformations*, égale bien, au moins dans l'hypothèse la plus naturelle (par laquelle il convient de commencer), la *moyenne arithmétique* des deux premières, et *représente*, au signe près, la *pression moyenne p*.

7° Enfin, les équations (β) donnent, en y remplaçant p par $-\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$

$$(\gamma) \qquad \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} = 2m\,\partial_1.$$

Cette relation, où P_1 et P_2 sont négatifs, signifie, d'après les formules générales des pressions dans tous les corps, que, si l'on considère l'élément plan de la particule *sur lequel s'exerce la pression la plus oblique*, ou pour lequel est maximum le rapport de la composante *tangentielle* $\mathfrak{T}$ de la pression à sa composante *normale* $(-\mathfrak{N})$, cet élément superficiel a sa propre normale dans le plan des déformations (c'est-à-dire des deux dilatations principales *extrêmes* ∂_1, ∂_2), où se trouve aussi la pression la plus oblique, et que l'angle de pour un massif pourvu de *cohésion*, où des forces élastiques notables seraient toujours nécessaires pour amener des déformations percep-

---

ces deux droites (*normale* et *pression*), dont la tangente est $\frac{\mathfrak{G}}{(-\mathfrak{N})}$, a pour sinus $\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}$, c'est-à-dire $2m\partial_1$.

Or l'analogie, d'une part, des deux couches sablonneuses en contact que sépare cet élément superficiel, avec deux solides tendant à glisser l'un contre l'autre, et, d'autre part, de la composante tangentielle $\mathfrak{G}$ au frottement mutuel de pareils solides sous une pression normale $(-\mathfrak{N})$, porte à leur étendre la loi usuelle du frottement des solides, d'après laquelle le rapport de $\mathfrak{G}$ à $(-\mathfrak{N})$ ne saurait dépasser le *coefficient du frottement mutuel des corps*, ou la tangente de leur *angle* φ *de frottement*, sans amener entre eux un *glissement effectif* ou *fini*, c'est-à-dire, ici, cette instabilité du mode d'agrégation des grains de sable, ou de la *contexture* des particules, qu'on appelle l'*état ébouleux* du massif.

Donc le produit $2m\partial_1$ atteindra tout au plus la valeur $\sin\varphi$ et rendra dès lors *imminente* la désagrégation de la particule, par glissement mutuel fini des couches que sépare l'élément plan supportant la pression la plus oblique.

Autrement dit, la dilatation principale positive ∂_1 comporte, pour chaque espèce de matière pulvérulente, une *limite supérieure* Δ, exprimée par la formule

$$(\gamma') \qquad \Delta = \frac{\sin\varphi}{2m},$$

et qu'on peut appeler la *limite d'élasticité* de cette matière pulvérulente; car elle est analogue à la limite d'élasticité d'un solide.

On déduit aisément de là que l'*angle* φ *de frottement intérieur* est aussi l'*angle de terre coulante*, savoir, le plus grand que puisse faire avec l'horizon, à l'état de repos ou sans s'ébouler, la surface libre d'un *talus plan indéfini* de la matière considérée, se soutenant sous son propre poids.

Ici, dans la particule sablonneuse de densité donnée, c'est-à-dire *tassée* jusqu'à un certain point ou parvenue à une homogénéité et une isotropie moyennes la rendant désormais beaucoup plus déformable que compressible, je me suis contenté d'admettre, à titre de *postulatum fondamental*, une *rigidité proportionnelle à la pression moyenne* **p**. Mais, en ne craignant pas d'entrer dans quelques détails, il serait préférable de supposer développables par la formule de Mac-Laurin, en séries rapidement convergentes, les pressions principales P_1, P_2, P_3, fonctions des dilatations également principales ∂_1, ∂_2, ∂_3 (comptées maintenant à partir de l'état naturel). On obtiendrait ainsi :

1° D'une part, la pression moyenne p, jusqu'aux termes du second degré inclusivement, sous la forme

$$(\delta) \qquad p = a\theta + b\theta^2 + c[(\partial_2 - \partial_3)^2 + (\partial_3 - \partial_1)^2 + (\partial_1 - \partial_2)^2],$$

où θ désigne la dilatation cubique

$$(1 + \partial_1)(1 + \partial_2)(1 + \partial_3) - 1 = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3 + \partial_2\partial_3 + \partial_3\partial_1 + \partial_1\partial_2;$$

car la parité d'expression de p en ∂_1, ∂_2 et ∂_3 n'y permettrait que trois termes, tibles, surtout des déformations *dangereuses*, et où, par suite, la rupture n'atteindrait immédiatement que la région la plus chargée, mais principalement *la plus tirée*.

---

respectivement en $\delta_1+\delta_2+\delta_3$, $\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2$, $\delta_2\delta_3+\delta_3\delta_1+\delta_1\delta_2$ et, par suite, *trois* coefficients distincts, comme sont a, b et c;

2° D'autre part, les trois différences (*actions déformatrices*) P_2-P_3, P_3-P_1, P_1-P_2, jusqu'aux termes du troisième degré inclusivement, ou, ce qui revient au même, jusqu'aux termes du second degré leurs rapports aux *déformations* correspondantes $\delta_2-\delta_3$, $\delta_3-\delta_1$, $\delta_1-\delta_2$. En effet, la première, par exemple, P_2-P_3, censée exprimée au moyen de $\delta_1, \delta_2+\delta_3$ et $\delta_2-\delta_3$, change visiblement de signe avec $\delta_2-\delta_3$, ou en est fonction *impaire* et se trouve divisible par cette dernière variable. Le rapport correspondant, pareil en δ_2 et δ_3, ne comporte dès lors que les six termes en $\delta_2+\delta_3$, δ_1, $\delta_2^2+\delta_3^2$, $\delta_2\delta_3$, $(\delta_2+\delta_3)\delta_1$, δ_1^2, ou *six* coefficients distincts, et peut s'écrire

$$a'\theta+b'\theta^2+c'[(\delta_2-\delta_3)^2+(\delta_3-\delta_1)^2+(\delta_1-\delta_2)^2]+(a''+b''\theta)\delta_1+c''\delta_1^2.$$

Les deux autres rapports s'en déduisant, il vient en tout la formule triple

$$(\delta')\quad \left(\frac{P_2-P_3}{\delta_2-\delta_3},\ \frac{P_3-P_1}{\delta_3-\delta_1},\ \frac{P_1-P_2}{\delta_1-\delta_2}\right)=a'\theta+b'\theta^2+c'[(\delta_2-\delta_3)^2+(\delta_3-\delta_1)^2+(\delta_1-\delta_2)^2]$$
$$+(a''+b''\theta)(\delta_1,\delta_2,\delta_3)+c''(\delta_1^2,\delta_2^2,\delta_3^2).$$

Mais l'annulation identique de la somme des trois différences P_2-P_3, P_3-P_1, P_1-P_2 oblige d'abord à poser

$$(\delta'')\qquad c''=0.$$

Puis le fait que des déformations quelconques $\delta_2-\delta_3$, $\delta_3-\delta_1$, $\delta_1-\delta_2$ se produisent parfois sans amener aucune pression sensible dans la particule *pulvérulente*, quand la *contraction cubique* $-\theta$ est assez faible par rapport à δ_1, δ_2, δ_3, prouve que, dans ces circonstances où θ^2 et même les produits de θ par δ_1, δ_2, δ_3 sont négligeables devant θ, les formules (δ) et (δ') deviennent

$$a\,\theta+c\,[(\delta_2-\delta_3)^2+(\delta_3-\delta_1)^2+(\delta_1-\delta_2)^2]=0,$$
$$a'\theta+c'[(\delta_2-\delta_3)^2+(\delta_3-\delta_1)^2+(\delta_1-\delta_2)^2]+a''(\delta_1,\delta_2,\delta_3)=0;$$

ce qui oblige à poser, outre (δ''),

$$(\delta''')\qquad a''=0\quad \text{et}\quad \frac{a'}{a}=\frac{c'}{c}=\text{une même constante } 2m.$$

Dès lors, les phénomènes étudiés dans le présent Mémoire se faisant toujours sans contractions cubiques $(-\theta)$ qui soient comparables à δ_1, δ_2, δ_3, on peut encore, *même quand la pression moyenne p est très sensible*, y négliger, à côté de θ, non seulement θ^2, mais aussi les produits de θ par δ_1, δ_2, δ_3. Les seconds membres des trois équations (δ')

De là, l'intérêt que présente l'étude de *l'équilibre-limite* d'une masse sablonneuse, même, pour commencer, dans des cas où il n'y aurait pas, à l'endroit considéré, de mur s'ébranlant. Car cette étude sera un acheminement au cas où il y aurait un tel mur, dont on devrait éviter le renversement en le douant d'une résistance capable de vaincre justement la *poussée* ainsi exercée sur lui par le massif au moment dangereux de son équilibre-limite, et capable, par conséquent, d'empêcher un tel état de se produire.

2. Le cas le plus simple à examiner, et cependant un peu général déjà, est celui d'un massif pulvérulent et pesant s'étendant indéfiniment vers le bas, au-dessous d'un plan-limite ou *talus*, montant, dont l'angle ω *sur l'horizon* sera donné, et dont le *profil* dessinant sa ligne de plus grande pente, choisi comme axe des y, sera également indéfini (de $y = -\infty$ à $y = \infty$ en allant vers le haut).

Prenons les x positifs normaux à la surface supérieure et dirigés vers l'intérieur du massif, ou faisant ainsi, avec la verticale descendante émanée de l'origine O, l'angle ω; ce qui donnera $\omega + \frac{\pi}{2}$ entre cette même verticale et le profil supérieur montant.

Appelons χ, au point quelconque (x, y), l'azimut toujours aigu (compté positivement en tournant dans le sens qui va des x positifs vers les y positifs) de la plus grande (en valeur absolue) des deux pressions principales situées dans le plan vertical xOy des déformations, pressions toujours négatives ou constituant des pressions *proprement dites*. Nous aurons, en désignant par k le sinus de l'angle φ

---

se réduisent ainsi à $2mp$. Et il vient, au lieu de (δ') et (δ),

$$(\varepsilon) \quad \begin{cases} P_2 - P_3 = 2mp(\partial_2 - \partial_3), \quad P_3 - P_1 = 2mp(\partial_3 - \partial_1), \quad P_1 - P_2 = 2mp(\partial_1 - \partial_2), \\ p = a\theta + c[(\partial_2 - \partial_3)^2 + (\partial_3 - \partial_1)^2 + (\partial_1 - \partial_2)^2]. \end{cases}$$

En résumé, cette démonstration plus complète continue à indiquer *une rigidité mp proportionnelle à la pression moyenne p*. Mais la pression moyenne n'est pas simplement en raison directe de la contraction cubique $(-\theta)$, comme il aurait semblé naturel de le penser; elle s'accroît d'une partie proportionnelle à la somme des carrés des trois *déformations principales* $\partial_2 - \partial_3$, $\partial_3 - \partial_1$, $\partial_1 - \partial_2$. Celle-ci est-elle purement théorique? L'observation pourrait seule, sans doute, nous l'apprendre.

de *terre coulante* (constant et donné, si le sable est homogène), pour les trois composantes principales de pression N_x, N_y, T *relatives aux axes*, et p étant d'ailleurs la *pression moyenne* positive $\left(-\frac{N_x+N_y}{2}\right)$,

$$(1)\quad N_x = -p(1+k\cos 2\chi),\qquad N_y = -p(1-k\cos 2\chi),\qquad T = -pk\sin 2\chi,$$

formules à porter dans les deux équations indéfinies de l'équilibre,

$$(2)\qquad \frac{dN_x}{dx}+\frac{dT}{dy}+X=0,\qquad \frac{dT}{dx}+\frac{dN_y}{dy}+Y=0,$$

où enfin X, Y expriment les deux composantes, $\Pi\cos\omega$ et $-\Pi\sin\omega$, du *poids spécifique* Π de la masse terreuse ou sablonneuse. Nous aurons donc comme équations indéfinies régissant p et χ, après y avoir changé les signes,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp}{dx}+k\left(\frac{d\,p\cos 2\chi}{dx}+\frac{d\,p\sin 2\chi}{dy}\right)=X,\\ &\frac{dp}{dy}+k\left(\frac{d\,p\sin 2\chi}{dx}-\frac{d\,p\cos 2\chi}{dy}\right)=Y.\end{aligned}\right.$$

3. Pour abréger, nous poserons

$$(4)\quad \cos 2\chi = C,\qquad \sin 2\chi = S,\qquad \frac{dC}{dx}+\frac{dS}{dy}=2D,\qquad \frac{dS}{dx}-\frac{dC}{dy}=2E,$$

quantités où figurent, dans C et S, l'unique variable χ, mais, dans D et E, χ avec ses deux dérivées partielles en x et y. Or on a, en développant les équations (3),

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1+kC)\frac{dp}{dx}+kS\frac{dp}{dy}+2kDp=X,\\ &kS\frac{dp}{dx}+(1-kC)\frac{dp}{dy}+2kEp=Y.\end{aligned}\right.$$

Multiplions ces équations soit par $1-kC$ et par $-kS$, soit par $-kS$ et par $1+kC$; puis, dans chaque cas, ajoutons-les terme à terme. Elles prendront la forme plus commode (où sont séparées les deux dérivées partielles de p) :

$$(1-k^2)\frac{dp}{dx}+2k[\mathrm{D}-k(\mathrm{DC}+\mathrm{ES})]p=\mathrm{X}-k(\mathrm{XC}+\mathrm{YS}),$$

$$(1-k^2)\frac{dp}{dy}+2k[\mathrm{E}-k(\mathrm{DS}-\mathrm{EC})]p=\mathrm{Y}-k(\mathrm{XS}-\mathrm{YC}).$$

Or, d'après (4),

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}2(\mathrm{DC}+\mathrm{ES})&=\frac{1}{2}\frac{d.\mathrm{C}^2+\mathrm{S}^2}{dx}+\mathrm{C}^2\frac{d\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{C}}}{dy}=\quad \mathrm{C}^2\frac{d\tang 2\chi}{dy}=\quad 2\frac{d\chi}{dy},\\ 2(\mathrm{DS}-\mathrm{EC})&=\frac{1}{2}\frac{d.\mathrm{S}^2+\mathrm{C}^2}{dy}-\mathrm{C}^2\frac{d\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{C}}}{dx}=-\mathrm{C}^2\frac{d\tang 2\chi}{dx}=-2\frac{d\chi}{dx}.\end{aligned}\right.$$

Les deux équations (5) deviennent donc, en définitive,

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}(1-k^2)\frac{dp}{dx}+2k\left(\mathrm{D}-k\frac{d\chi}{dy}\right)p&=\mathrm{X}-k(\mathrm{XC}+\mathrm{YS}),\\ (1-k^2)\frac{dp}{dy}+2k\left(\mathrm{E}+k\frac{d\chi}{dx}\right)p&=\mathrm{Y}-k(\mathrm{XS}-\mathrm{YC}).\end{aligned}\right.$$

4. On voit, par (4), que D, E sont des fonctions linéaires homogènes de $\frac{d\chi}{dx}$, $\frac{d\chi}{dy}$, avec coefficients linéaires eux-mêmes en C et S, c'est-à-dire en $\cos 2\chi$ et $\sin 2\chi$. Les équations (7), résolues par rapport à $\frac{dp}{dx}$ et $\frac{d\chi}{dx}$, permettraient donc, si l'on se donnait p et χ sur tout le profil supérieur $x=0$, d'y déterminer la variation élémentaire, $\frac{dp}{dx}\varepsilon$ et $\frac{d\chi}{dx}\varepsilon$, des deux fonctions p et χ, entre cet axe des y et une parallèle infiniment voisine $x=\varepsilon$. Après quoi, on passerait, de la même manière, à une autre parallèle $x=$ const. un peu plus intérieure; et ainsi de suite. Les fonctions p et χ se trouveraient donc déterminées de proche en proche dans tout le massif, si l'on admet du moins qu'il ne se produisit en chemin aucune singularité. Et l'on aurait ainsi l'intégrale générale du problème, avec les deux fonctions arbitraires de y exprimant p et χ à la surface supérieure $x=0$ du massif.

II. — Équations pouvant permettre la détermination préalable de l'azimut des pressions principales.

5. Voyons s'il est possible d'éliminer p entre les deux équations (7), de manière à obtenir une équation en χ seul ne comportant également, par son intégration, que deux fonctions arbitraires, savoir, comme ci-dessus, χ le long de l'axe des y et, de même, la valeur de $\frac{d\chi}{dx}$ qui s'y trouve corrélative à celle de p choisie, dans le cas précédent, sur le même axe des y.

La seconde (7), différentiée en x, puis retranchée de la première, différentiée de même en y, donne, par l'élimination immédiate de la dérivée seconde oblique de p et après division de tout le résultat par $2k$, en appelant d'ailleurs (avec Lamé) Δ_2 l'expression symbolique $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}$,

$$\begin{aligned}(8)\qquad &\left(\frac{dD}{dy}-\frac{dE}{dx}-k\Delta_2\chi\right)p-\left(E+k\frac{d\chi}{dx}\right)\frac{dp}{dx}+\left(D-k\frac{d\chi}{dy}\right)\frac{dp}{dy}\\ &\quad=\frac{X}{2}\left(\frac{dS}{dx}-\frac{dC}{dy}\right)-\frac{Y}{2}\left(\frac{dC}{dx}+\frac{dS}{dy}\right).\end{aligned}$$

Multiplions par $(1-k^2)$ et substituons aux deux dérivées premières de p en x et en y leurs valeurs tirées de (7). Le développement des calculs donnera, en transposant au second membre tous les termes en X et Y, après destruction mutuelle évidente de termes en p,

$$\begin{aligned}&(1-k^2)\left(\frac{dD}{dy}-\frac{dE}{dx}-k\Delta_2\chi\right)p\\ &\quad=(XE-YD)+kX\left(DS-EC+\frac{d\chi}{dx}\right)-kY\left(DC+ES-\frac{d\chi}{dy}\right)\\ &\quad\quad-k^2X\left(C\frac{d\chi}{dx}+S\frac{d\chi}{dy}\right)+k^2Y\left(-S\frac{d\chi}{dx}+C\frac{d\chi}{dy}\right)\\ &\quad\quad+\frac{1-k^2}{2}\left[X\left(\frac{dS}{dx}-\frac{dC}{dy}\right)-Y\left(\frac{dC}{dx}+\frac{dS}{dy}\right)\right].\end{aligned}$$

Or les coefficients totaux de kY et de kX sont nuls en vertu de (6).

De plus, d'après les relations (4),

$$C\frac{d\chi}{dx}+S\frac{d\chi}{dy},\quad -S\frac{d\chi}{dx}+C\frac{d\chi}{dy},\quad \frac{dS}{dx}-\frac{dC}{dy},\quad \frac{dC}{dx}+\frac{dS}{dy}$$

sont respectivement E, D, 2E, 2D. Le second membre se réduit donc à

$$2(1-k^2)(XE-YD);$$

et l'équation (8) devient, en définitive, après suppression du facteur commun $1-k^2$,

$$\left(\frac{dD}{dy}-\frac{dE}{dx}-k\Delta_2\chi\right)p=2(XE-YD). \tag{9}$$

ou bien

$$p=2\frac{XE-YD}{\frac{dD}{dy}-\frac{dE}{dx}-k\Delta_2\chi}. \tag{10}$$

Il en résulte donc une équation aux dérivées partielles du second ordre, comme on cherchait à l'établir, savoir

$$\frac{dD}{dy}-\frac{dE}{dx}-k\Delta_2\chi=0, \tag{11}$$

mais uniquement dans le cas particulier d'un massif sans pesanteur, où $X=0$, $Y=0$.

6. Hors ce cas, p ne se trouve pas éliminé, mais seulement exprimé au moyen des dérivées premières et secondes de χ en x et en y. Il faudra donc, pour avoir des équations en χ seul, porter la valeur (10) de p dans les deux relations (7). Or on obtiendra ainsi, en χ, *non pas une*, mais *deux* équations distinctes, qui seront aux dérivées partielles *du troisième ordre*. Leur compatibilité, ou l'accord des deux valeurs qu'elles devront donner pour la dérivée $\frac{d^3\chi}{dx^3}$ en chaque point d'une parallèle quelconque $x=$ const. au profil supérieur, déterminera probablement la dérivée la plus élevée en x au-dessous de celle-là, c'est-à-dire $\frac{d^2\chi}{dx^2}$, à peu près comme l'aurait fait une équation aux déri-

vées partielles du second ordre ou, du moins, d'une manière finalement équivalente en tenant compte des équations proprement dites (7) du problème. Car on sait que la différentiation conduit généralement à des équations moins spécifiées que celles d'où l'on part, en raison des arbitraires qu'introduit l'intégration inverse.

7. Un tel ensemble, si compliqué, de relations aux dérivées partielles, et même seulement l'équation (11) du second ordre, *non linéaire*, propre aux massifs sans pesanteur, semblent, dès l'abord, de nature à rebuter toute tentative un peu générale d'intégration. De fait, on n'y a guère traité que des cas, particulièrement simples, où les lignes d'égale inclinaison χ des pressions principales, c'est-à-dire ayant l'équation $\chi = \text{const.}$, se réduisaient, du moins dans une partie du massif, à un système de droites concourantes, avec parallélisme de ces pressions dans tout le reste, où, par conséquent, les droites concourantes jouissaient encore de la propriété $\chi = \text{const.}$

Soit (x_0, y_0) le point de concours des droites $\chi = \text{const.}$ dont il s'agit, $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ leur coefficient angulaire, caractéristique de chacune et, par conséquent, des diverses valeurs de χ. L'azimut χ est ainsi censé ne dépendre que du rapport des deux variables $x - x_0$, $y - y_0$, ou en être une fonction homogène du degré zéro. Les dérivées partielles successives de χ en x et en y seront, par suite, des fonctions homogènes des deux mêmes variables, mais des degrés successifs -1, -2, -3, ..., suivant leur ordre croissant. Et *la pression moyenne p*, quotient, d'après (10), d'une somme de dérivées premières par une somme de dérivées secondes, sera une fonction homogène du premier degré des mêmes différences $x - x_0$, $y - y_0$, ou *se trouvera, tout le long de chaque ligne d'égale inclinaison χ, simplement proportionnelle à la distance $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ au point de concours* (x_0, y_0).

III. — Cas particulièrement simple d'état ébouleux, et de poussée des terres, traité par Macquorn-Rankine et Maurice Lévy.

8. Le seul cas que donnent les cours usuels de *Mécanique appliquée*, et qui remonte à Macquorn-Rankine, est compris dans celui où p et χ sont supposés constants sur le plan supérieur $x = 0$. Alors le raisonnement synthétique du n° 4 indique, de proche en proche, des valeurs de p et de χ ne dépendant nullement de y. Les équations (3) deviennent donc de simples équations différentielles en x, dont l'intégration est immédiate à partir de $x = 0$.

