ARNAUD DENJOY

Mémoire sur la totalisation des nombres dérivées non sommables (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 34 (1917), p. 181-238
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1917_3_34__181_0>

MÉMOIRE

SUR LA

TOTALISATION DES NOMBRES DÉRIVÉS NON SOMMABLES

(SUITE);

PAR M. ARNAUD DENJOY.

CHAPITRE II.

LE CALCUL TOTALISANT (¹).

Théorie des opérations.

51. Il est bien facile de former des fonctions dérivées, non sommables au sens de M. Lebesgue. Par exemple $f = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$, dont la dérivée φ est 0 à l'origine, et $2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$. L'intégrale $\int_\varepsilon^1 |\varphi(x)|\, dx$ croît indéfiniment, quand ε tend vers zéro par valeurs positives. Donc φ n'est pas sommable. Il n'est donc pas possible, par la

(¹) La première Partie de ce Mémoire a paru au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1915); la seconde Partie, au *Bulletin de la Société mathématique de France* (1916). La troisième Partie est divisée en deux Chapitres dont le premier a été publié dans le présent Recueil (Mai-Juillet 1916). Les références à un paragraphe du Mémoire sont accompagnées de l'indication de la Partie correspondante, quand celle-ci est la première ou la seconde. Les renvois sans mention de Partie désignent un passage de la troisième Partie du Mémoire.

seule intégration besgienne, de calculer la variation entre a et b d'une primitive quelconque dont la dérivée existe et est connue en chaque point intérieur à ab [1]. Nous atteindrons ce but, et même nous résou-

---

[1] M. Lusin a résolu (*Recueil Math. de Moscou*, t. XVIII; *Comptes rendus*, 17 juin 1912) le problème de trouver une fonction continue f possédant, sur une épaisseur pleine (complément d'un ensemble de mesure nulle), une dérivée coïncidant avec une fonction mesurable φ donnée quelconque. f présente toute l'indétermination de la fonction arbitraire à nombres dérivés finis, ce qui suffit à montrer la différence entre cette question et celle qui est étudiée dans le présent Chapitre. Les méthodes du n° 62 (1re Partie) permettent très simplement de résoudre le problème plus général suivant :

Étant donnés une fonction mesurable φ *et quatre ensembles distincts quelconques* E_1, E_2, E_3, E_4 *dont la réunion forme un segment ab, trouver une fonction continue f admettant, sur une épaisseur pleine,* φ *comme dérivée approximative ou générale, et réalisant respectivement sur de pleines épaisseurs* (inconnues) e_1, e_2, e_3, e_4 *de* E_1, E_2, E_3, E_4, *les cas* (AA'), [BD'], ([CC'], [DB'] *des nombres dérivés* (Introduction, 3e Partie; n° 57, 1re Partie).

Sur e_3, φ sera la dérivée générale de f. Si donc E_1, E_2, E_4 sont nuls, le problème posé se réduit à celui de M. Lusin. Sur e_2 et e_4, φ coïncidera avec deux dérivés extrêmes de f, opposés et de rangs donnés. Sur e_1, f aura les deux dérivés extrêmes bilatéraux $+\infty$ et $-\infty$, mais une dérivée approximative égale à φ.

Nous décomposons E_i ($1 \leqq i \leqq 4$) en une infinité dénombrable d'ensembles parfaits, épais en eux-mêmes et deux à deux distincts Q_{i+4h}, augmentés d'un ensemble mince E'_i, de façon que φ soit borné sur chacun des Q_m, opération n'offrant aucune difficulté. P_m étant la réunion de Q_1, Q_2, ..., Q_m, la fonction f du n° 62 (1re Partie), réalisant sur e_i le i^e cas des nombres dérivés, est la somme d'une série de fonctions continues f_m ainsi conditionnées : 1° f_m est doublement nulle (n° 61) sur P_{m-1} avec un coefficient inférieur à $\frac{1}{2^m}$; 2° f_m présente sur Q_m le i^e cas fondamental si $m-i$ est divisible par 4; 3° f_m possède une dérivée finie en tout point étranger à P_m.

Donc, si $f_1+\ldots+f_m = S_m = f - R_m$, en tout point de Q_m, S_{m-1} a une dérivée finie et continue, et R_m a la dérivée zéro. Il nous suffit de montrer la possibilité de choisir f_m de façon que f_m ait, en outre des propriétés déjà énoncées, une dérivée approximative ou générale donnée $\varphi - S'_{m-1}$, en tout point de Q_m.

Q_m est contenu dans un certain nombre de contigus de P_{m-1}, et se trouve décomposé par eux en plusieurs portions Q_m^n. Grâce aux exemples des nos 59 et 60 (1re Partie), nous savons obtenir (3e Partie, p. 171, en note) une fonction, nulle sur Q_m^n et en dehors des segments limités par les extrémités des Q_m^n, bornée à notre gré, possédant hors de Q_m^n une dérivée finie et continue, et réalisant sur Q_m^n (sauf en ses extrémités) le cas [BD'], [DB'] ou (AA') indiqué par l'indice m, avec la dérivée approximative zéro dans les trois cas. f_m peut donc être considérée comme la somme d'une telle fonction et d'une autre remplissant la première et la troisième condition de f_m, et admettant sur une pleine épaisseur de Q_m^n la dérivée générale $\varphi - S'_{m-1}$. Nous obtiendrons cette dernière fonction en résolvant le problème suivant:

P *étant un ensemble parfait intérieur au segment* $\alpha'\beta'$ *et sur lequel* ψ *est sommable,* drons un problème plus étendu que le précédent, en utilisant une opération que j'ai définie et étudiée pour la première fois dans deux Notes publiées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (1912, t. 154, p. 859-862 et 1075-1078), et à laquelle j'ai donné le nom de *totalisation*.

La somme besgienne indéfinie f d'une fonction mesurable φ, donnée sur ab, remplit les conditions suivantes. C'est une fonction : 1° continue; 2° dont la variation sur tout ensemble parfait mince est définie et nulle; 3° admettant φ pour dérivée générale sur une pleine épaisseur de ab.

Pour que f existe, il faut et il suffit que l'ensemble des points de ab où l'on a $|\varphi| > n$, n étant un entier positif, ait pour mesure le terme μ_n d'une série convergente (condition de sommabilité de φ sur ab). f est alors, à une constante additive près, entièrement déterminée par les conditions énoncées. On peut définir la somme besgienne de φ entre deux points quelconques x et x' situés sur ab, comme étant la variation de f entre ces deux points. La somme indéfinie f de φ a une variation définie sur tout ensemble parfait P agrégé à ab. On peut définir la somme besgienne de φ sur P comme étant égale à la variation de f sur P. Ces variations de f sont parfaitement déterminées, la constante de sommation disparaissant.

---

trouver une fonction continue F, *inférieure en valeur absolue à un nombre positif donné* δ, *nulle hors du segment* $\alpha'\beta'$, *et admettant sur une pleine épaisseur de* P *une dérivée égale à* ψ.

Pour que F soit doublement nulle de coefficient k relativement aux extrémités c, d d'un intervalle contenant P, il suffit, plaçant α' entre c et P, β' entre P et d, de prendre δ inférieur à $k(\alpha'-c)^2$ et à $k(d-\beta')^2$.

Soient α, β les extrémités de P, $\mathrm{I}(x)$ la somme besgienne de ψ entre α et x, η un nombre positif tel que, dans tout intervalle inférieur à η, l'oscillation de I soit inférieure à δ; $i_1, i_2, \ldots, i_p$, dans l'ordre où nous les rencontrons, p contigus à P séparant sur $\alpha\beta$ des segments $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{p+1}$, tous inférieurs en longueur à η; i_{p+1} le semi-contigu $\beta\beta'$. Soit ψ_1 la fonction égale à ψ sur P, constante et égale à $-\frac{1}{i_h}\mathrm{V}_h$ sur $i_h (h \leqq p+1)$, V_h étant la variation de I sur ρ_h, ψ_1 étant nulle enfin sur les contigus différant des i_h, ainsi que pour $x < \alpha$, $x > \beta'$. On voit immédiatement que la somme besgienne de ψ_1 entre α et x, nulle aux extrémités gauches de tous les ρ_h et en β', remplit toutes les conditions de F.

Le problème initialement posé est donc entièrement résolu.

Pareillement, la *totale indéfinie* d'une fonction φ donnée sur ab sera une fonction f possédant, si elle existe, les TROIS CARACTÈRES suivants : 1° *elle est continue ;* 2° *elle est à variation résoluble*, ou : *sa variation sur tout ensemble parfait mince est réductible à zéro* (n° 27) (si elle était nécessairement définie et nulle, la totale serait à variation bornée et φ, d'après la condition suivante, devrait être sommable) ; 3° *sur une pleine épaisseur de ab, f admet φ pour dérivée approximative ou générale.*

Soient deux fonctions f_1 et f_2 remplissant ces conditions pour une même fonction φ. Je dis que f_1 et f_2 ne diffèrent que par une constante. En effet : 1° $f_2 - f_1$ est continu ; 2° $f_2 - f_1$ est résoluble, puisqu'il en est ainsi de f_1 et de f_2 séparément (n° 27) ; 3° f_1 et f_2 ont simultanément sur une même épaisseur pleine la dérivée approximative ou générale φ (n° 25). Donc $f_2 - f_1$ a sur une épaisseur pleine le dérivé médian bilatéral zéro. En conclusion (n° 28), $f_2 - f_1$ est constant.

Donc, *a priori*, ou bien il n'existe pas de totale indéfinie d'une fonction φ, ou bien il en existe une infinité, la différence de chacune avec l'une d'elles étant constante. Dans ce second cas, nous appellerons *totale de φ entre deux points de ab, la variation, entre ces deux points, de la totale indéfinie f de φ*. Nous appellerons *totale de φ sur un ensemble parfait* P, *la variation de f sur* P, *si cette variation est définie*. Ces deux nombres sont indépendants de la totale indéfinie choisie.

52. L'étude des *trois caractères* imposés à *f a priori*, et analysés indépendamment de leur ordre, nous donnera les *conditions* nécessaires et suffisantes pour que φ soit *totalisable* entre a et b.

Observons que si f possède sur tout ensemble parfait mince une variation réductible (second caractère, où l'on néglige que la réductibilité est à zéro), nous savons qu'il en est de même sur tout ensemble parfait épais en lui-même P (n° 22 *bis*). Alors, l'ensemble H des points de P, au voisinage desquels f n'a pas une variation totale définie et bornée sur P, H est non dense sur P (n° 23). Mais alors, sur tout segment (ou portion) ϖ de P ne contenant aucun point de H, f possède sur une pleine épaisseur de ϖ une dérivée ψ, générale si P est continu, au moins approximative et spéciale à P si P est discontinu, et ψ est sommable sur ϖ (n° 24). D'après le troisième caractère de f, φ et ψ ne peuvent différer qu'en un ensemble mince sur ϖ. Donc, sur ϖ, φ est sommable.

Si P n'était pas épais en lui-même, c'est-à-dire si certaines portions de P étaient minces (de mesure nulle), φ, supposé fini, serait évidemment sommable sur de telles portions. Il en résulte que, dans tous les cas, au voisinage de tout point M de P, existent des portions de P où φ est sommable, que P soit ou non épais en lui-même autour de M. Nous avons donc cette première condition des fonctions totalisables.

Première condition de φ. — *L'ensemble des points d'un ensemble parfait* P, *continu ou discontinu, au voisinage desquels φ est non sommable sur* P, *est non dense sur* P [1].

Nous venons d'obtenir cette condition fondamentale en utilisant le troisième caractère de $f(\varphi = \psi)$, et seulement une partie du second, savoir que sur tout ensemble parfait mince (et par suite aussi, sur tout ensemble parfait, n° 22 *bis*), f a une variation réductible. Faisons maintenant appel à la partie négligée du second caractère, la réductibilité à zéro. La variation de f sur la portion ϖ est dès lors la somme besgienne de φ sur cette portion (n° 30). Nous avons donc, en parallèle avec la première condition des fonctions φ totalisables, ce lien numérique entre la totale inconnue f et la fonction donnée φ :

Relation numérique entre f et φ. — *Si, sur un ensemble parfait ϖ continu ou non, la variation de la totale f est définie, et si φ est sommable sur ϖ, la totale de φ (ou variation de f) sur ϖ est égale à la somme besgienne de φ sur ϖ.*

Nous appellerons première opération *de la totalisation* le calcul de la

---

[1] La première condition est remplie par toute fonction finie ψ limite de fonctions continues [en particulier, outre les fonctions dérivées générales, approximatives ou prépondérantes (n° 47 en note), par les sommes de séries trigonométriques partout convergentes, les fonctions approximativement continues, etc.] en vertu de cette conséquence du théorème de M. Baire, que l'ensemble K des points de P au voisinage desquels, sur P, ψ est non bornée, K est non dense sur P.

somme besgienne de φ sur un ensemble parfait continu ou discontinu où φ est sommable.

Nous avons maintenant les éléments numériques dont est constituée la totale. *Ces éléments sont des sommes besgiennes définies, prises sur des intervalles ou sur des ensembles parfaits.*

Il y a dans tout intervalle i compris dans ab un intervalle j où φ est sommable. La somme besgienne de φ sur j est la variation de f entre les extrémités de j, donc la totale de φ entre ces mêmes points.

De même, il y a sur tout ensemble parfait discontinu P, et sur toute portion P_1 de P, une portion ϖ de P_1, donc de P, où φ donné est sommable, où f inconnue a une variation définie, et cette dernière variation, égale à la somme besgienne de φ sur ϖ, est en même temps la totale de φ sur ϖ. Mais il s'agit d'abord que φ se prête à ce calcul de manière que f ait toujours, au moins sur une portion ϖ de P_1, une variation définie. Donc :

Deuxième condition de φ. — *Si l'on a déterminé par une voie quelconque la totale de φ dans tout contigu à un ensemble parfait discontinu* P, *il faut que l'ensemble des points de* P, *où la série de ces totales n'est pas absolument convergente, soit non dense sur* P.

Car, il y a par définition identité entre la totale de φ sur un contigu à P, et la variation de la totale indéfinie f sur ce même contigu. La seconde condition de φ équivaut donc à ce caractère de f, d'avoir une variation réductible sur tout ensemble parfait (1[re] partie du second caractère). D'après les première et deuxième conditions de φ, l'ensemble K des points de P au voisinage desquels, ou bien φ est non sommable, ou bien la série des totales de φ (supposées déjà calculées) sur les contigus à P, est non absolument convergente, cet ensemble K est *non dense* sur P.

Sur toute portion ϖ de P sans point commun avec cet ensemble K, la relation numérique de f inconnu et de φ donné nous permet donc de calculer la variation $V(f, \alpha, \beta)$ de f entre les points extrêmes α, β de ϖ, puisque ce nombre est, d'après la définition de la variation de f sur ϖ, la somme de cette dernière et des variations de f dans les contigus à ϖ. Donc $V(f, \alpha, \beta)$ est égale à la somme de l'intégrale besgienne de φ sur ϖ et des totales de f dans les contigus à ϖ, lesquelles totales forment par hypothèse une série absolument convergente.

L'addition, de la somme besgienne de φ sur l'ensemble parfait ϖ, et des totales de φ dans les contigus à ϖ, quand ces totales forment une série absolument convergente, constitue la SECONDE OPÉRATION *de la totalisation. Le résultat en est la totale de φ entre les extrémités de ϖ* (¹).

Cette opération revient à résoudre, par rapport à $V(f, \alpha, \beta)$, la relation numérique entre f et φ fournie par ϖ.

En particulier, si ϖ est mince, le premier terme, somme besgienne de φ sur ϖ, disparaît et nous trouvons bien, pour la totale indéfinie f, une variation nulle sur ϖ, conformément à l'hypothèse d'où nous sommes partis.

La troisième condition des fonctions totalisables se déduit du premier caractère de f, la continuité, qui nous permettra, connaissant la totale de φ sur tout segment intérieur à un contigu d'un ensemble parfait (ou fermé) P, de déterminer la totale de φ sur chaque contigu à P. En effet, u étant un intervalle quelconque d'extrémités α, β, supposons connue, sur tout segment intérieur à u, la totale de φ. Soient α_n et β_n deux suites intérieures à u, et tendant respectivement vers α et vers β. Soit f une totale indéfinie de φ. La totale de φ entre α_n et β_n est connue par hypothèse. D'ailleurs, elle vaut $f(\beta_n) - f(\alpha_n)$. Mais, si α_n tend vers α et β_n vers β, $f(\beta_n) - f(\alpha_n)$ tend, à cause de la continuité de f, vers $f(\beta) - f(\alpha)$, totale de φ entre α et β. Donc :

(¹) Soient u un segment, x et x' deux quelconques de ses points. Supposons calculée la totale de φ entre x et x', et soit w sa plus grande valeur absolue, que nous appelons *totale maximum* de φ sur u (*voir* n° 61, si $x > x'$).

La totale de φ sur ϖ, uniquement définie comme étant identique à la variation de f sur ϖ, n'existe donc que sous l'hypothèse de la *continuité* de f entre les extrémités α, β de ϖ. Cette dernière condition exige que, tous les contigus u à ϖ ayant reçu un numéro d'ordre propre, si w_n est la totale maximum de φ sur u_n, *w_n tende vers zéro quand n croît.* D'ailleurs, dans ce dernier cas, φ étant sommable sur ϖ, la fonction f, calculée par la seconde opération entre α et un point quelconque x de $\alpha\beta$, est continue. La totale indéfinie f existant dès lors entre α et β, w_n est son *oscillation* sur u_n.

TROISIÈME CONDITION DE φ. — *Si l'on a déterminé par une voie quelconque la totale de φ sur tout segment intérieur à un intervalle u, il faut que cette totale tende vers une limite unique, quand les extrémités du segment tendent indifféremment vers celles de l'intervalle u.*

La TROISIÈME OPÉRATION *de la totalisation est constituée par ce passage à la limite. Le résultat en est la totale de φ entre les extrémités de u.*

Supposant connue la totale de φ entre α' et β' quelconques, intérieurs à $\alpha\beta$, décomposons l'intervalle u en un nombre fini ou infini d'intervalles u_n deux à deux juxtaposés, dont les extrémités n'ont de points limites que α et β. Les indices des u_n vont en croissant de $-\infty$ à $+\infty$ par valeurs entières, deux intervalles adjacents ayant deux indices différents d'une unité, l'indice inférieur étant pour l'intervalle gauche. Alors, soit t_n la totale de φ sur u_n.

