ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES GIRAUD

Sur les groupes des transformations semblables arithmétiques de certaines formes quadratiques quinaires indéfinies et sur les fonctions de trois variables indépendantes invariantes par des groupes isomorphes aux précédents

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 33 (1916), p. 331-362
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1916_3_33__331_0>

SUR LES GROUPES
DES
TRANSFORMATIONS SEMBLABLES ARITHMÉTIQUES
DE CERTAINES
FORMES QUADRATIQUES QUINAIRES INDÉFINIES
ET SUR LES
FONCTIONS DE TROIS VARIABLES INDÉPENDANTES
INVARIANTES PAR DES GROUPES ISOMORPHES AUX PRÉCÉDENTS,

PAR M. GEORGES GIRAUD.

1. Le but du présent Mémoire est de compléter certains points d'un travail antérieur [1] où étaient considérés en particulier des groupes analogues au groupe des transformations du premier ordre des périodes normales des fonctions abéliennes de genre deux; ces groupes proviennent des transformations semblables arithmétiques de formes quadratiques quinaires avec trois carrés positifs et deux négatifs. Les résultats essentiels du présent Mémoire peuvent s'énoncer ainsi :

On peut prendre pour polyèdre fondamental de ces groupes un polyèdre qui n'a qu'un nombre fini de points réels; ce polyèdre n'a sur son contour des points imaginaires de la surface

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = 0$$

---

[1] *Thèses de la Faculté des Sciences de Paris*, 1916, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 1915, particulièrement Chapitre VII; plusieurs emprunts seront faits aux notations de ce travail.

que si la forme quadratique considérée, égalée à zéro, représente une quadrique de l'espace à quatre dimensions qui a des génératrices rectilignes rationnelles.

Les génératrices que nous nommons *rationnelles* sont celles dont les trois équations sont à coefficients rationnels.

Les fonctions invariantes par un de ces groupes, et qui sont formées à l'aide de séries thêta, sont liées quatre à quatre par des relations algébriques.

Les méthodes employées dans ce qui va suivre sont tout à fait analogues à celles qui ont servi dans un autre travail (1) pour la question correspondante relative aux formes quaternaires et aux fonctions hyperabéliennes.

2. Avant de commencer la démonstration des résultats précédents, nous allons revenir rapidement sur la méthode qui nous avait servi (2) à voir que le prolongement analytique de ces fonctions invariantes ne peut pas sortir du domaine (I).

Tout d'abord, démontrons qu'au voisinage de tout point réel de la quadrique

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0 \tag{1}$$

se trouvent une infinité de points qui n'appartiennent à aucune génératrice rationnelle de la quadrique, et dont les coordonnées, sans être rationnelles, appartiennent à un même corps quadratique. Nous n'avions pas insisté sur ces deux faits, indispensables pour la rigueur, que les points ne sont ni rationnels ni sur des génératrices rationnelles.

Nous pouvons admettre que f a un terme en x_1^2 : soit a son coefficient. Si alors x_2, x_3, x_4, x_5 sont entiers, et si x_1 est déterminé par l'équation (1), x_1 ne peut être rationnel que si son dénominateur est a ou un diviseur de a. Or, soient ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 les coordonnées

(1) *Annales de l'École Normale*, 1916, p. 303.

(2) *Thèse*, Chap. VII, n° 4.

du point dont il s'agit d'approcher :

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) = 0.$$

On peut évidemment supposer que ces nombres ne sont liés par aucune relation linéaire à coefficients entiers; sinon, on les remplacerait par des nombres voisins. Soit ε un nombre positif quelconque, plus petit que $\frac{|\xi_5|}{2}$; nous pouvons trouver cinq entiers x'_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tels que

$$(2)\quad \begin{cases} \left| x'_1 \xi_5 - a x_5 \xi_1 - \dfrac{\xi_5}{2} \right| < \varepsilon, \\ |x_2\xi_5 - x_5\xi_2| < \varepsilon, \qquad |x_3\xi_5 - x_5\xi_3| < \varepsilon, \qquad |x_4\xi_5 - x_5\xi_4| < \varepsilon. \end{cases}$$

D'autre part, pour l'une des racines de l'équation (1), où l'on a remplacé x_2, x_3, x_4, x_5 par les valeurs qui satisfont aux conditions (2), on a, dès que ε est assez petit,

$$|x_1\xi_5 - x_5\xi_1| < k\varepsilon,$$

k ne dépendant que des ξ et des coefficients de f. Il est alors visible, d'après la première équation (2), que, si ε est assez petit, x_1 ne saurait être une fraction de dénominateur a, puisque, pour ces fractions, $|x_1\xi_5 - x_5\xi_1|$ serait forcément supérieur à $\frac{|\xi_5|}{2a} - \frac{\varepsilon}{a}$. Donc x_1 est irrationnel. Le point $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ n'est donc pas rationnel; il n'appartient pas non plus à une génératrice rectiligne rationnelle : car, x_1 étant la seule coordonnée irrationnelle, les équations de cette génératrice ne devraient pas contenir x_1, ce qui ne s'accorde pas avec la présence d'un terme en x_1^2 dans f. Notre proposition est démontrée.

Dans la suite de la même démonstration du travail précédent, nous avons exécuté sur x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 une transformation linéaire de déterminant *un*, à coefficients entiers, de manière à mettre le point précédent sous la forme $(0, 0, 0, \xi_4, \xi_5)$. Nous avons avancé alors que la forme $f(0, 0, 0, x_4, x_5)$ est indéfinie; nous aurions dû ajouter que son discriminant n'est pas carré parfait, point indispensable pour la suite. On le démontre facilement ainsi : cette forme n'est certainement pas définie, puisqu'elle s'annule pour $x_4 = \xi_4, x_5 = \xi_5$. Il reste donc quatre cas à examiner :

1° La forme est indéfinie, son discriminant n'étant pas carré parfait;
2° La forme est indéfinie, son discriminant étant carré parfait;
3° La forme est le carré d'une forme linéaire;
4° La forme est identiquement nulle.

Or, la deuxième hypothèse et la troisième sont à écarter, car elles entraîneraient que $\frac{\xi_4}{\xi_5}$ soit rationnel, ce qui n'est pas. La quatrième hypothèse ne convient pas davantage, car le point $(0, 0, 0, \xi_4, \xi_5)$ serait alors sur une génératrice rationnelle, la génératrice

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

La première hypothèse a donc forcément lieu, comme nous voulions le démontrer.

3. Ce point réglé, venons maintenant à la démonstration des vérités annoncées en commençant. Pour former le polyèdre fondamental de nos groupes, nous allons appliquer la méthode de la réduction continuelle, qui a déjà été employée avec succès dans les questions analogues. Nous prendrons les conditions de réduction de MM. Korkine et Zolotareff.

Soit $F(\lambda, \mu, \nu, \pi, \varkappa)$ la forme quadratique considérée; nous supposerons que c'est l'adjointe d'une forme $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, de discriminant Δ, et à coefficients entiers; la forme f existe toujours, si l'on a pris tout d'abord la précaution de multiplier tous les coefficients de F par un entier convenable. En supposant que $\lambda, \mu, \nu, \pi, \varkappa$ soient des nombres complexes tels que

$$F(\lambda, \mu, \nu, \pi, \varkappa) = 0, \tag{3}$$

$$\lambda_0 \frac{\partial F}{\partial \lambda} + \mu_0 \frac{\partial F}{\partial \mu} + \nu_0 \frac{\partial F}{\partial \nu} + \pi_0 \frac{\partial F}{\partial \pi} + \varkappa_0 \frac{\partial F}{\partial \varkappa} < 0, \tag{4}$$

nous considérons, à la suite d'Hermite, la forme définie

$$(5)\quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -\frac{\lambda_0\dfrac{\partial F}{\partial\lambda} + \mu_0\dfrac{\partial F}{\partial\mu} + \nu_0\dfrac{\partial F}{\partial\nu} + \pi_0\dfrac{\partial F}{\partial\pi} + \varkappa_0\dfrac{\partial F}{\partial\varkappa}}{4\Delta} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$
$$+ 2\,\text{norme}\,(\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 + \pi x_4 + \varkappa x_5),$$

dont nous avons à faire la réduction continuelle.