Le cas classique est celui où le plan supérieur constitue une *surface libre*, sur laquelle s'annule forcément la pression moyenne p. Il vient donc

$$(12) \quad p(1 + k\cos 2\chi) = \mathrm{X}x = \Pi x \cos\omega, \qquad pk\sin 2\chi = \mathrm{Y}x = -\Pi x \sin\omega.$$

On en déduit, par une simple division et en se rappelant que k désigne $\sin\varphi$ (sinus de l'*angle de terre coulante* ou *de frottement intérieur* du massif),

$$(13) \qquad \frac{\sin\varphi \sin 2\chi}{1 + \sin\varphi\cos 2\chi} = -\frac{\sin\omega}{\cos\omega},$$

équation dont on reconnaît aisément, en y faisant évanouir les dénominateurs, l'équivalence à

$$(14) \qquad \sin(\omega + 2\chi) = -\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}.$$

Soit toujours, pour fixer les idées, $\omega > 0$. Introduisons l'angle positif et aigu, supérieur à ω, dont le sinus égale le rapport $\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}$; et appelons-le ω'. Il est clair que $\omega + 2\chi$ pourra lui être ou égal et contraire, ou supplémentaire et contraire. Cela donnera d'abord pour χ les deux valeurs, évidemment aiguës, comme il le faut, et toutes les deux négatives,

$$(15) \qquad \chi = -\frac{\omega' + \omega}{2}, \qquad \chi = -\frac{\pi}{2} + \frac{\omega' - \omega}{2}.$$

Toutes autres valeurs de χ satisfaisant à l'équation (14) dépasseraient celles-là d'un multiple de π : elles correspondraient aux mêmes directions de la plus grande des deux pressions principales et ne constitueraient pas des solutions du problème différant des deux précédentes (15).

9. Considérons donc celles-ci. Elles donnent, pour la pression principale la plus forte qui fasse un angle aigu avec les x positifs, deux directions s'abaissant toutes les deux, du côté des y négatifs, et s'y écartant de l'axe des x plus que ne fait la verticale descendante, dont l'azimut est visiblement $-\omega$. L'angle de cette pression principale la plus forte avec la verticale en question vaut donc l'excédent positif de $-\chi$ sur ω, soit respectivement, pour les deux solutions distinctes (15),

$$(16) \qquad \frac{\omega'-\omega}{2}, \qquad \frac{\pi}{2}-\frac{\omega'+\omega}{2}.$$

La première est visiblement inférieure à $\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}$, puisque ω' est aigu. La seconde est, au contraire, supérieure à la même limite; car leur somme égale $\frac{\pi}{2}-\omega$ ou le double de cette limite.

Dans la première solution, ce sont des couches s'écartant peu de l'horizontale qui sont le plus fortement pressées, tandis que les couches perpendiculaires à celles-là, ou voisines de la verticale, le sont le moins et, relativement, *se détendent*, comme il arrive à un massif soutenu par un mur qui commence à se renverser et qui reçoit, par conséquent, de lui la *poussée* la plus faible possible. Dans le second cas, c'est le contraire, la détente se faisant suivant une direction voisine de la verticale, comme il arrive, sous l'action du même mur de soutènement qui commence à se renverser, aux masses terreuses ou sablonneuses qui ont pu s'accumuler à son pied en roulant du talus supérieur, et que le mur vient comprimer horizontalement dans son mouvement de recul, en les faisant refluer au-dessus de leur surface libre.

La première solution (15) correspond ainsi au phénomène que les ingénieurs appellent la *poussée* des terres et, la seconde, à leur *butée*.

10. Bornons-nous à la première, où le plan mené par l'origine dans le massif et qui supporte, sur sa face tournée vers les y positifs, c'est-à-dire vers le haut du talus, la pression principale (*proprement dite*) *la plus faible*, fait, du côté des y négatifs, avec la verticale descendante émanée aussi de l'origine, le premier angle (16). Dans ces conditions, si l'on mène à partir de ce plan, encore par l'origine mais du côté de la même verticale descendante (ou en tournant vers les y positifs), un nouveau plan faisant avec lui l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, la poussée qu'il subira de la part du massif sera inclinée de l'angle maximum φ, vers le bas, par rapport à sa composante normale $(-\mathfrak{N})$, ou, en d'autres termes, elle aura une composante tangentielle ϖ, *descendante*, égale à $(-\mathfrak{N})\tan\varphi$. Et *si ce nouveau plan*, avec la partie du massif située *à son arrière* (du côté des y négatifs), *devient un mur rugueux* d'une épaisseur donnée, *remplaçant toute cette partie indéfinie de notre massif, la masse sablonneuse subsistante (en avant) sera sur le point de glisser contre lui en s'abaissant.* La poussée qu'il éprouve sera donc celle qu'on aurait besoin d'évaluer, pour apprécier la résistance du mur à l'éboulement de ce massif en talus, ainsi restant. Et, en effet, l'évaluation s'en fera simplement au moyen de la remarque suivante.

Les expressions (1) de N_x, N_y, T, où k désigne $\sin\varphi$, se démontrent, au moyen des formules générales des pressions, sans spécifier l'orientation des x et des y : elles restent les mêmes quand l'ensemble des deux axes tourne en bloc d'un angle quelconque, pourvu que, dans chaque cas, χ désigne bien le véritable azimut, compté à partir des x choisis, de la pression (proprement dite) la plus forte. Or si l'on amène, par une telle rotation, cet axe des x suivant la face considérée du mur, la normale à celui-ci deviendra l'axe des y positifs; de sorte que, dans (1), T ne sera autre que ϖ et, N_y, autre que $\mathfrak{N}$. D'ailleurs, la pression principale proprement dite la plus forte se trouvant inclinée de $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ en arrière de ces nouveaux x (provisoires), on aura

$$\chi = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Les deux dernières formules (1), où $k = \sin\varphi$, deviendront donc

$$(17)\quad \begin{cases} \mathfrak{N} = -p(1-\sin^2\varphi) = -p\cos^2\varphi, \qquad \mathfrak{T} = p\cos\varphi\sin\varphi; \\ \text{d'où} \\ \dfrac{\mathfrak{T}}{(-\mathfrak{N})} = \operatorname{tang}\varphi. \end{cases}$$

On voit que la poussée $\mathfrak{P}$ sur le mur fait bien, de haut en bas, l'angle φ avec la normale à celui-ci prolongée hors du massif, ou que la terre est bien sur le point d'y glisser en s'abaissant. La grandeur $\mathfrak{P}$ de cette poussée par unité d'aire est $p\cos\varphi$, avec la valeur de p tirée de la dernière (12) où l'on a $k = \sin\varphi$. Il vient donc

$$(18)\qquad \mathfrak{P} = -\Pi x \frac{\cot\varphi \sin\omega}{\sin 2\chi}.$$

11. Soit l la profondeur, sous l'origine, du point (x, y) où l'on évalue ainsi la poussée par unité d'aire, *profondeur mesurée suivant la ligne même de pente du mur*. Cette droite l fera, avec la verticale descendante émanée de l'origine, en tournant vers les x positifs (normaux à la surface libre) un angle i excédent de $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ sur le premier angle (16), $\frac{\omega' + \omega}{2} - \omega$ ou $-(\chi + \omega)$. On aura donc

$$(19)\qquad i = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \omega + \chi \qquad \text{ou} \qquad 2\chi = (\varphi + 2i - 2\omega) - \frac{\pi}{2}.$$

Il faut retrancher i de ω, pour avoir l'angle du mur (*en fruit intérieur*) avec l'axe des x, axe sur lequel x est justement la projection de l. Par suite, $x = l\cos(\omega - i)$ et l'expression (18) de $\mathfrak{P}$ devient

$$(20)\qquad \mathfrak{P} = -\Pi l \frac{\cot\varphi \sin\omega \cos(\omega - i)}{\sin 2\chi}.$$

Éliminons 2χ de celle-ci, de (13) et de (14), par la seconde (19). Nous aurons, d'une part, pour la poussée par unité d'aire, l'expression

$$(21)\qquad \mathfrak{P} = \Pi l \frac{\cot\varphi \sin\omega \cos(\omega - i)}{\cos(\varphi + 2i - 2\omega)};$$

d'autre part, au lieu de (13), la proportion

$$\frac{\cos\omega}{1+\sin\varphi\sin(\varphi+2i-2\omega)}=\frac{\sin\omega}{\sin\varphi\cos(\varphi+2i-2\omega)} \tag{22}$$

et, au lieu de (14), l'égalité

$$\begin{aligned}\sin\omega &= \sin\varphi\cos(\varphi+2i-\omega)\\ &= \sin\varphi[\cos(\varphi+2i)\cos\omega+\sin(\varphi+2i)\sin\omega],\end{aligned} \tag{23}$$

revenant visiblement à la proportion

$$\frac{\cos\omega}{1-\sin\varphi\sin(\varphi+2i)}=\frac{\sin\omega}{\sin\varphi\cos(\varphi+2i)}. \tag{24}$$

Ajoutons terme à terme, d'un côté, les deux rapports (22), après les avoir respectivement multipliés *haut et bas* par le sinus et le cosinus de $\varphi+2i-2\omega$; d'un autre côté, les deux rapports (24), respectivement multipliés de même, *haut et bas*, par $\sin(\varphi+2i)$ et $-\cos(\varphi+2i)$. Il viendra le nouveau rapport, égal aux deux (22),

$$\frac{\sin(\varphi+2i-\omega)}{\sin(\varphi+2i-2\omega)+\sin\varphi}=\frac{\sin(\varphi+2i-\omega)}{2\sin(\varphi+i-\omega)\cos(i-\omega)}, \tag{25}$$

et le nouveau rapport, égal aux deux (24),

$$\frac{\sin(\varphi+2i-\omega)}{\sin(\varphi+2i)-\sin\varphi}=\frac{\sin(\varphi+2i-\omega)}{2\sin i\cos(\varphi+i)}. \tag{26}$$

Égalons respectivement ceux-ci, pris sous leur dernière forme, aux seconds (22) et (24). Nous aurons, entre quatre fractions, deux égalités pouvant s'écrire, la première,

$$\frac{\sin\omega\cos(\omega-i)}{\sin\varphi\cos(\varphi+2i-2\omega)}=\frac{\sin(\varphi+2i-\omega)}{2\sin(\varphi+i-\omega)} \tag{27}$$

et, la seconde, en remplaçant, par la valeur de $\sin(\varphi+2i-\omega)$ qu'elle donne elle-même, ce sinus dans (27), ou en en éliminant par (27) $\sin(\varphi+2i-\omega)$,

$$\frac{\cos(\omega-i)}{\cos(\varphi+2i-2\omega)}=\frac{\sin i\cos(\varphi+i)}{\cos(\varphi+2i)\sin(\varphi+i-\omega)}. \tag{28}$$

Enfin, multiplions les deux membres de (28) par ceux de la nouvelle proportion obtenue en ajoutant terme à terme les deux rapports (24), après les avoir multipliés eux-mêmes *haut et bas*, respectivement, par $\sin(\varphi+i)$ et $-\cos(\varphi+i)$, ce qui donne le nouveau rapport

$$\frac{\sin(\varphi+i-\omega)}{\sin(\varphi+i)-\sin\varphi\cos i}=\frac{\sin(\varphi+i-\omega)}{\cos\varphi\sin i}, \tag{29}$$

puis en égalant au second rapport (24) le second (29). Il vient, après suppression des facteurs communs aux deux membres du résultat et multiplication de ceux-ci par $\cos\varphi$,

$$\frac{\cot\varphi\sin\omega\cos(\omega-i)}{\cos(\varphi+2i-2\omega)}=\cos(\varphi+i). \tag{30}$$

12. L'expression (21) de la poussée limite $\mathfrak{P}$ sur l'unité d'aire du mur prend donc la forme extrêmement simple, due à Maurice Lévy,

$$\mathfrak{P}=\Pi l\cos(\varphi+i). \tag{31}$$

On peut observer que $\varphi+i$ est l'angle de cette poussée $\mathfrak{P}$ avec l'horizon; car la normale au mur, menée vers l'intérieur de celui-ci, fait déjà sous l'horizon le même angle i que le mur avec la verticale descendante; et, d'autre part, la poussée elle-même fait encore, sous cette normale, l'angle maximum φ. D'après cela, *la vraie poussée limite égale la composante horizontale d'une poussée fictive qui aurait la direction même de la poussée réelle, mais la valeur encore plus simple*, Πl, *de la pression exercée par un liquide de même poids spécifique que le massif, à la profondeur verticale l sous sa surface libre horizontale.*

IV. — Recherche, pour les massifs et les murs à profil rectiligne, des solutions du problème de la poussée voisines de celle de Rankine et Maurice Lévy.

13. Barré de Saint-Venant, après avoir pris connaissance, en 1869, de cette solution particulière du problème de la poussée des terres dans le Mémoire alors manuscrit de Maurice Lévy, dont il était *rapporteur* à l'Académie des Sciences, eut l'idée d'en déduire une solution approchée des cas voisins, où l'inclinaison du mur sur la verticale différerait un peu de celle que donne la formule (19), en ajoutant, aux valeurs de N_x, N_y et T obtenues, de petites corrections, *dont on regarderait comme négligeables les carrés et produits* [1]. Et j'ai trouvé peu après cette solution [2], à laquelle j'ai donné en 1873 sa forme la plus simple, avec des applications assez générales, à la fin du paragraphe IX (p. 112 à 133) d'un Mémoire intitulé « *Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, comparé à celui de massifs solides, et sur la poussée des terres sans cohésion* », Mémoire publié au Tome XL (1876) du *Recueil des Savants étrangers de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*.

Les formules du Mémoire actuel permettent d'obtenir plus simplement peut-être les mêmes résultats, du moins pour les massifs considérés ici, *c'est-à-dire terminés supérieurement par un talus plan et que soutient un mur également plan*, dont la face contiguë à la masse sablonneuse fait avec la verticale descendante, *en fruit intérieur*, un angle i' assez peu différent du précédent i défini par (19). Nous appellerons δ la petite différence $i - i'$; de sorte que cette différence δ sera positive quand le mur effectif se trouvera plus voisin de la verticale descendante que le mur idéal (à fruit intérieur) défini par (19), négatif dans le cas contraire.

Comme on attribue au massif une profondeur telle que *le sol rigide sous-jacent n'apporte aucune perturbation appréciable*, les conditions du phénomène seront analogues en *tous* les points *d'une droite* quelconque r émanée, dans le plan des xy, de l'origine O où se coupent le profil supérieur et celui du mur. Par suite, l'azimut χ des éléments plans les moins fortement pressés (ou de la *pression* principale la plus forte)

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 14 février 1870, et *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XV (1870); voir le n° 7 du Mémoire de B. de Saint-Venant.

(2) Mêmes *Comptes rendus*, 4 avril 1870, et *Journal de Mathématiques*, même tome XV. Un certain paramètre σ, défini par la relation $\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\omega}}$, m'a beaucoup facilité les calculs dans cette Note, ainsi qu'à Barré de Saint-Venant dans un dernier article (du même 4 avril 1870). Son emploi ici, à partir du n° 8, aurait peut-être abrégé certaines démonstrations, si l'idée m'en était venue quand j'ai rédigé, 46 ans après, le Mémoire actuel.

doit y être pareil sur toute la longueur et ne dépendre que de *l'angle polaire* ou azimut même, θ, de la droite r.

D'ailleurs, très peu au-dessous de la surface libre où $p = 0$ et qui a pour équation $\theta = \frac{\pi}{2}$, la distance du mur, qui s'y trouve comme infinie relativement à x, permet de supposer les circonstances indépendantes de y, aux petites profondeurs x, ou d'y appliquer les formules du n° 9 et, en particulier, d'y prendre, d'après (15),

$$\chi = -\frac{\omega' + \omega}{2}.$$

Telle sera donc la valeur de χ à la limite supérieure $\theta = \frac{\pi}{2}$ des angles polaires θ. Et χ sera aussi connu à la limite inférieure $\theta = -\omega + i'$, si, du moins, l'état ébouleux se réalise jusque contre le mur. Car à l'approche de celui-ci, c'est-à-dire pour θ voisin de $-\omega + i'$, l'élément plan soumis à la pression la plus faible fera, avec le profil descendant du mur et à la sortie du massif, l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$. On aura donc, en désignant alors par χ', pour plus de netteté, l'azimut variable χ au voisinage du mur,

$$(32) \qquad (\text{pour } \theta = -\omega + i') \qquad \chi' = \theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = i' - \omega - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}.$$

Les valeurs de χ, devenues un peu variables avec θ, seront donc connues aux deux limites supérieure et inférieure de cet angle polaire (surface libre et paroi).

14. Voyons ce que devient, dans ces conditions, la formule (10) (p. 11) où χ dépendra de x et de y uniquement par l'intermédiaire de l'angle polaire θ. Celui-ci, défini par l'équation $\tang\theta = \frac{y}{x}$, où x et y ont les valeurs $r\cos\theta$ et $r\sin\theta$, a pour différentielle

$$d\theta = \cos^2\theta \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{1}{r}(\cos\theta . dy - \sin\theta . dx);$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\sin\theta}{r}, \qquad \frac{d\theta}{dy} = \frac{\cos\theta}{r};$$

et, par suite, les différentiations successives en x et y de toute fonction de θ se feront par les deux formules symboliques

$$\frac{d}{dx} = -\frac{\sin\theta}{r}\frac{d}{d\theta}, \qquad \frac{d}{dy} = \frac{\cos\theta}{r}\frac{d}{d\theta}. \tag{33}$$

Vu les notations (4) (p. 8), on aura d'abord

$$\frac{dC}{d\theta} = -2\sin 2\chi\frac{d\chi}{d\theta}, \qquad \frac{dS}{d\theta} = 2\cos 2\chi\frac{d\chi}{d\theta}; \tag{33 bis}$$

et ensuite, vu (33),

$$D = \frac{\cos(2\chi-\theta)}{r}\frac{d\chi}{d\theta}, \qquad E = \frac{\sin(2\chi-\theta)}{r}\frac{d\chi}{d\theta}, \tag{34}$$

formules où, la dérivée de χ en θ étant du premier ordre de petitesse, les petites variations de l'arc 2χ seront négligeables dans $\sin(2\chi-\theta)$ et dans $\cos(2\chi-\theta)$. L'arc χ sera donc censé y prendre la première valeur constante (15) (p. 13).

Le numérateur de l'expression (10) de p, où $X = \Pi\cos\omega$ et $Y = -\Pi\sin\omega$, devient dès lors

$$2(XE - YD) = 2\Pi\frac{\sin(2\chi+\omega-\theta)}{r}\frac{d\chi}{d\theta}. \tag{35}$$

Quant au dénominateur de la même expression, où 2χ pourra être supposé constant sous les signes cosinus ou sinus, et où $\Delta_2\chi$ sera, vu la destruction de termes en $\pm\cos\theta\sin\theta$,

$$-\frac{\sin\theta}{r}\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\frac{d\chi}{d\theta}\right) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos\theta}{r}\frac{d\chi}{d\theta}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d^2\chi}{d\theta^2},$$

il deviendra presque immédiatement, k étant $\sin\varphi$,

$$\frac{\cos(2\chi-2\theta)-\sin\varphi}{r^2}\frac{d^2\chi}{d\theta^2} + \frac{2\sin(2\chi-2\theta)}{r^2}\frac{d\chi}{d\theta}. \tag{36}$$

Le coefficient 2 du dernier terme $\left(\text{en } \frac{d\chi}{d\theta}\right)$ provient de ce que les valeurs (34) de D et de E dépendent non seulement de θ, mais aussi de r, par leur dénominateur; ce qui ajoute à $\frac{dD}{dy} - \frac{dE}{dx}$ la portion

$$\begin{aligned}\frac{dD}{dr}\frac{dr}{dy} - \frac{dE}{dr}\frac{dr}{dx} &= -\frac{dE}{dr}\cos\theta + \frac{dD}{dr}\sin\theta \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{d\chi}{d\theta}[\sin(2\chi-\theta)\cos\theta - \cos(2\chi-\theta)\sin\theta] = \frac{\sin(2\chi-2\theta)}{r^2}\frac{d\chi}{d\theta}\end{aligned}$$

et double exactement le coefficient de ce dernier terme ([1]).

Portons ces valeurs (35), (36) dans (10), où nous pourrons observer que p diffère peu, par hypothèse, de sa valeur donnée par la seconde (12) (p. 13), savoir

$$(37) \qquad p = -\frac{\Pi x \sin\omega}{k\sin 2\chi} = -\frac{\Pi r\cos\theta\sin\omega}{\sin\varphi\sin 2\chi}.$$

L'équation (10) sera donc sauf erreur relative négligeable, en y faisant évanouir certains dénominateurs, divisant par $2\sin(2\chi - 2\theta)$ et transposant,

$$(38) \qquad \frac{\cos(2\chi-2\theta)-\sin\varphi}{2\sin(2\chi-2\theta)}\frac{d^2\chi}{d\theta^2} + \left[1 + \frac{\sin\varphi\sin 2\chi\sin(2\chi+\omega-\theta)}{\sin\omega\cos\theta\sin(2\chi-2\theta)}\right]\frac{d\chi}{d\theta} = 0.$$

Observons que $\sin\varphi$ est le cosinus de $\frac{\pi}{2} - \varphi$ et que, par suite, le coefficient de la dérivée seconde de χ dans cette équation (38) devient, par la décomposition du numérateur en un produit,

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \chi - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \chi + \theta\right)}{\sin(2\chi - 2\theta)}.$$

Nous supposerons donc, ci-après, le premier coefficient de l'équation du second ordre (38) remplacé par cette fraction.

15. Cette équation différentielle (38) en χ ne se trouve ainsi démontrée que pour *l'intérieur* de l'intervalle existant entre les deux valeurs extrêmes de θ, notamment aux distances très sensibles de la

---

([1]) Il y a, dans $\Delta_2\chi$, aux secondes dérivations, deux termes analogues; mais ils se détruisent.

paroi $\theta = -\omega + i'$, *mais non près de celle-ci*. Car l'hypothèse, que nous avons faite, de ne chercher aux équations (7) et (10) que des intégrales χ et p voisines de la première valeur (15) et de (37) n'exige, pour ces fonctions *continues* χ et p, une manière déterminée de varier, jusqu'à des dérivées en θ d'ordre quelconque, qu'aux assez grandes distances des limites du champ où elles existent. Au contraire, très près des limites, rien n'empêcherait, par exemple, la dérivée seconde de χ, de devenir quelque part infinie et, la dérivée première, d'y modifier sa loi de variation en fonction de θ; car les écarts en résultant sur χ n'auraient pas, depuis ce point jusqu'à la limite *voisine* considérée, la place ou le *champ* suffisants pour devenir sensibles. Et les valeurs ainsi modifiées *localement* de χ et de p resteraient, comme il est entendu, très peu différentes de la première (15) et de (37).