La troisième condition de φ peut encore s'énoncer ainsi : *La série t_n est dans chaque sens au moins semi-convergente*, sinon absolument convergente, c'est-à-dire que, même si la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |t_n|$ n'est pas convergente, en tout cas la somme $\sum_{p}^{m} t_n$ tend vers une limite : 1° quelle que soit la façon dont les entiers positifs m et p croissent indéfiniment; 2° *quel que soit le choix des u_n décomposant u* (la limite est dès lors indépendante de la subdivision choisie). Cette seconde partie de la condition est équivalente à celle-ci, que la totale maximum (*voir* la note de la page précédente) de φ sur u_n tende vers zéro quand n croît ou décroît. Notre troisième règle de calcul est alors que *la totale de φ sur u est la somme de la série doublement infinie t_n.*

Condition et règle englobent le cas où la subdivision ne comprendrait que d'un seul côté des intervalles u_n en infinité. Plus particulièrement, mais ceci résulte déjà de la définition de la totale entre deux points comme étant égale à la variation de f entre ces deux points, la totale sur un intervalle u formé d'un nombre fini d'intervalles juxtaposés i est la somme des totales sur les i.

Généralement, si deux points x, x' sont les extrémités d'un ensemble fini, ou d'un ensemble infini dénombrable et fermé, si les totales de φ, calculées pour tous les intervalles contigus à cet ensemble, forment une série absolument convergente, nous appellerons *opération élémentaire* l'addition finie ou infinie de ces mêmes totales. D'après un résultat bien connu (1^{re} Partie, n° 11 *bis*), la somme de ces dernières, égales aux variations de la totale indéfinie sur les contigus à l'ensemble, vaut la variation de cette totale entre x et x', donc la totale de φ entre ces deux points.

53. Je dis que, réciproquement, *ces règles de calcul et conditions*, assujettissant deux fonctions f et φ, *caractérisent un couple de fonctions liées entre elles par les rapports de totale à fonction totalisée.* Remplaçant en effet, dans l'énoncé des trois conditions de φ et des trois opérations énumérées, le mot *totale* par celui de *génératrice*, φ par ψ, f par F, nous allons montrer que, si ψ et une génératrice F satisfont aux trois systèmes de conditions et d'opérations, la variation de F entre a et x présente relativement à ψ les trois caractères de définition des totales indéfinies de ψ.

De même que la totale de φ entre α et β est, par définition, la variation de sa totale indéfinie f dans le même intervalle, de même nous supposons que la génératrice de ψ entre α et β est, par définition, égale à la variation de sa génératrice indéfinie F dans le même intervalle.

Ceci posé, la troisième condition liant F et ψ s'énonce ainsi : *La génératrice de ψ sur un segment $\alpha'\beta'$ intérieur à un intervalle quelconque $\alpha\beta$, tend vers la génératrice de ψ entre α et β quand α' et β' tendent respectivement vers α et β d'une manière quelconque*, c'est-à-dire que, dans ces mêmes conditions, $F(\beta') - F(\alpha')$ tend vers $F(\beta) - F(\alpha)$. Donc F est continu du côté gauche en un point quelconque α, du côté droit en un point quelconque β. Donc F est continu (premier caractère des totales indéfinies). Il était nécessaire de s'en assurer dès l'abord pour que la notion de variation de F sur un ensemble parfait fût utilisable. Dès lors, pour admettre, entre ψ et F, les rapports mutuels de fonction totalisée à totale indéfinie, nous devons convenir que, si F a une variation définie V sur un ensemble parfait P, le nombre V sera, par définition, la génératrice de ψ sur P.

D'après le second couple condition-opération, sur un ensemble parfait quelconque P dans les contigus duquel on connaît les génératrices de ψ ou leurs égales, les variations de F, il existe des portions ϖ de P, réparties densément sur P, telles que : 1° les génératrices de ψ (variations de F) dans les contigus à ϖ forment une série absolument convergente (condition 2°); donc, sur ϖ, F a une variation définie, donc F a une variation réductible sur tout ensemble parfait, et 2° ψ est sommable sur ϖ (condition 1°), l'intégrale besgienne de ψ sur ϖ étant (deuxième opération, impliquant la relation numérique) la variation de F sur ϖ.

Si P est mince, ψ est sommable sur toute portion ϖ de P. Mais son intégrale besgienne étant nulle, et cette intégrale représentant (deuxième opération) la variation de F sur ϖ, où cette dernière est définie par hypothèse, F a une variation réductible à zéro sur tout ensemble parfait mince (deuxième caractère des totales indéfinies).

Donc F est résoluble. Donc F possède sur une épaisseur pleine une dérivée générale ou approximative ψ_1, et, sur tout ensemble parfait P épais en lui-même, existe une portion ϖ' (ϖ' est épais) où : 1° F a sa variation définie; 2° ψ_1 est sommable; 3° la variation de F sur ϖ', entre l'extrémité gauche α et un point x de ϖ', est la somme besgienne de ψ_1 sur ϖ', entre α et x (n° 30). On peut supposer que ϖ' est une portion de ϖ. Alors, la somme besgienne de $\psi_1 - \psi$ sur ϖ' entre α et x est nulle. Donc, $\psi_1 = \psi$ sur ϖ', sauf éventuellement en un ensemble mince. Donc, ϖ' étant épais, dans tout ensemble parfait épais en lui-même, il existe des points où F admet ψ pour dérivée générale ou approximative. On déduit de là, comme au n° 26, que l'ensemble où f n'admet ψ pour dérivée ni générale ni approximative est de mesure nulle (troisième caractère des totales indéfinies).

En résumé, ψ admet pour totale indéfinie F, dont nous supprimons la dénomination auxiliaire de « génératrice ». Le lien entre φ et f exprimé par le système des trois couples d'opérations et conditions fondamentales, ce lien est donc bien caractéristique du couple fonction totalisable — totale indéfinie, dont il nous sera désormais superflu d'envisager la définition initiale.

54. Nous allons montrer comment ce système de conditions opé-

ratoires (qui possède la notable propriété d'être rempli pour les couples : fonction dérivée finie — fonction primitive, dérivé extrême fini — fonction primitive, etc.) fournit un processus de calcul permettant de remonter de φ à f, exactement de déterminer la variation de f dans un intervalle quelconque où φ est défini. Nous verrons la possibilité d'atteindre ce résultat au moyen d'une *infinité* DÉNOMBRABLE *d'opérations consistant en intégrations besgiennes, sommation de séries absolument convergentes, passages à la limite de fonctions continues.* Il nous sera indispensable, pour indiquer la succession des calculs, de faire usage du système ordinal transfini. Je supposerai le lecteur instruit de la signification de cette sorte de nombres, et de leurs propriétés les plus simples, le renvoyant, pour les retrouver, aux *Leçons sur les fonctions discontinues* de M. Baire (Gauthier-Villars, 1905). L'un des théorèmes les plus importants dont j'aurai à me servir est le suivant :

Une suite bien ordonnée d'ensembles parfaits, dont chacun est agrégé à ceux qui le précèdent et est non dense sur eux, s'arrête pour un certain rang fini ou transfini, à un ensemble nul.

Soit P_α un ensemble de la suite. Si α est de première espèce, c'est-à-dire si, parmi les nombres inférieurs à lui, il en est un supérieur à tous les autres, nous notons celui-ci $\alpha - 1$, et alors, par hypothèse, P_α est agrégé à $P_{\alpha-1}$ et non dense sur lui.

Si α est de seconde espèce, donc limite d'une suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, les ensembles parfaits $P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, \ldots, P_{\alpha_n}, \ldots$, dont chacun est agrégé au précédent, ont certainement des points communs (toute suite d'ensembles fermés dont chacun est agrégé au précédent possède en commun au moins un point et en tout cas un ensemble fermé). Ces points forment un ensemble fermé Π_α agrégé à tous les ensembles $P_{\alpha'}$ d'indice α' inférieur à α. Soit P'_α le noyau parfait de Π_α. Si $P_{\alpha_{n+1}}$ est non dense sur P_{α_n}, Π_α et *a fortiori* P'_α, étant agrégés à $P_{\alpha_{n+1}}$, sont non denses sur P_{α_n} quel que soit n. P_α appartenant à tous les P_{α_n} appartient à Π_α et même, étant parfait, il est agrégé à P'_α. La seule hypothèse qu'il soit agrégé à tous les P_α antérieurs entraîne sa non-densité sur chacun d'eux.

Le théorème rappelé ci-dessus signifie qu'une suite définie d'ensembles P_α, conforme au type précédent, s'arrête forcément à un ensemble P_β nul. Les ensembles P_α non nuls sont donc en *infinité dénombrable*, comme le sont les nombres transfinis inférieurs à un rang donné.

Ceci étant rappelé, effectuons la totalisation de φ sur ab, moyennant les trois conditions supposées vérifiées par φ.

55. Soit Π_1 l'ensemble des points du segment ab, au voisinage desquels φ n'est pas sommable. Tout point étranger à Π_1 est intérieur à un intervalle où φ est sommable. Au contraire, dans tout intervalle contenant un point de Π_1, φ n'est pas sommable. Π_1 est *non dense* d'après la première condition de φ (n° 52). Π_1 est évidemment fermé. Il se décompose en un ensemble parfait (noyau) P_1 et un ensemble dénombrable, situé dans les intervalles contigus à P_1. Nous allons montrer la possibilité de calculer la totale de φ dans tout intervalle [1] sans points (intérieurs) agrégés à P_1, mais pouvant avoir une ou deux extrémités sur P_1. Soit tout d'abord mm' un intervalle contigu à Π_1, et μ, μ' deux points intérieurs à cet intervalle, μ étant à gauche de μ'.

Nous pouvons calculer l'intégrale besgienne $\int_\mu^{\mu'} \varphi\, dx$ (première opération). C'est, d'après la relation numérique (52) entre f et φ, la totale de φ entre μ et μ'. Faisons tendre μ vers m, μ' vers m'. D'après la troisième condition (52) imposée à φ, ce nombre tend vers une limite, qui est la totale de φ dans l'intervalle mm'. Ainsi, par un double passage à la limite (troisième opération), par l'extrémité supérieure croissante et l'extrémité inférieure décroissante, la totale de φ sur tout intervalle contigu à Π_1 est connue.

Passons à sa détermination dans chaque segment contigu à P_1. Sur un tel segment, Π_1 est réductible. Ses dérivés successifs sont Π_1^1, $\Pi_1^2, \ldots, \Pi_1^\beta, \ldots$. L'un d'eux et tous les suivants sont nuls. Nous connaissons la totale de φ dans tout intervalle ne contenant (à son intérieur) aucun point de Π_1. Si un intervalle $\tau\tau'$ ne contient qu'un nombre fini de points de Π_1, ces derniers décomposent $\tau\tau'$ en le même

(1) Je rappelle que je distingue l'*intervalle* ab $(a < x < b)$ exclusivement formé de points intérieurs à lui-même, et le *segment* ab $(a \leqq x \leqq b)$, ensemble fermé.

nombre accru de l'unité, d'intervalles à l'intérieur desquels Π_1 ne possède aucun point. La totale de φ sur chacun d'eux est connue. La somme de ces valeurs en nombre fini nous donne la totale de φ sur $\tau\tau'$. Donc cette dernière est connue dans tout intervalle ne contenant qu'un nombre limité de points de Π_1.

Soient maintenant $t_1 t'_1$ un intervalle contigu à Π_1^1, et $\tau_1\tau'_1$ un intervalle dont les extrémités sont intérieures à $t_1 t'_1$. Entre τ_1 et τ'_1, il n'y a qu'un nombre fini de points de Π_1. Nous connaissons donc $T_{\tau_1}^{\tau'_1}\varphi$, en désignant par $T_x^{x'}\varphi$ la totale de φ entre x et x'. Faisons décroître et tendre τ_1 vers t_1, faisons tendre τ'_1 par valeurs croissantes vers t'_1. La limite existe, d'après la troisième condition remplie par φ, et constitue la totale de φ entre t_1 et t'_1. La recherche de cette limite est un calcul du troisième type.

Ainsi se trouve calculée $T_x^{x'}\varphi$ dans tout intervalle à l'intérieur duquel Π_1^1 n'a aucun point. Par addition d'un nombre fini de termes, on passe immédiatement de ce cas à celui de l'intervalle contenant à son intérieur un nombre limité de points de Π_1^1, et de là, par un passage à la limite (troisième opération), à un intervalle quelconque ne contenant à son intérieur aucun point de Π_1^2.

Généralement, soit α un nombre fini ou transfini quelconque.

Prenons-le d'abord *de première espèce. Supposons calculé* $T_x^{x'}$ *dans tout intervalle ne contenant* (à son intérieur) *aucun point de* $\Pi_1^{\alpha-1}$. Alors, dans tout intervalle $\sigma\sigma'$ ne contenant qu'un nombre limité de points de $\Pi_1^{\alpha-1}$, on obtient la totale de φ en ajoutant les totales relatives aux divers intervalles séparés sur $\sigma\sigma'$ par les points de $\Pi_1^{\alpha-1}$. On sait donc calculer $T_\sigma^{\sigma'}\varphi$ pour tout segment $\sigma\sigma'$ sans points communs avec Π^α. Si uu' est contigu ou semi-contigu à Π_1^α (selon que les deux extrémités de uu' ou une seule sont les uniques points communs à Π_1^α et au segment uu'), nous plaçons σ et σ' à l'intérieur de uu', et nous faisons croître σ' vers u', décroître σ vers u. La totale de φ entre σ et σ' tend vers une limite (troisième condition). Son calcul constitue une opération du troisième type, dont le résultat est la totale de φ entre u et u'. Et alors, dans tous les cas possibles, *nous savons calculer* $T_x^{x'}\varphi$ *pour tout intervalle xx' ne contenant à son intérieur aucun point de* Π_1^α, sous la seule condition que le calcul soit supposé effectué pour tout intervalle pareillement situé à l'égard de $\Pi_1^{\alpha-1}$.

Si α est *de seconde espèce, supposons calculé* $T_x^{\alpha'}$, *pour tout intervalle à l'intérieur duquel l'un au moins des* Π_1^α d'indice α' inférieur à α *n'a pas de points*. Alors, sur tout segment n'ayant aucun point commun avec Π_1^α, donc complètement intérieur à un intervalle contigu à Π_1^α, les $\Pi_1^{\alpha'}$ sont nuls à partir d'un certain rang, sans quoi Π_1^α aurait au moins un point sur ce segment. On sait donc calculer sur ce dernier la totale de φ, et par un passage à la limite, simple ou double, *on aura la totale de* φ *dans tout intervalle ayant une ou deux extrémités sur* Π_1^α, *sans contenir* (à son intérieur) *aucun point de ce dernier ensemble.*

Donc, que α soit de première ou de deuxième espèce, nous savons, par application de la troisième opération, calculer la totale de φ dans tout intervalle ne contenant à son intérieur aucun point de Π_1^α, quand nous supposons le même calcul effectué pour tous les intervalles situés ainsi, relativement à l'un au moins des dérivés $\Pi_1^{\alpha'}$ des rangs α' inférieurs à α.

Cette totale est évidemment obtenue pour chaque valeur de α par une infinité *dénombrable* d'additions, de passages à la limite, puisque les valeurs inférieures à α sont en infinité *dénombrable*, et que le calcul de la totale dans un intervalle à l'intérieur duquel Π_1^α est nul, n'exige que la recherche d'une ou deux limites d'expressions obtenues avec les valeurs moindres de α. Les ensembles Π_1^α coïncident tous avec P_1 à partir d'une certaine valeur λ de α. Donc, l'application de la méthode jusqu'à $\alpha = \lambda$ nous donne la totale de φ *sur un intervalle quelconque ne contenant* (à son intérieur) *aucun point de* P_1, donc entre deux points quelconques de tout segment contigu à P_1.

Nous voyons qu'entre de tels points, la totale de φ nous est donnée par une infinité dénombrable d'additions, de passages à la limite, effectués en utilisant pour éléments numériques les intégrales besgiennes représentant les totales de φ sur les divers segments n'ayant aucun point (intérieur ni extrême) commun avec Π_1. Jusqu'ici, la seconde opération ne nous a pas servi, parce que l'ensemble parfait sur lequel nous raisonnions était le continu, donc ne possédait pas d'intervalles contigus. Désormais la seconde opération sera une étape indispensable retrouvée périodiquement dans l'échelonnement de nos calculs.

56. Sur P_1 désignons par Π_2 l'ensemble des points au voisinage desquels, ou bien φ n'est pas sommable sur P_1, ou bien la série des totales de φ sur les intervalles contigus à P_1 n'est pas absolument convergente. Π_2 est la réunion des deux ensembles Π'_2 et Π''_2 caractérisés séparément par chacune de ces propriétés, et qui sont, d'après les conditions première et seconde remplies par φ, l'un et l'autre non denses sur P_1. Ce dernier caractère appartient donc aussi à Π_2.

Si M′ est un point de Π'_2, la fonction égale à zéro hors de P_1 et à φ sur P_1 n'est sommable dans aucun intervalle contenant M′ à son intérieur. Au contraire, tout point de P_1, étranger à Π'_2, peut être entouré d'un intervalle où la fonction précédente est sommable.

Si M″ est un point de Π'_2, la série formée par les totales de φ sur les intervalles contigus à une portion quelconque de P_1 contenant M″, cette série n'est jamais absolument convergente. Et au contraire, tout point étranger à Π'_2 peut être entouré d'un intervalle où la série analogue converge absolument.

Π'_2, Π''_2 et par suite leur réunion Π_2 sont des ensembles fermés. Soit P_2 le noyau parfait de Π_2. Les points de Π_2 non agrégés à P_2 forment un ensemble dénombrable, réductible dans chaque intervalle contigu à P_2. Montrons comment on peut calculer la totale de φ sur tout intervalle sans points (intérieurs) situés, sur Π_2 d'abord, puis sur P_2.

Considérons un segment j dont aucun point (pas même les extrêmes) n'est sur Π_2. Alors, ce segment j, s'il contient à son intérieur des points de P_1, seul cas nouveau à traiter, ce segment se décompose en la portion ϖ_1 de P_1 située sur lui, et en une infinité d'intervalles, tous contigus à P_1, sauf deux d'entre eux au plus (ces derniers, semi-contigus à ϖ_1, étant limités aux extrémités du segment j). φ est sommable sur ϖ_1. Soit $I(\varphi, \varpi_1)$ l'intégrale besgienne de φ sur ϖ_1 (première opération) qui (relation fondamentale) représente la variation de la totale indéfinie sur ϖ_1. La série des totales de φ sur les intervalles contigus et semi-contigus à P_1 situés sur j est absolument convergente. En faire la somme, augmenter celle-ci de $I(\varphi, \varpi_1)$, c'est effectuer la seconde opération, dont le résultat est la totale de φ sur j.