4. Supposons que cette forme φ soit réduite pour certaines valeurs de λ, μ, ν, π, $\varkappa$; et supposons que les points de la quadrique (3) pour lesquels elle est réduite aient pour point d'accumulation un certain point réel de la même quadrique : ce point a pour coordonnées (0, 0, 0, 0, 1), et par suite F n'a pas de termes en $\varkappa^2$; la démonstration se fait comme pour les formes quaternaires, nous ne les recommencerons donc pas.

5. Supposons maintenant que les points pour lesquels φ est réduite aient pour point d'accumulation un point imaginaire de la surface

$$\lambda_0\frac{\partial F}{\partial\lambda} + \mu_0\frac{\partial F}{\partial\mu} + \nu_0\frac{\partial F}{\partial\nu} + \pi_0\frac{\partial F}{\partial\pi} + \varkappa_0\frac{\partial F}{\partial\varkappa} = 0.$$

Alors la quadrique admet la génératrice rectiligne rationnelle

$$(6)\qquad \lambda = \mu = \nu = 0,$$

et le point imaginaire est sur cette génératrice : la démonstration est encore analogue à celle du fait correspondant pour les formes quaternaires.

6. Ceci nous amène à porter notre attention sur les points et sur les génératrices rationnels de nos quadriques de l'espace à quatre dimensions. On sait que ces quadriques ont toujours des points rationnels. Demandons-nous comment nous reconnaîtrons si elles ont des génératrices rationnelles.

Supposons que la quadrique

$$(7)\qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0$$

admette une génératrice rationnelle. Sur cette génératrice, nous pouvons évidemment trouver une infinité de points rationnels; choisissons-en un. Par une transformation linéaire à coefficients entiers de déterminant *un* portant sur x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, nous pouvons faire en sorte que ce point ait pour coordonnées o, o, o, o, 1. La quadrique prend la forme

$$2(ax_1+bx_2+cx_3+dx_4)x_5+f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)=0.$$

Par une nouvelle transformation de même sorte, portant sur les variables x_1, x_2, x_3, x_4 seulement, nous pouvons ramener cette équation à

$$2mx_1x_5+f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)=0;$$

mettons en évidence tous les termes qui contiennent x_1, nous obtenons une équation telle que

$$(8)\qquad x_1(ax_1+2bx_2+2cx_3+2dx_4+2mx_5)+\psi(x_2, x_3, x_4)=0,$$

a, b, c, d n'ayant pas le même sens que plus haut. Or, par le point (o, o, o, o, 1) passe par hypothèse une génératrice rationnelle. Les équations de cette génératrice ne contiennent pas x_5, puisqu'elles sont vérifiées pour le point (o, o, o, o, 1). On peut donc en tirer les valeurs de trois des variables x_1, x_2, x_3, x_4 en fonction de la dernière x_i. Il est sûr que i n'est pas égal à *un*, sans quoi, après substitution dans l'équation (8) des valeurs obtenues, le terme en $x_1 x_5$ ne serait pas nul. Alors, si par exemple $i=2$, les équations de la génératrice sont

$$x_1=0, \qquad x_3=\alpha x_2, \qquad x_4=\beta x_2;$$

car si

$$x_1=\gamma x_2, \qquad \gamma \neq 0,$$

on pourrait résoudre en fonction de x_1, ce qui n'est pas. α et β sont rationnels. Or, on a évidemment

$$\psi(1, \alpha, \beta)=0;$$

la forme ψ peut donc représenter zéro.

Réciproquement, si la forme ψ peut représenter zéro, une infinité de génératrices rationnelles passent par le point $(0, 0, 0, 0, 1)$.

Ainsi pour que, par le point $(0, 0, 0, 0, 1)$ de la quadrique (8), il passe une génératrice rationnelle, il est nécessaire et suffisant que la forme ψ puisse représenter zéro.

7. Je dis maintenant que si une de nos quadriques contient des génératrices rationnelles, il passe une telle génératrice par tout point rationnel de la quadrique.

Mettons, en effet, la quadrique sous la forme (8). Si le point rationnel considéré est tel que

$$\xi_1 = 0,$$

il est sur la génératrice rationnelle

$$x_1 = 0,$$
$$x_2 : x_3 : x_4 :: \xi_2 : \xi_3 : \xi_4.$$

Si maintenant

$$\xi_1 \neq 0,$$

ce point est sur la génératrice

$$x_2 = \frac{\xi_2}{\xi_1} x_1 + b_2 t,$$

$$x_3 = \frac{\xi_3}{\xi_1} x_1 + b_3 t,$$

$$x_4 = \frac{\xi_4}{\xi_1} x_1 + b_4 t,$$

$$x_5 = \frac{\xi_5}{\xi_1} x_1 + b_5 t;$$

t, dans ces équations, représente un paramètre; b_2, b_3, b_4 sont des nombres rationnels tels que

$$\psi(b_2, b_3, b_4) = 0;$$

quant à b_5, il est pris de manière à annuler le coefficient de $x_1 t$ dans le premier membre de l'équation (8), quand on y substitue les valeurs précédentes : c'est aussi un nombre rationnel.

Donc, pour que la quadrique contienne des génératrices rationnelles, il est nécessaire et suffisant qu'après l'avoir mise sous la forme (8) la forme ψ puisse représenter zéro.

8. Parmi les substitutions semblables d'une forme quadratique

$$(9) \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1(a x_1 + 2 b x_2 + 2 c x_3 + 2 d x_4 + 2 m x_5) + \psi(x_2, x_3, x_4),$$

considérons en particulier le groupe de celles qui n'altèrent pas le point (o, o, o, o, 1).

Soient

$$(10) \qquad X_i = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + d_i x_4 + e_i x_5 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

les formules qui définissent la substitution; il est tout d'abord évident que

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0,$$

et par suite que

$$e_5 = \pm 1.$$

En considérant alors les termes qui contiennent x_5, nous trouvons

$$b_1 = c_1 = d_1 = 0, \qquad a_1 = e_5.$$

Il en résulte immédiatement que

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_2 &= b_2 x_2 + c_2 x_3 + d_2 x_4, \\ X_3 &= b_3 x_2 + c_3 x_3 + d_3 x_4, \\ X_4 &= b_4 x_2 + c_4 x_3 + d_4 x_4 \end{aligned} \right.$$

est une transformation semblable arithmétique, de déterminant *un*, de la forme ψ.

Réciproquement donnons-nous une transformation semblable arithmétique (11), de déterminant *un*, de la forme ψ, et demandons-nous à quelle condition il lui correspond une transformation (10) de la forme f. Si l'on prend a_2, a_3, a_4 arbitrairement, on trouvera pour a_5, b_5, c_5, d_5 des fractions de dénominateur $2m$. On désire que ces fractions se réduisent à des entiers : cela entraîne que a_2, a_3, a_4 satisfassent à certaines congruences suivant le module $2m$. Ces congruences pourront n'être compatibles que si les coefficients de la transformation (11) satisfont eux-mêmes à certaines congruences suivant le module $2m$; en particulier, à cause de la transformation unité, elles seront compatibles si

$$b_2 \equiv c_3 \equiv d_4 \equiv 1; \qquad c_2 \equiv d_2 \equiv b_3 \equiv d_3 \equiv b_4 \equiv c_4 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2m).$$

Ainsi, les transformations (11) qui nous sont utiles forment un sous-groupe à congruences du groupe général des transformations semblables de ψ. Ce sous-groupe est donc d'indice fini, d'après une remarque générale de Poincaré [1]. a_1 et e_5 devront être tels que la transformation (10) obtenue corresponde à une transformation (T) : c'est-à-dire qu'ils seront égaux à *un* si la transformation (11) correspond à une substitution fuchsienne, et à *moins un* dans le cas contraire.