Toutefois, la continuité des deux fonctions χ et p elles-mêmes devra être partout sauvegardée, en raison de ce que l'équilibre d'un coin de terre infiniment mince, compris de part et d'autre d'un plan quelconque $\theta =$ const. émané de l'origine (ou, plutôt, de l'axe des z), exige l'égalité partout, sur ses deux faces, des deux composantes normale et tangentielle de pression, ou, par suite, la parité de p et de χ.

Il suffira donc que p et χ soient continus pour l'angle polaire *critique* θ, voisin de $-\omega + i'$, et *que j'appellerai* θ_0, *où changerait leur loi de variation* (¹). Cette loi pourra d'ailleurs, quoi qu'elle devienne *au delà* (ou mieux *en deçà*, pour parler plus exactement), y être supposée *linéaire en* θ, jusqu'à la paroi très voisine $\theta = -\omega + i'$, avec erreurs du second ordre censées toujours négligeables ici.

16. Cela posé, et sous le bénéfice des observations précédentes, simplifions l'équation (38) ou, du moins, ses coefficients, en y comptant les angles polaires θ à partir de la direction $\theta = i - \omega$ qu'a le mur dans la solution Rankine-Lévy. Désignant par θ' le nouvel angle polaire, excédent de θ sur $i - \omega$ ou, d'après (19), sur $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \chi$

(¹) Nous verrons bientôt qu'un tel changement est possible seulement près du mur, non sous la surface libre, où l'équation (38), dérivée de (9), se trouvera vérifiée par l'annulation des dérivées de χ.

avec χ réduit à la première valeur constante (15), nous aurons

$$(39) \qquad \theta = i - \omega + \theta' = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \chi + \theta'.$$

Et l'équation (38) deviendra, par l'élimination finale de cette valeur de χ au moyen de la seconde relation (19),

$$\frac{\cos(\varphi - \theta')}{\cos(\varphi - 2\theta')}(\sin\theta')\frac{d^2\chi}{d\theta'^2} + \left[1 - \frac{\sin\varphi\cos(\varphi + 2i - 2\omega)\cos(\varphi + i - \theta')}{\sin\omega\cos(\omega - i - \theta')\cos(\varphi - 2\theta')}\right]\frac{d\chi}{d\theta'} = 0.$$

Remplaçons-y encore $\cos(\varphi + 2i - 2\omega)$ par sa valeur tirée de (30) et cette équation prendra sa forme la plus simple :

$$(40) \qquad \frac{\cos(\varphi - \theta')}{\cos(\varphi - 2\theta')}(\sin\theta')\frac{d^2\chi}{d\theta'^2} + \left[1 - \frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi - 2\theta')}\,\frac{\cos(\omega - i)}{\cos(\omega - i - \theta')}\,\frac{\cos(\varphi + i - \theta')}{\cos(\varphi + i)}\right]\frac{d\chi}{d\theta'} = 0.$$

On remarquera que, pour θ' très petit, c'est-à-dire au voisinage de la valeur $\theta = i - \omega$, le premier coefficient y est réductible à $\sin\theta' = \theta'$, et que, dans le second coefficient, les fractions $\frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi - 2\theta')}$, $\frac{\cos(\omega - i)}{\cos(\omega - i - \theta')}$, $\frac{\cos(\varphi + i - \theta')}{\cos(\varphi + i)}$ deviennent respectivement

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi + 2\theta'\sin\varphi} = \frac{1}{1 + 2\theta'\operatorname{tang}\varphi} = 1 - 2\theta'\operatorname{tang}\varphi,$$
$$1 - \theta'\operatorname{tang}(\omega - i), \quad 1 + \theta'\operatorname{tang}(\varphi + i).$$

Ce second coefficient s'y réduit donc à

$$\theta'[2\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}(\omega - i) - \operatorname{tang}(\varphi + i)].$$

L'équation (40) devient ainsi, après suppression du facteur commun évanouissant θ',

$$(\text{près de } \theta' = 0) \qquad \frac{d^2\chi}{d\theta'^2} + [2\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}(\omega - i) - \operatorname{tang}(\varphi + i)]\frac{d\chi}{d\theta'} = 0;$$

et il en résulte des valeurs finies pour le rapport des deux dérivées seconde et première de χ dans le voisinage de $\theta' = 0$, c'est-à-dire aux environs de la direction particulière $\theta = i - \omega$ du mur dans la solution Rankine-Lévy.

Mais nous aurons surtout à considérer l'équation (40) aux petites distances de la surface libre, c'est-à-dire pour θ' légèrement inférieur à $\frac{\pi}{2} + \omega - i$, valeur annulant le dénominateur $\cos\theta = \cos(\omega - i - \theta')$ et faisant évanouir, dans le second coefficient (entre crochets), le premier terme 1, *en comparaison* de l'autre terme qui contient ce dénominateur et croît sans limite. L'équation y devient donc, après division par son premier coefficient et transposition du second terme,

$$(40\ bis) \qquad \frac{d^2\chi}{d\theta'^2} = \frac{\cos\varphi\cos(\omega - i)}{\cos(\varphi + i)}\,\frac{\cos(\varphi + i - \theta')}{\sin\theta'\cos(\varphi - \theta')}\,\frac{1}{\cos(\omega - i - \theta')}\,\frac{d\chi}{d\theta'}.$$

Dans le coefficient actuel de $\frac{d\chi}{d\theta'}$, tous les facteurs sont essentiellement positifs à la limite considérée $\theta' = \frac{\pi}{2} + \omega - i$. En effet, d'après les premières (15) et (19), savoir

$$\chi = -\frac{\omega' + \omega}{2}, \qquad i = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\omega' - \omega}{2},$$

on y a, en laissant, pour le moment, de côté le dénominateur évanouissant positif $\cos(\omega - i - \theta')$,

$$\omega - i = \frac{\omega' + \omega}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \qquad \varphi + i = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\omega' - \omega}{2},$$

$$\theta' = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\omega' + \omega}{2}, \qquad \varphi + i - \theta' = -\omega',$$

$$\varphi - \theta' = -\frac{\omega' + \omega}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Ainsi, d'une part, $\varphi + i - \theta'$, angle aigu, d'autre part, $\omega - i$, $\varphi + i$, différences d'angles aigus, ont leurs cosinus positifs; et θ', somme de deux angles aigus, a bien son sinus également positif. Enfin, $\varphi - \theta'$ a aussi son cosinus positif, car sa valeur absolue n'atteint pas $\frac{\pi}{2}$. On le reconnaît en ajoutant membre à membre les deux inégalités évidentes

$$\frac{\omega'+\omega}{2} < \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2},$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}.$$

Dès lors, si l'on appelle, pour abréger, χ' la dérivée première de χ en θ', et qu'on désigne par μ le produit constant, essentiellement fini,

$$) \quad \mu = \frac{\cos\varphi \cos\omega' \cos\left[\frac{\omega'+\omega}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]}{\cos\left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\omega'-\omega}{2}\right] \sin\left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\omega'+\omega}{2}\right] \cos\left[\frac{\omega'+\omega}{2} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]},$$

produit d'ailleurs positif comme tous ses facteurs, l'équation (40 *bis*) devient

$$\text{(près de la surface libre)} \qquad \frac{d\chi'}{d\theta'} = \frac{\mu}{\cos(\theta'+i-\omega)}\chi'.$$

Prenons-en l'intégrale à partir d'une limite inférieure

$$\theta' = \theta'_0 = \frac{\pi}{2} + \omega - i - \varepsilon$$

déjà voisine de $\frac{\pi}{2} + \omega - i$, ou n'en différant que d'un petit arc positif ε et correspondant, par conséquent, à de faibles profondeurs sous la surface libre. Appelons χ'_0 la valeur, quelle qu'elle soit, de χ' pour $\theta' = \theta'_0$. Posant alors

$$\theta' = \theta'_0 + \theta'' \qquad \text{et, par suite,} \qquad d\theta' = d\theta'',$$

nous pourrons remplacer le cosinus de $\theta' + i - \omega$, devenu le sinus de $\varepsilon - \theta''$, par ce petit arc lui-même $\varepsilon - \theta''$; et notre équation s'écrira aisément

$$(\varepsilon - \theta'')\, d\chi' = \chi' \mu\, d\theta'', \qquad \text{ou} \qquad (\varepsilon - \theta'')\, d\chi' + \chi' \mu\, d(\varepsilon - \theta'') = 0.$$

Multipliée par $(\varepsilon - \theta'')^{\mu-1}$, elle devient

$$d[\chi'(\varepsilon - \theta'')^{\mu}] = 0; \qquad \text{d'où} \qquad \chi'(\varepsilon - \theta'')^{\mu} = \text{const.} = \chi'_0\, \varepsilon^{\mu}.$$

On voit que, à part le cas où χ'_0 s'annulerait, χ' grandit indéfiniment à mesure que θ'' approche de ε ou que le point considéré tend vers la surface libre. Or, ainsi qu'il a été dit au n° 13 (p. 20), c'est, au contraire, près de la surface libre, aux distances de celle-ci très petites par rapport à la distance du mur, que les pressions doivent, *a priori*, le mieux se distribuer comme si le mur n'existait pas, c'est-à-dire en fonction uniquement des distances x à la surface et d'après la solution Rankine-Levy qui fait χ' nul, ou χ égal à la première valeur constante (15). D'ailleurs, nous ne cherchons ici que les solutions voisines de celle-là et, par suite, ne comportant nulle part une variation infiniment rapide de χ.

16 *bis*. Nous devrons donc poser $\chi'_0 = 0$. Or il est, dès lors, aisé de voir que l'équation linéaire et homogène (40), du premier ordre par rapport à χ', obligera de poser aussi $\chi' = 0$ pour toutes les valeurs de θ' auxquelles s'appliquera cette équation (40), c'est-à-dire dans tout le massif à l'exception, peut-être, d'un *coin* très réduit contigu au mur, où θ serait moindre que la valeur critique θ_0 annoncée ci-dessus (n° 15, p. 23).

Observons, pour le reconnaître, que l'équation (40) en $\frac{d\chi'}{d\theta'}$ et χ', si on la divise par χ' et par $\frac{\cos(\varphi - \theta')}{\cos(\varphi - 2\theta')} \sin\theta'$, donne, comme valeur de $\frac{1}{\chi'}\frac{d\chi'}{d\theta'}$, une fonction trigonométrique déterminée $F(\theta')$, finie et continue, sauf parfois pour les valeurs de θ' qui annuleraient ou $\sin\theta'$, ou $\cos(\varphi - \theta')$, ou quelqu'un des dénominateurs figurant dans le coefficient entre crochets. Or $\sin\theta'$ ne s'y annule que pour $\theta' = 0$, et nous venons de voir (p. 24) qu'aux environs de $\theta' = 0$ le quotient $F(\theta')$ reste fini et continu. Quant à $\cos(\varphi - \theta')$, il ne s'annule pas, l'angle $\varphi - \theta'$ y partant d'une valeur voisine de φ pour décroître jusqu'à l'angle négatif, mais aigu, $-\frac{\omega' + \omega}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$.

Enfin pour toute valeur de θ' qui annulerait quelque dénominateur dans le coefficient entre crochets, le terme 1 de celui-ci s'évanouirait comparativement au suivant et l'équation prendrait la forme (40 *bis*), où le seul facteur du dénominateur pouvant s'annuler [outre $\sin\theta'$ et $\cos(\varphi - \theta')$] est $\cos(i - \omega + \theta')$, partout positif, sauf à la surface libre où son annulation nous a contraint à prendre $\chi' = 0$.

Ainsi $F(\theta')$, valeur de $\frac{d\log\chi'}{d\theta'}$, est une fonction partout finie et continue *dans l'intervalle à considérer.*

Intégrons dès lors l'équation $\frac{d\log\chi'}{d\theta'} = F(\theta')$, à partir de la plus petite valeur (*valeur critique* $\theta = \theta_0$ ou $\theta' = \theta'_0$) à laquelle s'applique l'équation différentielle (40); et soit c la valeur *initiale* de χ'. Il viendra évidemment

$$\log\frac{\chi'}{c} = \text{l'intégrale finie} \int_{\theta'_0}^{\theta'} F(\theta')\,d\theta'. \tag{42}$$

Donc le rapport $\frac{\chi'}{c}$, à logarithme toujours fini, ne devient nulle part ni infiniment petit, ni infiniment grand. Et comme nous avons vu que χ' s'annule sous la surface libre, on est forcé de prendre $c = 0$ et d'annuler ainsi χ' partout où s'applique l'équation différentielle.

C'est donc seulement dans le coin contigu au mur ou pour θ inférieur à la valeur critique θ_0, quand ce coin existera, que l'azimut χ de la pression principale la plus forte pourra être variable et différer de la première valeur (15), relative à la solution Rankine-Lévy. D'ailleurs, pour peu que c fût sensible, on voit que les écarts de χ d'avec la valeur (15) le seraient aussi; et la solution obtenue ne se trouverait pas voisine de la solution Rankine-Lévy, contrairement à notre hypothèse.

17. Mais demandons-nous comment se détermineront l'état mécanique dans ce coin exceptionnel (où $\theta < \theta_0$) et l'angle polaire *critique* lui-même θ_0. Pour y distinguer l'azimut χ de sa valeur constante (15) réalisée dans le *gros* du massif, nous l'appellerons désormais χ' (¹), en réservant ainsi la lettre χ seule à sa valeur *initiale*, telle qu'elle est à l'entrée du coin par le *plan critique* $\theta = \theta_0$. Dans *l'étroit* intervalle du coin qui s'étendra (en reculant) de $\theta = \theta_0$ à $\theta = i' - \omega$, *son expression sera linéaire* à très peu près; et, si l'on appelle c une constante conve-

(¹) Notation qui cessera donc de désigner la dérivée $\frac{d\chi}{d\theta}$ ou $\frac{d\chi}{d\theta'}$, mais dénommera l'azimut lui-même.

nablement choisie, on aura

$$(43)\qquad \chi' = \chi + \frac{c}{2}(\theta - \theta_0).$$

Appelons de même p', par analogie avec χ', la pression moyenne fonction de θ et de r, dans le même coin de terre étroit, pression qui excédera celle, p, donnée par (37) (p. 22) pour tout le reste du massif (mais calculable quel que soit θ), d'un petit terme s'annulant encore *à la limite critique* $\theta = \theta_0$, et que nous pourrons, comme pour χ', supposer linéaire en θ dans le voisinage. Comme nous savons que toute l'expression doit être proportionnelle au rayon vecteur r (p. 12), nous aurons donc, si A désigne une certaine constante,

$$(44)\qquad p' = p - \Pi A r(\theta - \theta_0).$$

Nous déterminerons θ_0 et cette constante A par la condition que les deux formules (43), (44) vérifient à l'intérieur du coin sablonneux, près de son entrée, c'est-à-dire pour θ infiniment peu inférieur à θ_0, les deux équations d'équilibre (3) prises ainsi en y accentuant les lettres p et χ. Ces équations (3) sont d'ailleurs satisfaites, même pour $\theta < \theta_0$, par p et χ pris seuls; de sorte qu'elles deviennent, en en retranchant respectivement (3),

$$(45)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d(p'-p)}{dx} + k\left[\frac{d(p'\cos 2\chi' - p\cos 2\chi)}{dx} + \frac{d(p'\sin 2\chi' - p\sin 2\chi)}{dy}\right] = 0,\\ &\frac{d(p'-p)}{dy} + k\left[\frac{d(p'\sin 2\chi' - p\sin 2\chi)}{dx} - \frac{d(p'\cos 2\chi' - p\cos 2\chi)}{dy}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, les trois différences

$$p'-p,\quad p'\cos 2\chi' - p\cos 2\chi,\quad p'\sin 2\chi' - p\sin 2\chi$$

s'évanouissant, quel que soit r, à la limite considérée $\theta = \theta_0$, leurs dérivées en r s'y annulent; d'où il suit que les dérivations en x et en y pourront se faire, dans (45), comme si ces différences dépendaient de x et de y uniquement par l'intermédiaire de l'angle polaire θ, c'est-à-dire au moyen des formules (33) (p. 21). On y aura d'ailleurs, d'après (44),

$$p' - p = -\Pi r A(\theta - \theta_0),$$

et, en tenant finalement compte aussi de (43),

$$p'\cos 2\chi' - p\cos 2\chi = (p'-p)\cos 2\chi' + p(\cos 2\chi' - \cos 2\chi)$$
$$= (\text{sensiblement})\,(-\Pi r A\cos 2\chi - cp\sin 2\chi)(\theta - \theta_0),$$
$$p'\sin 2\chi' - p\sin 2\chi = (p'-p)\sin 2\chi' + p(\sin 2\chi' - \sin 2\chi)$$
$$= (\text{sensiblement})\,(-\Pi r A\sin 2\chi + cp\cos 2\chi)(\theta - \theta_0).$$

Les équations (45) seront alors, après une réduction immédiate,

$$\Pi A\sin\theta + \Pi A k\sin(\theta - 2\chi) + ck\frac{p}{r}\cos(\theta - 2\chi) = 0,$$
$$-\Pi A\cos\theta + \Pi A k\cos(\theta - 2\chi) - ck\frac{p}{r}\sin(\theta - 2\chi) = 0.$$

Multiplions-les respectivement soit par $\cos\theta$, $\sin\theta$, soit par $-\sin\theta$, $\cos\theta$; puis, chaque fois, ajoutons-les terme à terme. Résolues alors par rapport à $\frac{\Pi r A}{cp}$, elles deviendront

$$\frac{\pi r A}{cp} = -\cot(2\theta - 2\chi) = \frac{-k\sin(2\theta - 2\chi)}{1 - k\cos(2\theta - 2\chi)}. \tag{46}$$

L'égalité des second et troisième membres donnera, en nous souvenant que θ est ici θ_0 et que $k = \sin\varphi$,

$$\frac{\cos(2\theta_0 - 2\chi)}{\sin(2\theta_0 - 2\chi)} = \frac{\sin\varphi\sin(2\theta_0 - 2\chi')}{1 - \sin\varphi\cos(2\theta_0 - 2\chi)},$$

ou bien, par l'évanouissement des dénominateurs, avec réduction immédiate et élimination de 2χ au moyen de (19),

$$\sin(\varphi + 2i - 2\omega - 2\theta_0) = \sin\varphi.$$

Or, ici, la différence $2i - 2\omega - 2\theta_0$ des arcs des deux sinus est une petite quantité, puisque l'angle polaire θ_0 du *plan critique* est voisin de celui, $i - \omega$, du mur idéal de la solution Rankine-Lévy; en sorte que l'égalité des deux sinus entraîne l'annulation de cette différence. Il vient donc

$$\theta_0 = i - \omega, \tag{47}$$

En d'autres termes, *le plan critique* $\theta = \theta_0$, *séparant du gros du massif* (*où* $\chi' = \chi$) *le coin exceptionnel, contigu au mur, où l'azimut* χ' *varie, coïncide forcément avec le mur idéal de la solution Rankine-Lévy.*

L'angle critique θ_0 se trouvant ainsi déterminé, la première équation (46), où $\cot(2\theta_0 - 2\chi)$ est la même chose que $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{tang}\varphi$, prend la forme

$$\frac{\Pi r A}{cp} = -\operatorname{tang}\varphi;$$

et elle donne, en tenant compte de la valeur (37) de p,

$$(47\ bis)\qquad A = \frac{c \sin\omega \cos(\omega - i)}{\cos\varphi \sin 2\chi}.$$

On aura donc, d'après (43) et (44), pour exprimer les deux inconnues χ' et p' du problème, les formules

$$(48)\qquad \chi' = \chi + \frac{c}{2}(\theta - \theta_0), \qquad p' = p - \frac{c \sin\omega \cos(\omega - i)}{\cos\varphi \sin 2\chi} \Pi r(\theta - \theta_0).$$

Il y reste l'unique arbitraire c, permettant de vérifier la condition (32) de glissement du sable contre le mur.

V. — Cas d'un mur à plus grand fruit intérieur que n'est celui de la solution Rankine-Lévy.

18. La nécessité, pour le plan critique $\theta = \theta_0$ limitant le coin sablonneux contigu au mur effectif, de coïncider avec le *mur idéal* $\theta = i - \omega$ de la solution Rankine-Lévy, ne laisse aucune place à ce coin exceptionnel, et le rend par conséquent impossible, quand on donne $i' > i$, c'est-à-dire quand le *fruit intérieur*, $\operatorname{tang} i'$, du mur effectif, excède celui, $\operatorname{tang} i$, du mur idéal. Le *gros* du massif, où $\chi' = \chi$ et $p' = p$, s'étend donc alors jusqu'au mur même; et la solution Rankine-Lévy est une solution *isolée*. Autrement dit, il n'existe aucun ensemble de petits termes correctifs qui, en s'adjoignant à cette solution, lui rende possible de satisfaire à la condition du glissement, contre le mur donné, de la couche sablonneuse contiguë.

On en conclut naturellement que cette couche, *préservée d'un ébou-*

lement immédiat par le frottement du mur, fera corps avec lui s'il commence à s'ébranler, ou devra lui être fictivement adjointe, comme un solide qui lui serait lié aux premiers instants de la chute. La rupture se fera donc dans le massif même et (si l'on y admet les lois simples d'état ébouleux des nos 12 à 15 *jusqu'à la base du mur*) suivant la couche sablonneuse la plus proche possible, appuyée contre le bord inférieur du mur, sur laquelle le reste du massif tendra à glisser ou à rouler *de haut en bas,* en exerçant sur elle une poussée inclinée sous sa normale de l'angle maximum φ.

On fait ainsi abstraction, comme il vient d'être dit, des *perturbations pouvant provenir du terrain sous-jacent* ou être dues à la base même du mur. Et la couche de rupture est alors celle dont le profil monte, à partir du bord inférieur de la face arrière du mur, en formant l'angle constant i, *en fruit intérieur*, avec la verticale ascendante. La poussée s'y calculera donc par la formule (31) (p. 18); et le coin de terre préservé de l'éboulement par le contact du mur, au premier instant de la chute, aura l'angle $i' - i$, avec sa *pointe* en bas.

VI. — Cas d'un mur à fruit intérieur plus modéré, ou même d'un mur surplombant le massif.

19. Mais passons au cas, seul usuel, où l'angle i' du mur donné avec la verticale (en fruit intérieur) est moindre que i. Nous appellerons alors δ la petite étendue *angulaire* $i - i'$ du coin exceptionnel, contigu au mur, où l'azimut variable χ' et la pression moyenne p' seront donnés à très peu près par (48).

Avant de nous occuper du calcul de l'arbitraire c qui y subsiste, cherchons de combien les petits termes en $\theta - \theta_0$ accroissent les formules des trois pressions principales N_x, N_y, T relatives aux axes, pressions dont nous appellerons ici les valeurs totales N'_x, N'_y, T', en continuant à désigner par N_x, N_y, T ces forces dans la solution Rankine-Lévy.