Par un passage à la limite, simple ou double (troisième opération), on obtient la totale de φ *sur tout intervalle ne contenant aucun point de* Π_2, mais pouvant avoir une ou deux extrémités sur Π_2. C'était le premier résultat annoncé tout à l'heure. Par une infinité dénombrable de passages à la limite, on obtient la totale de φ dans tout intervalle où Π_2 est réductible, la chaîne des opérations étant exactement pareille à celle que l'on a utilisée sur les champs où Π_1 est réductible, se justifiant par les mêmes raisonnements, et appartenant au troisième type. Donc, maintenant, *la totale de* φ *est connue dans tout intervalle n'ayant à son intérieur aucun point de* P_2.

57. On définira Π_3 et P_3 à partir de P_2 comme Π_2 et P_2 l'ont été à partir de P_1. Définissons généralement Π_α et P_α pour toutes les valeurs finies ou transfinies de α. Selon l'usage, nous définirons ces ensembles par une règle de récurrence, permettant d'obtenir chacun d'eux, si l'on connaît tous ceux des rangs inférieurs au sien, et si ces derniers vérifient les propriétés nécessaires au progrès de la définition. Pour être assuré que celui-ci ne sera jamais arrêté, il faudra donc montrer comme conséquence de la définition que ces mêmes propriétés appartiennent encore aux nouveaux ensembles construits Π_α et P_α.

Si α est de première espèce, nous supposons connue la totale de φ dans tout intervalle sans points (intérieurs) communs avec $P_{\alpha-1}$. Les intervalles contigus à $P_{\alpha-1}$ se rangent en une suite dénombrable. Sur le $n^{\text{ième}}$, la totale de φ possède une certaine valeur $V_{\alpha-1,n}$. Par définition, Π_α sera l'ensemble des points de $P_{\alpha-1}$ au voisinage desquels ou bien φ est non sommable sur $P_{\alpha-1}$, ou bien la série $V_{\alpha-1,n}$ est non absolument convergente. Π_α est non dense sur $P_{\alpha-1}$, d'après les première et deuxième conditions remplies par φ. Il en est *a fortiori* de même de P_α, noyau parfait de Π_α.

Si α est de deuxième espèce, Π_α sera simplement l'ensemble des points communs à tous les $P_{\alpha'}$ (ou $\Pi_{\alpha'}$) pour toutes les valeurs α' inférieures à α. Si aucun des $P_{\alpha'}$ n'est nul, Π_α contient certainement des points. Mais le noyau de Π_α, toujours désigné par P_α, peut être nul. Comme nous l'avons déjà fait observer dans un cas général (54), P_α est non dense sur chacun des $P_{\alpha'}$, puisque P_α est agrégé à $P_{\alpha'+1}$, non dense sur $P_{\alpha'}$.

Montrons comment se calcule la totale de φ dans tout intervalle dont aucun point (intérieur) n'est agrégé à P_α, si *le même problème est supposé précédemment résolu pour tout nombre ordinal* α' *inférieur à* α. Nous supposons de plus que chacune des totales déjà calculées s'obtient par une *infinité dénombrable d'opérations des trois types*, effectuées dans un certain ordre. Nous commençons toujours par le cas d'un intervalle sans point commun avec Π_α.

Supposons d'abord α *de première espèce*. Soit j un *segment* dont aucun point (intérieur ni extrême) n'est agrégé à Π_α. Si $\varpi_{\alpha-1}$ est la portion de $P_{\alpha-1}$ située sur j, d'une part φ est sommable sur $\varpi_{\alpha-1}$, d'autre part celles des totales $V_{\alpha-1,n}$ qui sont relatives aux intervalles contigus à $\varpi_{\alpha-1}$, forment une série absolument convergente. Nous calculons d'une part (première opération) l'intégrale besgienne de φ sur $\varpi_{\alpha-1}$, d'autre part la somme de la série des totales de φ sur les intervalles contigus et semi-contigus à $\varpi_{\alpha-1}$, et nous ajoutons (deuxième opération) cette somme à l'intégrale. Le résultat est la totale de φ sur j. Donc, *cette totale est connue sur tout segment dont aucun point n'appartient à* Π_α, et cela par une seule opération nouvelle de chacun des deux premiers types.

Par une infinité dénombrable d'opérations du troisième type, c'est-à-dire de passages à la limite, on détermine $T_x^{x'}\varphi$ dans tout intervalle où Π_α est réductible, donc *dans tout intervalle ne contenant* (à son intérieur) *aucun point de* P_α. Ce résultat est bien obtenu pour chacun de ces intervalles par une infinité *dénombrable* d'opérations des trois types, s'il en était ainsi pour la valeur de l'indice précédant α.

Supposons maintenant α *de seconde espèce*. Alors, j étant un *segment* dont aucun point (intérieur ni extrême) n'est agrégé à Π_α, les $P_{\alpha'}$ n'ont pas des points sur j pour toutes les valeurs de α' inférieures à α, sinon j contiendrait un point Π_α. Soit donc β' un indice inférieur à α et tel que $P_{\beta'}$ soit nul sur j. Alors, nous avons admis que nous savons calculer la totale de φ sur j. De là se déduit par un passage à la limite (troisième opération) le calcul de cette totale sur tout intervalle sans points intérieurs agrégés à Π_α, mais pouvant admettre une ou deux extrémités sur Π_α. De là enfin, par une infinité *dénombrable* d'additions et de passages à la limite, *le calcul de la totale sur tout intervalle où* P_α *ne pénètre pas* (intérieurement).

Dans tous les cas, le problème est résolu pour P_α, s'il l'a été préalablement pour tous les ensembles antérieurs. Et les totales cherchées s'obtiennent par l'emploi d'une infinité *dénombrable* d'opérations des trois types, s'il en est ainsi pour toutes les valeurs de l'indice précédant α. Comme cette dernière allégation est exacte pour les valeurs 1 et 2 de α, comme le problème de chercher la totale de φ dans un intervalle sans points intérieurs communs avec P_α a été résolu pour $\alpha = 1$ et 2, le problème doit être considéré comme résolu (et avec la condition de dénombrabilité des opérations des trois types) pour toutes les valeurs finies et transfinies de α.

Or, P_α étant non dense sur tout ensemble antérieur à lui, il existe un nombre β tel que P_β et tous les ensembles suivants soient nuls. L'intervalle ab est dépourvu de points intérieurs agrégés à P_β. Donc, dès que les opérations ont été poussées jusqu'au rang β des ensembles P_α, la totale de φ entre a et b est calculée.

58. Donc, en particulier, une fonction dérivée finie étant supposée donnée en tout point, nous savons calculer la variation de sa primitive entre deux points quelconques. Pareillement, si nous savons simplement d'une fonction partout finie qu'elle est en chaque point l'un des quatre dérivés extrêmes d'une fonction inconnue, nous savons trouver la variation de cette dernière entre un point fixe a et un point variable quelconque x. Ou encore si l'on nous donne une fonction finie φ et si nous savons qu'une certaine fonction continue f a l'un de ses dérivés extrêmes égal à φ sur une épaisseur pleine, et que de plus, cette fonction f a une variation réductible à zéro sur tout ensemble parfait mince, nous savons calculer f, qui ne diffère que par une constante additive de la totale de φ entre a et x. Nous savons donc reconnaître si une fonction φ définie sur ab est une dérivée, ou un dérivé extrême de rang et de côté fixes ou variables. Il faut d'abord que la totalisation de φ puisse se poursuivre sur ab sans jamais se heurter à une impossibilité, jusqu'à ce que la totale de φ soit déterminée entre a et un point quelconque x de ab. Cette condition remplie, il faudra s'assurer que, en tout point, cette fonction admet φ, dans le premier cas pour dérivée, dans le second cas pour dérivé extrême [1].

---

[1] Nous définissons la totale de a à b par la variation de la totale indéfinie entre ces

59. Dans le cas où nous totalisons une fonction dérivée φ, cette dernière satisfait non seulement aux trois conditions, mais aussi à une autre remplaçant la seconde et plus stricte qu'elle, posée comme obligatoire, dans ma première définition de la totalisation (*C. R. Acad. Sc.*, t. 154, p. 859-862 et 1075-1078). La voici. Les totales de φ ayant été calculées pour tout intervalle dont aucun point n'est agrégé à un ensemble parfait P, non seulement les totales t_n sur les contigus u_n à P, mais encore *les totales maximums en valeur absolue* $\pm w_n$, prises entre deux points quelconques de u_n, *doivent former une série absolument convergente hors du voisinage d'un ensemble non dense sur* P.

En effet, si φ est une dérivée, w_n, supposé positif, est l'oscillation de la primitive de φ dans un contigu à P. Or, si f a une dérivée finie en tout point, l'ensemble des points de P au voisinage desquels l'oscillation relative $\frac{w_n}{u_n}$ est non bornée et *a fortiori* l'ensemble des points de P au voisinage desquels la série w_n est non convergente, l'un et l'autre de ces ensembles sont non denses sur P (n° 35, et 1^{re} Partie, n° 40).

Nous dirons qu'une fonction φ est *complètement totalisable*, si elle satisfait aux trois conditions fondamentales du n° 52, la seconde étant ainsi modifiée :

DEUXIÈME CONDITION COMPLÉTÉE. — *Si l'on a déterminé, par une voie quelconque, dans chaque contigu à un ensemble parfait* P, *la valeur absolue* MAXIMUM *des totales de* φ *entre deux points variables de ce contigu, il faut que la série de ces valeurs absolues maximum ne diverge qu'au voisinage des points d'un ensemble non dense sur* P.

A cette condition supplémentaire correspond, pour la totale indéfinie f de φ, un nouveau *troisième caractère* plus précis que l'ancien : *f admet φ pour dérivée* GÉNÉRALE (et non pas seulement approximative) *sur une épaisseur pleine*. Car, la variation de f dans un intervalle coïncidant avec la totale de φ sur ce même intervalle, f possède une variation réductible *autour* de tout ensemble parfait, donc (p. 168, en

---

points, contrairement à l'habitude adoptée pour les intégrales riemannienne et besgienne. Il nous paraît impossible de définir le premier nombre sans supposer calculée la totale entre x et x', pour tous les couples de valeurs x, x' intérieurs à ab.

note) une dérivée générale ψ sur une épaisseur pleine e'. En tout point de e', f possède un nombre dérivé unique, savoir ψ. Or, f, satisfaisant *a fortiori* aux trois caractères de la totale indéfinie de φ, admet, sur une épaisseur pleine e'', φ pour dérivée approximative. Donc, sur l'épaisseur pleine e commune à e' et à e'', $\varphi = \psi$. Ainsi, dans la recherche des opérations à effectuer sur une donnée φ pour aboutir à une fonction admettant, sur une épaisseur pleine, φ pour dérivée générale, la *totalisation complète* étend la sommation besgienne (¹).

60. Le lecteur peut se demander si nous avons utilisé en leur entier les première et deuxième conditions imposées à φ, et s'il est réellement indispensable que, pour tout ensemble parfait P, l'ensemble K des points au voisinage desquels ou bien φ est non sommable, ou bien la série de ses totales dans les contigus à P est non absolument convergente, cet ensemble K soit non dense. En effet, nous avons simplement admis que cet ensemble était non dense pour le continu, et pour chacun des P_α défini, soit comme noyau de l'ensemble K relatif à $P_{\alpha-1}$ pour un nombre α de première espèce, soit comme noyau de l'ensemble Π_α commun à tous les $P_{\alpha'}$ d'indices inférieurs à α pour un nombre α de seconde espèce. Mais de ce que les P_α forment une chaîne d'ensembles chacun non dense sur les précédents, en résulte-t-il que la propriété de la non-densité de K aura nécessairement lieu pour tout ensemble P distinct des P_α? Ou bien, au contraire, cette dernière hypothèse ne dépasse-t-elle point la première, strictement suffisante à la suite des raisonnements? La seconde de ces deux opinions est inexacte.

Supposons, en effet, existante la chaîne des P_α définis comme il a été dit ci-dessus et expliqué dans la description de l'opération totalisante. Peut-il exister un ensemble P où l'ensemble fermé K correspondant est dense, donc contient une portion de P (où nous réduisons P)? P n'aura pas de point intérieur à un contigu à Π_1, car alors P aurait, à l'intérieur de cet intervalle contigu, un segment sur lequel φ serait sommable. Donc, P a tous ses points sur Π_1, et, comme P

(¹) *Consulter* à ce sujet une Note de M. Kintchine (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 21 février 1916).

est parfait, P sera agrégé au noyau P_1 de Π_1. Pareillement, si un segment ϖ de P était intérieur à un intervalle contigu à Π_2, P étant agrégé à P_1, ϖ serait sur un segment ϖ_1 de P_1, lequel segment ϖ_1, n'ayant pas de point commun avec Π_2, serait pour φ une base où φ serait sommable. *A fortiori*, φ serait sommable sur ϖ compris dans ϖ_1. Donc P n'a pas de points dans les contigus à Π_2. Donc P est agrégé à Π_2, donc à son noyau P_2, etc. P est agrégé, on le voit de proche en proche, à tous les P_α. Ceux-ci étant nuls à partir d'un certain rang, P est nul. Donc, en utilisant les première et deuxième conditions uniquement pour la suite P_α, nous nous trouvons avoir tiré entièrement parti de l'hypothèse que ces conditions s'appliquent à un ensemble parfait quelconque [1].

Propriétés de la totalisation.

61. C'est un principe que nous avons déjà appliqué en décrivant la totalisation que, sous l'hypothèse $a < b < c$, si φ est totalisable entre a et b d'une part, entre b et c d'autre part, il l'est entre a et c, et l'on a

$$T_a^b\varphi + T_b^c\varphi = T_a^c\varphi.$$

Par définition on pose, a étant inférieur à b,

$$T_b^a\varphi = -T_a^b\varphi.$$

Il est encore utile d'observer que la somme de deux fonctions totalisables est totalisable et admet pour totale la somme des totales des deux fonctions. Car, si $f_1 + f_2$ sont les totales indéfinies de φ_1 et de φ_2, $f_1 + f_2$ est continu, résoluble et admet $\varphi_1 + \varphi_2$ pour dérivée

[1] Pareille observation pourrait être faite concernant la démonstration donnée par M. Baire de son théorème réciproque sur les fonctions de classe 1 : « Une condition ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait est de classe 1. » En fait, la discontinuité ponctuelle de la fonction est invoquée seulement pour une chaîne d'ensembles parfaits P_α analogues à ceux du texte, mais l'usage, partiel en apparence, fait de l'hypothèse du théorème, épuise cependant le contenu de celle-ci, ce qui n'aurait pas lieu avec une chaîne d'ensembles à indices seulement entiers. C'est là un ordre de faits conforme à la nature des nombres transfinis.

approximative sur une épaisseur pleine (n° 27). Donc, $f_1 + f_2$ est la totale indéfinie de φ_1 et de φ_2.

Si une fonction φ ne prend pas les deux signes dans un intervalle, elle est totalisable dans ab en même temps qu'elle y est sommable.

En effet, on peut toujours supposer, quitte à changer φ en $-\varphi$, que l'on a toujours $\varphi \geqq 0$. Si d'abord φ est sommable sur ab, φ est totalisable, d'après la définition de notre opération. Je dis qu'inversement si φ est totalisable sur ab, c'est que φ est sommable. En effet, la somme besgienne d'une fonction positive φ, sur un intervalle ou sur un ensemble où φ est sommable, étant non négative, la totale de φ entre a et x (obtenne par addition finie ou infinie de telles sommes besgiennes), soit $T(a, x)$, est non décroissante. Donc elle a sur une épaisseur pleine une dérivée générale sommable ψ. φ étant sur une pleine épaisseur la dérivée approximative de $T(a, x)$, φ ne diffère de ψ qu'en un ensemble mince. Donc φ est sommable.

M. Lebesgue signale (*L. I.*, p. 99) l'intérêt d'un principe fondamental dans sa théorie de l'intégration : *L'intégrale d'une fonction sommable f_n, croissant relativement à l'indice, tend vers l'intégrale de sa limite f.*

Le même principe est exact si l'on remplace les mots *intégrale* et *sommable* par ceux de *totale* et de *totalisable*. Soit, en effet, T_n la totale de f_n dans un intervalle ab. Posons

$$f_n - f_1 = s_n, \qquad f - f_1 = s.$$

s_n est totalisable, puisque f_n et f_1 le sont. Or s_n est positif ou nul. Donc s_n est sommable. De plus, si I_n est la somme besgienne de s_n dans l'intervalle ab, on a

$$T_n = T_1 + I_n.$$

s étant la limite de s_n, jamais décroissant avec l'indice, si I_n tend vers une limite I, s est sommable et a pour intégrale besgienne I. D'après $f = f_1 + s$, f est totalisable et a pour totale

$$T_1 + I = \lim (T_1 + I_n) = \lim T_n.$$

Si I_n croît sans limite, s n'est pas sommable. Comme il est positif, il n'est pas totalisable. Donc f ne l'est pas davantage. Dans tous les cas, la totale de f existe ou non en même temps que la limite de la totale de f_n, et dans le premier cas elle lui est égale.

La totale d'un produit se prête au calcul dit *par parties*.

62. *Si les totales indéfinies de φ et de γ existent et sont respectivement f et g, $g\varphi$ et $f\gamma$ sont simultanément totalisables ou non.*

Nous avons vu, en effet, que f et g étant résolubles et ayant sur une épaisseur pleine pour dérivées approximatives φ et γ, fg est résoluble et a pour dérivée approximative $f\gamma + g\varphi$ sur la même épaisseur pleine (nº 27). Donc, $f\gamma + g\varphi$ est totalisable et admet fg pour totale indéfinie. Il suit de là que, si $f\gamma$ est totalisable, $g\varphi$ l'est aussi, car la différence de deux fonctions totalisables l'est également et a, dans tout intervalle, pour totale la différence des deux premières totales.