Considérons maintenant deux transformations (10) différentes qui correspondent à la même transformation (11). En faisant suivre l'une de l'inverse de l'autre, on arrive à une transformation où

$$(12) \qquad c_2 = d_2 = b_3 = d_3 = b_4 = c_4 = 0, \qquad a_1 = b_2 = c_3 = d_4 = e_5 = 1.$$

Étudions les transformations de cette sorte. Les valeurs de a_5, b_5, c_5, d_5 résultent nécessairement de celles de a_2, a_3, a_4 : elles doivent être entières. Or si, pour deux de ces transformations, a_2, a_3 et a_4 ont les valeurs a'_2, a'_3, a'_4 et a''_2, a''_3, a''_4 respectivement, dans le produit ils ont les valeurs $a'_2 + a''_2$, $a'_3 + a''_3$, $a'_4 + a''_4$. Désignons alors par a'_2 la plus petite en valeur absolue des valeurs non nulles de a_2 dans l'ensemble des systèmes de valeurs possibles de a_2, a_3, a_4 : a'_2 sera le plus grand commun diviseur de toutes les valeurs possibles de a_2. Soit a'_3, a'_4 un des systèmes de valeurs de a_3, a_4 qu'on peut associer à a'_2. Nous nommerons maintenant a''_3 la plus petite en valeur absolue des valeurs non nulles de a_3 dans les systèmes de valeurs de a_2, a_3, a_4 où $a_2 = 0$: a''_3 est le plus grand commun diviseur des valeurs de a_3 dans ces systèmes; soit a''_4 une des valeurs de a_4 qu'on peut lui associer. Enfin, nous appellerons a'''_4 la plus petite en valeur absolue des valeurs non nulles de a_4 dans les systèmes de valeurs de a_2, a_3, a_4, où $a_2 = a_3 = 0$. Il est évident que le système le plus général de valeurs de a_2, a_3, a_4

---

[1] *Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. III, 1887).

est

$$(13)\quad \begin{cases} a_2 = \alpha a_2'', \\ a_3 = \alpha a_3' + \beta a_3'', \\ a_4 = \alpha a_4' + \beta a_4'' + \gamma a_4''', \end{cases}$$

où α, β, γ sont des entiers arbitraires. a_2', a_3'', a_4''' sont des diviseurs de $2m$.

9. Nous pouvons maintenant trouver les substitutions fondamentales du groupe des substitutions semblables qui conservent le point (0, 0, 0, 0, 1). Pour les former, nous prendrons d'abord les substitutions fondamentales, en nombre fini, du sous-groupe utile des transformations semblables de ψ. A chacune d'elles nous associerons une substitution (10) bien déterminée. Aux transformations obtenues, il va nous suffire d'adjoindre, parmi celles de la forme (12) avec les conditions (13), les trois qu'on obtient en faisant successivement

$$\alpha = 1, \quad \beta = \gamma = 0; \qquad \beta = 1, \quad \alpha = \gamma = 0; \qquad \gamma = 1, \quad \alpha = \beta = 0.$$

Profitons maintenant de cette connaissance pour former le polyèdre fondamental du groupe correspondant de transformations (T). Au moyen d'une substitution linéaire à coefficients réels quelconques effectuée sur x_2, x_3, x_4, mettons $\psi(x_2, x_3, x_4)$ sous la forme $y_2 y_4 + y_3^2$; posons encore

$$y_1 = x_1,$$
$$y_5 = a x_1 + 2 b x_2 + 2 c x_3 + 2 d x_4 + 2 m x_5;$$

la forme quadratique f devient $y_1 y_5 + y_2 y_4 + y_3^2$. Posons encore

$$g = -\frac{y_2}{y_1}, \qquad h = \frac{y_3}{y_1}, \qquad g' = \frac{y_4}{y_1}, \qquad g g' - h^2 = \frac{y_5}{y_1};$$

à nos transformations semblables de f correspondent des transformations (T) sur les y, ou sur g, h, g'.

Prenons d'abord les variables $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$. Les substitutions qu'elles éprouvent dépendent seulement des transformations (11) qui correspondent aux substitutions semblables considérées. Posons

$$y_2 = \zeta^2, \qquad y_3 = \zeta\theta, \qquad y_4 = -\theta^2.$$

Le nombre complexe $\frac{\zeta}{\theta}$ éprouve, par ces transformations, les substitutions fuchsiennes étudiées par Poincaré ([1]). Il faut même remarquer qu'il éprouve en outre des substitutions qui échangent les deux moitiés du plan de la variable complexe, ce qui rend nécessaire de considérer deux nombres imaginaires conjugués comme formant un seul élément ([2]). Peu importe, nous savons former le polygone fondamental d'un groupe de cette sorte : il est limité par des arcs de cercles en nombre fini ayant leurs centres sur l'axe réel; le polygone n'a aucun point commun avec l'axe réel si la forme ψ ne peut pas représenter zéro; dans le cas contraire il a un nombre fini de points sur cet axe (sommets paraboliques).

Ayant le polygone fondamental de la variable $\frac{\zeta}{\theta}$, nous n'avons qu'à poser

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \frac{\zeta\zeta_0}{\theta\theta_0}, \qquad \mathcal{H} = -\mathcal{G}' \frac{\zeta\theta_0 + \zeta_0\theta}{2\theta\theta_0};$$

$\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$ éprouvent précisément les transformations que nous avons en vue : par suite, pour ce qui regarde ces variables, le polyèdre fondamental est l'ensemble des systèmes de valeurs qui correspondent aux points $\frac{\zeta}{\theta}$ du polygone fondamental. Ce polyèdre est défini par un nombre fini d'inégalités telles que

$$\alpha\mathcal{G} + 2\beta\mathcal{H} + \gamma\mathcal{G}' > 0; \tag{14}$$

sa section par la surface

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = \text{const.} > 0$$

est tout entière à distance finie si la forme ψ ne peut pas représenter zéro; dans le cas contraire, à chaque point réel du polygone fondamental de $\frac{\zeta}{\theta}$ correspond un point à l'infini.

Un point quelconque de l'espace étant donné, une infinité de sub-

---

([1]) *Loc. cit.*

([2]) Des groupes de cette sorte ont été considérés par MM. Fricke et Klein (*Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen*).

stitutions (11) l'amènent à satisfaire aux inégalités (14) : ces substitutions diffèrent entre elles uniquement par une substitution (12). Or cette dernière peut être choisie, et en général d'une seule façon, de manière que les parties réelles de $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_1}$, $\frac{x_4}{x_1}$ deviennent, en valeur absolue, respectivement inférieures à $\frac{|a'_2|}{2}$, $\frac{|a''_3|}{2}$, $\frac{|a'''_4|}{2}$. Nous achevons de former le polyèdre fondamental en ajoutant aux inégalités (14) trois inégalités de la forme

$$|\alpha'\mathcal{G}_0 + 2\beta'\mathcal{H}_0 + \gamma'\mathcal{G}'_0| < 1. \tag{15}$$

Ce polyèdre a des points communs avec les domaines (III) et (IV). Il y en a à distance finie, qui n'interviennent pas dans les raisonnements qui vont suivre. A l'infini, si la quadrique n'a pas de génératrice rationnelle, il n'y a que le point réel (0, 0, 0, 0, 1). Si la quadrique contient des génératrices rationnelles, il y a en outre tous les points qui satisfont à un système d'équations telles que

$$y_1 = 0, \qquad Ay_2 + 2By_3 + Cy_4 = 0, \qquad B^2 + AC = 0,$$

ou à un nombre fini d'autres systèmes pareils : ce sont d'ailleurs les points de certaines génératrices rationnelles de la quadrique f, passant par le point (0, 0, 0, 0, 1).

Notons que toutes les transformations semblables arithmétiques de f qui laissent inaltéré le point rationnel (ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5) laissent également sans changement l'expression

$$\text{norme}\left(\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_3\frac{\partial f}{\partial x_3} + \xi_4\frac{\partial f}{\partial x_4} + \xi_5\frac{\partial f}{\partial x_5}\right). \tag{16}$$

10. Bornons-nous maintenant au cas où la quadrique contient des génératrices rationnelles : ce que nous avons fait pour les transformations qui n'altèrent pas un point rationnel, nous allons le recommencer pour celles qui font revenir une génératrice rationnelle donnée sur elle-même.