Les formules générales (1) s'écriront évidemment

$$(49) \qquad N'_x = -p'(1 + k\cos 2\chi'), \qquad N'_y = -p'(1 - k\cos 2\chi'),$$
$$T' = -p'k\sin 2\chi'.$$

Il faudra y remplacer p', χ' par leurs expressions (48) et calculer aux seconds membres, en procédant comme au n° 17 avant les formules (46), la partie linéaire en $\theta - \theta_0$, puisque tout ce qui serait d'un ordre de petitesse supérieur est censé négligeable dans notre analyse.

Appelons respectivement

$$n_x, \qquad n_y, \qquad t$$

cette partie qu'il faudra joindre à N_x, N_y, T dans tout le petit coin sablonneux d'angle δ contigu au mur; et nous aurons aisément, en remplaçant finalement le petit arc $\theta - \theta_0$ par son sinus, substitution, évidemment permise ici, dont nous reconnaîtrons bientôt l'avantage :

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned} n_x &= \frac{c \sin\omega \cos\theta_0}{\cos\varphi \sin 2\chi}[1 + \sin(\varphi - 2\chi)]\,\Pi r \sin(\theta - \theta_0), \\ n_y &= \frac{c \sin\omega \cos\theta_0}{\cos\varphi \sin 2\chi}[1 - \sin(\varphi - 2\chi)]\,\Pi r \sin(\theta - \theta_0), \\ t &= \frac{c \sin\omega \cos\theta_0}{\cos\varphi \sin 2\chi}\quad [\cos(\varphi - 2\chi)]\,\Pi r \sin(\theta - \theta_0). \end{aligned}\right.$$

Ces formules deviennent très suggestives si l'on observe, d'une part, que, d'après (19), $\varphi - 2\chi = \frac{\pi}{2} - 2\theta_0$, ou que

$$1 + \sin(\varphi - 2\chi), \qquad 1 - \sin(\varphi - 2\chi), \qquad \cos(\varphi - 2\chi)$$

valent respectivement

$$2\cos^2\theta_0, \qquad 2\sin^2\theta_0, \qquad 2\cos\theta_0 \sin\theta_0$$

et, d'autre part, que

$$r \sin(\theta - \theta_0) = r \sin\theta \cos\theta_0 - r\cos\theta \sin\theta_0 = y\cos\theta_0 - x\sin\theta_0;$$

car elles s'écrivent alors, en les condensant dans une formule triple,

$$(51)\quad (n_x, n_y, t) = \frac{2c\Pi \sin\omega \cos\theta_0}{\cos\varphi \sin 2\chi}(\cos^2\theta_0, \sin^2\theta_0, \cos\theta_0 \sin\theta_0)(y\cos\theta_0 - x\sin\theta_0);$$

et, *quelque notable que pusise être la différence* $\theta - \theta_0$, elles vérifient intuitivement les conditions évidentes d'équilibre

$$\frac{dn_x}{dx} + \frac{dt}{dy} = 0, \qquad \frac{dt}{dx} + \frac{dn_y}{dy} = 0.$$

Par suite, en joignant ces valeurs (51) à N_x, N_y, T qui satisfont déjà aux équations *totales* (2) d'équilibre, on aura des expressions N'_x, N'_y, T' vérifiant celles-ci *identiquement*. On pourra disposer alors du facteur constant c de manière, par exemple, à rendre la poussée sur le mur, pour $\theta = \theta_0 - \delta$, inclinée de l'angle φ sous la normale à ce mur prolongée; et il ne restera plus finalement qu'à s'assurer du degré d'approximation avec lequel se trouvera satisfaite la condition spéciale exprimant que l'équilibre-limite est atteint dans tout le coin d'angle δ, ou que l'état du sable y devient ébouleux.

20. Considérons d'abord la pression qu'exerce le gros du massif sur les divers éléments plans à profils émanés de l'origine et dont l'angle polaire est θ ou, les cosinus directeurs, $\cos\theta$, $\sin\theta$. Leur normale, tirée du côté des y positifs, a l'angle polaire $\theta + \frac{\pi}{2}$ et les cosinus directeurs $-\sin\theta$, $\cos\theta$. Les deux composantes, suivant les x et les y, de la pression y sont donc, d'après des formules élémentaires,

$$-N'_x \sin\theta + T' \cos\theta, \qquad -T' \sin\theta + N'_y \cos\theta;$$

et elles donnent, par suite, respectivement, suivant la tangente à l'élément plan et suivant sa normale prolongée, les deux forces, tangentielle $\mathfrak{T}$ et normale $(-\mathfrak{N})$,

$$(52) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{T}' &= \frac{N'_y - N'_x}{2} \sin 2\theta + T' \cos 2\theta, \\ (-\mathfrak{N}) &= -\frac{N'_y + N'_x}{2} - \frac{N'_y - N'_x}{2} \cos 2\theta + T' \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Évaluons d'abord les valeurs partielles de $\mathfrak{T}$ et de $(-\mathfrak{N})$ correspondant aux parties principales N_x, N_y, T de N'_x, N'_y, T', qui sont, d'après (49),

$$(53) \qquad -p(1 + \sin\varphi \cos 2\chi), \qquad -p(1 - \sin\varphi \cos 2\chi), \qquad -p \sin\varphi \sin 2\chi,$$

avec l'expression (37) de p (p. 22), savoir

$$(54)\quad p = -\frac{\Pi r \sin\omega \cos\theta}{\sin\varphi \sin 2\chi} = \frac{\Pi r \sin\omega \cos\theta}{\sin\varphi \cos(\varphi + 2i - 2\omega)} = \frac{\Pi r \cos(\varphi + i)\cos\theta}{\cos\varphi \cos(\omega - i)},$$

où le troisième membre se déduit du second grâce à la formule (19) et le quatrième du troisième par l'emploi de la relation (30).

Il vient, pour ces parties principales,

$$(55)\quad \mathfrak{T} = p \sin\varphi \sin 2(\theta - \chi), \qquad -\mathfrak{N} = p[1 - \sin\varphi \cos 2(\theta - \chi)].$$

Or la formule (19) donne

$$2(\theta - \chi) = 2(\theta - \theta_0) + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right);$$

ce qui transforme presque immédiatement ces expressions (55) en celles-ci :

$$(56)\quad \begin{cases} \mathfrak{T} = p \sin\varphi \,[\cos\varphi \; - 2\sin(\theta_0 - \theta)\sin(\varphi + \theta_0 - \theta)], \\ -\mathfrak{N} = p \sin\varphi \left[\dfrac{\cos\varphi}{\operatorname{tang}\varphi} - 2\sin(\theta_0 - \theta)\cos(\varphi + \theta_0 - \theta)\right]. \end{cases}$$

Passons maintenant aux petites parties n_x, n_y, t, données par (51), de N'_x, N'_y, T', parties dans le facteur commun desquelles nous remettrons $r \sin(\theta - \theta_0)$ à la place de $y \cos\theta_0 - x \sin\theta_0$ et éliminerons r par les deux premiers membres de (54). Elles deviennent alors

$$(57)\quad (n_x, n_y, t) = -2cp \sin\varphi \sin(\theta - \theta_0)\frac{\cos\theta_0}{\cos\varphi \cos\theta}(\cos^2\theta_0, \sin^2\theta_0, \cos\theta_0 \sin\theta_0).$$

Portées dans (52), elles donnent, pour les valeurs partielles correspondantes de $\mathfrak{T}$ et de $-\mathfrak{N}$, la formule double

$$(58)\quad (\mathfrak{T}, -\mathfrak{N}) = 2cp \sin\varphi \sin^2(\theta_0 - \theta)\frac{\cos\theta_0}{\cos\varphi \cos\theta}[\cos(\theta_0 - \theta), -\sin(\theta_0 - \theta)].$$

Joignons-les respectivement à (56); et nous aurons comme expressions définitives cherchées des deux composantes, tangentielle $\mathfrak{T}$ et normale $(-\mathfrak{N})$, de la poussée exercée par le massif sur l'unité d'aire de l'élément plan,

$$(59)\left\{\begin{aligned}\varpi &= p\sin\varphi\left\{\cos\varphi - 2\sin(\theta_0-\theta)\left[\sin(\varphi+\theta_0-\theta) - c\frac{\cos\theta_0\sin(\theta_0-\theta)}{\cos\varphi\cos\theta}\cos(\theta_0-\theta)\right]\right\},\\ -\mathfrak{N} &= p\sin\varphi\left\{\frac{\cos\varphi}{\operatorname{tang}\varphi} - 2\sin(\theta_0-\theta)\left[\cos(\varphi+\theta_0-\theta) + c\frac{\cos\theta_0\sin^2(\theta_0-\theta)}{\cos\varphi\cos\theta}\right]\right\}.\end{aligned}\right.$$

21. Exprimons, comme il a été indiqué ci-dessus, que, pour $\theta = \theta_0 - \delta$, c'est-à-dire contre le mur, cette poussée fait l'angle donné φ du frottement à la fois intérieur et *extérieur* avec la normale prolongée, ou que le rapport de ϖ à $-\mathfrak{N}$ est tang φ. Or, à part le facteur commun $p\sin\varphi$, ϖ et $-\mathfrak{N}$ sont représentés par les deux accolades, dont le premier terme a déjà, dans les deux formules, le rapport tangφ. Il faudra et il suffira, par suite, que le second terme, en $\sin(\theta_0 - \theta)$, offre le même rapport, ou qu'on ait, en faisant $\theta = \theta_0 - \delta$,

$$(60)\qquad \frac{\sin(\varphi+\delta)\cos\varphi\cos(\theta_0-\delta) - c\cos\theta_0\sin\delta\cos\delta}{\cos(\varphi+\delta)\cos\varphi\cos(\theta_0-\delta) + c\cos\theta_0\sin^2\delta} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

proportion d'où l'on tire aisément

$$(61)\qquad c = \frac{\cos\varphi\cos(\theta_0-\delta)}{\cos(\varphi-\delta)\cos\theta_0}.$$

Par suite, $c = 1$ à la limite $\delta = 0$.

Portons cette valeur (61) de c dans l'expression (59) de ϖ où l'on prendra pour θ l'azimut $\theta_0 - \delta$ du mur; puis remplaçons les deux produits

$$2\sin(\varphi+\delta)\cos(\varphi-\delta), \qquad 2\sin\delta\cos\delta$$

par $\sin 2\varphi + \sin 2\delta$ et par $\sin 2\delta$; enfin, substituons finalement au produit $p\cos\varphi$, d'après le quatrième membre de (54), la valeur

$$\Pi r\frac{\cos(\varphi+i)\cos(\theta_0-\delta)}{\cos(\omega-i)} = \Pi r\frac{\cos(\varphi+i'+\delta)\cos(\omega-i')}{\cos(\omega-i'-\delta)}.$$

Nous trouverons, pour la poussée $\mathfrak{P} = \dfrac{\varpi}{\sin\varphi}$ exercée sur l'unité d'aire du mur,

$$(62) \quad \mathfrak{P} = p \cos\varphi \frac{\cos(\varphi+\delta)}{\cos(\varphi-\delta)} = \Pi r \cos(\varphi+i'+\delta) \frac{\cos(\omega-i')}{\cos(\omega-i'-\delta)} \frac{\cos(\varphi+\delta)}{\cos(\varphi-\delta)} \quad (^1).$$

Il conviendra d'exprimer cette poussée $\mathfrak{P}$ en fonction des données immédiates de la question, qui sont : 1° l'angle ω fait sur l'horizon par le talus sablonneux; 2° l'angle de frottement intérieur φ, constant dans l'ensemble du massif; et 3° enfin, l'excédent δ, sur l'angle donné i' du mur avec la verticale descendante (en fruit intérieur), de sa valeur *singulière* i définie par (19) : de sorte que l'on a, en définitive,

$$(62\ bis) \qquad \delta = -i' + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\left(-\omega + \arcsin\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}\right).$$

On remplacera donc, dans le troisième membre de (62), δ par cette valeur.

22. Il nous reste à voir jusqu'à quel point nos formules totales de N'_x, N'_y, T', sommes respectives de leurs expressions (53) dans la solution Rankine-Lévy et des compléments (57), vérifient, à l'intérieur du coin sablonneux d'angle δ, la relation spéciale à l'état ébouleux.

On sait que, dans tout mode d'équilibre (limite ou non) d'un élément de volume, avec distribution plane des pressions, l'angle, que j'appellerai φ', fait en un point quelconque, avec la normale à l'élément plan qu'elle sollicite, *par la pression qui s'y trouve la plus oblique à cet élément plan*, a le carré de son sinus donné par la formule

$$(63) \qquad \sin^2\varphi' = \frac{(N'_x - N'_y)^2 + 4T'^2}{(N'_x + N'_y)^2}.$$

(1) On reconnaît assez facilement, sous cette dernière forme, l'identité de cette expression à $K\Pi r$, où K aurait la première valeur (123) donnée à la page 126 de mon Mémoire inséré en 1876 au Tome XL du *Recueil des Savants étrangers de l'Académie royale de Belgique*. Dans ce Mémoire, notre notation actuelle i' s'appelle i et il faut y faire égal à φ l'angle φ_1 du frottement extérieur; enfin, un produit écrit $\tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\cos\psi}{\cos(\omega+\psi)}$, ou $\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\frac{\cos\psi}{\cos(\omega+\psi)}$, y est, d'après le bas de la page 111 et avec nos notations actuelles, le rapport $\frac{\cos(\varphi+i'+\delta)}{\cos(\omega-i'-\delta)}$.

Or nous aurons ici pour N'_x, N'_y, T', en laissant d'abord arbitraire la constante c, ou le coefficient du frottement extérieur du massif contre le mur, les trois produits du facteur commun $(-p\sin\varphi)$ par les sommes respectives

$$(64)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\sin\varphi}+\cos 2\chi-2c\sin(\theta_0-\theta)\frac{\cos\theta_0}{\cos\varphi\cos\theta}\cos^2\theta_0,\\ &\frac{1}{\sin\varphi}-\cos 2\chi-2c\sin(\theta_0-\theta)\frac{\cos\theta_0}{\cos\varphi\cos\theta}\sin^2\theta_0,\\ &\qquad\sin 2\chi-2c\sin(\theta_0-\theta)\frac{\cos\theta_0}{\cos\varphi\cos\theta}\cos\theta_0\sin\theta_0.\end{aligned}\right.$$

Substituons donc celles-ci à N'_x, N'_y, T' dans (63); et, en divisant par $\sin^2\varphi$, nous trouverons presque immédiatement, après multiplication *haut et bas* par $\cos^2\varphi\cos^2\theta$,

$$\frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi}=\frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta-2c\cos\varphi\cos\theta\cos\theta_0\sin(\theta_0-\theta)\cos(2\theta_0-2\chi)+c^2\cos^2\theta_0\sin^2(\theta_0-\theta)}{[\cos\varphi\cos\theta-c\sin\varphi\cos\theta_0\sin(\theta_0-\theta)]^2}.$$

Elle se simplifie en observant que, d'après (19) (p. 16), $2\theta_0-2\chi$, c'est-à-dire $2i-2\omega-2\chi$, est le complément de φ, et en multipliant en outre, dans le second membre, par $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi$ le dernier terme du numérateur. Cela donne

$$(65)\qquad \frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi}=1+\left[\frac{c\cos\varphi\cos\theta_0\sin(\theta_0-\theta)}{\cos\varphi\cos\theta-c\sin\varphi\cos\theta_0\sin(\theta_0-\theta)}\right]^2.$$

La fraction à termes positifs dont le carré termine cette formule a son numérateur croissant à partir de zéro, quand la différence $\theta_0-\theta$ y varie de zéro à δ, et le premier terme, $\cos\varphi\cos\theta$, de son dénominateur, décroissant en même temps comme son facteur $\cos\theta$ qui varie de

$$\cos\theta_0=\cos(i-\omega)=\cos(\omega-i)\quad\text{à}\quad\cos(\theta_0-\delta)=\cos(\omega-i+\delta);$$

ces deux circonstances font grandir la fraction, résultat auquel coopère encore la réduction de plus en plus grande du dénominateur due au second terme de celui-ci, terme qui a sa valeur absolue croissante comme $\sin(\theta_0-\theta)$. Ainsi le rapport de $\sin\varphi'$ à $\sin\varphi$ excède l'unité dans tout le coin sablonneux, et d'autant plus qu'on est plus près du mur.

On voit d'ailleurs que toute valeur finie attribuée au facteur constant c ne fait varier φ', dans le coin sablonneux où $\theta_0 - \theta$ grandit de zéro à δ, que d'un accroissement, toujours positif, de l'ordre de δ^2 et, par conséquent, censé négligeable dans notre analyse. Au degré d'approximation poursuivi, on a donc $\varphi' = \varphi$, c'est-à-dire que l'état d'équilibre obtenu est à très peu près l'équilibre-limite cherché du massif homogène.

23. Remplaçons, dans (65), c par la valeur (61), qui fait égal à φ l'angle du frottement extérieur contre le mur; et il viendra immédiatement

$$(66)\qquad \frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi} = 1 + \left[\frac{\cos\varphi\cos(\theta_0-\delta)\sin(\theta_0-\theta)}{\cos(\varphi-\delta)\cos\theta - \sin\varphi\cos(\theta_0-\delta)\sin(\theta_0-\theta)}\right]^2.$$

Contre le mur même, où $\theta = \theta_0 - \delta$, la fraction dont le carré figure au second membre, et qui y prend sa plus forte valeur, acquiert *haut et bas* le facteur commun $\cos(\theta_0 - \delta)$, par la suppression duquel elle devient $\tang\delta$. On a donc, en appelant Φ la plus forte valeur de φ', celle qui se produit ainsi pour $\theta = \theta_0 - \delta$,

$$(67)\quad (\text{contre le mur})\qquad \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin\Phi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\delta} = 1 + \frac{\delta^2}{2} + \ldots,$$

résultat extrêmement simple, permettant *d'estimer* le degré d'approximation obtenu dans l'étude d'un massif ayant l'angle φ de frottement.

24. Mais il est évident que nos formules donnent aussi, sans que l'angle δ du coin ait besoin d'être petit, l'expression *exacte* de l'état ébouleux en vue, pour un massif *qui ne serait pas entièrement homogène et aurait précisément, le long de chaque droite d'azimut* θ *émanée de l'origine, l'angle de frottement intérieur ou de terre coulante* φ' *défini par la formule* (66), angle croissant à l'approche du mur et dont le maximum Φ a, d'après (67), le sinus $\frac{\sin\varphi}{\cos\delta}$: le mur serait d'ailleurs censé *un peu poli*, juste au degré nécessaire pour que l'angle de frottement *extérieur* de ce massif hétérogène eût encore la valeur φ, moindre que Φ dans le rapport $\frac{\arcsin(\sin\Phi\cos\delta)}{\Phi}$.

Un fait digne de remarque est la lenteur extrême avec laquelle varie en fonction de θ, à mesure qu'on s'éloigne de la valeur critique $\theta = \theta_0$, le rapport de ϖ à $(-\mathcal{N})$, c'est-à-dire *l'obliquité* des poussées que le massif exerce sur les divers éléments plans du coin sablonneux émanés de l'origine. En ordonnant alors, dans les accolades des seconds membres de (59), les deux coefficients totaux de $-2\sin(\theta_0 - \theta)$, suivant les puissances de $(\theta_0 - \theta)$, jusqu'aux termes du premier degré inclusivement, on voit que ces deux coefficients sont

$$\sin\varphi + (\theta_0 - \theta)\left(\cos\varphi - \frac{c}{\cos\varphi}\right) \qquad \text{et} \qquad \cos\varphi - (\theta_0 - \theta)\sin\varphi.$$

Comme c s'y réduit, sauf erreur négligeable, à sa valeur limite qui, d'après (61), est 1, le premier revient à $\sin\varphi\,[1 - (\theta_0 - \theta)\tang\varphi]$ et son rapport au second est $\tang\varphi$, comme celui des premiers termes des accolades. Le rapport de ϖ à $(-\mathcal{N})$ est donc *invariable* ou, plus exactement, ne varie que de quantités de l'ordre de $(\theta_0 - \theta)^3$.

Autrement dit, même en tenant compte des quantités de l'ordre de petitesse de $(\theta_0 - \theta)^2$ ou comparables à δ^2, tous les éléments plans du petit coin sablonneux émanés de l'origine éprouvent *des pressions d'égale obliquité;* et, quand on passe d'un plan à l'autre, la poussée qu'il subit tourne comme le plan lui-même, savoir de $d\theta$.

Cependant, *la pression la plus inclinée* en chaque point, ou présentant *l'obliquité maxima mais variable φ', tourne environ la moitié moins.* En effet, son azimut alors variable, partout égal à $\chi' + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right)$, ne diffère pas sensiblement de $\chi' + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ et a son accroissement, d'un plan à l'autre, donné à peu près dans le coin sablonneux, d'après (43) (p. 29), par la formule $\frac{c}{2}d\theta = \frac{1}{2}d\theta$.

Ce paradoxe apparent s'explique en observant que, dans la solution Rankine-Lévy prise à part, le rapport de ϖ à $(-\mathcal{N})$, fonction de θ continue qui atteint, pour $\theta = \theta_0$, sa valeur *maxima* $\tang\varphi$, ne pouvait varier, comme le montrent d'ailleurs les formules correspondantes (56), que de quantités de l'ordre de $(\theta_0 - \theta)^2$ dans tout le voisinage. Donc, les termes complémentaires (58) ne devaient introduire dans ϖ et $(-\mathcal{N})$, pour égaliser l'obliquité φ aux deux limites $\theta = \theta_0$,

$\theta = \theta_0 - \delta$, que des parties du même ordre; ce qu'ils font grâce au facteur commun $\sin^2(\theta_0 - \theta)$. Mais il est tout de même curieux que les accroissements insensibles de φ', quand on passe d'un plan à l'autre, réduisent environ de moitié la rotation de la pression la plus oblique, relativement à ce qu'elle aurait dû être dans un massif homogène.

VII. — Introduction théorique de certains massifs, hétérogènes quant à l'angle de frottement intérieur, mais dont l'état ébouleux se calcule aisément, pour estimer par défaut et par excès la poussée limite du massif homogène proposé.