φ étant supposé totalisable, $g\varphi$ satisfait, de par la simple continuité de g (ou même simplement si g est borné), à la première condition des fonctions totalisables, que, sur tout ensemble parfait P, il existe une portion où $g\varphi$ est sommable sur P (celle-là même où φ est sommable). Mais, ni la troisième condition (existence d'une totale limite sur tout intervalle limite d'intervalles où $g\varphi$ est totalisable), ni *a fortiori* la seconde où il est question de la convergence absolue de la série des totales de $g\varphi$ sur les contigus à un ensemble parfait, ne sont nécessairement vraies, de par la simple continuité de g, même si g a une dérivée, ni *a fortiori* si g est une totale indéfinie quelconque.

Ainsi $\varphi = \frac{1}{x^m}\sin\frac{1}{x^n}\,(n>0)$ est totalisable $\Big($comme le changement de x en $u^{-\frac{1}{n}}$ le montre immédiatement$\Big)$, moyennant $n+1>m$. $g = x^p\sin\frac{1}{x^n}$ a une dérivée partout finie si $p>1$. $g\varphi = \frac{1}{x^{m-p}}\sin^2\frac{1}{x^n}$ est une fonction toujours positive, et sommable en même temps que $\frac{1}{x^{m-p}}$, donc non sommable si $m-p \geqq 1$. Si donc nous prenons $p=2$, $m=n=3$, nous réalisons bien un produit $g\varphi$ non totalisable.

Mais, *si g a une dérivée continue, $g\varphi$ est totalisable*. Car $f\gamma$ est une fonction continue, donc intégrable. De là résulte que, si φ est totalisable, $\varphi\cos n\theta$, $\varphi\sin n\theta$ le sont quel que soit n. On peut donc calculer les coefficients de Fourier de toute fonction totalisable et former avec eux une série trigonométrique dont on trouverait facilement un lien avec φ [1].

63. Il peut arriver que les coefficients de cette série ne tendent pas vers zéro. Montrons-le par un exemple.

Soit $\theta(x)$ une fonction positive, décroissante pour $0 < x < \pi$, infiniment grande au voisinage positif de $x = 0$, nulle pour $x = \pi$, nulle pour $-\pi \leqq x \leqq 0$, douée de la période 2π, et telle enfin que l'intégrale $\int_0^a \theta\,dx$ n'ait pas de sens, a étant positif. A cause de cette dernière hypothèse, nous pouvons déterminer une suite de nombres $a_1 = \pi, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, décroissants, tendant vers zéro et tels que

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n} \theta\,dx > 4n.$$

Entre a_{n+1} et a_n, nous poserons

$$\varphi = \theta(x) \cos p_n x,$$

p_n étant un entier à déterminer par voie de récurrence, après avoir observé, que d'une part, si u est une fonction continue (ou seulement à variation bornée, ou même simplement sommable) entre α et β, l'entier p croissant, $\int_{\alpha'}^{\beta'} u \cos px\,dx$ tend uniformément vers zéro, quels que soient α' et β' entre α et β, et que d'autre part, si θ est positif, continu entre α et β, $\int_\alpha^\beta \theta \cos^2 px\,dx$ tend pour p infini vers le produit de l'intégrale $\int_\alpha^\beta \theta\,dx$ par la valeur moyenne de $\cos^2 x$ sur un inter-

---

[1] J'ai supprimé ci-après une rapide étude de cette relation, obtenue par ailleurs dernièrement par M^me Pia Nalli (*Rendiconti Circ. math. di Palermo*, 1915). Depuis la publication de mes deux Notes de 1912, la totalisation a fait l'objet d'un certain nombre de travaux, conférant beaucoup d'honneur à une modeste idée que le hasard m'a fait énoncer le premier, mais dépouillant par contre de l'intérêt de la nouveauté, à mon grand regret pour le lecteur, divers passages de ce Mémoire, que je n'ai eu l'occasion d'écrire ni de publier plus tôt.

valle égal à sa période, soit $\frac{1}{2}$. Cela étant, p_1 sera choisi de manière que

$$\left|\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \theta(x) \cos p_1 x \, dx\right| < 1, \qquad \int_{a_2}^{a_1} \theta \cos^2 p_1 x \, dx > \frac{1}{4}\int_{a_2}^{a_1} \theta \, dx > 1,$$

quels que soient α_1 et α_2 compris entre a_1 et a_2. $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ étant choisis, nous prenons p_n de manière que :

1° $$\left|\int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} \theta(x) \cos p_n x \, dx\right| < \frac{1}{n^2},$$

quels que soient α_{n+1} et α_n entre a_{n+1} et a_n;

2° $$\int_{a_{n+1}}^{a_n} \theta \cos^2 p_n x \, dx > \frac{1}{4}\int_{a_{n+1}}^{a_n} \theta \, dx > n;$$

3° $$\sum_{h=1}^{h=n-1} \left|\int_{\alpha_{h+1}}^{\alpha_h} \theta \cos p_h x \cos p_n x \, dx\right| < 1,$$

quels que soient α_{h+1} et α_h entre a_{h+1} et a_h;

4° $$\left|\int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} \theta \cos p_n x \cos p_h x \, dx\right| < \frac{1}{n^2},$$

pour toutes les valeurs de h inférieures à n.

64. D'après les observations faites sur les valeurs limites des diverses intégrales écrites ci-dessus quand p_n croît indéfiniment, p_n peut toujours être choisi assez grand pour satisfaire à ces conditions. Cela étant, je dis que φ est totalisable. En effet, φ est borné entre α et a_1, quel que soit le nombre α positif inférieur à a_1, avec un nombre limité de discontinuités (les a_n). φ est donc intégrable entre α et a_1. Si α est entre a_{m+1} et a_m, on a

$$\int_{\alpha}^{a_1} \varphi \, dx = \int_{\alpha}^{a_m} + \int_{a_m}^{a_{m-1}} + \ldots + \int_{a_2}^{a_1}.$$

Le second membre tend visiblement vers une limite pour n infini, puisque le premier terme tend vers zéro et que les autres forment une série absolument convergente (condition 1°). Donc φ est totalisable (et même complètement) entre o et a_1, donc de $-\pi$ à $+\pi$.

Calculons la totale de $\varphi \cos p_i x$. Dans un champ négatif, c'est zéro. Évaluons-la entre un nombre positif α et a_1. α, devant finalement tendre vers zéro, peut être pris inférieur à a_{i+1}. Supposons α entre a_{m+1} et a_m. Nous faisons plusieurs parts de la totale. Il y a d'abord celle qui correspond à des intervalles $a_q a_{q-1}$ à droite de a_i, avec $q \leqq i$. Sur ces derniers, l'élément différentiel est $\theta \cos p_{q-1} x \cos p_i x\,dx$. D'après la condition 3° appliquée en remplaçant n par i et h par les entiers $q-1$ inférieurs à i, on trouve sur-le-champ $a_i a_1$ une totale inférieure à 1 en valeur absolue. La totale de $\varphi \cos p_i x$, ou de $\theta \cos^2 p_i x$, entre a_{i+1} et a_i surpasse i. Enfin, la totale entre a_{r+1} et a_r de

$$\varphi \cos p_i x = \theta \cos p_r x \cos p_i x$$

(si $r \geqq i+1$) est inférieure à $\frac{1}{r^2}$, et entre α et a_m à $\frac{1}{m^2}$, toujours en valeur absolue, ceci d'après la condition 4° où nous faisons $n=r$, $h=i$. La totale de $\varphi \cos p_i x$ est manifestement supérieure à

$$i - 1 - \sum_1^\infty \frac{1}{r^2} = i - \omega,$$

ω étant une certaine constante arithmétique. Cette totale croît donc indéfiniment avec i. Le terme général de la série $u_n \cos nx + v_n \sin nx$, où u_n et v_n sont respectivement, divisées par π, les totales de $\varphi \cos nx$ et de $\varphi \sin nx$ entre $-\pi$ et $+\pi$, ne tend pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Il n'est même pas borné.

La suite des opérations totalisantes ne saurait être bornée pour l'ensemble des dérivées.

65. Nous allons maintenant prouver que la suite bien ordonnée des opérations employées à totaliser une fonction dérivée [1] n'est point obligatoirement limitée à un certain rang transfini qu'elle ne saurait

---

[1] Dans tout ce Chapitre, il ne s'agit que de dérivées générales *finies* en tous points.

dépasser. En d'autres termes, reprenant pas à pas l'exposé de la méthode, la définition des ensembles qui y figurent, nous montrerons qu'on peut toujours construire une dérivée nécessitant l'emploi des opérations de chaque sorte jusqu'à tel rang transfini qu'on voudra donner d'avance. Bien entendu, si l'on choisit d'abord la dérivée, on est certain d'épuiser les difficultés présentées par la recherche de sa primitive, en poussant la suite bien ordonnée des calculs de totalisation jusqu'à un certain rang fini ou transfini dépendant de la dérivée proposée. Mais, ce que nous voulons montrer par contre, c'est, étant donné un rang transfini si éloigné soit-il, la possibilité de former tout exprès une dérivée dont la totalisation n'est pas terminée, si l'on borne à ce rang la suite des opérations (1).

---

(1) Étant donné φ, on peut, sans entamer les calculs de la totalisation, déterminer par la règle ci-après, une suite d'ensembles fermés $E_{\alpha,0}$ dont nous désignons les noyaux parfaits par $N_{\alpha,0}$ (ou simplement par N_α) : 1° N_0 est le segment ab; 2° si α est de première espèce et positif, $E_{\alpha,0}$ est l'ensemble des points de $N_{\alpha-1}$ au voisinage desquels φ est non sommable sur $N_{\alpha-1}$. $E_{\alpha,0}$ est non dense sur $N_{\alpha-1}$; 3° si α est de seconde espèce, $E_{\alpha,0}$ est l'ensemble commun aux $N_{\alpha'}$ d'indice α' inférieur à α. Il existe un certain rang $\alpha = \delta + 1$ de première espèce, tel que $E_{\delta+1,0} = 0$, $E_{\delta,0}$ n'étant pas nul. N_δ peut être nul.

Les points de N_α étrangers à $E_{\alpha+1,0}$ peuvent se répartir en une infinité dénombrable de portions ϖ_α^n, deux à deux sans points communs, ou seulement juxtaposées, sur chacune desquelles φ est sommable. La somme besgienne de φ sur ϖ_α^n est un élément numérique h_α^n de la totale de φ entre a et b. La totalisation est l'addition, convenablement effectuée, des nombres h_α^n.

Nous désignons par $E_{\alpha,\beta}$ (et par $N_{\alpha,\beta}$ son noyau) l'ensemble fermé ainsi défini pour $1 \leqq \alpha \leqq \delta$, $\beta \geqq 1$: 1° Si β est de première espèce, $E_{\alpha,\beta}$ est constitué par la réunion de $E_{\alpha+1,0}$ et de l'ensemble (non dense sur $N_{\alpha,\beta-1}$) des points de $N_{\alpha,\beta-1}$ au voisinage desquels les totales de φ sur les contigus à $N_{\alpha,\beta-1}$ forment une série non absolument convergente; 2° si β est de seconde espèce, $E_{\alpha,\beta}$ est l'ensemble commun aux $N_{\alpha,\beta'}$ pour toutes les valeurs de β' inférieures à β. α étant laissé fixe, tous les ensembles $E_{\alpha,\beta}$ coïncident à partir d'une certaine valeur $\mu(\alpha)$ (de première ou de seconde espèce) du rang β, avec $E_{\alpha+1,0}$. $E_{\delta,\beta}$ n'a de sens que pour $\beta = 0$ si $N_\delta = 0$.

Les méthodes employées aux pages suivantes permettent de construire une dérivée φ pour laquelle δ et tous les nombres $\mu(\alpha)$ $(1 \leqq \alpha \leqq \delta)$ prennent des valeurs indifféremment données d'avance ($\mu > 0$, sauf pour $\alpha = \delta$, si $N_\delta = 0$) et telle de plus que : 1° $N_{\alpha,\beta}$ possède une portion dans tout contigu à $E_{\alpha,\beta+1} [0 \leqq \beta < \mu(\alpha)]$; 2° $E_{\alpha,\beta}$ est, dans chaque contigu à $N_{\alpha,\beta}$, réductible d'ordre $\lambda(\alpha, \beta)$ donné indifféremment pour chaque couple (α, β) $[0 \leqq \beta \leqq \mu(\alpha)]$; 3° quel que soit γ inférieur à $\lambda(\alpha, \beta)$, les valeurs absolues des totales de φ sur les contigus au dérivé $E_{\alpha,\beta}^\gamma$ de $E_{\alpha,\beta}$ forment une série divergeant sur tout segment contenant une infinité de ces contigus, donc *a fortiori* au voisinage de tout point de $E_{\alpha,\beta}^{\gamma+1}$.

Pour totaliser φ, nous devons employer : 1° la première opération une transfinité de fois

66. Montrons d'abord l'existence de fonctions f doublement nulles (1^{re} Partie, n° 61) relativement à un couple de points a, b, admettant en tout point une dérivée finie, cette dernière étant sommable sur tout segment intérieur à ab, mais ne l'étant ni en a ni en b. Il faut et il suffit pour cela que f, pourvue d'une dérivée, ait sur le segment ab une variation totale non bornée en a et b, et en ces deux points seulement.

Une fonction f, doublement nulle relativement à (a, b) et de coefficient 1, est, par définition, de la forme $\lambda(x)\,\dfrac{(x-a)^2(b-x)^2}{(b-a)^2}$, $|\lambda(x)|$ ayant pour maximum 1 sur ab. Nous prenons

$$\lambda(x) = \sin\frac{k}{(x-a)^m(b-x)^m},$$

k étant constant. La dérivée φ de f est continue à l'intérieur de ab et sommable en a et b en même temps que la fonction

$$(b-x)^{1-m}(x-a)^{1-m}\cos\frac{k}{(x-a)^m(b-x)^m}.$$

Pour $m \geqq 2$, φ n'est sommable ni en a ni en b. Nous désignons par $F^0(a, b)$ une fonction du type précédent où k et m ont des valeurs fixes, quelconque pour la première, au moins égale à deux pour la la seconde. Si le segment ab est désigné par une seule lettre s, nous écrirons aussi $F^0(s)$ pour $F^0(a, b)$. La dérivée de cette fonction sera indiquée par $\Phi^0(a, b)$ ou $\Phi^0(s)$. $F^0(a, b)$ *est*, rappelons-le, *doublement nulle et de coefficient* 1, *relativement à* a, b. $\Phi^0(a, b)$, *continue à l'intérieur de ab, n'est sommable ni en a ni en b.*

Supposons-nous donnée la fonction dérivée $\Phi^0(a, b)$. Comment

---

d'ordre δ (la fois de rang δ pouvant être éventuellement supprimée, quand $N_\delta = 0$); 2° entre deux opérations consécutives du premier type, la seconde opération une transfinité de fois d'ordre $\mu(\alpha)$ [la fois de rang $\mu(\alpha)$ étant supprimée, si μ est de seconde espèce]; 3° entre deux opérations consécutives du second type, la troisième opération une transfinité de fois d'ordre $\lambda(\alpha, \beta)$. Ainsi se trouvera établie l'impossibilité de borner, pour les dérivées finies, la complexité du calcul totalisant.

Les raisonnements du texte s'appliquent successivement à : 1° $\delta = 1$, $\mu(1) = 0$ et $N_{1,0} = 0$, $\lambda(1, 0)$ quelconque (n°s 66-72); 2° $\delta = 1$, $\mu(1)$ et $\lambda(1, \beta)$ quelconques (77-79); 3° δ quelconque, $\mu(\alpha) = 1$, $\lambda(\alpha, 0)$ quelconque (80-81).

calculerons-nous sa totale entre deux points x et x' du segment ab? Soient d'abord x et x' intérieurs à ab. Φ^0 étant sommable (et même continue) entre x et x', sa totale entre ces deux points est identique à sa somme besgienne (et à son intégrale riemannienne). Donc : 1° la totale $T_x^{x'}\Phi^0$ entre deux points intérieurs à ab s'obtient par la première opération; 2° si le point x est en a, nous avons

$$T_a^{x'}\Phi^0 = \lim_{x=a} T_x^{x'}\Phi^0.$$

La troisième opération nous donne donc la totale $T_a^{x'}$. La même opération, effectuée une fois, nous donne $T_x^b\Phi$; 3° effectuée une nouvelle fois, elle nous fournit $T_a^b\Phi^0$. Nous avons donc résolu, quels que soient x et x' sur le segment ab, le problème de trouver la totale de Φ^0 entre x et x' ou la variation entre x et x' de F^0, primitive de Φ^0.

67. Préalablement aux opérations totalisantes, nous commençons par déterminer l'ensemble Π_1 des points de non-sommabilité de la dérivée donnée φ. Je dis que *l'ensemble* Π_1 *peut coïncider avec tout ensemble fermée* H *donné d'avance*. En effet, prenons f nul sur H, et, dans un intervalle u contigu à H, faisons $f = F^0(u)$. f est, relativement à H, doublement nulle et de coefficient 1. Donc, en tout point de H, f a une dérivée φ égale à zéro. Hors de H, f possède en tout point la dérivée $\Phi^0(u)$ de la fonction $F^0(u)$ avec laquelle coïncide f autour de ce point. Φ^0 est sommable sur tout segment intérieur à u et non pas sur u. H est donc l'ensemble des points de non-sommabilité de φ.

La totale de φ entre les extrémités d'un même contigu à H est nulle. Donc, la série des totales de φ sur ces contigus est absolument convergente et sur un groupement particulier quelconque de ces contigus, la somme de ces totales est zéro. Soit K le noyau parfait de H. Si x et x' sont intérieurs à un même contigu à K, mais sont séparés par des points de H, la totale de φ entre x et x' s'obtient (opération élémentaire, n° 52) en faisant la somme de la série absolument convergente des totales de φ sur les intervalles contigus et semi-contigus à la partie de H située entre x et x'. Le même calcul vaut encore si x et x' sont aux extrémités d'un même contigu à K, et la totale obtenue est dans ce dernier cas zéro.

Si l'on observe maintenant que, sur K, φ est nul, donc sommable, et que la totale de φ sur toute portion de K, égale à la somme besgienne de φ sur cette portion, est encore nulle, si l'on remarque enfin que les totales de φ dans les contigus à K sont toutes zéro, donc forment une série absolument convergente de somme nulle sur toute portion de K, on obtient la totale de φ entre deux points quelconques de K, savoir zéro, et ensuite, la totale entre deux points quelconques x, x' situés sur le segment des points extrêmes de H.