Nous pouvons, par une substitution linéaire de déterminant *un*, faire en sorte que la génératrice ait pour équations

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \tag{17}$$

et la quadrique

$$(18) \qquad f = x_1(ax_1 + 2bx_2 + 2cx_3 + 2dx_4 + 2mx_5) + x_2(b'x_2 + 2c'x_3 + 2d'x_4) + c''x_3^2 = 0.$$

Les formules (10) définiront encore nos transformations. Nous trouvons tout d'abord que

$$d_1 = e_1 = d_2 = e_2 = d_3 = e_3 = 0;$$

par suite

$$d_4 e_5 - d_5 e_4 = \varepsilon = \pm 1.$$

Égalons à zéro les coefficients de $x_3 x_4$ et de $x_3 x_5$ dans la forme déduite de f par substitution des X aux x; nous constatons que

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Égalons à $2d$, $2m$, $2d'$, o les coefficients de $x_1 x_4$, $x_1 x_5$, $x_2 x_4$, $x_2 x_5$ respectivement :

$$a_1 = \varepsilon\left(d_4 - \frac{d}{m}e_4\right),$$

$$a_2 = \varepsilon\,\frac{d^2 e_4 - e^2 d_5 - ed(d_4 - e_5)}{d'm},$$

$$b_1 = -\varepsilon\,\frac{d'}{m}e_4,$$

$$b_2 = \varepsilon\left(e_5 + \frac{d}{m}e_4\right).$$

Or ces valeurs doivent être entières : donc d_4, e_4, d_5, e_5 doivent satisfaire à certaines congruences suivant le module $d'm$; ces congruences sont en particulier satisfaites si

$$d_4 \equiv e_5 \equiv 1, \qquad e_4 \equiv d_5 \equiv 0 \qquad (\text{mod } d'm).$$

En tout cas, on voit que

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \varepsilon;$$

donc

$$c_3 = 1.$$

Avant d'aller plus loin, on peut remarquer que, pour les transformations qui correspondent aux transformations (T),

$$\varepsilon = +1;$$

en effet, dans le cas contraire, le signe de la partie imaginaire de $\frac{x_2}{x_1}$ serait changé; et, pour changer f en $y_1y_5 + y_2y_4 + y_3^2$, on peut prendre

$$x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_2, \qquad x_3 = y_3,$$

$$x_4 = \frac{y_4 - b'y_2 - 2c'y_3}{2d'}, \qquad x_5 = \frac{y_5 - ay_1 - 2by_2 - 2cy_3 - 2dx_4}{2m};$$

Le signe de $\mathcal{G}$ serait donc changé aussi : or, il ne doit pas l'être pour les points du domaine (I) et les transformations (T). Nous supposerons donc désormais que $\varepsilon = 1$.

Passons maintenant aux coefficients de x_1^2, x_1, $x_2x_2^2$, que nous devons égaler à a, b, b' respectivement; on trouve :

$$(19) \quad \begin{cases} 2(da_1 + d'a_2)a_4 + 2ma_1a_5 & = \mathrm{A}, \\ 2(db_1 + d'b_2)a_4 + 2mb_1a_5 + 2(da_1 + d'a_2)b_4 + 2ma_1b_5 & = \mathrm{B}, \\ 2(db_1 + d'b_2)b_4 + 2mb_1b_5 & = \mathrm{C}; \end{cases}$$

on a du reste pour A, B, C des valeurs qui ne dépendent que des coefficients a_1, b_1, a_2, b_2, déjà déterminés, et de a_3, b_3. Regardons dans ces équations les lettres a_4, a_5, b_4, b_5 comme représentant les inconnues. Les quatre déterminants déduits du tableau des coefficients sont égaux respectivement aux produits de $8d'm$ par les quatre nombres

$$da_1 + d'a_2, \quad ma_1, \quad db_1 + d'b_2, \quad mb_1;$$

leur plus grand commun diviseur est donc le produit de $8d'm$ par celui de ces quatre nombres, c'est-à-dire par celui de d, m, d' : soit $8d'm\delta$ ce plus grand commun diviseur. Comme il est évident que tous les déterminants du second ordre déduits du tableau sont divisibles par 4δ, nous voyons que la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (19) aient une solution est que A, B, C satisfassent à certaines congruences suivant le module $2d'm$; et ces dernières congruences sont en particulier satisfaites par la substitution unité; elles le sont donc si

$$(20) \qquad d_4 \equiv e_5 \equiv 1, \qquad a_3 \equiv b_3 \equiv d_5 \equiv e_4 \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} 2d'm).$$

En considérant les coefficients de $x_1 x_3$ et de $x_2 x_3$, pour déterminer c_4 et c_5, nous arrivons à la même conclusion : les coefficients d_4, e_4, d_5, e_5 doivent satisfaire à certaines congruences $(\operatorname{mod} 2d'm)$, qui sont en particulier satisfaites dans le cas des relations (20).

Ainsi il existe des substitutions qui font revenir la génératrice considérée sur elle-même : par ces substitutions, le nombre complexe $\frac{x_2}{x_1}$ subit les transformations d'un certain sous-groupe à congruences du groupe fuchsien arithmétique.

Si l'on considère deux de ces transformations où $\frac{x_2}{x_1}$ se transforme de la même façon, on aura la seconde en faisant suivre la première d'une transformation telle que [1] :

$$(21) \qquad \begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = x_2, \\ X_3 = a_3 x_1 + b_3 x_2 + x_3, \\ X_4 = a_4 x_1 + b_4 x_2 + c_4 x_3 + x_4, \\ X_5 = a_5 x_1 + b_5 x_2 + c_5 x_3 + x_5. \end{cases}$$

Or, pour cette dernière, nous avons les conditions :

$$\begin{aligned} 2d\,a_4 + 2m a_5 \qquad\qquad\qquad &= -2c\,a_3 - c'' a_3^2, \\ d' a_4 \qquad + \quad d\,b_4 + m b_5 &= -\ c' a_3 - c\ b_3 - c'' a_3 b_3, \\ 2d' b_4 \qquad &= -2c' b_3 - c'' b_3^2, \\ d\,c_4 + m c_5 &= -c'' a_3, \\ d' c_4 \qquad &= -c'' b_3. \end{aligned}$$

Si, en particulier,

$$a_3 = b_3 = 0,$$

on aura

$$a_4 = -\nu \frac{m}{\delta}, \qquad a_5 = \nu \frac{d}{\delta}, \qquad b_4 = 0, \qquad b_5 = \nu \frac{d'}{\delta}, \qquad c_4 = c_5 = 0,$$

---

(1) Il en sera ainsi si a_1, b_1, a_2, b_2 ont chacun la même valeur dans les deux transformations. S'ils peuvent avoir des valeurs opposées, il faut prendre en outre des substitutions où $X_1 = -x_1$, $X_2 = -x_2$.

ν étant un entier arbitraire. Or, dans le produit de deux transformations (21), les valeurs respectives de a_3 et de b_3 sont les sommes de leurs valeurs dans les facteurs; cela nous montre d'abord qu'on peut prendre pour valeurs les plus générales de a_3 et de b_3 des expressions de la forme

$$a_3 = \lambda a'_3,$$
$$b_3 = \lambda b'_3 + \mu b''_3,$$

λ et μ étant des entiers arbitraires; ensuite que, si l'on a une des substitutions (21) où a_3 et b_3 ont un système de valeurs données, on a toutes les autres en faisant suivre celle-ci de la substitution (21) la plus générale où $a_3 = b_3 = 0$.

Nous avons ainsi obtenu toutes les substitutions cherchées. Nous pourrons déterminer d'une manière et d'une seule a_1, b_1, a_2, b_2, ou d_4, e_4, d_5, e_5, pour que $\frac{x_2}{x_1}$, ou g, appartienne au polygone fondamental de notre sous-groupe fuchsien arithmétique, défini par des inégalités comme

$$\alpha g g_0 + \beta(g + g_0) + \gamma > 0; \tag{22}$$

on déterminera ensuite λ et μ de façon à avoir

$$\left\{\begin{array}{l} |x_1 x_{30} + x_{10} x_3| < |a'_3|\, x_1 x_{10}, \\ 2|x_1 x_{30} - x_{10} x_3| < |b''_3|\, |x_1 x_{20} - x_{10} x_2|; \end{array}\right. \tag{23}$$

enfin on déterminera ν de façon que

$$|x_1 x_{40} + x_{10} x_4| < \frac{m}{\delta} x_1 x_{10}. \tag{24}$$

Les inégalités (22), (23), (24) déterminent le polyèdre fondamental du groupe de ces substitutions [1].

Toutes ces substitutions laissent invariante la quantité

$$x_1 x_{20} - x_{10} x_2.$$

---

[1] Toutefois, s'il y a une substitution où $X_1 = -x_1$, $X_2 = -x_2$, il faut ajouter une condition supplémentaire.