25. Si l'on applique à un massif pratiquement homogène et ayant un angle donné φ de frottement tant intérieur qu'extérieur (contre le mur qui le soutient), les formules ci-dessus, pour des valeurs de δ un peu notables comme, par exemple, 15° ou 20° (donnant $\cos\delta = 0{,}9659$ et $0{,}9367$ respectivement), $\sin\varphi$ ne sera guère que les $\frac{19}{20}$ du sinus de l'angle maximum Φ, contre le mur, de frottement intérieur du massif *fictif* pour lequel ces formules seraient exactes. Donc, en réglant la résistance du mur effectif sur ce qu'elle devrait être strictement pour ce massif fictif, c'est-à-dire dans l'hypothèse de la poussée-limite (62), le mur pècherait par défaut de solidité; car, φ' étant supérieur à φ, le massif *fictif* a ses couches voisines du mur moins portées à s'ébouler que celles du massif réel. Mais il sera, au contraire, plus résistant qu'il n'est strictement nécessaire, si l'on applique la même formule (62) de poussée, en attribuant au maximum Φ de φ' la valeur donnée de l'angle constant de frottement intérieur du massif réel et, par suite, à φ, dans les formules, la valeur plus petite dont le sinus serait alors $\sin\Phi\cos\delta$. Il est clair, en effet, que la poussée-limite (62) serait alors celle d'un massif hétérogène fictif ayant ses frottements tant intérieur qu'extérieur moindres que ceux du massif réel et, par suite, moins résistant que celui-ci à l'éboulement. On aura donc ainsi deux limites : l'une, par défaut, l'autre, par excès, comprenant entre elles la résistance effective minima que devra posséder, pour tenir bon, le mur de soutènement.

26. Mais il peut être désirable, en général, que les évaluations,

l'une, par défaut, l'autre, par excès, de la poussée du massif homogène donné contre le mur, soient effectuées toutes les deux dans des hypothèses n'altérant pas la direction effective de cette poussée, c'est-à-dire laissant à l'angle de frottement extérieur, que l'on appelle d'ordinaire φ_1, sa vraie valeur donnée, laquelle est ici Φ dans la seconde évaluation (ou évaluation par excès). Car la poussée effective et les deux limites considérées entre lesquelles on l'intercale, rendues ainsi *pareilles en qualité* ou ne pouvant plus différer que par la grandeur, deviennent bien mieux comparables.

D'ailleurs, quand il s'agit, en particulier, d'un mur de soutènement renversable *par rotation autour d'un axe connu*, le moment de la poussée par rapport à cet axe a plus d'importance que la poussée même; et ce qu'il y a lieu de chercher alors dans les deux évaluations, respectivement par défaut et par excès, *de ce moment*, c'est, afin d'en réduire autant qu'on peut l'écart, l'évaluation *la plus forte possible par défaut, mais la plus faible par excès*.

Or, dans la seconde évaluation, où Φ est pris égal à l'angle de frottement du massif homogène donné, faire égal à φ, comme le supposent les formules (61), (62) et (67), l'angle φ_1 de frottement *extérieur*, c'est prendre φ_1 plus petit que sa vraie valeur physique et abaisser peut-être sans nécessité, dans la seconde évaluation, la résistance du massif à l'éboulement, ou trop surévaluer la limite par excès soit de la poussée, soit de son moment, qu'il s'agit au contraire de réduire.

27. Il y a donc lieu, pour plusieurs raisons, de ne pas prendre toujours $\varphi_1 = \varphi$ et, par suite, de ne pas attribuer toujours à c et à Φ les formules (61), (67), mais plutôt de déterminer le coefficient constant c de manière que le rapport de ϖ à $(-\mathfrak{N})$, dans (59), devienne $\tang\varphi_1$ à la limite $\theta = \theta_0 - \delta$, l'angle de frottement extérieur φ_1 pouvant être quelconque au-dessous de Φ.

Posons alors, au lieu de (67),

$$\frac{\sin\Phi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varepsilon} = \sqrt{1+\tang^2\varepsilon}, \tag{68}$$

formule où ε sera ainsi un angle auxiliaire, aigu et positif, que l'on se réserve de déterminer ultérieurement. La formule (65) donne aisément, en y faisant $\theta = \theta_0 - \delta$ et, par suite, $\varphi' = \Phi$,

$$\frac{c\cos\theta_0\sin\delta\cos\varphi}{\cos(\theta_0-\delta)\cos\varphi - c\cos\theta_0\sin\delta\sin\varphi} = \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon},$$

relation d'où se tire l'expression de c, analogue à (61),

$$(69)\qquad c = \frac{\cos\varphi\cos(\theta_0-\delta)}{\cos(\varphi-\varepsilon)\cos\theta_0}\,\frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta}.$$

Et les deux équations (59), divisées l'une par l'autre après multiplication de la seconde par $\tang\varphi$, donnent alors, après quelques réductions évidentes,

$$(70)\quad \frac{\tang\varphi_1}{\tang\varphi} = \frac{\cos(\varphi-\varepsilon)\cos\varphi - 2\sin\delta[\cos(\varphi-\varepsilon)\sin(\varphi+\delta) - \sin\varepsilon\cos\delta]}{\cos(\varphi-\varepsilon)\cos\varphi - 2\sin\delta\tang\varphi[\cos(\varphi-\varepsilon)\cos(\varphi+\delta) + \sin\varepsilon\sin\delta]}.$$

Remplaçons, dans les quantités entre crochets, les produits de deux cosinus ou sinus par des demi-sommes ou des demi-différences; puis introduisons les sinus ou cosinus de $\delta \mp \varepsilon$. Il viendra facilement

$$(71)\quad \begin{aligned} \frac{\tang\varphi_1}{\sin\varphi} &= \frac{\cos(\varphi-\varepsilon) - 2\sin\delta\sin(\varphi-\varepsilon+\delta)}{\cos\varphi\cos(\varphi-\varepsilon) - 2\sin\delta\sin\varphi\cos(\varphi-\varepsilon+\delta)} \\ &= \frac{\cos(\varphi-\varepsilon+2\delta)}{\cos\varepsilon - \sin\varphi\sin(\varphi-\varepsilon+2\delta)}, \end{aligned}$$

équation dont le troisième membre se déduit du second par les mêmes procédés.

Telle me paraît être, sous les formes les plus simples, la relation existant entre φ, δ, ε et φ_1, ou, ce qui revient au même, entre φ, δ, Φ et φ_1.

28. Prenons enfin égal à Φ, comme il semble parfois convenable de le faire, l'angle φ_1 de frottement extérieur dans la seconde évaluation (ou évaluation par excès) de la poussée; ce qui, d'après (68), reviendra à poser

$$(72)\qquad \sin\varphi_1 = \frac{\sin\varphi}{\cos\varepsilon}, \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{\tang\varphi_1}{\sin\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\varepsilon - \sin^2\varphi}.$$

Substituons au premier membre de cette dernière équation le carré du troisième membre de (71); et, après l'évanouissement des dénominateurs, puis quelques réductions évidentes, une extraction exacte de racine carré, suivie d'une division par cos ε, donnera finalement, pour relier φ, ε et δ à Φ ou φ_1 qui sont connus, l'équation cherchée ([1])

$$\sin(\varphi + 2\delta - \varepsilon) = \frac{\sin\varphi}{\cos\varepsilon} = \sin\Phi.$$

La petitesse supposée des angles $\Phi - \varphi$, δ, ε permet de conclure l'égalité des deux arcs Φ, $\varphi + 2\delta - \varepsilon$ de celle de leurs sinus.

On aura donc, vu d'ailleurs (62 *bis*) et en faisant $\varphi_1 = \Phi$ dans (72),

$$(73) \qquad \varphi + 2\delta - \varepsilon = \Phi, \qquad \cos(\varphi + 2\delta - \omega + 2i') = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}, \qquad \cos\varepsilon = \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}.$$

Les deux dernières (73), multipliées *membre à membre*, donnent

$$(74) \qquad \cos\varepsilon\cos(\varphi + 2\delta - \omega + 2i') = \frac{\sin\omega}{\sin\Phi}.$$

Remplaçons-y $\varphi + 2\delta$ par sa valeur $\Phi + \varepsilon$ résultant de la première (73); et, en substituant au produit de deux cosinus la demi-somme de deux cosinus, il viendra

$$(75) \qquad \cos(\Phi - \omega + 2i' + 2\varepsilon) = 2\frac{\sin\omega}{\sin\Phi} - \cos(\Phi - \omega + 2i'),$$

relation à second membre tout connu, qui permettra d'obtenir l'angle $\Phi - \omega + 2i' + 2\varepsilon$ ou, par suite, l'inconnue ε. On en déduira φ et δ par la troisième équation (73) et par (74), qui donneront

$$(76) \qquad \sin\varphi = \sin\Phi\cos\varepsilon, \qquad \cos(\varphi - \omega + 2i' + 2\delta) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}.$$

Après quoi, la première équation (73) fournira une vérification de tous les calculs.

([1]) Ces calculs montrent que, si l'on divise le troisième membre de (71), élevé au carré, par le dernier membre de (72), il vient identiquement

$$\frac{\operatorname{tang}^2\varphi_1}{\operatorname{tang}^2\Phi} = 1 - \left[\frac{\sin\varphi - \cos\varepsilon\sin(\varphi - \varepsilon + 2\delta)}{\cos\varepsilon - \sin\varphi\sin(\varphi - \varepsilon + 2\delta)}\right]^2$$

et que Φ est le maximum de φ_1.

29. Évaluons maintenant (sans d'ailleurs faire tout de suite $\varphi_1 = \Phi$) la poussée exercée sur le mur, et, d'abord, sa composante tangentielle, que donnera la première formule (59) en y posant

$$\theta = \theta_0 - \delta = i - \omega - \delta = i' - \omega.$$

Nous aurons, vu la valeur (69) de c,

$$\varpi = \frac{p \sin\varphi}{\cos(\varphi - \varepsilon)} \{ \cos\varphi \cos(\varphi - \varepsilon) - \sin\delta [2 \sin(\varphi + \delta) \cos(\varphi - \varepsilon) - 2 \sin\varepsilon \cos\delta] \}.$$

Puis traitons par une méthode suivie plus haut (p. 43) les trois termes auxquels se réduit alors la quantité entre accolades et qui deviennent respectivement

$$\frac{\cos(2\varphi - \varepsilon) + \cos\varepsilon}{2}, \quad \frac{\cos(2\varphi + 2\delta - \varepsilon) - \cos(2\varphi - \varepsilon)}{2}, \quad \frac{\cos(2\delta - \varepsilon) - \cos\varepsilon}{2}.$$

Nous aurons, en réduisant,

$$(77) \qquad \varpi = p \sin\varphi \frac{\cos(2\varphi + 2\delta - \varepsilon) + \cos(2\delta - \varepsilon)}{2 \cos(\varphi - \varepsilon)} = p \cos\varphi \sin\varphi \frac{\cos(\varphi + 2\delta - \varepsilon)}{\cos(\varphi - \varepsilon)}.$$

On remarquera que dans le cas, traité d'abord, où l'angle de frottement extérieur était φ et où le maximum Φ de φ' se trouvait donné par la formule (67), notre angle actuel ε prend la valeur δ. Et l'on voit qu'alors la formule (77) se confond bien avec celle qui a été obtenue pour ce cas au n° 21 (p. 37) et qui a donné

$$\mathfrak{P} \text{ ou } \frac{\varpi}{\sin\varphi} = p \cos\varphi \frac{\cos(\varphi + \delta)}{\cos(\varphi - \delta)}.$$

Enfin, nous aurons aisément la poussée par unité d'aire, que nous appellerons $\mathfrak{P}'$ afin de distinguer cette seconde évaluation, *par excès*, de la première, (62), qui était par défaut. Comme l'angle de frottement extérieur est ici Φ, $\mathfrak{P}'$ égalera le quotient de ϖ par $\sin\Phi$, quotient où l'on voit que s'introduira le rapport $\frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}$, égal à $\cos\varepsilon$, d'après la troisième (73). Nous aurons donc, en procédant comme pour la formule (62),

$$(77\ bis)\qquad \mathfrak{P}' = p\cos\varphi\cos\varepsilon\,\frac{\cos(\varphi+2\delta-\varepsilon)}{\cos(\varphi-\varepsilon)}$$

$$= \Pi r\cos\varepsilon\,\cos(\varphi+i'+\delta)\,\frac{\cos(\omega-i')}{\cos(\omega-i'-\delta)}\,\frac{\cos(\varphi+2\delta-\varepsilon)}{\cos(\varphi-\varepsilon)}.$$

Il n'y aura plus qu'à y mettre pour ε, φ et δ leurs valeurs précédemment obtenues (n° 28).

30. Appliquons nos formules au cas *pratiquement* le plus simple et le plus important, celui d'un *terre-plein horizontal*, soutenu par un mur *vertical*, où l'on a $\omega = 0$, $i' = 0$.

Procédons d'abord à l'évaluation par défaut (62). La formule (62 *bis*) y donne $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, valeur très forte, même quand on prend $\varphi = 45°$, puisqu'elle atteint alors $\frac{\pi}{8}$ ou $22° \frac{1}{2}$. On peut donc prévoir que l'assimilation du massif homogène proposé à nos massifs hétérogènes laissera beaucoup à désirer. La poussée (62) y est

$$(78)\qquad \mathfrak{P} = \Pi r\,\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \Pi r\,\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi(1+2\sin\varphi)}.$$

Pour $\varphi = 45°$, le coefficient de Πr y vaut

$$\operatorname{tang}^2\left(22°\,\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (3-2\sqrt{2}) = 0{,}1716 \text{ environ.}$$

Évaluons maintenant $\mathfrak{P}'$. La formule (75), où $\omega = 0$ et $i' = 0$, devient

$$\Phi + 2\varepsilon = \pi - \Phi \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon = \frac{\pi}{2} - \Phi;$$

et l'on trouve ensuite

$$\sin\varphi = \sin^2\Phi, \qquad \delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

Il résulte donc du troisième membre de (77 *bis*) que

$$(79) \qquad \mathfrak{P}' = \Pi r \frac{\sin\Phi\cos\Phi}{\sin(\Phi+\varphi)} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Pour $\Phi = 45° = \frac{\pi}{4}$, il vient

$$\sin\varphi = \frac{1}{2} \text{ ou } \varphi = 30°, \qquad \sin(\Phi+\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

et

$$\mathfrak{P}' = \Pi r \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}} = \Pi r \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} = 0,2989\, \Pi r \text{ environ.}$$

L'écart des deux coefficients numériques par défaut et par excès, 0,1716, 0,2989, atteint 0,1273, c'est-à-dire presque les trois quarts du plus petit de ces nombres.

Il reste évidemment le même, en valeur relative, quand on se borne au cas, assez ordinaire dans les expériences de laboratoire, où le mur se réduit à une mince paroi rigide, mobile autour d'une de ses horizontales, et où, par suite, la poussée n'influe sur l'équilibre que par sa composante normale $\mathfrak{P}\cos\varphi$ ou $\mathfrak{P}'\cos\Phi$, dès lors seule à considérer. Appelons-la respectivement P et P'. Nous aurons

$$(80) \qquad P = \Pi r \frac{1-\sin\varphi}{1+2\sin\varphi}, \qquad P' = \Pi r \frac{\sin\Phi\cos^2\Phi}{\sin(\Phi+\varphi)} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Il vient donc, pour $\varphi = 45°$,

$$(81) \qquad P = \Pi r \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \Pi r \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\right) = (0,1213)\, \Pi r$$

et, pour $\Phi = 45°$,

$$(82) \qquad P' = \Pi r \frac{3-\sqrt{3}}{6} = (0,2113)\, \Pi r.$$

VIII. — Solution pratique du problème de l'équilibre-limite, pour la masse sablonneuse que soutient d'un côté une mince paroi plane, mobile autour d'une de ses horizontales et maintenue, par exemple, au moyen d'un fil dont la tension est donnée à chaque instant.

31. Dans ce cas particulier, où l'on ne considère que le moment de rotation de la poussée *autour d'un axe horizontal déterminé* et où, par suite, la poussée n'intervient que par sa composante suivant une direction connue, la limite supérieure de celle-ci la plus avantageuse, c'est-à-dire la plus faible ou la moins écartée de la limite inférieure, n'est généralement pas celle qu'on obtient en prenant φ_1 égal à Φ, c'est-à-dire à l'angle de frottement intérieur connu du massif homogène proposé, mais en laissant arbitraire entre zéro et Φ cet angle φ_1 du frottement extérieur, de manière à pouvoir le choisir par la condition même de rendre aussi petite que possible la composante unique de poussée que l'on en a vue.

Quand il s'agit, notamment, d'une paroi plane mince, et que l'axe de rotation est dans son plan, ou que la composante à rendre minimum est la *composante normale* $\mathfrak{P}\cos\varphi_1$, il est préférable d'y faire $\varphi_1 = \varphi$ que $\varphi_1 = \Phi$, c'est-à-dire de prendre $P' = \mathfrak{P}\cos\varphi$, en calculant $\mathfrak{P}$ par la formule (62), et en déduisant φ de Φ par la relation corrélative (67) (p. 39), où l'on mettra encore pour Φ l'angle constant de frottement du massif homogène proposé.

Dans le cas général d'un talus incliné ou de $\omega > 0$, quelques tâtonnements ou essais de valeurs de φ conduiraient vite à la vraie valeur de cet angle. Mais, dans le cas simple, spécialement examiné ici, d'un terre-plein horizontal, avec mur vertical, où $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, l'équation (67) donnera facilement

$$\sin\varphi = \frac{1}{4}\left(\sin\Phi + \sqrt{8 + \sin^2\Phi}\right)\sin\Phi. \tag{83}$$

Si, par exemple, $\Phi = 45^\circ$, on aura

$$\sin\varphi = \frac{1+\sqrt{17}}{8} = 0,64039, \qquad \varphi = 39^\circ 49' \tfrac{1}{3};$$

et l'on déduira du dernier membre de la formule (78)

$$(84) \qquad P' = \mathfrak{P}\cos\varphi = \Pi r\frac{1-\sin\varphi}{1+2\sin\varphi} = \Pi r\frac{0,35961}{2,2808} = (0,1577)\Pi r,$$

limite supérieure notablement moindre que (82) et dont l'excédent sur la limite inférieure (81) dépasse à peine les de $\frac{2}{5}$ l'excédent analogue de celle-ci (82).

32. On aurait une limite supérieure encore plus basse, en laissant φ_1 indéterminé dans les formules (59) (p. 36), où nous faisons ici ω nul, et, par suite, d'après (62 *bis*), $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$. Nous prenons, en outre,

$$i' = 0, \qquad i = i' + \delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, \qquad \theta_0 = i - \omega = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

Enfin $\theta = 0$ contre la paroi.

Les formules (59) deviennent, grâce à des réductions immédiates,

$$(85) \qquad \mathfrak{T} = \frac{c}{2}p\sin\varphi\cos\varphi, \qquad (-\mathfrak{N}) = p(1-\sin\varphi)\left(1 - \frac{c}{2}\sin\varphi\right).$$

Le rapport de $\mathfrak{T}$ à $(-\mathfrak{N})$ étant $\operatorname{tang}\varphi_1$, on aura donc

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi_1}{\operatorname{tang}\varphi} = \frac{c(1+\sin\varphi)}{2 - c\sin\varphi},$$

relation d'où se tirera la valeur de c,

$$(86) \qquad c = \frac{2\operatorname{tang}\varphi_1}{\operatorname{tang}\varphi + \sin\varphi(\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi_1)}.$$

Après quoi, l'expression (85) de $(-\mathfrak{N})$, c'est-à-dire P', deviendra, tous calculs faits, en y remplaçant d'ailleurs p par sa dernière valeur (54) (p. 35), réduite ici à $\frac{\Pi r}{1+\sin\varphi}$,

$$(87) \qquad P' = \Pi r\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi+\cos\varphi\operatorname{tang}\varphi_1}.$$

Appelons k le rapport constant de P′ à Πr. On aura, tout à la fois,

$$(87\ bis)\qquad P' = k\Pi r \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{k} = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} + \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}}\tang\varphi_1.$$

L'inverse du coefficient k grandit, comme on pouvait le prévoir, soit avec φ, soit avec φ_1.

33. Cherchons ce qu'est alors, pour $\theta = 0$, c'est-à-dire contre la paroi verticale, le maximum Φ de notre angle variable φ', maximum évaluable par la formule (65), que l'on reconnaît aisément devenir, ici,

$$(88)\qquad \frac{\sin^2\Phi}{\sin^2\varphi} = 1 + \left(\frac{c\cos\varphi}{2 - c\sin\varphi}\right)^2.$$

Or, avec la valeur (86) de c, le produit $c\cos\varphi$ et l'excès $2 - c\sin\varphi$ sont proportionnels à

$$\cos\varphi\tang\varphi_1, \quad (1+\sin\varphi)\tang\varphi,$$

quantités dont le rapport est $\frac{1-\sin\varphi}{\sin\varphi}\tang\varphi_1$.

La formule (88) donne donc entre φ, φ_1 et Φ la relation simple

$$(89)\qquad \sin^2\Phi = \sin^2\varphi + (1-\sin\varphi)^2\tang^2\varphi_1.$$

Par suite, en vue d'obtenir la meilleure limite supérieure P′ de la poussée normale P, on y fera Φ égal à l'angle effectif de frottement du massif donné; et l'on déterminera ensuite φ et φ_1, dans (89), de manière à rendre minimum l'expression (87) de P′, ou maximum l'inverse (87 *bis*) du coefficient k.

La formule (89), multipliée par $\cos^2\varphi_1$, devient aisément, en retranchant ensuite $\sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_1$ des deux membres,

$$(90)\qquad (\sin^2\Phi - \sin^2\varphi_1)\cos^2\varphi_1 = (\sin\varphi - \sin^2\varphi_1)^2.$$

Comme Φ sera constant dans cette équation, différentions-la en y faisant varier φ et φ_1. Il vient presque aussitôt

$$(90\ bis)\qquad [(1-\sin\varphi)^2 + (\sin^2\Phi - \sin^2\varphi)]\sin\varphi_1 d\sin\varphi_1 + (\sin\varphi - \sin^2\varphi_1)d\sin\varphi = 0;$$

ce qui montre que φ et φ_1 grandissent en même temps pour $\sin\varphi < \sin^2\varphi_1$, mais varient en sens inverses dès que $\sin\varphi$ dépasse $\sin^2\varphi_1$; ce qui aura lieu ici, où nous cherchons à rendre le plus grand possible, pour chaque valeur de φ_1, l'inverse de k et, par suite, $\sin\varphi$, au dernier membre de (87 *bis*).

Si φ_1 est choisi arbitrairement entre zéro et Φ, il résultera pour φ de (90), en extrayant les racines carrées des deux membres et se bornant comme il vient d'être dit, à la plus forte valeur de $\sin\varphi$, celle qui excède $\sin^2\varphi_1$,

$$\sin\varphi = \sin^2\varphi_1 + \cos\varphi_1\sqrt{\sin^2\Phi - \sin^2\varphi_1}. \tag{91}$$

34. Dans ces conditions, φ_1 et φ variant en sens contraires au dernier membre de (87 *bis*), l'inverse de k augmente à raison de φ_1 grandissant, mais diminue par le fait de φ décroissant; et il atteindra le maximum cherché au moment où s'égaliseront ces deux effets opposés par l'annulation de sa différentielle totale.