Nous désignerons par $F_1(H)$ la fonction f nulle sur H, égale à $F^0(u)$ sur tout intervalle u contigu à H, et par $\Phi_1(H)$ sa dérivée. F_1 doublement nul de coefficient 1 relativement aux extrémités de chacun des u, l'est aux mêmes conditions relativement à H. Φ_1, nul sur H, est non sommable en tous les points de H, et en ceux-là seulement. Les opérations qui nous ont donné la variation de F_1 entre deux points x et x' quelconques, supposant connu simplement Φ_1, résoudraient le problème analogue pour toute fonction $\Phi_1 + \theta(x)$, si θ est une fonction continue, ou seulement une dérivée partout sommable.

68. Dans le calcul de $F_1(H)$, nous avons appliqué, dans chaque contigu u de H, la première opération entre deux points quelconques de u, puis la troisième opération, une ou deux fois dans chacun des u. Après quoi, nous avons eu, pour les divers contigus à H, des totales formant une série absolument convergente. Le calcul totalisant n'offrait plus de difficultés après une double application de la troisième opération sur chacun des u. Nous allons maintenant *réaliser le cas*, dont la possibilité théorique a été admise, et *où, pour obtenir la totale de φ dans chaque contigu v à P_1, noyau de Π_1, il faut appliquer une transfinité de fois la troisième opération*. Dans chacun de ces contigus v, Π_1 est réductible. Nous définirons pour chaque ordre fini ou transfini α une fonction $F^\alpha(a, b)$ partout dérivable et : 1° *doublement nulle de coefficient* 1 *relativement au couple* (a, b); 2° telle que *l'ensemble* H (désigné ci-après par H_α) *des points de non-sommabilité de sa dérivée* $\Phi^\alpha(a, b)$ *est réductible d'ordre* α, c'est-à-dire admet un ensemble dérivé d'ordre α, constitué de points en nombre fini et au moins égal à 1, en sorte que ce dernier, H^α, existe, mais $H^{\alpha+1}$ est nul; plus précisément, H^α *coïncidera avec le couple* a, b; 3° *telle que les totales de* Φ^α (ou varia-

tions de F^α) *sur les contigus à l'un quelconque des dérivés* H^β *ni nuls ni finis* (donc pour toute valeur, même nulle, de β inférieure à α) *forment une série non absolument convergente au voisinage de tout point du dérivé suivant* $H^{\beta+1}$.

Observons d'abord que H ne peut pas être un ensemble fermé quelconque. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, une suite progressant dans un sens unique et tendant vers un point limite ξ. Si d_n est la distance de x_n à x_{n+1}, et r_n celle de x_n à ξ, r_n est la somme $d_n + d_{n+1} + \ldots$. Si en ξ une fonction f possède une dérivée finie, les variations relatives de f entre x_n et ξ sont inférieures en valeur absolue à un nombre positif fixe k. Donc la variation absolue de f entre x_n et x_{n+1} est inférieure à $k(r_n + r_{n+1}) < 2kr_n$. Si donc la série r_n est convergente, la série des variations de f entre x_n et x_{n+1} est absolument convergente. H ne peut donc pas coïncider avec l'ensemble des x_n augmenté de ξ, car la série des variations absolues de f sur les contigus à $H^0 = H$ ne divergerait pas au voisinage de $H^1 = \xi$. Ceci particularise évidemment la nature des ensembles H.

Dans tout intervalle contigu à un dérivé $H^{\beta+1}$ *et contenant une infinité de points de* H^β, *ceux-ci devront satisfaire à la condition que leurs distances à l'extrémité du contigu vers laquelle ils tendent, forment une série divergente.*

69. Constituons $F^1(a, b)$. La fonction $F^0(a, b)$ possède une double infinité de maximums et de minimums alternants, en des points c_n qui croissent avec l'indice n et tendent vers a pour $n = -\infty$, vers b pour $n = +\infty$. La variation v_n de F entre c_n et c_{n+1} est alternativement positive et négative, et la série v_n est semi- et non absolument convergente quand n croît ou décroît indéfiniment. Désignons par H_1 l'ensemble des points c_n, et considérons la fonction

$$f = F^0(a, b) + F_1(H_1).$$

F^0 est dérivable en tout point de ab, et est doublement nulle de coefficient 1 relativement au couple a, b. La dérivée $\Phi^0(a, b)$ est sommable sur tout segment intérieur à ab. F_1, partout dérivable, doublement nulle sur H_1, a une dérivée non sommable en tout point de H_1, et est doublement nulle relativement au couple a, b avec le coefficient 1 au plus. Car, F_1 doublement nulle sur H_1 l'est *a fortiori*, avec un coefficient non supérieur, relativement à tout ensemble partiel de H_1 et en particulier relativement au couple a, b agrégé à H_1.

La dérivée φ de f existe en tout point de ab. Elle n'est sommable en aucun point de H_1 intérieur à ab, puisque en ces points Φ^0 est sommable sans que $\Phi_1(H_1)$ le soit. Donc l'ensemble des points de non-sommabilité de φ, ensemble fermé, comprend a et b, où ni Φ^0 ni Φ_1 ne sont sommables et où $\Phi^0 + \Phi_1$ au premier abord pouvait l'être. Cet ensemble est donc H_1. Les variations de f dans les contigus à H_1 sont celles de F^0. Elles forment donc une série non absolument convergente en a et b. Les conditions proposées sont donc vérifiées pour $\alpha = 1$.

En divisant f par une certaine constante positive inférieure à 2, on fait de f une fonction doublement nulle et de coefficient 1 relativement au couple a, b. C'est précisément cette dernière fonction que nous désignerons par $F^1(a, b)$, sa dérivée étant notée $\Phi^1(a, b)$.

L'ensemble des points de non-sommabilité de $\Phi^1(a, b)$ est H_1, possédant un dérivé du premier ordre constitué par deux points a et b, et la série des variations de $F_1(H_1)$ dans les contigus à H_1 est non absolument convergente en a et b. De plus, $F^1(a, b)$ est doublement nulle et de coefficient 1 relativement au couple a, b.

70. Il est maintenant facile de définir $F^2(a, b)$. Les c_n étant les points définis au dernier paragraphe, considérons une fonction $g_2(a, b)$ égale sur tout intervalle $c_n c_{n+1}$ à $F^1(c_n, c_{n+1})$. g_2 est dérivable en tout point distinct des c_n, ou étranger à H_1. Mais, $F^1(c_n, c_{n+1})$ étant doublement nulle et de coefficient 1 relativement au couple (c_n, c_{n+1}), g_2 est doublement nulle et de coefficient 1 relativement à l'ensemble H_1. g_2 a donc une dérivée nulle sur H_1. La dérivée g'_2 admet pour ensemble de non-sommabilité, dans chaque intervalle $c_n c_{n+1}$, des points tendant de part et d'autre vers c_n et c_{n+1}, sans autres points limites. L'ensemble des points de non-sommabilité de g'_2 est donc un certain ensemble H_2 dont le premier dérivé est H_1. Chaque segment contigu à H_2 est intérieur à un même intervalle $c_n c_{n+1}$. Les variations de g_2 sur les contigus à H_2 forment de chaque côté, en tout point c_n, c'est-à-dire en tout point de H_1 distinct de a et b, des séries non absolument convergentes.

Ajoutons à g_2 la fonction $F^0(a, b)$. La somme f est dérivable partout sur ab et doublement nulle relativement au couple a, b, comme le sont séparément $F^0(a, b)$ et g_2. Les points de non-sommabilité de sa dérivée φ sont : d'abord les points de non-sommabilité pour une et une seule des deux dérivées g'_2 et $\Phi^0(a, b)$, savoir les points de H_2 distincts de a et b; puis les points limites des précédents, donc a et b en plus. H_2 est donc l'ensemble des points de non-sommabilité de φ.

Sur tout segment intérieur à ab la variation totale de $F^0(a, b)$ est bornée. Donc, les variations de f sur les contigus à H_2 forment une série non absolument convergente aux points de H_2 intérieurs à ab, dans les conditions où il en est ainsi pour les variations de g_2. Les points de non absolue convergence de cette série étant fermé, cet ensemble contient a et b. Il coïncide avec H_1.

Donc les variations de f sur les contigus à l'ensemble H_2 de non-sommabilité de φ forment une série non absolument convergente, au voisinage de tout point du dérivé H_1 de H_2. Mais les variations de f sur les contigus de H_1 sont celles de F^0, puisque g_2 est doublement nul sur H_1. Donc ces variations de f forment une série non absolument convergente en a et b, qui sont les seuls points constituant le dérivé second de H_2.

f, somme de g_2 et de F^0, est doublement nulle et de coefficient au plus égal à 2, relativement à (a, b). En divisant f par un certain facteur au plus égal à 2, nous obtenons une fonction $F^2(a, b)$ remplissant, pour $\alpha = 2$, les trois conditions imposées au n° 68 à $F^\alpha(a, b)$. $F^2(a, b)$ est en effet doublement nulle de coefficient 1 relativement au couple (a, b). Elle possède une dérivée $\Phi^2(a, b)$ admettant un ensemble de non-sommabilité $H_1 = H_2$, réductible d'ordre 2. Et les variations de $F^2(a, b)$ sur les contigus à H_2 font une série non absolument convergente au voisinage de tout point du dérivé H_2^1, et les variations de F^2 sur les contigus à H_2^1 font une série non absolument convergente aux deux points a et b constituant le dérivé suivant H_2^2.

71. Supposons formée, pour tous les ordres ν inférieurs à un nombre fini ou transfini α et pour tout couple a, b, une fonction $F^\nu(a, b)$ remplissant les conditions du n° 68, où α a été remplacé par ν. Nous allons montrer la possibilité de réaliser la fonction $F^\alpha(a, b)$.

1° *α est de première espèce.* Nous partons de la fonction connue $F^{\alpha-1}(a, b)$. Désignons toujours par H_1 l'ensemble des points c_n où $F^0(a, b)$ prend alternativement ses maximums et ses minimums. Nous définissons une fonction $g_\alpha(a, b)$ égale à $F_{\alpha-1}(c_n, c_{n+1})$ entre c_n et c_{n+1}. Dans les contigus à H_1, g_α possède une dérivée finie puisqu'il en est ainsi des fonctions $F_{\alpha-1}$ sur leur intervalle de détermination. $F_{\alpha-1}(c_n, c_{n+1})$ étant doublement nul de coefficient 1 relativement au couple (c_n, c_{n+1}), g_α a la dérivée zéro sur H_1. Désignons par $H_{\alpha-1}(c_n, c_{n+1})$ l'ensemble des points de non-sommabilité de $\Phi_{\alpha-1}(c_n, c_{n+1})$. L'ensemble $H_{\alpha-1}(c_n, c_{n+1})$ situé sur le segment $c_n c_{n+1}$ a pour dérivé d'ordre $\alpha - 1$ les seuls points c_n, c_{n+1} (n° 68). Donc la réunion des $H_{\alpha-1}(c_n, c_{n+1})$ est un ensemble H_α admettant pour dérivé d'ordre $\alpha - 1$ les points c_n et eux seuls. Donc H_α admet un dérivé d'ordre α constitué par les seuls points a et b.

Un segment σ sans points communs avec aucun des ensembles $H_{\alpha-1}(c_n, c_{n+1})$ est intérieur à l'un des intervalles $c_n c_{n+1}$. g_α coïncidant sur σ avec $F_{\alpha-1}(c_n, c_{n+1})$ a sa dérivée ψ_α sommable sur σ. D'ailleurs g_α n'est évidemment sommable dans aucun intervalle j contenant au moins un point de l'un des $H_{\alpha-1}$, puisque j contient alors au moins un point isolé ξ de l'un des $H_{\alpha-1}$. ξ est donc intérieur à un intervalle $c_n c_{n+1}$. Alors g_α coïncide sur j autour de ξ avec la fonction $F_{\alpha-1}(c_n, c_{n+1})$, laquelle n'est pas sommable en ξ. Donc, l'ensemble des points de non-sommabilité de ψ_α coïncide avec H_α.

Soient H_α^β un dérivé quelconque de H_α d'ordre β inférieur à $\alpha - 1$, et M un point de $H_\alpha^{\beta+1}$. Je dis que les variations de g_α sur les contigus à H_α^β forment une série non absolument convergente en M. En effet, si M est intérieur à ab, il appartient à au moins un segment $c_n c_{n+1}$. Sur ce dernier, g_α coïncide avec $F_{\alpha-1}(c_n, c_{n+1})$ et H_α coïncide sur le même segment avec $H_{\alpha-1}(c_n, c_{n+1})$. c_n et c_{n+1} faisant partie, d'après $\beta < \alpha - 1$, des ensembles $H_{\alpha-1}^\beta(c_n, c_{n+1})$ et $H_{\alpha-1}^{\beta+1}(c_n, c_{n+1})$, appartiennent aussi à H_α^β et à $H_\alpha^{\beta+1}$ qui par conséquent, sur le segment $c_n c_{n+1}$, coïncident respectivement avec les deux premiers. Donc, M appartient à $H_{\alpha-1}^{\beta+1}(c_n, c_{n+1})$. Les variations de g_α sur les contigus au dérivé H_α^β, situés sur $c_n c_{n+1}$, coïncident donc avec les variations sur les contigus au dérivé $H_{\alpha-1}^\beta(c_n, c_{n+1})$. Or, ces dernières ne convergent pas absolument en M. Enfin l'ensemble des points de non absolue convergence de la série des variations de g_α sur les contigus à H_α^β, cet ensemble étant fermé, contient toujours a et b et par suite coïncide avec $H_\alpha^{\beta+1}$ sur tout le segment ab.

Ajoutons à g_α la fonction $F^0(a, b)$. $f = g_\alpha + F^0$, fonction doublement nulle relativement à (a, b) et de coefficient au plus égal à 2, possède en tout point une dérivée finie φ. D'ailleurs, la dérivée de F^0 étant sommable sur tout segment intérieur à ab, sur un tel segment, les points de non-sommabilité de φ à l'intérieur de ab sont ceux de g_α, donc ceux de H_α. Leur ensemble, étant fermé, contient a et b, donc coïncide avec H_α sur tout le segment ab. Les variations de F^0 sur des intervalles deux à deux sans points communs et compris dans un même segment intérieur à ab forment une série absolument convergente. Donc, les variations de f sur les mêmes intervalles convergent ou non absolument en même temps que celles de g_α. Donc, quel que soit β inférieur à $\alpha - 1$, la série des variations de f sur les contigus à H_α^β est non absolument convergente au voisinage de chaque point de $H_\alpha^{\beta+1}$ intérieur à ab, et aussi en a et b, points limites des précédents; donc au voisinage de tout point de $H_\alpha^{\beta+1}$.

Supposons maintenant β égal à $\alpha - 1$. Alors, H_α^β est constitué par l'ensemble H_1 des points c_n, et $H_\alpha^{\beta+1}$ (ou H_α^α) ne comprend d'autres points que a et b. g_α étant nul sur H_1, les variations de f sur les contigus à H_1 sont celles de $F^0(a, b)$. Or ces dernières forment une série non absolument convergente en a et en b, seuls points constituant le dérivé H_α^α. Donc, la fonction f remplit toutes les conditions posées, sauf à la multiplier par un certain facteur au moins égal à $\frac{1}{2}$, pour que, doublement nulle relativement à (a, b), elle ait en plus le coefficient 1.

2° Supposons α *de seconde espèce*. Alors, nous nous donnons une suite $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots$, de nombres finis ou transfinis tendant vers α quand l'indice entier *positif* p croît. Ayant une suite quelconque d_n tendant vers a pour $n = -\infty$, vers b pour $n = +\infty$, sur les intervalles $d_p d_{p+1}$ et $d_{-p-1} d_{-p}$, nous posons respectivement

$$F^\alpha(a, b) = k\,F^{\alpha_p}(d_p, d_{p+1})$$

pour le premier, et

$$F^\alpha(a, b) = k\,F^{\alpha_p}(d_{-p-1}, d_{-p})$$

pour le second. k est choisi de façon que $F^\alpha(a, b)$, fonction doublement nulle relativement à (a, b) (et même relativement à l'ensemble des d_n), le soit avec le coefficient 1.

F^α est partout dérivable, a comme ensemble de non-sommabilité de sa dérivée $\Phi^\alpha(a, b)$ un certain ensemble H_α coïncidant sur le segment $d_p d_{p+1}$ ou $\sigma_p (p > 0)$ et sur $d_{-p-1} d_{-p}$ ou σ_{-p} avec les ensembles $H_{\alpha_p}(\sigma_p)$ et $H_{\alpha_p}(\sigma_{-p})$. H_α admet un dérivé d'ordre α_p constitué simplement par les points d_{-p-1}, d_{-p}, d_p, d_{p+1} sur le segment $d_{-p-1} d_{p+1}$, et par les dérivés $H_{\alpha_m}^{\alpha_p}(\sigma_m)$ et $H_{\alpha_m}^{\alpha_p}(\sigma_{-m})$ sur σ_m et σ_{-m} pour $m > p$. Donc le dérivé d'ordre α de H_α n'a aucun point intérieur à ab, puisque $H_\alpha^{\alpha_p+1}$ est nul sur l'intervalle $d_{-p-1} d_{p+1}$. Le dérivé $H_\alpha^{\alpha_p}$ contient d'ailleurs toujours a et b. H_α^α étant par définition l'ensemble des points communs aux $H_\alpha^{\alpha_p}$, existe donc et se réduit au couple a, b.

Soit β un nombre quelconque inférieur à α. Il y a un seul entier positif q défini par les conditions $\alpha_{q-1} < \beta \leqq \alpha_q$. H_α^β est constitué par les dérivés d'ordre β des ensembles $H_{\alpha_m}(\sigma_m)$ et $H_{\alpha_m}(\sigma_{-m})$ pour $m \geqq q$. Pour $p \leqq q - 1$, les dérivés d'ordre β de $H_{\alpha_p}(\sigma_p)$ et $H_{\alpha_p}(\sigma_{-p})$ n'existent pas. Les contigus à H_α^β sont d'une part les contigus à l'un des $H_{\alpha_m}^\beta(\sigma_{\pm m})$ pour $m \geqq q$, et, de plus, l'intervalle $d_{-q} d_q$ qui contient tous les intervalles σ_{-q+1} à σ_{q-1}. Sur ce dernier, la variation de $F^\alpha(a, b)$ est nulle, F^α étant nulle en tous les points d_p. Tout point M de $H_\alpha^{\beta+1}$ appartient à l'un au moins des $H_{\alpha_m}^{\beta+1}(\sigma_{\pm m})$ $(m \geqq q)$ et à deux au plus, par exemple à $H_{\alpha_r}^{\beta+1}(\sigma_r)$ $(r \geqq q)$. Les variations de $F^{\alpha_r}(\sigma_r)$ sur les contigus à $H_{\alpha_r}^\beta(\sigma_r)$ sont parmi les variations de $F^\alpha(a, b)$ sur les contigus à H_α^β. Les valeurs absolues des premières font une série divergente en M. Il en est donc de même des valeurs absolues des secondes autour du même point.