Soit $g = g_1$ un point réel quelconque du polygone fondamental de g. Le point $(0, 0, 0, 1, g_1)$ est un point rationnel de la quadrique $f = 0$. Nous allons considérer la partie du polyèdre qui, en plus des conditions (22), (23), (24), satisfait en outre à toutes les conditions

$$\tag{25} \frac{|x_1 x_{20} - x_{10} x_2|}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_4} + g_1 \frac{\partial f}{\partial x_5}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_{40}} + g_1 \frac{\partial f}{\partial x_{50}}\right)} < a,$$

où x est un nombre positif donné, et encore à la condition

$$\frac{x_{10}\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_{20}\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_{30}\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_{40}\frac{\partial f}{\partial x_4} + x_{50}\frac{\partial f}{\partial x_5}}{|x_1 x_{20} - x_{10} x_2|} > b,$$

b étant un autre nombre positif : on reconnaît, et c'est ce que nous voulions faire remarquer, que les points de cette partie du polyèdre qui sont dans le domaine (III) sont exclusivement les points de la génératrice rationnelle qui satisfont aux conditions

$$\begin{aligned} &\alpha(dx_4 + mx_5)(dx_{40} + mx_{50}) \\ &\quad - \beta d'[(dx_4 + mx_5)x_{40} + (dx_{40} + mx_{50})x_4] + \gamma d'^2 x_4 x_{40} > 0, \end{aligned}$$

et aux conditions analogues provenant des inégalités (25); il n'y a aucun point réel.

Si l'on avait pris une génératrice rationnelle qui contienne les deux points réels, rationnels si l'on veut,

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) \quad \text{et} \quad (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5),$$

les substitutions qui conservent cette génératrice conservent aussi l'expression

$$\tag{26} \left\{ \begin{aligned} &\left(\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \xi_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} + \xi_5 \frac{\partial f}{\partial x_5}\right) \\ &\quad \times \left(\eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_{10}} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_{20}} + \eta_3 \frac{\partial f}{\partial x_{30}} + \eta_4 \frac{\partial f}{\partial x_{40}} + \eta_5 \frac{\partial f}{\partial x_{50}}\right) \\ &- \left(\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_{10}} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_{20}} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_{30}} + \xi_4 \frac{\partial f}{\partial x_{40}} + \xi_5 \frac{\partial f}{\partial x_{50}}\right) \\ &\quad \times \left(\eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \eta_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \eta_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} + \eta_5 \frac{\partial f}{\partial x_5}\right). \end{aligned} \right.$$

11. Revenons maintenant à la formation du polyèdre fondamental du groupe de toutes les transformations semblables arithmétiques de la forme f. Nous pouvons donner ce polyèdre avec les variables x_i de la forme donnée, ou avec les variables λ, μ, ν, π, $\varkappa$ de la forme adjointe; on passe de l'un des systèmes à l'autre par les formules

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad \mu = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad \nu = \frac{\partial f}{\partial x_3}, \qquad \pi = \frac{\partial f}{\partial x_4}, \qquad \varkappa = \frac{\partial f}{\partial x_5}.$$

Bien entendu, nous pouvons prendre aussi les variables g, h, g'.

Nous dirons que deux points rationnels de la quadrique appartiennent à la même *classe* s'ils sont transformés l'un de l'autre par une de nos substitutions. S'il y a des génératrices rationnelles, nous dirons de même que deux d'entre elles appartiennent à la même classe si elles sont transformées l'une de l'autre par une de nos substitutions.

Le nombre de classes de points rationnels est fini. En effet, si deux points appartiennent à la même classe, on peut mettre la quadrique sous la même forme (10), en amenant à volonté l'un ou l'autre d'entre eux au point (0, 0, 0, 0, 1); et réciproquement. Ainsi les valeurs de a, b, c, d, m et les coefficients de ψ caractérisent une classe de points rationnels. Or le discriminant de f est égal au produit par m^2 de celui de ψ : il y a donc un nombre fini de valeurs de m possibles; puis a, $2b$, $2c$, $2d$ peuvent être supposés tous inférieurs à m en valeur absolue : il n'auront donc aussi qu'un nombre fini de valeurs possibles; enfin, ψ peut être une forme réduite : pour chaque valeur de m, cela fait également un nombre fini de formes ψ possibles : notre assertion est donc justifiée.

On peut démontrer d'une manière analogue que le nombre de classes de génératrices rationnelles qui existent sur une quadrique donnée est fini.

12. Avant de distinguer deux cas, suivant que la quadrique donnée a ou n'a pas de génératrices rationnelles, faisons une remarque qui s'applique dans ces deux circonstances.

Tout d'abord, la forme

$$(27) \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2ax_1 + 2bx_2 + 2cx_3 + 2dx_4 + mx_5)x_5 + \psi(x_2, x_3, x_4)$$

a pour adjointe

$$(28)\quad F(\lambda, \mu, \nu, \pi, \varkappa) = \lambda(A\lambda + 2B\mu + 2C\nu + 2D\pi - 2a\delta\varkappa) - a^2\Psi(\mu, \nu, \pi);$$

A, B, C, D sont des entiers faciles à calculer; Ψ et δ sont la forme adjointe et le discriminant de ψ.

Dans ce qui suivra, nous aurons à astreindre λ, μ, ν, π, $\varkappa$ à la relation (3) et à la relation

$$(29)\quad \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial \lambda} + \mu_0 \frac{\partial F}{\partial \mu} + \nu_0 \frac{\partial F}{\partial \nu} + \pi_0 \frac{\partial F}{\partial \pi} + \varkappa_0 \frac{\partial F}{\partial \varkappa} = -4\Delta = 4a^2\delta;$$

le discriminant Δ de f est en effet $-a^2\delta$. Nous allons mettre cette dernière relation sous une autre forme. Nous désignerons par $\mathfrak{R}x$ la partie réelle d'un nombre quelconque x, et par $\mathfrak{I}x$ le coefficient de i dans le même nombre. Cela étant, la relation (29) peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\mathfrak{R}\left(A + 2B\frac{\mu}{\lambda} + 2C\frac{\nu}{\lambda} + 2D\frac{\pi}{\lambda} - 2a\delta\frac{\varkappa}{\lambda}\right) \\ &\quad - a^2\Psi\left(\mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda}, \mathfrak{R}\frac{\nu}{\lambda}, \mathfrak{R}\frac{\pi}{\lambda}\right) - a^2\Psi\left(\mathfrak{I}\frac{\mu}{\lambda}, \mathfrak{I}\frac{\nu}{\lambda}, \mathfrak{I}\frac{\pi}{\lambda}\right) = \frac{2a^2\delta}{\lambda\lambda_0}. \end{aligned}$$

Mais la relation (3) entraîne comme conséquence

$$\begin{aligned} &\mathfrak{R}\left(A + 2B\frac{\mu}{\lambda} + 2C\frac{\nu}{\lambda} + 2D\frac{\pi}{\lambda} - 2a\delta\frac{\varkappa}{\lambda}\right) \\ &\quad = a^2\Psi\left(\mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda}, \mathfrak{R}\frac{\nu}{\lambda}, \mathfrak{R}\frac{\pi}{\lambda}\right) - a^2\Psi\left(\mathfrak{I}\frac{\mu}{\lambda}, \mathfrak{I}\frac{\nu}{\lambda}, \mathfrak{I}\frac{\pi}{\lambda}\right); \end{aligned}$$

donc la condition (29) peut se remplacer par

$$(30)\quad \Psi\left(\mathfrak{I}\frac{\mu}{\lambda}, \mathfrak{I}\frac{\nu}{\lambda}, \mathfrak{I}\frac{\pi}{\lambda}\right) = -\frac{\delta}{\lambda\lambda_0}.$$

On peut d'ailleurs, sans cesser de considérer le même point de la quadrique $F = 0$, et sans porter atteinte à la relation (29), supposer λ réel et même positif : il suffit, s'il ne l'est pas, de multipler λ, μ, ν, π, $\varkappa$ par un nombre convenablement choisi de valeur absolue *un*. Si donc λ est réel, la relation (29) prend la forme équivalente

$$(31)\quad \Psi(\mathfrak{I}\mu, \mathfrak{I}\nu, \mathfrak{I}\pi) = -\delta.$$

13. Pour éviter, dans la réduction continuelle, certaines longueurs dues à ce que les conditions de MM. Korkine et Zolotareff ne déterminent pas une réduite unique équivalente à une forme définie donnée, nous allons compléter ces conditions par quelques autres destinées à assurer cette unicité.