Mais il est plus simple d'éliminer d'abord φ_1 de ce dernier membre de (87 *bis*), en y substituant à $\tang\varphi_1$ sa valeur $\frac{\sqrt{\sin^2\Phi - \sin^2\varphi}}{1 - \sin\varphi}$ que donne (89). Il vient ainsi

$$\frac{1}{k} = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} + \frac{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\Phi - \sin^2\varphi}}{(1 - \sin\varphi)^2}; \tag{92}$$

et l'on annule ensuite la dérivée du second membre par rapport à $\sin\varphi$. Cette dérivée s'obtient aisément en substituant $(1 + \sin\varphi)^{\frac{1}{2}}(1 - \sin\varphi)^{\frac{1}{2}}$ à $\cos\varphi$, puis réduisant tous les termes de la dérivée trouvée, au dénominateur positif $(1 - \sin\varphi)^2\sqrt{1 - \sin^2\varphi}\sqrt{\sin^2\Phi - \sin^2\varphi}$, et considérant seulement, pour l'annuler, le numérateur total

$$2\cos\varphi\sqrt{\sin^2\Phi - \sin^2\varphi} + 2(\sin^2\Phi - \sin^2\varphi) - \sin\varphi\cos^2\Phi, \tag{93}$$

identique à

$$2\cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2\Phi} + 2\cos^2\varphi - (2 + \sin\varphi)\cos^2\Phi.$$

Quand φ grandit de zéro à Φ, ce numérateur, dont les trois termes varient évidemment en sens inverse de φ, décroît depuis $2\sin\Phi(1+\sin\Phi)$ jusqu'à $-\sin\Phi\cos^2\Phi$; et il est d'abord positif, puis négatif, en s'annulant pour la valeur intermédiaire qui donne

$$(94)\qquad 2\cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi-\cos^2\Phi}=(2+\sin\varphi)\cos^2\Phi-2\cos^2\varphi,$$

ou, par une élévation au carré suivie de la suppression du terme $4\cos^2\varphi(\cos^2\varphi-\cos^2\Phi)$, puis du facteur $\cos^2\Phi$, communs aux deux membres, et enfin de la substitution, à $\cos^2\varphi$, de $1-\sin^2\varphi$,

$$(95)\qquad (2+\sin\varphi)^2\cos^2\Phi-4(1+\sin\varphi)(1-\sin^2\varphi)=0.$$

35. L'expression (92) de l'inverse de k admet donc bien le maximum cherché; et celui-ci se produit pour la valeur de $\sin\varphi$, comprise entre zéro et $\sin\Phi$, qui satisfait à l'équation du troisième degré (95), valeur dont notre transformation prouve l'existence.

Cette valeur est d'ailleurs unique. Posons, en effet, pour abréger, $\sin\varphi=u$. La demi-dérivée en u du premier membre de (95) sera le trinome du second degré

$$6u^2+(5-\sin^2\Phi)u-2\sin^2\Phi,$$

négatif pour $u=0$ et dont les deux racines sont, par suite, de signes contraires.

Donc le premier membre de (95), négatif (égal à $-4\sin^2\Phi$) pour u nul, décroît d'abord, pour $u>0$, et puis grandit définitivement, n'y passant ainsi qu'une fois par zéro.

Cette même valeur donne, d'après (95),

$$(95\ bis)\qquad \cos^2\Phi=\frac{4\cos^2\varphi(1+\sin\varphi)}{(2+\sin\varphi)^2},$$

expression rendant bien (93) identiquement égale à zéro.

Pour obtenir pratiquement la racine $\sin\varphi$, ou mieux φ, remplaçons d'abord, dans (95 *bis*), $\cos^2\Phi$ par $\frac{1}{1+\tan^2\Phi}$; ce qui donne aisément

$$(96)\qquad \frac{\operatorname{tang}^2\Phi}{\operatorname{tang}^2\varphi}=1+\frac{1}{4(1+\sin\varphi)}=\frac{1}{8}\left[9+\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\right],$$

ou bien

$$\tang\varphi = \frac{2\sqrt{2}\tang\Phi}{\sqrt{9+\tang^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}};$$

et observons que le second membre de celle-ci ne croîtra que peu si l'on remplace, au dénominateur, $\tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$ par la tangente de l'angle un peu plus petit $\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi}{2}$. On aura, de la sorte, une valeur approchée de $\tang\varphi$ à peine supérieure à la vraie.

J'ai effectivement reconnu ([1]), sur un certain nombre d'exemples, comme on peut, du reste, le vérifier après coup sur la formule (96), que cette valeur approchée est en excès de $2'$ seulement, sauf erreur inférieure à une demi-minute, pour toutes les valeurs de Φ usuelles, comprises entre 19° et 48°. Donc la résolution de l'équation (95) se fera, avec une approximation très suffisante, par la formule

$$(97) \qquad \tang(\varphi+2') = \frac{2\sqrt{2}\tang\Phi}{\sqrt{9+\tang^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi}{2}\right)}}.$$

La valeur de φ ainsi obtenue, ou vérifiant (96), dépassera sensiblement celle qui résulte de l'équation (83) ou qui correspond à $\varphi_1=\varphi$; et elle différera, par suite, de Φ notablement moins que celle-là. Pour le reconnaître, il suffit de se souvenir que, Φ restant constant, φ et φ_1 varient, dans (90), en sens inverses, et de faire voir que la valeur de φ_1 correspondant à celle de φ donnée par (95) ou (96) lui est sensiblement inférieure; ce qui exigera évidemment que φ y soit plus grand qu'il n'est au moment où il égale φ_1. Et, en effet, la substitution du second membre de (95 *bis*) à $\cos^2\Phi$, dans l'expression de $\tang\varphi_1$ qui est, d'après (89),

$$(98) \qquad \tang\varphi_1 = \frac{\sqrt{\cos^2\varphi-\cos^2\Phi}}{1-\sin\varphi},$$

([1]) Dans un Mémoire de mars 1884 inséré aux *Annales des Ponts et Chaussées* (t. VII, Mémoire n° 26, p. 450).

donne

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi_1}{\operatorname{tang}\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{(2+\sin\varphi)(1-\sin\varphi)} = \frac{1+\sin\varphi}{2+\sin\varphi}, \tag{99}$$

rapport toujours fort au-dessous de l'unité, puisqu'il grandit seulement de $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$ quand φ croît de zéro à $\frac{\pi}{2}$.

36. L'expression (92) correspondante, maximum de l'inverse de k, devient de même, en remplaçant à la fin $\cos^2\varphi \operatorname{tang}\varphi$ par

$$\sin\varphi\sqrt{(1+\sin\varphi)(1-\sin\varphi)}$$

et réduisant,

$$\frac{1}{k} = \frac{2(1+\sin\varphi)^2}{(1-\sin\varphi)(2+\sin\varphi)}. \tag{100}$$

D'où il résulte, pour le minimum demandé de k, la valeur

$$\frac{1}{2}\,\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\left(1+\frac{1}{1+\sin\varphi}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)\left(3+\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right).$$

Les relations (87 *bis*) donneront donc, en définitive,

$$P' = k\Pi r, \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{1}{4}\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\left[3+\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\right], \tag{101}$$

où φ sera défini par (96) et calculable à très peu près par (97) en fonction de l'angle de frottement intérieur Φ donné.

J'ai effectué ce calcul de k pour un certain nombre de valeurs de Φ, allant de 20° à 50°, et je les ai comparées à celles du coefficient analogue dans la formule (84), donnant aussi pour P' l'expression $k\Pi r$, mais où, d'après (84) et (83),

$$k = \frac{1-\sin\varphi}{1+2\sin\varphi}, \qquad \text{avec} \qquad \sin\varphi = \frac{\sin\Phi}{4}\left(\sin\Phi + \sqrt{8+\sin^2\Phi}\right). \tag{102}$$

Par exemple, l'angle Φ ayant les valeurs respectives

20° 30° 40° 50°,

j'ai trouvé, pour ces dernières valeurs (102) de k,

(103) $k = 0{,}4704 \quad 0{,}3139 \quad 0{,}2013 \quad 0{,}1209$

et, pour les précédentes (101),

(104) $k = 0{,}4567 \quad 0{,}3021 \quad 0{,}1927 \quad 0{,}1153.$

Celles-ci leur sont donc inférieures respectivement de

(105) $0{,}0137 \quad 0{,}0118 \quad 0{,}0086 \quad 0{,}0056.$

J'ai comparé aussi, aux valeurs (102) de k, obtenues dans l'hypothèse $\varphi_1 = \varphi$, les coefficients, que j'appellerai k_0, propres à fournir dans la même hypothèse $\varphi_1 = \varphi$ la limite inférieure P de la composante normale de poussée, et dont l'expression, d'après la première formule (80), est

$$k_0 = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + 2\sin\varphi}, \tag{106}$$

mais avec φ pris égal à l'angle de frottement intérieur du massif homogène proposé, c'est-à-dire fait aussi grand que l'était Φ dans les expressions ci-dessus de k. J'ai ainsi trouvé

(107) $k_0 = 0{,}3907 \quad 0{,}25 \quad 0{,}1563 \quad 0{,}0924.$

Les excédents, sur ces limites inférieures, des limites supérieures (103) obtenues dans la même hypothèse $\varphi_1 = \varphi$, sont respectivement

(108) $k - k_0 = 0{,}0797 \quad 0{,}0639 \quad 0{,}0450 \quad 0{,}0285.$

On remarquera que les $\frac{2}{11}$ de ces différences $k - k_0$ seraient

$$0{,}0145 \quad 0{,}0116 \quad 0{,}0082 \quad 0{,}0052$$

ou ne différeraient des écarts (105) existant entre les deux évaluations par excès (103) et (104) que par le chiffre des dix-millièmes (et même assez peu sur ce chiffre pour les angles de frottement intérieur surpassant 20°).

Il est clair que le coefficient par lequel il faudra multiplier Πr, pour avoir la composante normale de la poussée dans l'état d'équilibre-limite étudié, aura, comme valeur théorique *la meilleure qui nous soit actuellement accessible*, la moyenne arithmétique de l'évaluation k_0 par défaut et de *la plus petite* évaluation par excès (101). Or celle-ci excédant k_0 des $\frac{9}{11}$ environ de la différence $k - k_0$ obtenue sans sortir de l'hypothèse $\varphi_1 = \varphi$ *qui donne lieu aux calculs les plus simples*, cette moyenne arithmétique, que nous pouvons appeler K, sera très sensiblement

$$\text{(109)} \qquad K = k_0 + \frac{9}{22}(k - k_0),$$

avec k_0 et k donnés respectivement, le premier, par la formule (106), le second, par la première (102), qui est toute pareille, mais où φ cesse de désigner l'angle constant de frottement intérieur du massif proposé, pour n'en devenir qu'une partie, celle que définit la seconde relation (102) où c'est maintenant Φ qui représente l'angle de frottement intérieur donné du massif en vue.

Si l'on fait, par exemple, $\Phi = 45°$, ce coefficient figurant au dernier membre de l'expression (84) ci-dessus de P' est 0,1577, en excédent de 0,0364 sur celui 0,1213 qui figure dans l'expression (81) de P. Il vient donc, dans (109),

$$k - k_0 = 0,0364,$$
$$k_0 = 0,1213;$$

d'où

$$K = 0,1362.$$

Or, dans le même cas, l'équation (96), résolue soit par tâtonnement, soit par la formule pratique (97), donnerait (en y posant $\Phi = 45°$) $\varphi = 43°1'$; et l'expression (101) de k vaudrait ensuite 0,1506. La moyenne arithmétique de ce résultat et de $k_0 = 0,1213$ est 0,1360, que la valeur K obtenue, 0,1362, surpasse de 0,0002 seulement.

37. Quand le terre-plein et la paroi ne sont pas, le premier, horizontal, la seconde, verticale, mais que, notamment, l'angle ω du talus sur l'horizon est positif, il est toujours aisé d'exprimer, au moyen des formules (59), prises pour $\theta = \theta_0 - \delta$ (c'est-à-dire contre

la paroi), que le rapport de ϖ à $(-\mathfrak{N})$ égale la tangente d'un angle de frottement extérieur φ_1 inférieur à Φ, puis, δ ayant la valeur (62 *bis*), de déterminer le paramètre c en fonction de ω, i', φ, φ_1.

On dégage même, sans trop de calculs, la relation existant entre les deux constantes φ, φ_1, d'une part, et, d'autre part, le maximum Φ de φ', que fera toujours connaître la formule (65) en y posant $\theta = \theta_0 - \delta$. Mais il ne semble pas aussi facile de former, entre φ et φ_1, ou entre φ et Φ, l'équation, analogue à (95) ou (96), qui exprimerait le minimum de la composante normale P′ de poussée pour chaque valeur donnée de Φ. La détermination directe de la moyenne $K\Pi r$ entre cette limite *supérieure* $P' = k'\Pi r$, *la plus faible* que nous pussions obtenir, et la limite inférieure $P = k_0 \Pi r$, supposerait donc, ce semble, de très laborieux calculs.

38. Voici, du reste, les formules dont il s'agit ici.

A la condition de remplacer, vers la fin des équations (59), les produits $2\sin\delta\cos\delta$ et $2\sin^2\delta$ par $\sin 2\delta$ et $1 - \cos 2\delta$, il vient, après avoir isolé c,

$$(110)\qquad \frac{c\sin\delta\cos\theta_0}{\cos(\theta_0-\delta)} = \frac{2\sin\delta\sin(\varphi-\varphi_1+\delta)\sin\varphi - \cos\varphi\sin(\varphi-\varphi_1)}{\operatorname{tang}\varphi\,[\sin\varphi_1 + \sin(2\delta-\varphi_1)]}$$
$$= \frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi\cos(\varphi-\varphi_1+2\delta)}{\operatorname{tang}\varphi\,[\sin\varphi_1+\sin(2\delta-\varphi_1)]},$$

relation où le troisième membre se déduit du second en mettant, à la place du produit $2\sin\delta\sin(\varphi-\varphi_1+\delta)$, la différence

$$\cos(\varphi-\varphi_1) - \cos(\varphi-\varphi_1+2\delta),$$

puis en effectuant une réduction évidente. Or la substitution du troisième membre au premier, dans la formule (65) où l'on fera $\theta = \theta_0 - \delta$, $\varphi' = \Phi$, donne à son tour, si l'on a soin d'observer que $2\delta - \varphi_1$ est l'excédent de $\varphi - \varphi_1 + 2\delta$ sur φ et de développer le sinus de cette différence,

$$(111)\qquad \sin^2\Phi = \sin^2\varphi + \left[\frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi\cos(\varphi-\varphi_1+2\delta)}{\sin(\varphi-\varphi_1+2\delta)}\right]^2.$$

Faisons évanouir le dénominateur et cette équation deviendra

$$(112)\quad \sin^2\Phi \sin^2(\varphi-\varphi_1+2\delta)=\sin^2\varphi+\sin^2\varphi_1-2\sin\varphi\sin\varphi_1\cos(\varphi-\varphi_1+2\delta).$$

Celle-ci elle-même, divisée par $\sin^2(\varphi-\varphi_1+2\delta)$, prend aisément la forme

$$(113)\qquad \sin^2\Phi=\left[\frac{\sin\varphi-\sin\varphi_1}{\sin(\varphi-\varphi_1+2\delta)}\right]^2+\frac{2\sin\varphi\sin\varphi_1}{1+\cos(\varphi-\varphi_1+2\delta)}.$$

On remarquera qu'elle ne contient pas directement les deux constantes ω, i' de la question, mais seulement leur fonction δ définie par l'équation (62 *bis*) (¹).

Divisant l'équation (111) par $\sin^2\varphi$, introduisons, au premier membre, l'angle aigu et positif ε défini au nº 27 par la formule (68). Il viendra immédiatement

$$\tang\varepsilon \text{ ou } \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}=\frac{\sin\varphi_1-\sin\varphi\cos(\varphi-\varphi_1+2\delta)}{\sin\varphi\sin(\varphi-\varphi_1+2\delta)}$$

et, par l'évanouissement des dénominateurs,

$$\sin\varphi_1\cos\varepsilon=\sin\varphi\cos(\varphi-\varphi_1+2\delta-\varepsilon).$$

Divisons encore par $\cos\varepsilon$ et rappelons-nous la formule (68). Nous aurons, pour exprimer le plus simplement possible les rapports de φ et de φ_1 à leur maximum commun Φ, les deux formules

$$(114)\qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}=\cos\varepsilon,\qquad \frac{\sin\varphi_1}{\sin\Phi}=\cos(\varphi-\varphi_1+2\delta-\varepsilon).$$

On voit qu'elles ne donnent $\varphi_1=\varphi$ que pour $\varepsilon=\delta$ (²).

39. Cherchons enfin la composante normale P′ de la poussée $\mathfrak{P}$, en

---

(¹) J'avais déjà donné ces formules en 1884, au Tome VII (p. 447) des *Annales des Ponts et Chaussées.*

(²) On aurait tiré bien plus vite de (71) la deuxième formule (114) en remplaçant, dans le dernier membre de (71), $\sin\varphi$ par sa valeur évidente $\sin\Phi\cos\varepsilon$ et de plus, dans le premier membre, $\tang\varphi_1$ par le rapport de $\sin\varphi_1$ à $\cos\varphi_1$, puis faisant évanouir les dénominateurs et réduisant.

divisant la formule (77) de sa composante tangentielle $\mathfrak{T}$ par la valeur de $\tang\varphi_1$, qui est, d'après (71) (p. 43),

$$\frac{\sin\varphi\cos(\varphi+2\delta-\varepsilon)}{\cos\varepsilon-\sin\varphi\sin(\varphi+2\delta-\varepsilon)}.$$

Vu la première (114), et si l'on remplace, comme au n° 21 (p. 37), $p\cos\varphi$ par son expression en φ, que l'on appelle d'ailleurs k' le coefficient $\frac{P'}{\Pi r}$ dont il s'agirait de déterminer le minimum, il vient

$$(115)\qquad k'=\cos(\varphi+i'+\delta)\frac{\cos(\omega-i')}{\cos(\omega-i'-\delta)}\,\frac{\cos\varepsilon}{\cos(\varphi-\varepsilon)}[1-\sin\Phi\sin(\varphi+2\delta-\varepsilon)].$$

L'angle φ_1 du frottement extérieur s'en trouve éliminé, comme il l'était de la formule (92) propre au cas d'un terre-plein horizontal soutenu par un mur vertical. Mais il y figure les deux fonctions δ et ε de φ; ce qui suffit pour rendre compliquée la dérivée de k'; et l'annulation de cette dérivée doit conduire à une équation en φ bien peu abordable. Même en faisant $i'=0$ ou supposant le mur vertical, d'où il résulte

$$\delta=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi+\omega'-\omega}{2}\qquad\left(\text{où } \omega'=\arc\sin\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}\right)$$

et

$$(116)\qquad k'=\frac{\cos\omega\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi-\omega'+\omega}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi+\omega'+\omega}{2}\right)}\,\frac{\cos\varepsilon}{\cos(\varphi-\varepsilon)}[1-\sin\Phi\cos(\omega'-\omega+\varepsilon)],$$

les calculs sont loin d'être simples; car on a vu la peine qu'a donnée le cas élémentaire du terre-plein horizontal où s'annulaient ω' et ω, cas où, cependant, l'inverse, qu'il fallait rendre maximum, du coefficient k' se réduisait à la formule (92).

40. Au contraire, l'autre limite supérieure, celle qui s'obtient dans l'hypothèse $\varphi_1=\varphi$ et qui serait généralisée de (102), se trouvera presque aussi facile à évaluer que la limite inférieure.

Celle-ci pourra s'écrire

$$P=k_0\Pi r=\mathfrak{P}\cos\varphi,$$

où Φ recevra la troisième expression (62); en sorte que l'on aura, pour les massifs en pente,

$$(117)\quad P = k_0 \Pi r, \quad \text{avec} \quad k_0 = \cos\varphi \cos(\varphi + i' + \delta) \frac{\cos(\omega - i')}{\cos(\omega - i' - \delta)} \frac{\cos(\varphi + \delta)}{\cos(\varphi - \delta)}$$

δ prenant d'ailleurs, en fonction de φ, ω et i', la valeur (62 *bis*) et φ étant l'angle constant, connu, de frottement intérieur du massif homogène donné.

Quant à la limite supérieure $P' = k\Pi r$ dont il s'agit maintenant, k y admettra la même formule que k_0, ou sera encore le dernier membre de (117), toujours avec δ exprimé par (62 *bis*); mais φ y sera choisi d'après l'équation (67), c'est-à-dire pris tel que

$$(117\ bis)\quad \sin\varphi = \sin\Phi \cos\left[-i' + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\left(-\omega + \arcsin\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}\right)\right],$$

avec Φ égal à l'angle connu de frottement intérieur donné, c'est-à-dire à la valeur qu'avait φ dans le calcul de k_0.

Quelques tâtonnements seront peut-être inévitables pour résoudre l'équation (117 *bis*) en φ. Mais on aura déjà une première approximation, probablement suffisante toujours, en remplaçant φ par Φ même, dans le second membre de (117 *bis*).

40 *bis*. Il est, à la vérité, peu supposable que la différence $k - k_0$ des deux évaluations, par défaut et par excès, ainsi obtenues pour le coefficient pratique K de la formule $K\Pi r$ de la composante normale de la poussée, continue à être environ, dans le rapport de 11 à 9, à l'excédent analogue $k' - k_0$ que l'on aurait en calculant k' par la condition de choisir l'angle φ_1 de frottement extérieur qui réduirait le plus possible cette différence $k' - k_0$.

Le coefficient $\frac{9}{22}$ du dernier terme de la formule (109) devrait donc être remplacé par une fraction $\left(\text{toujours moindre que } \frac{1}{2}\right)$ *variable avec* ω *et avec* i'. Mais comme cependant, du moins pour $i' = 0$ ou une paroi verticale, δ tend vers zéro à mesure que grandit la *déclivité* ω du talus, ce qui réduit de plus en plus le *champ* où φ' s'écarte de φ et, sans doute, l'amplitude même $\Phi - \varphi$ de l'hétérogénéité de nos massifs théoriques, les changements de cette fraction $\left(\text{à valeur initiale } \frac{9}{22}\right)$ n'auraient, sur le meilleur coefficient pratique K à choisir, qu'une influence de plus en plus effacée. On pourra donc, dans l'état actuel de nos connaissances, appliquer à K, même pour les massifs en pente, la formule (109), en évaluant k_0 et k comme il vient d'être dit, ou sans sortir de l'hypothèse $\varphi_1 = \varphi$.

Il n'y aura pas, en opérant ainsi, d'erreur notable à craindre, du moins quand il s'agit d'un mur vertical, ou que $i' = 0$; car la fraction variable considérée, à laquelle il est naturel d'attribuer une allure simple, une variation constamment de même sens, à mesure que grandit la déclivité ω du talus, *tend* alors *vers zéro* et doit, par conséquent, se maintenir constamment au-dessous de sa valeur initiale $\frac{9}{22}$.