La fonction $F^\alpha(a, b)$ est donc formée, quel que soit α de première ou de deuxième espèce.

72. Progressons maintenant dans la suite des opérations totalisantes. Il est aisé de voir que l'*on peut se donner, pour l'ensemble parfait* P_1 *de la théorie générale, un ensemble parfait quelconque* K *et définir une fonction dérivée* φ *de manière que, dans chaque contigu à* K, *il faille, pour calculer la totale de* φ, *appliquer la troisième opération une transfinité de fois, d'ordre* α *donné d'avance quelconque.* En effet, sur tout intervalle u contigu à K, posons $f = F^\alpha(u)$. f sera

doublement nulle sur K et de coefficient 1, puisque F^α est doublement nulle et de coefficient 1 relativement aux extrémités de u. f a une dérivée dans tout contigu à K; f, doublement nulle sur K, possède sur cet ensemble la dérivée zéro. Soit φ la dérivée de f. φ a dans chaque intervalle u un ensemble de points de non-sommabilité réductible d'ordre α. Donc, l'ensemble Π_1 des points de non-sommabilité de φ sur le segment ab des points extrêmes de K, étant fermé, contient tous les points de K. Π_1 est réductible d'ordre α dans tout contigu à P_1.

Les variations absolues de f sur les contigus à $\Pi_1^\beta (\beta < \alpha)$ ont une somme divergente autour de tout point de $\Pi_1^{\beta+1}$, soit étranger à K, soit de première espèce sur K, donc enfin autour de tout point de $\Pi_1^{\beta+1}$ agrégé ou non à K. Il faut donc procéder à la troisième opération une transfinité de fois d'ordre α, pour avoir la totale de φ dans un contigu quelconque à K. Cela fait, cette dernière totale étant toujours nulle, et φ l'étant aussi sur K, la seconde opération appliquée une fois nous donne la totale de φ entre deux points quelconques de K, le résultat étant zéro.

La fonction f que nous venons de définir et sa dérivée φ seront respectivement notées $F_1^\alpha(K)$ et $\Phi_1^\alpha(K)$. L'indice inférieur de F_1^α indique l'inexistence des ensembles Π_2, P_2; l'indice supérieur α rappelle que l'ensemble Π_1 des points de non-sommabilité de $\Phi_1^\alpha(K)$ est, dans chaque contigu à K, réductible d'ordre α, et que les totales de Φ_α^1 dans les contigus à un dérivé Π_1^β non confondu avec K, satisfont à la condition de non absolue convergence, en tout point de $\Pi_1^{\beta+1}$.

En résumé, la possibilité de rencontrer tous les cas envisagés dans la théorie du calcul totalisant pour aboutir à la détermination de la totale dans chaque contigu à P_1 est démontrée, la fonction totalisée étant une dérivée finie sommable (et même nulle) sur P_1, choisi arbitrairement.

73. Montrons maintenant que les ensembles d'ordres suivants Π_2, P_2, ..., peuvent exister pour une fonction dérivée. Mais, comme ces ensembles sont définis par l'absence, en chacun de leurs points, de l'une au moins de deux conditions, supposant l'une de celles-ci toujours satisfaite sur P_1, montrons la possibilité que l'autre suffise à

entraîner la considération des ensembles Π_α, P_α, pour toute valeur donnée de α.

Nous atteindrons ce but en faisant, une certaine succession de fois, subir aux fonctions dérivables, l'une ou l'autre des deux transformations décrites ci-après. Tout d'abord, établissons la propriété suivante.

Étant donné un ensemble fermé Π_1 en tout point duquel une fonction f possède une dérivée, sur chacun des contigus, u ou $\gamma\delta$, de Π_1, intercalons une infinité de points de subdivision d_n sans autres points limites que γ et δ, de manière que la distance de deux points consécutifs de la division soit inférieure au carré des distances de chacun d'eux à γ et à δ. Donc nous supposons n positif, négatif ou nul croissant avec d_n, $d_{n+1}-d_n$ inférieur à la fois à $(d_n-\gamma)^2$ et à $(\delta - d_{n+1})^2$. Soit D_n le point figuratif de f en d_n. *Si une fonction h coïncide avec f sur Π_1 et aux points d_n, et si sur le segment $d_n d_{n+1}$, elle a son point figuratif dans le rectangle de côtés parallèles aux axes et de diagonale $D_n D_{n+1}$, h possède, en tout point de Π_1, une dérivée égale à celle de f.*

En effet, soit ξ un point de Π_1. Le quotient $\frac{h(x)-h(\xi)}{x-\xi}$, égal à $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ quand x est sur Π_1, tend bien vers $f'(\xi)$ si x tend vers ξ sans quitter Π_1.

Il faut montrer qu'il a la même limite quand x tend vers ξ hors de Π_1. Si x est étranger à Π_1, il est dans un certain intervalle u contigu à Π_1; et, dans u, x est sur un segment $d_p d_{p+1}$. D'après nos hypothèses, $h(x)$ est compris entre

$$h(d_p)=f(d_p) \qquad \text{et} \qquad h(d_{p+1})=f(d_{p+1}).$$

D'ailleurs $\frac{f(d_p)-f(\xi)}{d_p-\xi}$ et $\frac{f(d_{p+1})-f(\xi)}{d_{p+1}-\xi}$ tendent l'un et l'autre vers $f'(\xi)$ si d_p tend, sans rester en général dans le même intervalle u, vers ξ. $\frac{h(x)-h(\xi)}{x-\xi}$ est compris entre $\frac{f(d_p)-f(\xi)}{x-\xi}$ et $\frac{f(d_{p+1})-f(\xi)}{x-\xi}$. Mais $\frac{x-\xi}{d_p-\xi}$ et $\frac{x-\xi}{d_{p+1}-\xi}$ sont compris entre $\frac{d_p-\xi}{d_{p+1}-\xi}$ et son inverse. Or, si θ est l'extrémité de u, soit γ, soit δ, située du côté où se trouve ξ, les deux nombres précédents sont compris entre $\frac{d_p - \theta}{d_{p+1} - \theta}$ et son inverse. Je dis que ce dernier rapport tend vers 1. En effet, supposons par exemple ξ à droite de u. Alors $d_{p+1} < \theta \leqq \xi$ et

$$1 < \frac{d_p - \theta}{d_{p+1} - \theta} = 1 + \frac{d_{p+1} - d_p}{\theta - d_{p+1}} < 1 + (\theta - d_{p+1}) < 1 + (\xi - d_{p+1}).$$

En résumé, $\xi - d_{p+1}$ tendant vers zéro, la variation relative de h entre x et ξ, ne diffère que par un facteur tendant vers 1 de $\mathrm{VR}(f, d_p, \xi)$ et de $\mathrm{VR}(f, d_{p+1}, \xi)$. Ces deux nombres tendant vers $f'(\xi)$, il en est de même de $\mathrm{VR}(h, x, \xi)$, même quand x est étranger à Π_1. Donc, h a bien sur Π_1 une dérivée, la même que f.

Observons, et cette remarque nous sera utile plus loin, que, si h_1 coïncide avec f sur Π_1 et aux points d_n, mais si, au lieu de rester compris entre $f(d_n)$ et $f(d_{n+1})$ quand x est dans l'intervalle $d_n d_{n+1}$, si h_1 est alors seulement assujetti à ne pas s'éloigner de plus de $d_{n+1} - d_n$ de l'intervalle $f(d_n)$, $f(d_{n+1})$, ces hypothèses étant supposées vérifiées pour toutes les valeurs de n et dans tous les contigus à Π_1, h_1 a toujours une dérivée égale à celle de f aux points de Π_1. Il est en effet visible que $\mathrm{VR}(h_1, x, \xi)$ diffère, sur $d_n d_{n+1}$, des limites extrêmes de $\mathrm{VR}(h, x, \xi)$, de moins de $\frac{d_{n+1} - d_n}{|x - \xi|}$, qui tend vers zéro quand x tend vers ξ.

Étudions maintenant les deux types de transformations annoncées plus haut.

74. Montrons d'abord la possibilité de construire une fonction f *à dérivée présentant des zéros partout denses sur un segment* ab, *f prenant en a et b des valeurs données p, q inégales*, figurées par les points A, B, et *la courbe représentative de f étant inscrite dans le rectangle*, à côtés parallèles aux axes, *de diagonale* AB, cette courbe étant même située à une distance de AB inférieure à un nombre donné d'avance $\frac{b-a}{\mathrm{N}}$.

Nous avons défini (2^e Partie) des fonctions dérivées φ s'annulant dans tout intervalle entre 0 et 1. Une primitive F de φ, n'étant pas constante dans ce segment, y possède un minimum en k et un maximum en k'. Le changement de φ en $-\varphi$, ou de x en $1 - x$, permet de supposer

$k < k'$. En k et k', F prend respectivement des valeurs m et m' $(m < m')$ avec les points figuratifs correspondants M et M'. En k et k' la dérivée de F est nulle. Entre k et k', F est représenté par une courbe située dans le rectangle de côtés parallèles aux axes et de diagonale MM', les tangentes à la courbe en M et M' étant les côtés horizontaux du rectangle. La double substitution $\frac{x-a}{b-a}$ à $\frac{x-k}{k'-k}$, et $\frac{F-p}{q-p}$ à $\frac{F-m}{m'-m}$, nous donne une fonction

$$W_0 = p + \frac{q-p}{m'-m}\left\{F\left[k + \frac{k'-k}{b-a}(x-a)\right] - m\right\},$$

dont la courbe représentative entre a et b est inscrite dans le rectangle de diagonale AB, et tangente en A et B aux côtés horizontaux de ce rectangle. Enfin la dérivée de W_0 a des zéros denses sur tout le segment ab.

La fonction W_0 construite comme il vient d'être dit, sera désignée par les points figuratifs A, B qui la déterminent et notée $W(A, B)$. Deux fonctions W relatives à deux intervalles juxtaposés ab, bc, forment une fonction définie sur ac et admettant en tout point de ce segment une dérivée. Car en b, des deux côtés, cette fonction possède la dérivée zéro. En divisant la diagonale AB en N parties égales, et en formant pour chacune d'elles la fonction W correspondante, nous définissons sur ab une fonction f dont la dérivée s'annule en a, en b et en un ensemble partout dense, f ayant de plus sa courbe représentative entièrement comprise dans les N rectangles de côtés parallèles aux axes, et admettant pour diagonales les N subdivisions de AB. La distance d'un point quelconque de cette courbe à AB est inférieure à $\frac{b-a}{N}$.

75. Montrons en second lieu la possibilité de construire sur un segment $\alpha\beta$ une fonction f *unioscillante* (monotone), partout dérivable, prenant en α et β des valeurs p et q figurées par deux points donnés A, B, et *de manière que la dérivée φ de f soit nulle en tous les points d'un ensemble parfait donné d'avance,* épais ou non, ayant pour extrémités α et β.

La courbe figurative de f est donc située dans le rectangle de diagonale AB et de côtés parallèles aux axes. Elle touche en A et B les côtés inférieur et supérieur du rectangle, α et β étant agrégés à P. La fonction inverse de f, unioscillante sur le segment pq, présente une dérivée infinie aux points d'un ensemble parfait de mesure nulle d'extrémités p, q, et une dérivée finie partout ailleurs. Nous avons déjà construit une fonction de cette nature (1re Partie, n° 42). Les raisonnements faits à cette occasion nous justifieront de nous borner à énoncer une solution du présent problème.

Choisissons à notre gré une fonction infiniment petite en même temps que la variable indépendante, mais d'un ordre supérieur à celui de la variable, par exemple son carré (cette fonction, affectant u_n, paraîtra en coefficient numérique); puis une fonction définie entre o et 1, à dérivée finie et positive intérieurement à cet intervalle, et à dérivée unilatérale nulle en o et 1, par exemple $Y = \sin^2 \frac{\pi}{2} x$. Soit P un ensemble parfait d'extrémités α et β, u_n ou $\alpha_n \beta_n$ un de ses contigus, dont chacun a reçu un numéro d'ordre propre. x étant sur u_n, écrivons

$$u_n^2 \, Y\left(\frac{x - \alpha_n}{u_n}\right) = u_n^2 \sin^2 \frac{\pi(x - \alpha_n)}{2 u_n} = y_n(x).$$

Sur u_n, y_n croît de o à u_n^2.

Nous posons, selon une notation souvent expliquée,

$$y(x) = (\alpha \Sigma x) u_n^2 + \omega y_m(x),$$

ω étant nul si x est sur P, et égal à un si l'on a $\alpha_m < x < \beta_m$. La fonction y, on le voit sans peine, est continue, possède en tout point une dérivée finie, positive hors de P, nulle sur P. y est nul en α, égal à $\sum_1^\infty u_n^2 = l$ en β. Si les ordonnées de A et de B sont respectivement p et q, la fonction $f_0 = p + \frac{q-p}{l} y(x)$ remplit toutes les conditions posées. La variation de f sur P est définie et nulle, d'après l'expression de y.

Nous désignons par G(A, B, P) la fonction f_0 entièrement définie grâce au calcul précédent par les seuls points A et B et l'ensemble P.

76. Nos fonctions f admettent comme points de variation totale non bornée, tous ceux d'un ensemble fermé Π_1. Dans un intervalle u ou $\alpha\beta$ contigu à Π_1, nous prendrons des chaînes de points c_n, tendant vers β en croissant pour $n = +\infty$, vers α en décroissant pour $n = -\infty$, de manière que la variation de f entre c_n et c_{n+1} soit alternativement positive et négative, par exemple égale à $(-1)^n w_n$, w_n étant positif, et que la série w_n soit divergente pour n infini positif ou négatif, si f a une variation totale non bornée dans u, respectivement en α et en β. Puis, si la condition suivante n'est pas encore remplie, nous intercalons entre les points c_i des points subdivisionnaires d, de manière que la distance de deux points consécutifs de la subdivision totale obtenue soit inférieure au carré des distances de chacun d'eux à γ et à δ.

Soit d_n, n prenant toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, un point quelconque de la subdivision complète. Soit D_n le point figuratif de f en d_n. Si, entre d_n et d_{n+1}, nous substituons à f l'une ou l'autre des fonctions $W(D_n, D_{n+1})$ ou $G(D_n, D_{n+1}, Q_n)$, Q_n étant un ensemble parfait quelconque d'extrémités d_n, d_{n+1}, nous définissons ainsi une fonction h en tout point étranger à Π_1. Nous prenons $h = f$ sur Π_1.

h a une variation non bornée dans chaque contigu à Π_1 et aux deux extrémités de ce contigu, s'il en est ainsi pour f. h coïncide avec f sur Π_1 et aux points d_n; enfin h a partout une dérivée, coïncidant sur Π_1 avec f'. Nous avons établi plus haut ce dernier point et l'on montre par un raisonnement analogue, que, si f est doublement nul sur Π_1, h le sera également, avec un coefficient inférieur au produit du coefficient de f par une certaine constante numérique facile à calculer.

Si, à l'intérieur de certains contigus u à Π_1, f a une variation bornée, on prendra encore sur u une chaîne de points tendant vers les extrémités du contigu, satisfaisant toujours à la condition que l'écart de deux points consécutifs soit inférieur aux carrés de leurs distances à l'ensemble Π_1, et tels de plus que la somme des variations absolues de f sur chaque subdivision surpasse la moitié de la variation totale de f dans u. Comme ci-dessus, on substitue à f, dans chaque subdivision de chaque contigu u, la fonction F_1 déterminée par les deux points extrêmes de l'arc x, f se projetant sur cette subdivision. Et alors la fonction h, remplaçant f, coïncide avec f sur Π_1, a une dérivée égale à f' sur Π_1, une dérivée hors de Π_1, et h' a ses zéros partout denses entre les extrémités de Π_1. Enfin, en substituant h à f, nous ne changeons pas l'ensemble Π_1 des points de variation totale infinie pour la fonction considérée.

Il faut observer que si Π_1 est parfait, f peut être à variation totale bornée dans chaque contigu à Π_1, sans l'être au voisinage d'aucun point de Π_1. Par exemple, si la variation totale de f est 1 sur chaque contigu à Π_1, elle sera bien infinie autour de chaque point de Π_1 supposé parfait. D'ailleurs, le lecteur verra sans peine que, si les variations totales d'une fonction f dans les contigus à un ensemble parfait forment une série convergente, la condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction f soit à variation totale non bornée au voisinage de tout point de l'ensemble, est qu'elle soit à variation totale non bornée sur toute portion de cet ensemble. h prenant les mêmes valeurs que f sur Π_1, dans tous les cas possibles, la variation totale de h est non bornée au voisinage de tout point de Π_1.

Grâce aux constructions que nous venons de décrire, il nous sera possible de définir des fonctions dérivées possédant, relativement au calcul totalisant, des ensembles Π_2, P_2, ... de tout ordre donné d'avance, pour l'une ou pour l'autre séparément des deux causes susceptibles de déterminer l'existence de ces ensembles.

D'une façon précise, *dans un premier paragraphe* (n^{os} 77, 78, 79) *où nous supposons* φ *sommable sur* P_1, nous montrons que : 1° les variations absolues de la totale indéfinie f de φ dans les contigus à P_1 peuvent former une série divergeant au voisinage d'un ensemble fermé Π_2 agrégé à P_1 ; 2° il est possible de progresser, sans limite assignable *a priori* pour α, à des ensembles Π_α d'ordre transfini α donné quelconque, donc uniquement grâce à la divergence, au voisinage de Π_β, des variations absolues de f sur les contigus à P_β, quel que soit β inférieur à α. La première opération, sommation besgienne de φ sur P_1, pourra être effectuée une fois pour toutes, et son résultat sera le terme initial invariable auquel s'ajouteront transdéfiniment les résultats des opérations du second type, nécessitées par l'existence des Π_β. Seules, la seconde et la troisième opération auront à intervenir.