Mettons la forme définie positive φ sous la forme

$$(32) \qquad \begin{aligned}\varphi = {} & \mu_1(x_1+\varepsilon_{1,2}x_2+\varepsilon_{1,3}x_3+\varepsilon_{1,4}x_4+\varepsilon_{1,5}x_5)^2 \\ & +\mu_2(x_2+\varepsilon_{2,3}x_3+\varepsilon_{2,4}x_4+\varepsilon_{2,5}x_5)^2 \\ & +\mu_3(x_3+\varepsilon_{3,4}x_4+\varepsilon_{3,5}x_5)^2 \\ & +\mu_4(x_4+\varepsilon_{4,5}x_5)^2+\mu_5x_5^2.\end{aligned}$$

Les conditions de réduction des géomètres russes sont :

$$\mu_2 \geqq \frac{3}{4}\mu_1, \qquad \mu_3 \geqq \frac{3}{4}\mu_2, \qquad \mu_4 \geqq \frac{3}{4}\mu_3, \qquad \mu_5 \geqq \frac{3}{4}\mu_5;$$

$$|\varepsilon_{i,j}| \leqq \frac{1}{2}.$$

Remarquons alors que, pour tout système de valeurs des x tel que φ ne dépasse pas μ_1, $|x_5|$ est au plus égal à $\left(\frac{4}{3}\right)^2$; sinon $\mu_5 x_5^2$, et à plus forte raison φ, dépasseraient μ_1. Si ces valeurs des x sont entières, on a donc

$$|x_5| \leqq 1.$$

De même, on a forcément

$$|x_4+\varepsilon_{4,5}x_5| \leqq \frac{8}{3\sqrt{3}};$$

par suite

$$|x_4| \leqq \frac{8}{3\sqrt{3}} + |\varepsilon_{4,5}x_5| \leqq \frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2};$$

et, comme x_4 est entier,

$$|x_4| \leqq 2.$$

On trouvera de même

$$|x_3| \leqq 2, \qquad |x_2| \leqq 3, \qquad |x_1| \leqq 5.$$

Il suffira donc, pour être assuré que μ_1 est le minimum de φ pour les valeurs entières des x, de combiner ensemble de toutes les manières possibles les valeurs qui satisfont à ces inégalités, et d'écrire que pour chacun de ces systèmes, la valeur de φ n'est pas moindre que μ_1; on excepte, bien entendu, le système où tous les x sont nuls.

Si nous voulons de même que le minimum de

$$\mu_2(x_2+\varepsilon_{2,3}x_3+\varepsilon_{2,4}x_4+\varepsilon_{2,5}x_5)^2$$
$$+\mu_3(x_3+\varepsilon_{3,4}x_4+\varepsilon_{3,5}x_5)^2+\mu_4(x_4+\varepsilon_{4,5})^2+\mu_5 x_5^2,$$

soit μ_2, il suffira d'écrire que cette forme est au moins égale à μ_2 pour

$$|x_5|\leqq 1,\qquad |x_4|\leqq 1,\qquad |x_3|\leqq 2,\qquad |x_2|\leqq 3.$$

Le minimum de la somme des trois derniers termes de φ sera μ_3 si cette somme ne tombe pas au-dessous de μ_3 pour

$$|x_5|\leqq 1,\qquad |x_4|\leqq 1,\qquad |x_3|\leqq 2.$$

Enfin, pour les deux derniers termes, il suffira, comme il est classique, d'écrire la condition pour

$$x_5=1,\qquad x_4=0.$$

Il est d'ailleurs certain qu'un bon nombre des inégalités introduites peuvent être supprimées.

Quoi qu'il en soit, ces inégalités assurent que la réduite qu'on a en vue est celle-là même dont l'existence a été démontrée par MM. Korkine et Zolotareff ([1]), et qui est unique, sauf dans des cas limites sans importance, si, pour tenir compte de la faculté de changer les signes d'un nombre pair de variables, nous astreignons $\varepsilon_{1,2}$, $\varepsilon_{2,3}$, $\varepsilon_{3,4}$ et $\varepsilon_{4,5}$ à être positifs.

14. Prenons d'abord le cas d'une quadrique qui ne contient pas de génératrices rationnelles. On va voir qu'il est inutile de donner, dans la réduction continuelle, à λ, μ, ν, π, $\varkappa$ des valeurs telles que μ_1 devienne inférieur à $\frac{3}{4\Delta}$.

([1]) Korkine et Zolotareff, *Sur les formes quadratiques* (*Mathematische Annalen*, t. VI, 1873, p. 366).

En effet, si μ_1 tombe au-dessous de cette limite, f n'a pas de terme en x_1^2. Nous allons décrire une suite d'opérations propres à réduire f. Tout d'abord, nous pouvons, au moyen d'une substitution portant uniquement sur x_2, x_3, x_4, x_5, mettre f sous la forme (27); la substitution adjointe mettra F sous la forme (28), et ne changera pas λ, ni par suite μ_1 qui égale $2\lambda^2$. Si nous calculons alors le terme

$$\mu_1(x_1 + \varepsilon_{1,2}x_2 + \varepsilon_{1,3}x_3 + \varepsilon_{1,4}x_4 + \varepsilon_{1,5}x_5)^2,$$

nous trouvons que c'est

$$(33) \qquad 2\lambda^2\left[x_1 + \mathcal{R}\frac{\mu}{\lambda}x_2 + \mathcal{R}\frac{\nu}{\lambda}x_3 + \mathcal{R}\frac{\pi}{\lambda}x_4 + \left(\mathcal{R}\frac{\varkappa}{\lambda} + \frac{a}{2\lambda^2}\right)x_5\right]^2.$$

Retranchons ce terme de φ; il reste l'expression

$$(34) \qquad \psi(x_2, x_3, x_4) + 2(\mathfrak{I}\mu x_2 + \mathfrak{I}\nu x_3 + \mathfrak{I}\pi x_4)^2 + \ldots;$$

les points tiennent la place des termes où figure x_5 : à l'exception du terme en x_5^2, ils ne dépendent que de $\mathcal{R}\frac{\mu}{\lambda}$, $\mathcal{R}\frac{\nu}{\lambda}$, $\mathcal{R}\frac{\pi}{\lambda}$, $\mathfrak{I}\mu$, $\mathfrak{I}\nu$, $\mathfrak{I}\pi$, après qu'on a remplacé $\varkappa$ par sa valeur tirée de l'équation (3). Alors nous pouvons :

1° Réduire $\psi(x_2, x_3, x_4) + \mathfrak{I}(\mu x_2 + \mathfrak{I}\nu x_3 + \mathfrak{I}\pi x_4)^2$, au moyen d'une substitution sur x_2, x_3, x_4 : $\mathfrak{I}\mu$, $\mathfrak{I}\nu$, $\mathfrak{I}\pi$ sont liés précisément par la relation qui se présente dans la réduction continuelle de ψ et subissent la transformation adjointe de celle de x_2, x_3, x_4;

2° Remplir les conditions relatives aux ε, sans nous inquiéter des μ.

Aucune des transformations que nous avons à faire ne modifie λ. De plus, f garde la forme (27), a, b, c, d, m et ψ étant modifiés.

Je dis que φ est maintenant réduite. En effet, comme $\mu_1 = 2\lambda^2$,

$$(35) \qquad \mu_1 \leqq \frac{3}{4\Delta} < 1 \leqq \mu_2.$$

μ_2 est en effet supérieur à *un*, puisque ψ ne peut pas représenter zéro. De plus,

$$\mu_2\mu_3\mu_4 = -\delta,$$

et, comme $\mu_3 \geqq \frac{3}{4}\mu_1$, $\mu_4 \geqq \frac{3}{4}\mu_2$,

$$\mu_2 \leqq \frac{4}{3}\sqrt[3]{-\delta}, \qquad \mu_3 \leqq \sqrt{\frac{-4\delta}{3}}, \qquad \mu_4 \leqq -\frac{4}{3}\delta.$$

Mais

$$\mu_5 = \frac{\Delta}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{\Delta}{-\delta\mu_1} = \frac{a^2}{\mu_1} \geqq \frac{4\Delta}{3}.$$

On voit donc que

$$(36) \qquad \mu_5 \geqq \mu_4, \qquad \mu_5 > \mu_3, \qquad \mu_5 > \mu_2.$$

Donc μ_4, μ_3, μ_2 sont les plus petits nombres que puissent représenter respectivement les sommes des deux, trois et quatre derniers carrés : si, en effet, x_5 n'est pas nul, ces sommes sont supérieures à μ_4, μ_3, μ_2, d'après les inégalités (36); et si x_5 est nul, elles le sont encore, puisque $\psi + 2(\mathfrak{I}\mu x_2 + \mathfrak{I}\nu x_3 + \mathfrak{I}\pi x_4)^2$ est réduite. Enfin μ_1 est le plus petit nombre représentable par φ : car si x_2, x_3, x_4, x_5 ne sont pas nuls ensemble, φ dépasse μ_1, d'après l'inégalité (35). Donc φ est réduite.