41. Voici comment j'ai reconnu que sa valeur *finale*, correspondant à ω infiniment peu inférieur à l'angle de frottement ou de *terre coulante*, est *zéro*.

Représentons-nous notre massif *homogène*, d'un angle *donné* de frottement intérieur, avec mur vertical ; et attribuons à l'angle ω, sur l'horizon, de sa surface libre, *angle également connu*, une différence α *déterminée, mais extrêmement faible*, d'avec cet angle de frottement.

Notre limite inférieure k_0 du coefficient K le concernant se formera donc en prenant pour φ et φ_1 l'angle de frottement donné, et en portant l'expression (62) de $\mathfrak{P}$ (p. 37) dans la formule qui définit k_0, et qui est

$$k_0 = \frac{P}{\Pi r} = \frac{\mathfrak{P}\cos\varphi}{\Pi r}.$$

Il faudra poser d'ailleurs, en appelant α la petite différence $\varphi - \omega$, *ici connue*,

$$\sin\omega = \sin(\varphi - \alpha) = \sin\varphi - \alpha\cos\varphi;$$

d'où il résultera successivement

$$\sin\omega' \quad \text{ou} \quad \frac{\sin\omega}{\sin\varphi} = 1 - \alpha\cot\varphi, \qquad \sin^2\omega' = 1 - 2\alpha\cot\varphi,$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \omega'\right) = 1 - \sin^2\omega' = 2\alpha\cot\varphi, \qquad \omega' = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2\alpha\cot\varphi};$$

et enfin, d'après (62 *bis*),

$$(118)\qquad \delta = \sqrt{\frac{\alpha}{2}\cot\varphi} - \frac{\alpha}{2} = (\text{sensiblement}) \sqrt{\frac{\alpha}{2}\cot\varphi}.$$

Par suite,

$$\cos(\varphi \pm \delta) = \cos\varphi \mp \delta\sin\varphi = (\cos\varphi)(1 \mp \delta\operatorname{tang}\varphi) = (\cos\varphi)\left(1 \mp \sqrt{\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\varphi}\right).$$

Il vient donc, en observant que la petite différence $\alpha = \varphi - \omega$ est négligeable à côté de δ, ou que ω peut, dans (62), remplacer φ sans erreur sensible,

$$(119)\qquad k_0 = \left[\frac{\cos\omega\cos(\omega+\delta)}{\cos(\omega-\delta)}\right]^2 = \cos^2\omega\left[1 - 2\sqrt{2\alpha\operatorname{tang}\omega}\right].$$

De plus, la formule (67) donne

$$\sin\Phi = (\sin\varphi)\left(1 + \frac{\delta^2}{2}\right) = \sin\varphi + \cos\varphi\,\frac{\delta^2}{2}\operatorname{tang}\varphi = \sin\left(\varphi + \frac{\delta^2}{2}\operatorname{tang}\varphi\right),$$

c'est-à-dire, vu (118),

$$\Phi = \varphi + \frac{\delta^2}{2}\operatorname{tang}\varphi = \varphi + \frac{\alpha}{4} = \varphi + \frac{1}{4}(\varphi - \omega),$$

et, en retranchant ω des deux membres,

$$(120)\qquad \Phi - \omega = \frac{5}{4}(\varphi - \omega) \qquad \text{ou} \qquad \varphi - \omega = \frac{4}{5}(\Phi - \omega).$$

42. La limite inférieure k_0 de K étant ainsi exprimée par le dernier membre de (119), la limite supérieure k, que nous tirons également de l'hypothèse $\varphi_1 = \varphi$, s'obtiendra par les mêmes formules, mais où ce sera Φ, devenu différent et que nous appellerons Φ', qu'on fera égal à l'angle de frottement intérieur donné. Et il lui correspondra de nouvelles valeurs, φ', α', δ', k, de φ, α, δ, k_0, reliées à ω et à Φ' de la même manière que φ, α, δ, k_0 le sont à ω et à Φ par les formules ci-

dessus ([1]). On aura, notamment, à raison de la dernière (120),

$$(121)\qquad \alpha' \text{ ou } \varphi' - \omega = \frac{4}{5}(\Phi' - \omega) = \frac{4}{5}\alpha, \qquad \delta' = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}\cot\varphi'} = \sqrt{\frac{2}{5}\alpha\cot\omega},$$

$$k = (\cos^2\omega)\left(1 - 2\sqrt{2\alpha'\operatorname{tang}\omega}\right) = (\cos^2\omega)\left(1 - \frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{2\alpha\operatorname{tang}\omega}\right).$$

Enfin, la comparaison de la formule (119) de k_0 à celle-ci de k montre que

$$(122)\qquad \frac{k - k_0}{k_0} = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) 2\sqrt{2\alpha\operatorname{tang}\omega} = (0,2111)\sqrt{2\alpha\operatorname{tang}\omega},$$

rapport de l'ordre de petitesse de $\sqrt{\alpha}$.

43. Voyons maintenant ce que sera la limite supérieure k' la plus petite possible, exprimée par le minimum du second membre de (116). La parité des deux équations qui définissent ε et le complément de ω', savoir

$$(123)\qquad \cos\varepsilon = \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega'\right) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi},$$

montre que, vu les petitesses de $\varphi - \omega$ et de $\Phi - \varphi$, ε s'exprimera en φ et Φ comme $\frac{\pi}{2} - \omega'$ s'est exprimé ci-dessus (p. 61) en ω et φ. Il faudra donc faire tout à la fois, dans (116),

$$(124)\qquad \frac{\pi}{2} - \omega' = \sqrt{2(\varphi - \omega)\cot\varphi}, \qquad \varepsilon = \sqrt{2(\Phi - \varphi)\cot\Phi}.$$

Or Φ doit être, ici, pris égal à l'angle de frottement donné et la différence $\Phi - \omega$ vaut précisément notre petite constante α. La variable indépendante φ, forcément comprise entre ω et Φ, ne changera qu'extrêmement peu.

([1]) Aucune confusion ne peut résulter de la notation φ' employée ici pour désigner la nouvelle valeur *constante* de φ ainsi envisagée, qui n'a rien de commun avec l'angle variable φ' (fonction de θ) du frottement intérieur de nos coins sablonneux hétérogènes contigus au mur de soutènement.

Aussi, après avoir substitué $\cot\omega$ à $\cot\varphi$ et à $\cot\Phi$ dans (124), introduisons une variable auxiliaire μ plus commode que φ, et destinée à varier de zéro à $\frac{\pi}{2}$, en posant

$$(125)\qquad \sqrt{\varphi-\omega}=\sqrt{\alpha}\sin\mu,\qquad \sqrt{\Phi-\varphi}=\sqrt{\alpha}\cos\mu.$$

Les deux relations (124) deviendront

$$(126)\qquad \omega'=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2\alpha\cot\omega}\sin\mu,\qquad \varepsilon=\sqrt{2\alpha\cot\omega}\cos\mu.$$

Portons ces valeurs de ω' et de ε dans la formule (116), en observant que α, $\varphi-\omega$, $\Phi-\varphi$ sont négligeables devant $\sqrt{\alpha}$: ce qui permet, en particulier, de remplacer φ par ω. Le sinus de l'arc $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi+\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)$ et les cosinus des deux arcs $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi+\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)$ et $(\omega'-\omega+\varepsilon)$ vaudront respectivement

$$\cos\left(\omega\pm\sqrt{\frac{\alpha}{2}\cot\omega\sin\mu}\right),\qquad \sin\left[\omega+\sqrt{2\alpha\cot\omega}(\sin\mu-\cos\mu)\right],$$

ou bien

$$\cos\omega\mp(\sin\omega)\sqrt{\frac{\alpha}{2}\cot\omega\sin\mu}=(\cos\omega)\left(1\mp\sqrt{\frac{\alpha}{2}\tang\omega\sin\mu}\right),$$
$$(\sin\omega)\left[1+\cot\omega\sqrt{2\alpha\cot\omega}(\sin\mu-\cos\mu)\right].$$

D'ailleurs, on trouve de même

$$\cos(\varphi-\varepsilon)=\cos\varphi+\varepsilon\sin\varphi=(\cos\varphi)(1+\varepsilon\tang\varphi)=(\cos\omega)(1+\varepsilon\tang\omega).$$

Enfin, $\cos\varepsilon$ se réduit à l'unité, sauf erreur négligeable de l'ordre de α ; et le facteur

$$1-\sin\Phi\cos(\omega'-\omega+\varepsilon)\quad \text{ou}\quad 1-\sin\omega\cos(\omega'-\omega+\varepsilon),$$

prend successivement les formes

$$1-\sin^2\omega\left[1+\cot\omega\sqrt{2\alpha\cot\omega}(\sin\mu-\cos\mu)\right]$$
$$=\cos^2\omega\left[1-\sqrt{2\alpha\tang\omega}(\sin\mu-\cos\mu)\right].$$

La formule (116) devient donc, par l'effectuation, comme à l'ordinaire, du produit des facteurs voisins de l'unité,

$$k' = \cos^2\omega\,(1 - 2\sqrt{2\alpha\,\text{tang}\,\omega}\,\sin\mu). \tag{127}$$

On voit que la plus petite valeur de k' se produit pour $\mu = \frac{\pi}{2}$ ou pour $\varphi = \Phi$, et qu'elle est

$$k' = \cos^2\omega\,(1 - 2\sqrt{2\alpha\,\text{tang}\,\omega}). \tag{128}$$

Elle se confond avec la limite inférieure k_0 donnée par (119).

On a donc $k' - k_0 = 0$, sauf erreur négligeable à côté de $\sqrt{\alpha}$; et, vu (122), il vient bien

$$\lim \frac{k' - k_0}{k - k_0} = 0. \tag{129}$$

Pour prévoir que la limite k_0 donnerait ici une poussée *beaucoup plus approchée* que la limite k, il aurait suffi d'observer que l'angle effectif de frottement est accrû non seulement très peu [moins que du quart de α, d'après (120)], mais aussi *dans un coin d'hétérogénéité très petit*, en devenant, pour k_0, φ' au lieu de φ, tandis qu'en devenant (pour k) Φ au lieu de φ, *avec le* Φ *donné*, il se trouve abaissé *dans tout le massif*, et, presque partout, du cinquième de α d'après la première (121), c'est-à-dire au moins autant en moyenne, sinon même beaucoup plus, qu'il avait été *très localement* surélevé pour k_0.

On reconnaît sur la formule (71) (p. 43) que, pour μ allant de zéro à $\frac{\pi}{2}$, ou φ de ω à Φ, φ_1 ne s'écarte pas de Φ dans un rapport appréciable (non plus, du reste, que φ) [1].

---

[1] Pour trouver φ_1 variable, il faut pousser le calcul de la formule (71) jusqu'aux termes de l'ordre de petitesse de $\varphi_1 - \omega$, ou de $\Phi - \omega = \alpha$ ou, par conséquent, de ε^2. A cet effet, multipliant la formule (71) par $\sin\varphi$ et observant que $\varphi_1 - \omega$, $\varphi - \omega$ sont très petits, remplaçons $\text{tang}\,\varphi_1$ par $\text{tang}\,\omega + \frac{\varphi_1 - \omega}{\cos^2\omega}$ et $\sin\varphi$ par $(\sin\omega)[1 + (\varphi - \omega)\cot\omega]$ Nous aurons

$$\text{tang}\,\omega + \frac{\varphi_1 - \omega}{\cos^2\omega} = \frac{(\sin\omega)\cos(\varphi + 2\delta - \varepsilon)[1 + (\varphi - \omega)\cot\omega]}{1 - \frac{\varepsilon^2}{2} - \sin\omega\sin(\varphi + 2\delta - \varepsilon)[1 + (\varphi - \omega)\cot\omega]}. \tag{130}$$

IX. — Rappel sommaire d'assez nombreuses vérifications expérimentales de la théorie.

44. Une grande partie du Mémoire de 1884 cité plus haut (*Annales des Ponts et Chaussées*, t. VII, n° 26 : *Complément à de précédentes notes sur la poussée des terres*, p. 443 à 481) a été consacrée (n^{os} III, IV et IV *bis*) à la discussion et au calcul d'un assez grand nombre d'expériences soignées, faites à diverses époques par M. l'ingénieur en chef Gobin, par Georges Howard Darvin et, plus anciennement, par le lieutenant-colonel Audé, sur l'équilibre-limite de massifs composés ou de sable (soit gros, soit fin), ou de terre sablonneuse plus ou moins tassée, massifs à surface supérieure plane tantôt horizontale, tantôt montante à pentes diverses, ou même plongeante, qui se détendaient *en avant* par la rotation d'une paroi verticale mince, mobile autour d'un axe horizontal pris tantôt dans son plan, tantôt au devant du massif, et maintenue jusqu'au moment de l'éboulement par une force graduellement décroissante, connue à chaque instant.

M. Gobin a trouvé par mesure directe 1,40 comme densité et 34° comme angle de frottement intérieur, pour le sable sur lequel ont

---

D'autre part, d'après (62 *bis*), $\varphi + 2\delta - \varepsilon$ a la valeur $\omega + \left(\frac{\pi}{2} - \omega' - \varepsilon\right)$, que l'on peut écrire $\omega + \beta$, si l'on appelle β le petit excès de $\frac{\pi}{2} - \omega'$ sur ε, excès évaluable par les formules (126), de même que $\varphi - \omega$ l'est par la première (125). Alors le cosinus et le sinus de $\varphi + 2\delta - \varepsilon$ deviennent respectivement

$$(\cos\omega)\left(1 - \beta\,\text{tang}\,\omega - \frac{\beta^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad (\sin\omega)\left(1 + \beta\cot\omega - \frac{\beta^2}{2}\right).$$

Enfin, au second membre de (130), le numérateur devient

$$\sin\omega\cos\omega\left[1 - \beta\,\text{tang}\,\omega - \frac{\beta^2}{2} + (\varphi - \omega)\cot\omega\right],$$

et le dénominateur prend aisément la forme $(\cos^2\omega)(1-\gamma)$, si l'on pose

$$\gamma = \beta\,\text{tang}\,\omega - \frac{\beta^2}{2}\,\text{tang}^2\omega + (\varphi - \omega)\,\text{tang}\,\omega + \frac{\varepsilon^2}{2\cos^2\omega}.$$

Or, au facteur $1-\gamma$ du dénominateur, on peut substituer un facteur $(1-\gamma)^{-1}$ ou porté ses observations, tandis que cet angle, pour les deux sables très purs et très secs, l'un dit *gros*, l'autre *extrafin*, expérimentés autrefois par Audé, était dans les deux cas $33^\circ\frac{2}{3}$, la pente du talus naturel y ayant été jugée égale à $\frac{2}{3}$; mais les densités correspondantes, malgré l'égalité de ces angles et la *quasi-parité* constatée des poussées obtenues, ont paru valoir respectivement 1,47 et 1,35. Quant à la terre

---

$1+\gamma+\gamma^2$ au numérateur, et, après effectuation des calculs, le second membre de (130) devient simplement

$$(\operatorname{tang}\omega)\left[1-\frac{\beta^2-\varepsilon^2}{2\cos^2\omega}+\frac{\varphi-\omega}{\cos\omega\sin\omega}\right].$$

La formule (130) donne donc

$$\varphi_1-\omega=(\varphi-\omega)-\frac{1}{2}(\beta^2-\varepsilon^2)\operatorname{tang}\omega.$$

Remplaçons $\varphi-\omega$, β, ε par leurs valeurs

$$\alpha\sin^2\mu,\qquad \sqrt{2\alpha\cot\omega}\,(\sin\mu-\cos\mu),\qquad \sqrt{2\alpha\cot\omega}\,\cos\mu;$$

et il viendra

$$\varphi_1-\omega=2\alpha\cos\mu\sin\mu,$$

ou, vu (125),

(131) $$\frac{1}{2}(\varphi_1-\omega)=\sqrt{(\Phi-\varphi)(\varphi-\omega)}.$$

Ainsi, *la demi-différence* $\frac{1}{2}(\varphi_1-\omega)$ *est moyenne proportionnelle entre les deux intervalles partiels* $\Phi-\varphi$ *et* $\varphi-\omega$, *dont la somme est* $\Phi-\omega$ *ou* α.

Quand φ va de ω à Φ, cette demi-différence $\frac{1}{2}(\varphi_1-\omega)$ commence donc par dépasser $\varphi-\omega$, pour devenir égale à $\varphi-\omega$ au milieu de l'intervalle total, où φ_1 atteint son maximum Φ, et pour décroître ensuite jusqu'à zéro.

Le minimum k' correspond à

$$\mu=\frac{\pi}{2},\qquad \varphi=\Phi,\qquad \varphi_1=\omega;$$

le frottement intérieur y est donc le plus grand possible; mais le frottement extérieur, le plus petit possible.

Quant à la limite supérieure particulière k, pour laquelle $\varphi_1=\varphi$, la formule (131) y donne $\sqrt{\varphi-\omega}=2\sqrt{\Phi-\varphi}$, c'est-à-dire, d'après (125),

$$\operatorname{tang}\mu=2,\qquad \Phi-\varphi=\frac{1}{4}(\varphi-\omega)\qquad\text{et}\qquad \Phi-\omega=\frac{5}{4}(\varphi-\omega),$$

comme l'indiquait, du reste, la première équation (121) ou la première (120).

sablonneuse, plus ou moins tassée, sur laquelle Georges Hovard Darwin a fait ses observations, l'angle de frottement intérieur paraissait y être environ $45^\circ \frac{1}{2}$, quand sa densité atteignait 1,55, et $40^\circ \frac{1}{4}$ lorsque, le tassement n'y étant produit que par le poids même de la terre (versée peu à peu sans choc), la densité s'y réduisait à 1,40 et se montrait ainsi, très sensiblement, proportionnelle au sinus de l'angle de frottement.

Dans tous ces cas, les résultats d'expérience ont confirmé aussi complètement qu'on pouvait l'espérer l'exactitude des formules précédentes et, en particulier, l'expression pratique (109) du coefficient K, rapport de P à Πr pour une paroi verticale mince se renversant par rotation autour d'une de ses horizontales.

45. J'avais, du reste, mais d'une manière un peu moins précise, déjà fait l'application des formules (102) et (106), remplacées par leur moyenne arithmétique, aux observations de G.-H. Darwin et de M. Gobin, dans deux articles antérieurs des mêmes *Annales* (t. VI, novembre 1883, p. 494 à 509 et 510 à 524).

Tant dans le second de ces articles que dans le Mémoire de 1884 (n° IV *bis*), j'avais eu aussi à mettre en jeu la composante tangentielle de la poussée, prise égale au produit de la composante normale par la tangente de l'angle donné de frottement intérieur, pour des observations où l'axe horizontal de rotation se trouvait en avant de la paroi et faisait intervenir cette composante tangentielle dans l'équation de l'équilibre, comme il arrive, par exemple, quand la paroi est un mur vertical d'épaisseur constante (de bas en haut), se renversant par rotation autour de l'arête inférieure de sa face visible. L'accord s'y est encore montré constamment entre la théorie ci-dessus et les résultats observés, quoique certaines formules empiriques résumant des observations d'Audé présentent des discordances, mais pour des particularités accessoires où ces formules empiriques peuvent être regardées soit comme extrapolées, soit comme révélant des circonstances complexes dont la théorie fait abstraction. Tel est, en particulier, le cas où celle-ci m'a conduit (n° 18, p. 32) à supposer entraîné en bloc avec le mur un coin de terre contigu ayant sa pointe en bas, coin que retenait sensiblement, dans sa chute, le frottement des deux *joues fixes* de la caisse d'expériences, joues dont nous *abstrayons* ici l'existence.

Il y a même certaines observations de M. Gobin qui ont eu pour objet la composante tangentielle seule de la poussée : ce sont celles où il mesurait la force nécessaire pour soulever un mince plateau vertical, immergé jusqu'à une certaine profondeur dans le sable en repos. Elles ont assez bien confirmé l'assimilation approximative de ce phénomène à un éboulemont par détente horizontale, malgré les nuances qui l'en distinguent.

Les Mémoires cités des *Annales des Ponts et Chaussées* avaient été précédés, dans le même recueil, d'un autre (n° 29), au Tome III (juin 1882, p. 625 à 643) : « *Sur la détermination de l'épaisseur minimum que doit avoir un mur vertical, d'une hauteur et d'une densité données, pour contenir un massif terreux, sans cohésion, dont la surface supérieure est horizontale* ». J'y avais déjà indiqué les limites supérieures de la poussée qu'on obtient en employant les équations (89) et (90), mais sans en dégager l'équation du minimum (95) ou (96). Et M. l'ingénieur des Ponts et Chaussées Flamant s'était servi de mes formules pour expliquer comment avait pu tenir, durant la construction d'un pavage en bois de Regent Street à Londres, contrairement à ce qu'indiquaient les formules de poussée alors admises en Angleterre, un mur provisoire extrêmement léger de soutènement, composé de simples pavés de bois superposés.

46. J'examine enfin, dans les deux Mémoires ci-dessus traitant des expériences de M. Gobin, un phénomène plus complexe, qu'observait cet ingénieur en éloignant du massif sablonneux (supposé de niveau), par une petite translation horizontale, la paroi verticale qui le soutenait, et en provoquant ainsi la rupture du terre-plein suivant une surface cylindrique montante, issue du bas de la paroi et venant dessiner, à la surface libre, une fracture rectiligne dont la distance constante à la paroi se mesurait aisément. On en déduisait la pente moyenne de la surface de rupture ; car, grâce à la petite *translation* de toute la paroi, la fracture partait presque du fond, et non pas d'un niveau sensiblement plus élevé, comme il serait arrivé pour un éboulement dû à une simple rotation de la paroi autour de son arête inférieure. Le rap-

port de la distance existant entre la ligne superficielle de fracture et la paroi, à la hauteur de celle-ci au niveau du sol sablonneux, pouvait donc être confondu avec l'inclinaison moyenne de la surface de rupture comparativement à la verticale.

Il est évident qu'alors, sur tous les éléments du profil de rupture, ou plutôt de la *faille* produite, la couche sablonneuse sous-jacente, restée en place, exerce une pression faisant, avec la normale au profil dirigée vers le haut, un angle aigu partout égal à l'angle de frottement intérieur, angle constant pour le massif proposé, mais qui, pour nos massifs partiellement hétérogènes théoriques, est φ dans la partie homogène, extérieure au coin sablonneux d'angle δ contigu à la paroi et ayant sa pointe en haut, mais φ' dans ce coin même, et alors décroissant, à partir du mur ou du fond, de Φ à φ.