Au contraire, *dans un second paragraphe* (n^{os} 80, 81), nous construirons une dérivée φ admettant une chaîne d'ensembles Π_β jusqu'à l'ordre α inclusivement, *les totales de φ dans les contigus à P_β formant toujours une série absolument convergente*, $\Pi_{\beta+1}$ étant donc uniquement l'ensemble des points de P_β au voisinage desquels φ est non sommable sur P_β. Il sera ainsi démontré que la chaîne des $\Pi_{\beta+1}$ peut s'étendre sans limite susceptible d'être fixée *a priori*, aussi bien par le seul défaut de l'une des conditions que par le seul défaut de l'autre en certains points de P_β et relativement à ce dernier ensemble. Je laisserai au lecteur le soin de conclure que les deux conditions de définition de Π_β peuvent, jusqu'à tel ordre quelconque α donné d'avance, s'exercer simultanément ou dans une succession indifférente, échappant à toute règle (Note, p. 247).

77. Suivons le programme que nous venons de nous tracer et étudions-en la première partie. Nous réaliserons toujours, en vue de la sommabilité de φ sur P_β, la nullité de φ en tout point de P_1, sauf peut-être en un ensemble dénombrable.

Soit K un ensemble parfait quelconque. Nous nous donnons à volonté un nombre transfini λ. Nous définissons (72), sur le segment limité aux points extrêmes de K, une fonction $F_1^\lambda(K)$ et sa dérivée $\Phi_1^\lambda(K)$, cette dernière ayant un certain ensemble de non-sommabilité H dont K est (sur chacun de ses propres segments contigus) le dérivé d'ordre λ, les variations absolues de $F_1^\lambda(K)$ dans les contigus de H^β ayant une somme divergente en tout point de $H^{\beta+1}$, quel que soit β inférieur à λ. Nous savons que $F_1^\lambda(K)$ est doublement nulle sur K. $\Phi_1^\lambda(K)$ est donc nulle sur K, noyau de H; mais aux autres points de H, il est parfaitement possible que Φ_1^λ prenne des valeurs non nulles.

Nous allons faire de H et de K, respectivement les ensembles Π_2 et P_2 de la fonction φ à construire.

Soit $\gamma\delta$ ou u un contigu à H. Dans $\gamma\delta$, je place une chaîne de nombres croissants c_n, tendant vers γ pour $n=-\infty$, vers δ pour $n=+\infty$, et tels que la série des variations absolues de $F_1^\lambda(K)$ entre c_n et c_{n+1} : a) diverge pour $n=-\infty$, si la variation totale de F_1^λ est non bornée en γ du côté droit, b) diverge pour $n=+\infty$, si la même hypothèse est vérifiée en δ du côté gauche, c) ait une somme supérieure à la demi-variation totale de F_1^λ entre γ et δ, si cette variation est finie. Les points c_n étant placés, nous renforçons les propriétés précédentes en intercalant entre eux, s'il est nécessaire, de nouveaux points, de façon à former en tout une suite d_n, à seuls points limites γ et δ, et telle que $d_{n+1} - d_n$ soit inférieur à $(d_n - \gamma)^2$ et à $(\delta - d_{n+1})^2$.

Nous avons observé (73) que si en d_n et d_{n+1}, où les points figuratifs de F_1^λ seront notés D_n et D_{n+1}, nous remplaçons F_1^λ par une fonction continue quelconque dont le point représentatif est dans le rectangle de diagonale $D_n D_{n+1}$ et de côtés parallèles aux axes, si nous effectuons la même transformation de F_1^λ sur chacun des segments $d_n d_{n+1}$ et pour tous les intervalles contigus à l'ensemble fermé H, où nous ne modifions pas F_1^λ, nous obtenons une nouvelle fonction possédant en tout point de H la même dérivée que F_1^λ. Cette nouvelle fonction aura donc partout une dérivée si elle en possède une dans tout contigu à H.

Entre d_n et d_{n+1}, nous plaçons à notre gré un ensemble parfait $Q_n(\gamma, \delta)$ ayant pour extrémités d_n et d_{n+1}. Sur $d_n d_{n+1}$ nous substituons à F_1^λ la fonction $G[D_n, D_{n+1}, Q_n(\gamma, \delta)]$ (75) que nous désignons par $\theta_n(\gamma, \delta)$. θ_n a son point figuratif dans le rectangle de diagonale $D_n D_{n+1}$ et de côtés parallèles aux axes. θ_n a, dans $d_n d_{n+1}$, une dérivée partout finie, nulle sur $Q_n(\gamma, \delta)$. Cette dérivée est encore nulle en d_n et d_{n+1}, mais en ces derniers points, elle est seulement unilatérale et relative à l'intérieur de $d_n d_{n+1}$. La réunion des fonctions θ_n définies sur des champs juxtaposés, nous donne une fonction $\theta(\gamma, \delta)$ définie en tout point intérieur à $\gamma\delta$. Soit $Q(\gamma, \delta)$ la réunion des $Q_n(\gamma, \delta)$ accrue de γ et δ.

$Q(\gamma, \delta)$ est un ensemble parfait en tout point duquel, sauf peut-être aux d_n, en γ et en δ, $\theta(\gamma, \delta)$ a une dérivée bilatérale nulle. Aux points d_n nous avons remarqué que, sur $d_{n-1} d_n$ et sur $d_n d_{n+1}$, θ_{n-1} et θ_n ont la dérivée zéro pour les côtés respectifs droit et gauche. Donc zéro est encore en d_n une dérivée bilatérale de $\theta(\gamma, \delta)$. En γ et δ, la dérivée de $\theta(\gamma, \delta)$ existe et est égale à celle de F_1^λ. Quand un de ces points fait partie de K, cette dérivée y est encore nulle.

Enfin, les variations de $\theta_n(\gamma, \delta)$ sur les contigus à $Q_n(\gamma, \delta)$, c'est-à-dire les variations de $\theta(\gamma, \delta)$ sur les contigus à la portion de $Q(\gamma, \delta)$ limitée par d_n et d_{n+1}, sont toutes de mêmes signes, θ_n étant unioscillante sur $d_n d_{n+1}$, et ont une somme égale à la variation de θ_n entre d_n et d_{n+1}, puisque la variation de θ_n sur Q_n est nulle. θ_n coïncidant avec $F_1^\lambda(K)$ aux points d_n et d_{n+1}, la série σ des variations absolues de $\theta(\gamma, \delta)$ sur les contigus à Q est infinie au voisinage de γ et de δ, en même temps qu'en ces points la variation totale de $F_1^\lambda(K)$ est non bornée dans $\gamma\delta$. Si la variation totale de $F_1^\lambda(K)$ dans $\gamma\delta$ est infinie en un seul de ces points, la série σ diverge en ce même point, et si la variation totale de $F_1^\lambda(K)$ est bornée sur $\gamma\delta$, la série σ est convergente et a une somme supérieure à la moitié de cette variation totale.

Soit maintenant g la fonction égale à $F_1^\lambda(K)$ sur H et à $\theta(\gamma, \delta)$ dans un contigu quelconque $\gamma\delta$ de H. La réunion des $Q(\gamma, \delta)$ et de H forme un ensemble Q fermé sans points isolés, donc parfait. g admet en tout point une dérivée ψ, coïncidant avec celle de $F_1^\lambda(K)$ sur H, donc nulle sur K, et d'ailleurs nulle sur les $Q(\gamma, \delta)$, sauf éventuellement aux points γ, δ étrangers au noyau K, donc en tout, nulle sur Q sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable. Enfin, les variations absolues de g dans les contigus à Q forment une série divergente au voisinage de tous les points de H et de ceux-là seulement. Il suffira donc que Q soit l'ensemble P_1 relatif à la dérivée d'une fonction coïncidant avec g sur Q, pour que H et K soient respectivement les ensembles Π_2 et P_2 de cette même dérivée.

Observons que tout contigu à Q est contigu à un $Q_n(\gamma, \delta)$ et que g y est par suite unioscillante. Donnons-nous arbitrairement le nombre ordinal μ et ajoutons à g une fonction $F_1^\mu(Q)$. Soit f la somme obtenue et φ sa dérivée. $F_1^\mu(Q)$ est doublement nulle sur Q, sa dérivée $\Phi_1^\mu(Q)$, nulle sur Q, finie partout, a pour ensemble de points de non-sommabilité un certain ensemble H' réductible à l'ordre μ dans chaque contigu i de Q. Et, pour tout dérivé de H' d'ordre inférieur à μ, les variations absolues de $F_1^\mu(Q)$ sur les contigus de ce dérivé font une série divergente au voisinage de tous les points du dérivé suivant. Comme, sur i, g est unioscillante, l'ensemble de non-sommabilité de φ y coïncide avec H'. Et les variations de f sur une suite d'intervalles intérieurs à i, forment une série convergente ou divergente en même temps que les variations de $F_1^\mu(Q)$.

H' constitue l'ensemble Π_1 relatif à φ. Q noyau de H' est l'ensemble P_1 de φ. Le calcul des totales de φ dans les contigus à $Q = P_1$ nécessite, comme pour celles de $\Phi_1^\mu(Q)$, l'emploi de la troisième opération une transfinité de fois d'ordre μ.

Sur $Q = P_1$, f et g d'une part, leurs dérivées φ et ψ d'autre part, coïncident, $F_1^\mu(Q)$ étant doublement nul sur Q. Donc, d'une part, l'ensemble Π_1 relatif à φ coïncide avec H' sur tout contigu i à Q; donc, Q étant le noyau de H', Π_1 est identique à H', et P_1 à Q. D'autre part : 1° ψ est nul sur Q, sauf peut-être dans l'ensemble dénombrable des points de H non agrégés à K; par suite, sur son ensemble P_1, φ est sommable; 2° les variations absolues de f dans les contigus à P_1 ont, comme celles de g, une somme divergente au voisinage de tout point de H, qui est par suite l'ensemble Π_2 de φ. Nous calculons par la seconde opération la totale de φ sur chaque segment sans point commun avec $H = \Pi_2$, mais contenant des points de $Q = P_1$. Puis, par application bilatérale de la troisième opération, nous avons la totale de φ sur un contigu à Π_2.

f coïncidant sur Π_2 avec g et par suite avec $F_1^\lambda(K)$, il nous faut, pour passer des totales sur les contigus à Π_2 aux totales sur les contigus au noyau $K = P_2$ de H, appliquer la troisième opération une transfinité de fois d'ordre λ. On a alors les totales de f sur les contigus à K.

Ces dernières totales, égales aux variations de $F_1^\lambda(K)$, fonction doublement nulle sur K, valent zéro. Elles forment une série absolument convergente, de même que φ, nul sur $K = P_2$, est sommable sur P_2. Π_3 est nul. La variation de f entre deux points quelconques de $K = P_2$ s'obtient par la deuxième opération. C'est zéro.

78. Observons que f est doublement nulle relativement à K, et en particulier au couple (a, b). Nous désignerons par $f_2(K, Q, \lambda, \mu)$ la fonction f ramenée au coefficient 1 de double nullité relativement à (a, b). La dérivée de f_2 est nulle sur le noyau Q (sauf éventuellement en une exception dénombrable de points de non-sommabilité de f_2' sur Q). K et Q contiennent a et b. Ajoutons à Q une fonction du type $G(A, B, Q)$ déterminée par Q et par deux valeurs quelconques A, B, attribuées à G en a et b. La somme $4f_2 + G = F_2(K, Q, \lambda, \mu, A, B)$, partout dérivable, a sur Q une dérivée nulle, sauf éventuellement sur l'ensemble dénombrable des points de H étrangers à K. De plus, $4|f_2|$ étant inférieur à $4\dfrac{(x-a)^2(b-x)^2}{(b-a)^2}$ est moindre que $(b-a)^2$. Le point figuratif de F_2 est donc compris dans le rectangle obtenu en élevant et en abaissant de $(b-a)^2$, respectivement les côtés supérieur et inférieur du rectangle de diagonale AB et de côtés parallèles aux

axes. F_2 possède toutes les propriétés énumérées de f_2, sauf la double nullité sur K, laquelle est remplacée par la faculté avantageuse de prendre en a et b deux valeurs quelconques, le point représentatif de F_2 restant de plus compris dans des limites remarquables.

En résumé, la dérivée Φ_2 de F_2 possède des ensembles Π_1, P_1, Π_2, P_2. Elle est nulle sur P_1, sauf en une exception dénombrable de points. P_1 est noyau et dérivé d'ordre μ de Π_1. P_2, est le noyau et le dérivé d'ordre minimum λ de Π_2. β étant inférieur à μ, les variations absolues de F_2 sur les contigus à Π_1^β ont une somme divergente aux points de $\Pi_1^{\beta+1}$. Si β' est inférieur à λ, les variations absolues de F_2 sur les contigus à $\Pi_1^{\beta'}$ ont une somme divergente aux points de $\Pi_1^{\beta'+1}$. Enfin F_2 peut prendre en a et b des valeurs données, et la valeur de F_2 sur ab ne s'éloigne pas de l'intervalle de ces valeurs de plus de $(b-a)^2$.

79. Nous allons pareillement montrer la possibilité de définir sur un segment ab une *fonction* F_α, *dont la dérivée* Φ_α, partout existante et finie, *possède des ensembles* Π_β, P_β *jusqu'à un ordre donné d'avance* α *inclusivement*, F_α et Φ_α réalisant de plus les conditions suivantes :

1° Φ_α *est nulle sur* P_1 *sauf éventuellement en l'ensemble dénombrable* (et clairsemé) *constitué par la réunion des* $\Pi_\beta - P_\beta$, cette notation désignant l'agrégat des points de Π_β étrangers à P_β. Donc, Φ_α est sommable sur P_1, par suite aussi sur tous les P_β, et $\Pi_{\beta+1}$ est simplement l'ensemble des points de P_β au voisinage desquels les variations de F_α (ou totales de Φ_α) sur les contigus à P_β, font une série non absolument convergente.

2° Π_β *est, dans chaque contigu à* P_β, *réductible à l'ordre* $\lambda(\beta)$ *susceptible d'être donné pour chaque valeur de* β. (Cet ordre pourrait même changer d'un contigu à l'autre, mais nous devons borner la complication de nos exemples.) De plus, *les variations de* F_α ou totales de Φ_α *sur les contigus à* Π_β^μ *font une série non absolument convergente au voisinage de tout point de* $\Pi_\beta^{\mu+1}$, *quel que soit* μ *inférieur à* $\lambda(\beta)$.

3° *a et b appartiennent à* P_α, donc à P_β et à Π_β, quel que soit β inférieur à α.

4° F_α *peut prendre en a et b deux valeurs données d'avance p et q* représentées par deux points A, B, *le point figuratif de* F *étant*, soit *dans* le rectangle à côtés parallèles aux axes et de diagonale AB, soit *au-dessus ou au-dessous* de ce rectangle *à une distance* du côté le plus haut ou le plus bas *inférieure à* $(b-a)^2$.

Les fonctions $F_1 = F_1^\lambda(K) + G(K, A, B)$ (n^os^ 72 et 75) et $F_2 = F_2(K, L, \lambda, \mu, A, B)$ (n° 78) remplissent respectivement, pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$, les conditions imposées ci-dessus à F_α. Supposons réalisées les fonctions $F_{\alpha'}$ pour toutes les valeurs de α' inférieures à α, et de là passons à la fonction F_α.

Nous nous donnons à notre gré l'ensemble parfait K appelé à jouer le rôle de P_α, et le nombre fini ou transfini $\lambda(\alpha)$. Nous construisons une fonction $F_1^{\lambda(\alpha)}(K)$ dont la dérivée $\Phi_1^{\lambda(\alpha)}(K)$ admet un ensemble H de points de non-sommabilité, réductible à l'ordre $\lambda(\alpha)$ dans tout contigu à K. Et la condition de la divergence, au voisinage de tout point de $H^{\mu+1}$, des variations de $F_1^{\lambda(\alpha)}(K)$ sur les contigus à H^μ, est vérifiée quel que soit $\mu < \lambda(\alpha)$. Rappelons encore que $F_1^{\lambda(\alpha)}(K)$ est doublement nulle sur K. Donc, $\Phi_1^{\lambda(\alpha)}(K)$ est nul sur H, sauf peut-être en l'ensemble dénombrable $H - K$.

Dans chaque contigu $\gamma\delta$ à H, nous établissons, comme il a été dit pour la construction de F_2, une division croissante d_n tendant pour $n = -\infty$ vers γ, pour $n = +\infty$ vers δ, satisfaisant aux conditions

$$d_{n+1} - d_n < (d_n - \gamma)^2 \quad \text{et} \quad < (\delta - d_{n+1})^2,$$

et aussi à l'hypothèse fondamentale que les valeurs de $F_1^{\lambda(\alpha)}$ aux points d_n suffisent à déterminer, pour toute fonction continue coïncidant avec $F_1^{\lambda(\alpha)}$ en ces points, une variation totale infinie en tous les points de H. Alors pour toute valeur entière et positive de p, sur les intervalles $d_p d_{p+1}$, $d_{-p} d_{-p-1}$, nous remplaçons $F_1^{\lambda(\alpha)}(K)$ par des fonctions $F_{\alpha'}$ avec $\alpha' = \alpha - 1$, si α est de première espèce, avec $\alpha' = \alpha_p$, $\lim \alpha_p = \alpha$, si α est de deuxième espèce, ces fonctions $F_{\alpha'}$ prenant en $d_{\pm p}$ et $d_{\pm(p+1)}$ les valeurs de $F_1^{\lambda(\alpha)}(K)$. Soit $\theta_n(\gamma, \delta)$ la fonction $F_{\alpha'}$ ainsi définie sur $d_n d_{n+1}$, et soit f la fonction coïncidant avec $F_1^{\lambda(\alpha)}(K)$ sur H (et même aux points d_n), et avec $\theta_n(\gamma, \delta)$, sur le segment $d_n d_{n+1}$ de $\gamma\delta$. D'après les propriétés des fonctions $F_{\alpha'}$, la courbe représentative de $\theta_n(\gamma, \delta)$ ne sort pas à une distance supérieure à $(d_{n+1} - d_n)^2$ du rectangle de diagonale $D_n D_{n+1}$. Donc f admet partout une dérivée φ, et celle-ci est égale à $\Phi_1^{\lambda(\alpha)}$ sur H. D'après la définition de f hors de H, f est doublement nulle sur K, et φ admet pour ensembles Π_β, P_β, quel que soit β inférieur à α, la réunion des mêmes ensembles relatifs aux dérivées des $\theta_n(\gamma, \delta)$, accrus de leurs points limites, c'est-à-dire accrus de H.