Comme une forme définie n'a qu'une seule forme réduite, on a là la seule réduite qui corresponde aux valeurs initiales des paramètres.

Si maintenant nous maintenons fixes les quantités $\mathcal{R}\frac{\mu}{\lambda}$, $\mathcal{R}\frac{\nu}{\lambda}$, $\mathcal{R}\frac{\pi}{\lambda}$, $\mathfrak{I}\mu$, $\mathfrak{I}\nu$, $\mathfrak{I}\pi$, et que nous fassions varier λ, en choisissant $\varkappa$ de manière que l'équation (3) soit toujours satisfaite, les ε ne varient pas, pas même $\varepsilon_{1,5}$, car

$$(37) \qquad \varepsilon_{1.5} = \mathcal{R}\frac{\varkappa}{\lambda} + \frac{a}{2\lambda^2} = -\frac{a}{2\delta}\Psi\left(\mathcal{R}\frac{\mu}{\lambda}, \mathcal{R}\frac{\nu}{\lambda}, \mathcal{R}\frac{\pi}{\lambda}\right) + \frac{A}{2a\delta} + \frac{B}{a\delta}\mathcal{R}\frac{\mu}{\lambda} + \frac{C}{a\delta}\mathcal{R}\frac{\nu}{\lambda} + \frac{D}{a\delta}\mathcal{R}\frac{\pi}{\lambda}.$$

μ_2, μ_3, μ_4 ne varient pas non plus; μ_1 et μ_5 varient, mais, si l'on amène $2\lambda^2$ seulement à la valeur $\frac{3}{4\Delta}$, leurs variations n'empêchent pas φ de continuer d'être réduite. Or f est resté le même; donc, à chacune des formes f rencontrées dans la réduction continuelle correspond une certaine forme φ réduite où

$$\mu_1 \geqq \frac{3}{4\Delta}.$$

Le raisonnement fait par M. Picard pour les formes quaternaires (¹) peut alors être repris ici : on ne rencontre qu'un nombre limité de formes f, la limite ne dépendant que de Δ. Par suite le polyèdre fondamental a un nombre fini de faces et (§ 4) il atteint la frontière du domaine (I) seulement en un nombre fini de points réels.

15. Nous avons maintenant à traiter la question dans le cas où la quadrique passe par des génératrices rationnelles. Nous allons prouver qu'à toute forme f réduite correspond encore une forme φ également réduite où le coefficient de x_1^2 est au moins égal à $\frac{3}{4\Delta^2}$.

En effet, si $\mu_1 < \frac{3}{4\Delta^2}$, c'est que f n'a pas de terme en x_1^2; nous pouvons donc, par une substitution qui n'altère pas λ ni μ_1, mettre f sous la forme (27).

Soit maintenant μ_2 le plus petit nombre représentable par la forme

$$\psi(x_2, x_3, x_4) + 2(\mathfrak{d}\mu\, x_2 + \mathfrak{d}\nu\, x_3 + \mathfrak{d}\pi\, x_4)^2. \tag{38}$$

Nous allons distinguer quatre cas :

Premier cas : $\mu_2 \geqq 1$.
Deuxième cas : $\frac{3}{4\Delta} \leqq \mu_2 < 1$.
Troisième cas : $\Delta\mu_1 \leqq \mu_2 < \frac{3}{4\Delta}$.
Quatrième cas : $\mu_2 < \Delta\mu_1$.

Premier cas. — Si $\mu_2 > 1$, il n'y a rien à changer à ce que nous avons fait pour les quadriques sans génératrices rationnelles; on peut donc amener μ_1 à la valeur $\frac{3}{4\Delta^2}$, et même à la valeur $\frac{3}{4\Delta}$, sans que φ cesse d'être réduite.

Deuxième cas. — Ici, ψ est dépourvu de terme en x_2^2, et

$$\mu_2 = 2(\mathfrak{d}\mu)^2.$$

(¹) PICARD, *Sur les fonctions hyperabéliennes* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. I, 1885).

Nous pouvons donc, par une substitution portant uniquement sur x_3 et x_4, et qui, par suite, n'altère pas $\delta\mu$ ni μ_2, mettre ψ sous la forme

$$(39)\qquad \psi(x_2, x_3, x_4) = (2b'x_2 + 2c'x_3 + d'x_4)x_4 + c''x_3^2.$$

Nous pouvons en outre, sans changer les μ, remplir les conditions relatives aux ε, f gardant la forme (27) et ψ la forme (39). Or, on trouve

$$(40)\qquad \mu_3 = c'', \qquad \mu_4 = \frac{b'^2}{\mu_2} = \frac{b'^2}{2(\delta\mu)^2}, \qquad \mu_5 = \frac{a^2}{\mu_1} = \frac{b^2}{2\lambda^2}.$$

Comme ici

$$\delta = -b'^2c'',$$

nous voyons que

$$\mu_3 \leqq -\delta, \qquad \mu_4 \leqq \frac{-\delta}{\mu_2} \qquad \text{ou} \qquad \mu_4 \leqq \frac{-4\Delta\delta}{3} \leqq \frac{4\Delta^2}{3};$$

de plus, μ_3 et μ_4 sont au moins égaux à *un*. Si la forme

$$(41)\qquad \mu_3(x_3 + \varepsilon_{3,4}x_4)^2 + \mu_4 x_4^2$$

n'est pas réduite, réduisons-la : les nouvelles valeurs de μ_3 et de μ_4 seront comprises entre les anciennes, donc entre *un* et $\frac{4\Delta^2}{3}$. Remplissons de nouveau les conditions relatives aux ε, sans changer les μ : φ est maintenant réduite. En effet,

$$\mu_5 = \frac{a^2}{2\lambda^2} \geqq \frac{4\Delta^2}{3};$$

donc

$$\mu_5 \geqq \mu_4, \qquad \mu_5 \geqq \mu_3;$$

par suite, μ_4 est le plus petit nombre représentable par la somme des deux derniers carrés; μ_3 est pareillement le plus petit que puisse représenter la somme des trois derniers : si, en effet, x_5 n'est pas nul, cette somme dépasse μ_5, donc μ_3; et si $x_5 = 0$, cette somme dépasse aussi μ_3, puisque la forme (41) est réduite. Maintenant

$$\mu_3 \geqq 1 > \mu_2,$$

donc μ_2 est le plus petit nombre représentable par la somme des quatre derniers carrés. Enfin

$$\mu_2 \geqq \frac{3}{4\Delta} \geqq \frac{3}{4\Delta^2} > \mu_1,$$

donc μ_1 est le plus petit nombre représentable par φ. Donc φ est réduite.

Nous voyons de plus, comme pour les quadriques sans génératrices rationnelles, que φ ne cesse pas d'être réduite, si nous amenons $2\lambda^2$ à la valeur $\frac{3}{4\Delta^2}$, sans changer d'ailleurs $\mathcal{R}\frac{\mu}{\lambda}$, $\mathcal{R}\frac{\nu}{\lambda}$, $\mathcal{R}\frac{\pi}{\lambda}$, $\mathfrak{I}\mu$, $\mathfrak{I}\nu$, $\mathfrak{I}\pi$. La conclusion annoncée se vérifie donc encore dans ce cas.

Troisième cas. — Dans ce cas nous pouvons encore, sans changer μ_2, mettre ψ sous la forme (39). Si, sans modifier les μ, nous remplissons les conditions relatives aux ε, φ sera réduite. En effet, les relations (40) sont encore vraies; elles montrent que

$$\frac{\mu_5}{\mu_4} = \frac{a^2}{b'^2}\frac{\mu_2}{\mu_1} \geqq \frac{\mu_2}{\Delta\mu_1} \geqq 1,$$

donc

$$\mu_5 \geqq \mu_4;$$

puis

$$\frac{\mu_4}{\mu_3} = \frac{b'^2}{c''\mu_2} \geqq \frac{1}{-\delta\mu_2} \geqq \frac{4\Delta}{-3\delta} \geqq \frac{4}{3},$$

donc

$$\mu_4 > \mu_3;$$

enfin

$$\mu_3 = c'' > \mu_2 \geqq \mu_1.$$

φ est donc bien évidemment réduite, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, μ_5 se succédant par ordre de grandeurs croissantes.