Pour chacun des deux massifs théoriques hétérogènes entre lesquels peut être censé s'intercaler le massif proposé, et dans chacun desquels le plan de séparation des deux parties homogène et hétérogène fait l'angle $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ avec la verticale descendant du haut de la paroi, j'ai formé, grâce à la connaissance de φ' donnée, par (66), pour tout coin élémentaire d'ouverture $d\theta$ compris entre les deux angles polaires θ et $\theta + d\theta$, l'expression de φ' en fonction de l'angle θ, à tangente valant $\frac{y}{x}$, expression à laquelle se relie simplement, en chaque point (x, y) du profil, le coefficient angulaire $-\frac{dy}{dx}$ du profil lui-même. De là résulte, entre $-\frac{dy}{dx}$ et $\frac{y}{x}$, l'équation différentielle de ce profil, concave vers le haut dans sa partie inférieure qui en est à peu près la moitié, rectiligne dans sa moitié supérieure, équation visiblement réductible à une équation linéaire sans second membre, mais dont l'intégration complète aboutirait peut-être difficilement ([1]).

Un simple aperçu auquel je me suis borné attribue à la moitié inférieure courbe une pente *moyenne* moindre de quelques degrés que la

---

([1]) J'étudie cette équation au Chapitre IV d'un Mémoire encore inédit, complémentaire de celui-ci et où j'ai résumé d'assez longues recherches sur l'état ébouleux, d'un caractère plus particulièrement spéculatif, ou non encore susceptibles d'applications aussi précises que celles auxquelles est consacré le présent travail.

pente de la moitié supérieure rectiligne la surplombant presque, et dont l'angle avec la verticale ascendante est $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, comme celui que fait avec la verticale descendante le plan même de séparation des deux parties homogène et hétérogène du massif théorique considéré.

L'accord avec les résultats d'observation n'y est, à un examen attentif, pas moins satisfaisant que pour les autres éléments de la question.

X. — Sur le principe de maximum dû à Coulomb et sur son utilisation pour un calcul approché de la poussée-limite, dans l'hypothèse d'une forme plane de la surface de rupture.

47. On peut dégager, de la théorie de l'équilibre-limite des masses sablonneuses, la propriété suivante de maximum, qui est comme l'expression développée du principe du *Prisme de plus grande poussée*, émis et si ingénieusement utilisé par Coulomb en 1773 (*Savants étrangers* de l'Académie des Sciences de Paris, t. VII, p. 359) : *la poussée exercée effectivement sur la paroi mobile, au moment où l'éboulement commence, s'y exercerait de même si le massif pulvérulent se terminait à la surface de rupture qui, issue du bas de la paroi, monte alors, en s'en éloignant, jusqu'à la surface libre ; et elle est la plus forte des poussées qui ont lieu à l'état d'équilibre-limite, quand le massif se trouve borné ainsi inférieurement par une surface rugueuse fixe quelconque, allant du bas du mur (c'est-à-dire de la paroi mobile) à la surface libre.*

Observons, pour le démontrer, que, dans le cas d'un massif indéfini derrière la paroi mobile, et passé à l'*état ébouleux* où s'y trouvent partout vérifiées par les pressions, outre les conditions ordinaires d'équilibre, la relation caractéristique (63), la surface de rupture en question, que j'appellerai S, éprouve sur toute son étendue des pressions inclinées, par rapport à la normale, d'un angle égal à l'angle même, φ ou φ', du frottement intérieur des couches à travers lesquelles elle passe. Donc, le même mode d'équilibre-limite subsisterait, c'est-à-dire serait encore possible, si le prisme de terre qui se détache restait seul pulvérulent et s'éboulait en glissant contre la masse sous-jacente, *supposée, au contraire, devenue solide*. Et la poussée de la paroi contre le massif, dont nous appellerons ici $\mathcal{P}$ la résultante inclinée de l'angle φ_1 sur la normale à la paroi, se composera avec la pression totale, que nous appellerons $\mathcal{R}$, de cette masse sous-jacente dans l'étendue S, pour équilibrer le poids du massif sablonneux superposé; en sorte que l'on pourra, si la surface S est, par exemple, un plan d'inclinaison donnée, appliquer, suivant les deux sens horizontal et vertical, le principe des quantités de mouvement au calcul de la poussée $\mathcal{P}$ et de la pression $\mathcal{R}$, dont les directions seront alors connues et dont les deux équations ainsi posées détermineront les grandeurs.

Or soit S′ toute autre surface menée dans le massif, au-dessus ou au-dessous de S (ou même traversant S), mais toujours depuis le bas de la paroi jusqu'à la surface libre. Les pressions exercées sur ses divers éléments, dans le mode effectif d'équilibre déjà considéré, feront évidemment avec la normale à ces éléments certains angles, γ, généralement plus petits que l'angle maximum φ ou φ'.

Si donc la partie du massif située au-dessous de S′ devenait solide et acquérait, en même temps, le degré précis de poli nécessaire pour que l'angle de son frottement contre le sable se réduisît partout aux valeurs γ, ce même mode d'équilibre-limite subsisterait, serait encore possible, dans la masse supérieure à S′, restée, par hypothèse, pulvérulente: par conséquent, la poussée contre la paroi mobile serait encore celle, $\mathcal{P}$, qui s'y exerce lors d'un commencement de renversement. Mais il n'en sera plus nécessairement de même si l'on restitue à la partie du massif inférieure à S′, devenue ainsi solide *et fixe*, son degré naturel de rugosité, correspondant à l'angle φ ou φ' de frottement contre le sable voisin situé au-dessus; car alors elle pourra *retenir davantage* celui-ci et, par suite, réduire la poussée contre la paroi à une force moindre que $\mathcal{P}$. C'est dire que la *solidification* de la surface S′ affaiblira la poussée-limite, s'il lui arrive de la changer.

Ainsi, la surface de rupture effective S est bien, de toutes les surfaces imaginables montant depuis le bas de la paroi jusqu'à la surface libre, celle sur laquelle le glissement du massif sablonneux superposé laisse le poids de ce massif exercer la plus forte poussée $\mathcal{P}$ contre la paroi mobile.

En résumé ou plus simplement, toute paroi rugueuse *fixe* allant du bas du mur à la surface libre, et que l'on suppose introduite dans le massif pulvérulent censé d'abord de profondeur indéfinie, ou bien s'éloigne assez vite du mur pour ne pas y modifier l'équilibre-limite et la poussée du massif, ou bien, si elle en est plus proche, crée des frottements supplémentaires, des résistances à l'éboulement, qui réduisent la poussée $\mathfrak{P}$. On conçoit donc que celle-ci, en l'absence d'une telle paroi, soit la plus grande des poussées-limite auxquelles donne lieu sa présence, savoir, celle qui se produit quand la paroi atteint la rapidité d'éloignement où cesse d'être sensible son effet sur l'état ébouleux près du mur. Au delà, la poussée sur le mur commencerait à décroître si les grains de sable s'éboulaient dans une région aussi lointaine, comme on le suppose quand on applique la méthode de Coulomb à un plan de rupture s'y trouvant *hypothétiquement* situé. Mais de fait, ils y restent fixes; et cette application est purement fictive, c'est-à-dire que l'état pulvérulent de la masse sablonneuse suffit pour y maintenir l'équilibre comme le ferait l'état solide.

48. *Théoriquement*, la surface S et le maximum $\mathfrak{P}$ doivent pouvoir s'obtenir par la règle usuelle des maxima et des minima, consistant à exprimer que la fonction $\mathfrak{P}$ n'éprouve, dans le voisinage d'une telle valeur, *que des variations du second ordre de petitesse*. Imaginons, en effet, que l'on trace toutes les surfaces cylindriques S′ peu différentes de S, surfaces passant au-dessus ou au-dessous de S à des distances que nous regarderons comme du premier ordre de petitesse; et concevons réalisé l'état d'équilibre-limite pour le massif censé s'étendre indéfiniment en dessous. Toutes ces surfaces voisines de S y supportent des pressions ayant l'obliquité maxima φ ou φ', à des différences près du second ordre; car elles font, par raison de continuité, des angles du premier ordre avec les éléments plans de direction peu différente qui, aux mêmes points, subissent des pressions inclinées de l'angle φ ou φ' sur leur normale, et cet angle φ ou φ', étant maximum, *reste sensiblement* le même pour tous les éléments plans d'une orientation voisine. Il suit donc de là que, *à des infiniment petits près du second ordre*, le mode d'équilibre-limite et la poussée $\mathfrak{P}$, qui ont lieu quand le massif est inférieurement indéfini ou quand il se termine à la surface S, ont lieu aussi quand il se termine à des surfaces infiniment voisines quelconques S′, au-dessous desquelles on le concevrait solidifié.

Par conséquent, la poussée n'éprouve, d'un de ces cas à l'autre, que des variations du second ordre de petitesse. Et si enfin, d'une part, on suppose, comme il arrive toujours, dans la pratique, aux murs de soutènement, la paroi mobile assez peu inclinée sur la verticale pour qu'une des deux surfaces de rupture lui soit contiguë; si, d'autre part, on attribue successivement au massif, comme limite inférieure, toutes les surfaces de rupture qui s'y produisent quand il est borné, à partir du bas de la paroi, par des surfaces d'abord presque verticales, mais ensuite de moins en moins rapidement montantes, la poussée $\mathfrak{P}$, contre la paroi, du coin de terre qui se détache, cessera de croître et vérifiera la condition ordinaire (de quasi-invariabilité) des maxima et des minima, au moment où la surface de rupture *atteindra* la position effective S qu'elle a dans le massif indéfini. Or tel est bien, au fond, le principe du prisme de plus grande poussée.

49. Seulement sa mise en œuvre, qui consiste à calculer les poussées correspondant à des surfaces de rupture quelconques, au-dessous desquelles il y aurait solidification du massif, et à chercher ensuite leur maximum, serait évidemment plus compliquée que l'intégration même des équations de l'équilibre-limite du massif *indéfini* proposé; puisqu'elle exigerait l'étude de ce que devient cet équilibre quand on introduit une paroi de plus, la surface même supposée de rupture [1]. Aussi n'est-ce qu'en recourant à l'hypothèse, arbitraire *a priori* et inexacte, d'une forme plane de cette surface, que Coulomb a pu tirer parti de la propriété de maximum dont il avait eu l'intuition [2]. Or la poussée la plus forte déterminée dans une supposition

---

(1) De fait, une telle solidification, si elle survenait au-dessus de la surface S (déterminée pour le massif inférieurement indéfini), obligerait la surface effective de rupture du massif *restant*, à se relever, et influerait ainsi sur l'équilibre-limite, en réduisant la poussée $\mathfrak{P}$. Mais elle serait vraisemblablement sans influence sensible, comme on vient de dire, si elle n'atteignait que des parties du massif situées au-dessous de S, puisqu'une solidification fictive de leur totalité équivaut, pour le massif partiel situé au-dessus de S, à introduire la condition de glissement de ce massif contre la surface S, condition satisfaite d'elle-même dans le massif proposé indéfini inférieurement.

(2) Coulomb a, d'ailleurs, pressenti que la surface de rupture devait avoir une concavité sensible, comme on le voit par le n° XV de son Mémoire (p. 367 à 369). Mais la tentative qu'il y fait pour en déterminer la forme est viciée par l'hypothèse d'une division du massif en couches verticales sur le point de glisser les unes contre les autres, hypothèse qui implique, pour la surface de rupture, l'inclinaison $\tan \varphi$ sur l'horizon et, par conséquent, une forme plane.

aussi restrictive n'est plus qu'une sorte de maximum *relatif*, n'atteignant pas le maximum *absolu* demandé et constituant seulement une approximation *par défaut* de la poussée vraie, c'est-à-dire une approximation qui manque de sécurité.

C'est ce que reconnaissait déjà Coulomb au n° XIV de son Mémoire (p. 365 et 362), où il se décidait (au risque de dépasser très notablement le but) à négliger le frottement du mur pour renforcer des résultats déduits de l'hypothèse d'une rupture plane. Il ne faudra donc recourir à celle-ci que sous réserve et dans les cas où la théorie nouvelle, plus complète, de l'équilibre-limite se heurterait à des difficultés d'intégration insurmontables.

50. Mais alors on pourra l'employer, en raison de la faible variabilité de la poussée aux environs du maximum. En effet, la surface de rupture S ne devant avoir, en général, que des courbures modérées, un plan mené par l'arête inférieure de la paroi de manière à aller couper cette surface de rupture vers le milieu de sa hauteur, ou un peu au-dessus, ne s'en écartera considérablement nulle part et sera presque, lors de l'équilibre-limite du massif, dans le cas de toutes les surfaces continues voisines de S, sur lesquelles l'inclinaison $\tan\gamma$ des pressions par rapport à leurs normales atteint la valeur $\tan\varphi$ *à des écarts près du second ordre*, φ désignant l'angle de frottement intérieur du massif homogène proposé. La *moyenne* des valeurs de $\tan\gamma$ sur un tel plan, si l'on appelle ainsi le rapport de la composante tangentielle de la pression totale $\mathcal{R}$ qu'y exerce (à travers le plan) la matière sablonneuse sous-jacente, à sa composante normale, doit donc être peu inférieure à $\tan\varphi$; et, si l'on calcule alors la poussée $\mathcal{P}$ comme on le fait d'après Coulomb et Poncelet, dans la supposition que ce rapport égale $\tan\varphi$, la valeur obtenue pour $\mathcal{P}$ ne peut évidemment pas se trouver beaucoup plus faible que la vraie.

Ainsi l'hypothèse d'une rupture plane, lorsqu'on se contente de lui demander une approximation par défaut de la poussée, constitue une précieuse ressource ([1]).

([1]) On peut voir, pour plus de détails à ce sujet, le dernier des Mémoires cités ci-dessus (n° 38) des *Annales des Ponts et Chaussées* (t. VII, p. 474 à 481). Par exemple, pour le sable expérimenté par M. Gobin, où l'on avait $\varphi = 34°$, et dans le cas

51. En résumé, le principe de *Coulomb est justifié quand on admet celui de la nouvelle théorie*, savoir : *l'établissement presque instantané de l'état ébouleux dans tout le coin de terre qui se détache et un peu au delà.* Réciproquement, le principe de Coulomb, impliquant l'hypothèse qu'il se produise, dès le commencement du renversement, deux surfaces de rupture, l'une contiguë ou presque contiguë à la paroi mobile, l'autre s'en éloignant, et, toutes les deux, allant depuis le bas de la paroi jusqu'à la surface libre, conduit à supposer que l'état ébouleux existe ou se propage rapidement dans la masse sablonneuse, jusqu'aux limites de son extension acceptées dans la nouvelle théorie. Il oblige même à admettre *explicitement* la réalisation d'un tel état ébouleux dans tout le prisme qui se détache, quand, pour déterminer la position du *centre de poussée*, on suppose des surfaces de rupture (au moins ébauchées) produites à toutes les hauteurs au-dessus de celle qui s'éloigne le plus de la paroi en partant de son arête inférieure.

Il y a donc parfait accord entre la base de l'ancienne théorie et celle de la nouvelle [1].

---

ordinaire d'un terre-plein horizontal contenu par une paroi verticale, où notre formule (109) donne $K = 0{,}231$, l'hypothèse d'une surface plane de rupture conduit à prendre $0{,}2\cdot43$ ou $\frac{1}{14}$ environ en moins, tandis que l'expérience a indiqué

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \times 0{,}804 = 0{,}2827 \times 0{,}804 = 0{,}227.$$

L'angle du plan ainsi calculé de rupture avec la verticale ascendante a été 33°13′, au lieu de 30°57′ environ que j'ai obtenu pour la corde du profil concave de la surface effective de rupture, en assimilant à un arc de cercle sa moitié inférieure courbe : l'expérience avait donné à M. Gobin 28°22′ seulement, valeur dont l'abaissement peut bien tenir un peu au frottement, négligé ici, des *deux joues fixes* de la caisse d'expériences, mais doit surtout *être apparent* et dû à ce que le frottement du fond de la caisse aura empêché la *faille* de partir d'aussi bas et lui aura sans doute, *par la supposition qu'elle en partait*, fait attribuer plus de pente qu'elle n'en avait réellement, à en juger par son *écart superficiel* d'avec la paroi mobile.

[1] Diverses parties du présent Mémoire ont été résumées dans six Notes insérées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. **164**, 30 avril, 7 et 14 mai, 4 et 18 juin 1917, p. 657, 698, 755, 873, 929; t. **165**, 2 juillet 1917, p. 5).

Remarque sur l'emploi de l'équation (10) (p. 11) *pour déterminer, à partir d'une solution particulière donnée d'un problème d'état ébouleux, l'orientation approchée des pressions principales dans les solutions voisines.*

52. Le Chapitre IV de ce Mémoire (p. 18 à 31), basé sur l'emploi de l'équation (10) pour obtenir par approximation les solutions du problème de l'état ébouleux voisines de la solution Rankine-Lévy, montre que cette équation (10), d'où la pression moyenne p n'est pas éliminée, sera néanmoins très propre à faire connaître, par un calcul d'approximation, l'azimut χ de la pression principale la plus forte, *dans les solutions qui se trouveront voisines d'une solution particulière donnée.* Car, dans toutes ces solutions voisines, la fonction p propre à la solution particulière connue constituera une valeur approchée du premier membre de (10) et, par conséquent, du rapport du numérateur $2(\mathrm{XE}-\mathrm{YD})$, fonction linéaire des dérivées premières de χ, au dénominateur $\frac{d\mathrm{D}}{dy}-\frac{d\mathrm{E}}{dx}-k\Delta_2\chi$, fonction analogue des dérivées secondes. Et l'on aura ainsi, du moins en tant qu'approchée, *l'équation du second ordre aux dérivées partielles* cherchée en vain au Chapitre II pour le cas général, où pareille équation n'existe pas.

Par exemple, si la solution particulière donnée dont il s'agit est la solution Rankine-Lévy, et que χ y désigne la première valeur *constante* (15), p l'expression correspondante de la pression moyenne, χ' l'azimut dans une solution voisine, partout peu différent de χ et *à dérivées partielles en x et y petites*, il résultera des formules $\mathrm{C}=\cos 2\chi'$, $\mathrm{S}=\sin 2\chi'$, pour les deux dernières (4),

$$\mathrm{D}=-\mathrm{S}\frac{d\chi'}{dx}+\mathrm{C}\frac{d\chi'}{dy},\qquad \mathrm{E}=\mathrm{C}\frac{d\chi'}{dx}+\mathrm{S}\frac{d\chi'}{dy},$$

avec S *et* C *désormais constants*, c'est-à-dire réductibles à $\cos 2\chi$, $\sin 2\chi$. On aura, par suite,

$$\frac{d\mathrm{D}}{dy}-\frac{d\mathrm{E}}{dx}=\mathrm{C}\left(\frac{d^2\chi'}{dy^2}-\frac{d^2\chi'}{dx^2}\right)-2\mathrm{S}\frac{d^2\chi'}{dx\,dy};$$

et l'équation (10), ou mieux (9), divisée par p, deviendra

$$(132)\quad \begin{aligned} & C\left(\frac{d^2\chi'}{dy^2}-\frac{d^2\chi'}{dx^2}\right)-2S\frac{d^2\chi'}{dx\,dy}-k\,\Delta_2\chi' \\ & =\frac{2}{p}\left[(XC+YS)\frac{d\chi'}{dx}+(XS-YC)\frac{d\chi'}{dy}\right] \\ & =\frac{2\Pi}{p}\left[\frac{d\chi'}{dx}\cos(2\chi+\omega)+\frac{d\chi'}{dy}\sin(2\chi+\omega)\right], \end{aligned}$$

équation aux dérivées partielles linéaire, *en* χ' *seul*, mais à coefficients variables comme l'inverse de p dans les termes affectés des dérivées premières de χ'.

Si actuellement, on suppose χ' fonction uniquement de θ, les formules du n° 14 transformeront cette équation en celle-ci,

$$(133)\quad \begin{aligned} & \frac{\cos(2\chi-2\theta)-k}{r^2}\frac{d^2\chi'}{d\theta^2}+\frac{2\sin(2\chi-2\theta)}{r^2}\frac{d\chi'}{d\theta} \\ & =\frac{2\Pi}{p}\frac{\sin(2\chi+\omega-\theta)}{r}\frac{d\chi'}{d\theta}, \end{aligned}$$

que l'on reconnaît immédiatement revenir à (38).

Complément à la Note des pages 66 *et* 67.

53. Quand la déclivité ω du talus est supposée voisine à la fois de φ et de Φ, ou que les formules (124), (126) sont applicables, l'hypothèse de verticalité du mur fait presque annuler δ et, visiblement, l'équilibre du massif exige un angle de frottement extérieur φ_1 très voisin de ω, ou une différence $\varphi_1-\omega$ comparable à $\Phi-\omega=\alpha$ et négligeable devant $\sqrt{\alpha}$.

Dès lors, l'expression de $\varphi_1-\omega$ s'obtient presque sans calculs, en partant de la seconde formule (114) qui exprime de la manière la plus concise les rapports mutuels de φ, φ_1 et Φ (1). Remplaçons-y, d'une

(1) A l'occasion de la seconde formule (114), où figure si naturellement l'angle ε, observons que cet angle ε, dont le cosinus est le rapport $\frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}$, définit, en quelque sorte, *l'amplitude de l'hétérogénéité* de nos massifs fictifs, c'est-à-dire l'écart relatif de φ à Φ, tandis que l'angle δ représente le *champ* ou le *siège* de la même hétérogénéité.

part, au premier membre, φ_1 par $\omega + (\varphi_1 - \omega)$ et Φ par $\omega + \alpha$; ce qui, changeant $\sin\varphi_1$ et $\sin\Phi$ en

$$(\sin\omega)[1 + (\varphi_1 - \omega)\cot\omega], \quad (\sin\omega)(1 + \alpha\cot\omega),$$

donne, pour leur quotient,

$$1 + (\varphi_1 - \omega - \alpha)\cot\omega. \tag{134}$$

D'autre part, substituons dans le second membre, d'après (62 *bis*), le complément de $\omega' - \omega$ à $\varphi + 2\delta$; et appliquons les formules (126), qui donneront au même second membre la forme

$$\cos\left[(\varphi_1 - \omega) + \sqrt{2\alpha\cot\omega}\,(\cos\mu - \sin\mu)\right].$$

Or l'égalité à (134) de ce cosinus montre que l'arc en est comparable à $\sqrt{\omega + \alpha - \varphi_1} = \sqrt{\Phi - \varphi_1}$. Dès lors, la partie $\varphi_1 - \omega$ de l'arc en question, partie comparable à $\varphi_1 - \Phi$ ou à $\Phi - \varphi_1$, est d'un ordre de petitesse supérieur et disparaît, par suite, devant l'autre partie. Le second membre se trouve ainsi réduit à

$$\cos\left[\sqrt{2\alpha\cot\omega}\,(\sin\mu - \cos\mu)\right] = 1 - \alpha\cot\omega(\sin\mu - \cos\mu)^2.$$

Comparons-le au premier membre (134). Il viendra bien, par la suppression du terme commun 1 et, puis, par celle du facteur commun $\cot\omega$, la formule cherchée

$$\varphi_1 - \omega = \alpha[1 - (\sin\mu - \cos\mu)^2] = 2\alpha\cos\mu\sin\mu. \tag{135}$$