Supposons α *de première espèce*. $P_{\alpha-1}$ est constitué sur chaque $d_n d_{n+1}$ par un certain ensemble parfait $K_n(\gamma, \delta)$ contenant d_n et d_{n+1}. $P_{\alpha-1}$ est donc la réunion des $K_n(\gamma, \delta)$ et de H.

Étudions les variations $\omega_{\alpha-1}$ de f sur les contigus à $P_{\alpha-1}$. Π_α étant nul pour $\theta_n(\gamma, \delta)$, qui est du type $F_{\alpha-1}$, les variations $\omega_{\alpha-1}$ de $f = \theta_n(\gamma, \delta)$ dans les contigus à $K_n(\gamma, \delta)$ font une série absolument convergente. De même, sur un segment σ intérieur à $\gamma\delta$, $P_{\alpha-1}$ coïncidant avec la réunion d'un nombre fini de $K_n(\gamma, \delta)$ et f avec un nombre fini de $\theta_n(\gamma, \delta)$ relatifs à des champs juxtaposés, sur ce segment σ, la série $\omega_{\alpha-1}$ est encore absolument convergente. Mais la somme des variations de $\theta_n(\gamma, \delta)$ sur les contigus à $K_n(\gamma, \delta)$ est égale à la variation v_n de $f = \theta_n(\gamma, \delta)$ sur $d_n d_{n+1}$, puisque la variation de θ_n sur $K_n(\gamma, \delta)$ où $\varphi = 0$, est nulle. $|v_n|$ est donc au plus égal à $(d_n \Sigma d_{n+1})|\omega_{\alpha-1}|$, en désignant ainsi la somme des variations absolues de f sur les contigus à $P_{\alpha-1}$, situés entre d_n et d_{n+1}, donc sur les contigus à $K_n(\gamma, \delta)$. Or, f coïncidant avec $F_1^{\lambda(\alpha)}(K)$ en d_n, v_n est la variation de $F_1^{\lambda(\alpha)}(K)$ entre d_n et d_{n+1}. La série $|v_n|$ diverge par hypothèse. Donc la série $|\omega_{\alpha-1}|$, convergente sur tout segment sans points communs avec H, diverge en tous les points de H, qui constitue par suite l'ensemble Π_α de φ.

Le noyau K de H est l'ensemble P_α. f coïncidant avec $F_1^{\lambda(\alpha)}(K)$ sur H, φ est nulle sur K.

Supposons α *de seconde espèce*. Soit σ un segment quelconque intérieur à $\gamma\delta$, les extrémités de σ appartenant à des segments $d_n d_{n+1}$ dont les indices ont pour plus grande valeur absolue un certain entier m. Les ensembles Π_β, P_β relatifs à φ, coïncidant sur chaque intervalle $d_n d_{n+1}$ avec les ensembles de même indice relatifs à $\theta'_n(\gamma, \delta)$, les premiers ont des points, sur σ, pour toutes les valeurs de β au plus égales à α_m. Et, sur σ, les P_β d'indice supérieur à α_m sont nuls. Donc, Π_α n'a aucun point intérieur à $\gamma\delta$. D'ailleurs H fait partie de tous les P_β pour $\beta < \alpha$. Donc, d'après la définition de Π_α, H coïncide avec Π_α. K, noyau de H, est P_α.

Dans tous les cas, φ est nul sur P_α. f est, comme $F_1^{\lambda(\alpha)}(K)$, doublement nulle sur K, et en particulier relativement au couple (a, b).

Pour passer de f à une fonction F_α représentée en a et b par deux points A, B, il nous suffit d'ajouter à Cf, C étant une constante numérique choisie telle que $C|f| < (b-a)^2$, une fonction $G(P_1, A, B)$ unioscillante, à dérivée nulle sur l'ensemble P_1 relatif à φ, et possédant pour points figuratifs extrêmes A et B. La somme $Cf + G$ est une fonction F_α remplissant avec sa dérivée Φ_α toutes les conditions exigées. En particulier, Φ_α est nul sur P_1 sauf en un ensemble dénombrable de points

$$(\Pi_1 - P_1) + (\Pi_2 - P_2) + \ldots + (\Pi_\beta - P_\beta) + \ldots + (\Pi_\alpha - P_\alpha).$$

Et alors Φ_α, sommable sur P_1, ne pourra cependant être totalisé que par une transfinité d'ordre α d'opérations du second type, deux d'entre elles, de rang β et $\beta + 1$, étant séparées par des opérations du troisième type en transfinité d'ordre $\lambda(\beta + 1)$, variable avec β si on le veut.

80. Plaçons-nous maintenant au *second point de vue*. Réalisons des fonctions dérivées φ possédant des ensembles Π_β jusqu'à un ordre α donné d'avance, avec cette condition que *les totales de φ dans les contigus à P_β forment, pour chaque valeur de β, une série absolument convergente* (nous les ferons toutes nulles), $\Pi_{\beta+1}$ *étant donc exclusivement l'ensemble des points de P_β au voisinage desquels φ est non sommable sur* P_β. Donc, ayant calculé la totale de φ (ou la variation d'une primitive f de φ) dans chaque contigu à P_β, nous obtenons simplement par une sommation besgienne sur P_β, la variation de f entre deux points quelconques de P_β dont le segment ne contient aucun point de $\Pi_{\beta+1}$.

Nous nous arrangerons en outre pour que *les totales de φ dans les contigus à Π_β^μ fassent une série divergente au voisinage de tous les points de* $\Pi_\beta^{\mu+1}$, μ allant pour chaque valeur de β jusqu'à un ordre transfini $\lambda(\beta)$ *fixé librement d'avance*. Dès lors, à partir des variations de f sur les contigus à Π_β, il nous faudra, pour avoir la variation de f entre les extrémités d'un même contigu à P_β, effectuer une transfinité de fois d'ordre $\lambda(\beta)$, la troisième opération des passages à la limite.

Partons de la fonction $F_1^{\lambda''}(K)$ et de sa dérivée $\Phi_1^{\lambda''}(K)$, dont l'ensemble H de non-sommabilité a pour noyau K, sur lequel $F_1^{\lambda''}$ est doublement nulle (72). K et H ont pour extrémités a et b. Sur tout segment contigu à K, H est réductible d'ordre λ'', le dérivé $H^{\lambda''}$ étant, sur ce même contigu, constitué par les extrémités de ce segment. Et les variations absolues de $F_1^{\lambda''}(K)$ sur les contigus à H^{μ} divergent au voisinage de tout point de $H^{\mu+1}$, quel que soit μ inférieur à λ''.

Cela posé, nous remplaçons $F_1^{\lambda''}(K)$ par une fonction g, coïncidant avec $F_1^{\lambda''}$ sur H et en des points suffisant à déterminer l'infinitude de la variation totale de $F_1^{\lambda''}$ au voisinage des points de H, g présentant de plus ce caractère, que sa dérivée ψ, partout existante et coïncidant avec ψ sur H, ait des zéros partout denses entre les extrémités a et b de K (et de H). Comme φ, ψ s'annule en tout point de K. D'autre part, sur tout segment, g a une variation bornée ou non en même temps que f. Donc l'ensemble de non-sommabilité de ψ est identique à H. La possibilité de déduire g de $F_1^{\lambda''}$ a été démontrée quelques pages plus haut (n° 76).

Mais nous savons transformer le segment ab en un ensemble parfait R, par insertion d'une certaine infinité d'intervalles u_n (2e Partie, n° 10) en des points a_n partout denses sur ab, choisis à notre gré dans le résiduel des points de continuité de ψ. Nous prendrons tous les a_n hors de H. L'ensemble R, formé des points non intérieurs à ces intervalles, possède pour mesure $b-a$ et est ainsi disposé que, si l est la longueur de R entre son extrémité gauche α et un point variable x, moyennant

$$G(x) = g(a+l),$$

G est partout dérivable, et l'on a

$$G'(x) = g'(a+l) = \psi(a+l).$$

Dans les contigus à R, G est constante, la valeur correspondante de $a+l$ est l'abscisse sur ab d'un zéro de $g' = \psi$, ce qui est conforme à la nullité de G' dans ce contigu. Il y a correspondance directe et inverse, uniforme et croissante, entre les points de R et ceux de ab, sauf pour une infinité dénombrable de points de ab, savoir les points a_n où ont été insérés les intervalles u_n, et auxquels correspondent indifféremment, sur R, les deux extrémités de u_m.

Les a_n étant étrangers à H, tous les points de H ont sur R des homologues bien déterminés, points de seconde espèce de R, formant un ensemble fermé H′. L'homologue de K est le noyau K′ de H′. Deux ensembles correspondants, sur R et sur ab, ont même mesure, indépendante de la détermination précise du premier, puisque l'ambiguïté de celui-ci n'affecte que des points en infinité dénombrable, sans influence sur la mesure. Comme, aux points homologues de R et de ab, les fonctions g et G prennent les mêmes valeurs, ainsi que leurs dérivées, ces dernières seront en même temps sommables ou non, sur deux ensembles homologues.

Sur tout segment sans points communs avec H, $\psi(a+l)$ est sommable. Il en est donc de même sur l'ensemble homologue, constitué par une portion de R. Mais sur une portion de R contenant à son intérieur un point de H′, $G'(x)$ ne peut pas être sommable, car à cette portion correspond, sur ab, un segment contenant un point de H, et sur lequel ψ est non sommable. Donc, H′ est l'ensemble des points de non-sommabilité de G′ sur R.

La variation v de G sur R entre deux points quelconques est égale à la variation linéaire de G entre ces deux points, puisque les variations de G sur tous les contigus à R sont nulles. v sera donc la variation de g entre les points correspondants de ab.

Observons enfin que la distance de deux points x étant supérieure à celle des deux points $a+l$ correspondants (l'excès est égal à la somme des contigus à R compris entre les deux points x), G est doublement nulle relativement à K′, puisque $F_1^{\lambda''}(K)$ et g le sont relativement à K.

Ajoutons à G une fonction $F_1^{\lambda'}(R)$ (n° 72). Soit f leur somme. f a une dérivée, puisqu'il en est ainsi de G et de $F_1^{\lambda'}$. $F_1^{\lambda'}$ est doublement nulle sur R, f coïncide donc avec G sur R. Dans un contigu à R, f ne diffère de $F_1^{\lambda'}(R)$ que par une constante additive. φ, dérivée de f, coïncide avec G′ sur R, et avec $\Phi_1^{\lambda'}(R)$ hors de R. L'ensemble des points de non-sommabilité de $\Phi_1^{\lambda'}(R)$ est un ensemble H_1 de noyau R et réductible d'ordre λ' dans chaque contigu à R. Les points de H_1 non agrégés à R, donc intérieurs à un contigu à R, sont des points de non-sommabilité pour φ, qui coïncide dans ce contigu avec $\Phi_1^{\lambda'}$. Donc, l'ensemble Π_1, relatif à φ, contient tous les points de H_1 étrangers à R, puis les points limites des précédents, donc R en plus; en résumé Π_1 coïncide avec H_1 et P_1 avec R.

Sur un contigu à R, f ne diffère de $F_1^{\lambda'}$ que par une constante additive. Pour calculer la totale de φ sur les contigus à $P_1 = R$, à partir des totales de φ sur les contigus à H_1, il nous faudra, comme pour $\Phi_1^{\lambda'}$, appliquer une transfinité de fois d'ordre λ' la troisième opération. G étant constante sur ces contigus et $F_1'(R)$ étant doublement nul sur R, la totale de φ dans les contigus à R sera trouvée égale à zéro.

R constitue P_1. Dans les contigus à P_1, les totales de φ forment une série absolument convergente, puisque tous les termes en sont nuls. Π_2 sera donc, s'il existe, l'ensemble des points de non-sommabilité de φ sur R. Mais sur R, φ coïncide avec G'. Π_2 est donc H', et P_2 noyau de Π_2 est K'.

Nous avons la totale de φ sur un segment j sans points communs avec $H' = \Pi_2$, par la sommation besgienne de φ sur la portion de $R = P_1$ située sur ce segment. φ coïncidant avec G' sur R, et G' étant nul hors de R, nous trouvons pour résultat la variation de G sur le segment j, ou celle de g sur le segment homologue de ab. Nous obtenons alors par un passage à la limite, la totale de φ sur un intervalle contigu à $H' = \Pi_2$, égale à la variation de g sur le contigu homologue à H, donc à la variation de $F_1^{\lambda''}(K)$ sur ce dernier intervalle.

Pour passer à la totale de φ sur les contigus à $K' = P_2$, nous devons donc effectuer les mêmes opérations que pour passer des totales de $\Phi_1^{\lambda''}(K)$ trouvées sur les contigus à H, aux totales de cette même fonction sur les contigus à K. Ceci nécessite l'emploi de la troisième opération, une transfinité de fois d'ordre λ''.

Les totales de φ calculées sur les contigus à $K' = P_2$ sont trouvées nulles. φ étant nul sur K', le calcul totalisant est achevé. Π_3 et P_3 sont inexistants.

81. Rappelons que f est doublement nul sur K, donc *a fortiori*, relativement au couple des points extrêmes de K. On peut rendre égal à un le coefficient de nullité de f. Soit $G_2(a, b)$ la fonction obtenue. Conservant toutes les notations de la page 232, nous disposons une fonction $G_2(u)$ sur chacun des contigus u à R, et définissons une fonction f égale à G sur R, et à $G_2(u) + G$ sur u, où G est constant. La

dérivée φ de f admettra R dans son ensemble P_2, donc possédera H′ et K′ pour ensembles Π_3 et P_3. Dans les contigus aux ensembles P_1 et P_2 de φ, qui sont tous des contigus aux P_1 et P_2 relatifs aux $G'_2(u)$, f a, comme les G_2, une variation nulle.

Π_3 est uniquement l'ensemble des points de P_2 où la dérivée φ de f est non sommable sur P_2, comme Π_2 est l'ensemble des points de non-sommabilité de φ sur P_1.

De plus, pour passer des totales de φ sur les contigus à Π_1, Π_2 ou Π_3, respectivement aux totales de φ sur les contigus à P_1, P_2 ou P_3, il faut employer la troisième opération des transfinités de fois λ_1, λ_2 ou λ_3, qu'il est entièrement loisible de choisir d'avance.

Supposons généralement définie sur ab, pour toutes les valeurs de ν inférieures à un nombre α donné, une fonction $g_\nu(a, b)$ dont la dérivée $\psi_\nu(a, b)$ possède des ensembles Π_β, P_β pour tous les indices au plus égaux à ν, avec ces conditions que : 1° *la variation de* g_ν *dans tout contigu à* P_β *est nulle, donc* $\Pi_{\beta+1}$ *est uniquement l'ensemble des points de* P_β *où* ψ_ν *n'est pas sommable ;* 2° *les extrémités de* P_ν *coïncident avec a et b*, et g_ν est *doublement nulle* de coefficient 1 relativement à P_ν; 3° les totales de ψ_ν sur les contigus à Π_β une fois calculées, il faut, pour passer aux totales de ψ_ν sur les contigus à P_β, employer (68, 72) *une transfinité de fois d'ordre* $\lambda(\beta)$ *la troisième opération*, $\lambda(\beta)$ pouvant être choisi à volonté pour toutes les valeurs de β au plus égales à ν.

Passons maintenant à g_α. Nous considérons la fonction G construite à la page 232 pour la valeur particulière $\lambda'' = \lambda(\alpha)$.

Si α est de première espèce, sur chaque intervalle u contigu à R, nous construisons une fonction $g_{\alpha-1}(u)$. Une fonction égale à G sur R, et à $G+g_{\alpha-1}(u)$ sur u, est, à un facteur numérique près supérieur à $\frac{1}{2}$, une fonction g_α.

Si α est de deuxième espèce, soit α_p une suite tendant vers α. Nous plaçons sur u une fonction $g_{\alpha_p}(u)$, p étant choisi égal à la valeur, à une unité près, de l'inverse de la distance de u à H′. De cette façon, les indices α_p utilisés sont en nombre fini au voisinage de tout point de R étranger à H′ (la dérivée de G est sommable autour d'un tel point), et en infinité au voisinage de tout point de H′. g, égal à G sur R et à $g_{\alpha_p}(u) + G$ sur u, possède visiblement une dérivée ψ; et les ensembles Π_β ou P_β, relatifs à ψ pour les diverses valeurs de β inférieures à α, ont en commun les points de H′ et ceux-là seulement. H′ est donc Π_α et $K' = P_\alpha$. Le lecteur s'assurera sans peine que la fonction g est, à un coefficient numérique près, une fonction g_α sur le segment ab des points extrêmes de K.

82. Nous avons donc obtenu séparément des fonctions dérivées φ admettant des ensembles caractéristiques Π_β, P_β jusqu'à un ordre transfini loisiblement donné α; φ étant, dans le premier cas, sommable sur P_1 et par suite sur P_β quel que soit $\beta < \alpha$, mais ayant sur les contigus à P_β des totales dont la série des valeurs absolues n'est point convergente, $\Pi_{\beta+1}$ étant l'ensemble de leurs points de divergence. Dans le second cas, les totales de φ sur les contigus à P_β forment toujours une série absolument convergente, mais φ est non sommable sur P_β, précisément au voisinage des points de $\Pi_{\beta+1}$.

On déduira sans peine de là des fonctions φ pour lesquelles les points de $\Pi_{\beta+1}$ seront agrégés à ce dernier ensemble pour une seule des deux causes ci-dessus, tantôt l'une, tantôt l'autre, ou pour les deux simultanément, les modalités de la détermination des Π_β étant assignables à volonté d'avance (*voir* la note de la page 207). On aura de plus, pour chaque valeur de β, la faculté de choisir l'ordre $\lambda(\beta)$ de la transfinité d'opérations du troisième type, nécessaires pour passer des totales de φ sur les contigus à Π_β aux totales de φ sur les contigus à P_β.

Je n'insiste pas davantage sur la réalisation de ces fonctions φ, des explications complètes exigeant une profusion de détails, beaucoup plus faite pour obscurcir le sujet que pour en éclairer les conclusions, dont la vérité ne saurait faire de doute, après les exemples construits dans les deux cas fondamentaux étudiés. En résumé, la recherche des fonctions primitives, principale application du calcul totalisant, ne comporte, pour l'ensemble des dérivées servant de données à ce calcul, aucune limitation possible aux ordres transfinis jusqu'où les opérations doivent être répétées, d'après la théorie générale de la totalisation.

TABLE DES MATIÈRES.

Chapitre II. — *Le calcul totalisant* (1917).