Quelles sont les valeurs des ε? $\varepsilon_{1,2}$, $\varepsilon_{1,3}$, $\varepsilon_{1,4}$, $\varepsilon_{1,5}$ ont déjà été calculés, formules (33) et (37). Pour les autres, nous pouvons non seulement tirer $\varkappa$ de la relation (3), mais aussi $\mathfrak{I}\pi$ de la relation (31), qui est maintenant du premier degré en $\mathfrak{I}\pi$. Nous obtenons ainsi les valeurs suivantes :

$$\varepsilon_{2,3} = \frac{\partial\nu}{\partial\mu},$$

$$\varepsilon_{2,4} = \frac{\partial\pi}{\partial\mu} + \frac{b'}{2(\partial\mu)^2} = \frac{c''d' - c'^2}{2b'c''} + \frac{c'}{c''}\frac{\partial\nu}{\partial\mu} - \frac{b'}{2c''}\left(\frac{\partial\nu}{\partial\mu}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2,5} = \frac{\partial\varkappa}{\partial\mu} - \frac{a}{2(\partial\mu)^2}\mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda} + \frac{b}{2(\partial\mu)^2} &= \frac{-cc'}{b'c''} - \frac{bd'}{2b'^2} + \frac{bc'^2}{2b'^2c''} + \frac{d}{b'} \\ &+ \frac{c}{c''}\frac{\partial\nu}{\partial\mu} - \frac{b}{2c''}\left(\frac{\partial\nu}{\partial\mu}\right)^2 + a\mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda}\left[\frac{c''d' - c'^2}{2b'^2c''} + \frac{1}{2c''}\left(\frac{\partial\nu}{\partial\mu}\right)^2\right] \\ &+ \frac{a}{b'c''}\mathfrak{R}\frac{\nu}{\lambda}\left(c' - b'\frac{\partial\nu}{\partial\mu}\right) - \frac{a}{b'}\mathfrak{R}\frac{\pi}{\lambda},\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{3,4} = \frac{c'}{c''} - \frac{b'}{c''}\frac{\partial\nu}{\partial\mu},$$

$$\varepsilon_{3,5} = \frac{c}{c''} - \frac{a}{c''}\mathfrak{R}\frac{\nu}{\lambda} - \frac{b - a\mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda}}{c''}\frac{\partial\nu}{\partial\mu},$$

$$\varepsilon_{4,5} = \frac{b}{b'} - \frac{a}{b'}\mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda}.$$

Ce dernier coefficient, $\varepsilon_{4,5}$, serait assez pénible à obtenir directement. Désignons-le par h. Si l'on change x_5 en $x_5 + \rho x_4$, ρ étant variable, et en même temps x_2 en $x_2 - \frac{\rho a x_1}{\rho b + b'}$, f garde la forme (27) et ψ la forme (39); on constate directement que μ_3 a pour nouvelle valeur

$$\frac{b'^2}{2(\partial\mu)^2} + \frac{hb'^2\rho}{(\partial\mu)^2} + \left[\frac{b'^2h^2}{2(\partial\mu)^2} + \frac{a^2}{2\lambda^2}\right]\rho^2;$$

d'autre part, il est aussi égal à la nouvelle valeur de $\frac{b'^2}{2(\partial\mu)^2}$: en calculant directement cette dernière et en identifiant, on parvient à la valeur indiquée.

Nous observons que les ε ne changent pas si l'on fait varier λ et $\partial\mu$ sans changer $\mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda}$, $\mathfrak{R}\frac{\nu}{\lambda}$, $\mathfrak{R}\frac{\pi}{\lambda}$, $\frac{\partial\nu}{\partial\mu}$. Or nous pouvons d'abord augmenter λ seul, jusqu'à ce que

$$\mu_1 = \frac{\mu_2}{\Delta};$$

puis nous augmentons λ et 5μ, en maintenant leur rapport constant, jusqu'à ce que

$$\mu_1 = \frac{4}{3\Delta^2}.$$

φ reste réduite. La conclusion annoncée est encore vérifiée dans ce cas.

Quatrième cas. — Si $\mu_2 < \Delta\mu_1$, nous pouvons, sans changer μ_2, mettre ψ sous la forme (39). Il peut arriver que μ_1 ne soit pas le minimum de

$$\mu_1(x_1 + \varepsilon_{1,2}x_2)^2 + \mu_2 x_2^2;$$

s'il en est ainsi, nous pouvons réduire cette forme, et, par un changement de variables simultané sur x_4 et x_5, conserver à f la forme (27) et à ψ la forme (39). On aura encore $\mu_2 < \Delta\mu_1$. Les valeurs des μ et des ε indiquées dans le cas précédent subsistent; mais, même si les conditions relatives aux ε sont satisfaites, φ peut ne pas être réduite; car, si les inégalités

$$\mu_4 \geqq \mu_3 \geqq \mu_2$$

subsistent, et si l'on a encore

$$\mu_3 > \mu_1,$$

on ne peut plus affirmer que l'on ait $\mu_5 > \mu_4$, mais seulement

$$\frac{\mu_5}{\mu_4} = \frac{a^2}{b'^2}\frac{\mu_2}{\mu_1} \geqq \frac{3}{4\Delta}, \qquad \text{car} \qquad \mu_2 \geqq \frac{3}{4}\mu_1.$$

Pour achever de réduire φ, il faut donc effectuer encore une substitution sur x_4 et x_5 pour réduire

$$\mu_4(x_4 + \varepsilon_{4,5}x_5)^2 + \mu_5 x_5^2,$$

et achever de remplir les conditions relatives aux ε : on trouve alors tout de suite que φ est réduite.

La substitution finale sur x_4 et x_5 ne changera pas si l'on fait varier

λ et $\delta\mu$ sans changer leur rapport, et sans changer non plus $\mathcal{R}\frac{\mu}{\lambda}$, $\mathcal{R}\frac{\nu}{\lambda}$, $\mathcal{R}\frac{\pi}{\lambda}$, $\frac{\delta\nu}{\delta\mu}$; la substitution destinée à satisfaire les conditions relatives aux ε ne change pas non plus. On peut encore profiter de cette circonstance pour amener μ_1 à la valeur $\frac{3}{4\Delta^2}$, ce qui achève notre démonstration.

Par conséquent, les formes f que l'on rencontre dans la réduction continuelle sont en nombre fini. Le polyèdre fondamental a donc un nombre fini de faces, et (§ 5) il atteint la frontière du domaine (I) en un nombre fini de portions de génératrices rationnelles comprenant un nombre fini de points réels (§ 4).

16. Nous allons maintenant examiner les singularités que peuvent posséder, sur le contour du polyèdre fondamental, les fonctions $\Theta(g, h, g')$ qui correspondent à ces groupes. Ces singularités se trouvent toutes sur la surface

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = 0.$$

Supposons d'abord que notre quadrique n'ait pas de génératrices rationnelles. Il nous suffira d'examiner quelle singularité nos fonctions auront au point (0, 0, 0, 0, 1); nous supposerons que ce point est sur la quadrique.

Nous mettrons notre forme quinaire sous la forme (9); nous admettrons de plus que la forme ternaire ψ, qui ne peut pas représenter zéro, a pour expression

$$\psi(x_2, x_3, x_4) = (A'x_2 + B'x_3)^2 + C'^2 x_3^2 - (A x_2 + B x_3 + C x_4)^2;$$

si ψ n'a pas cette expression, on peut toujours l'y ramener.

La correspondance des x avec les coordonnées z de l'espace à six dimensions qui satisfont à la relation

$$z_1 z_5 + z_2 z_4 + z_3^2 = 0$$

s'établira au moyen des formules

$$
\begin{aligned}
x_1 &= z_1,\\
x_2 &= \frac{z_3 - B' x_3}{A'},\\
x_3 &= \frac{z_2 + z_4}{2C'},\\
x_4 &= \frac{-z_2 + z_4 - 2Ax_2 - 2Bx_3}{2C},\\
x_5 &= \frac{z_5 - ax_1 - 2bx_2 - 2cx_3 - 2dx_4}{2m}.
\end{aligned}
$$

On posera encore

$$g = -\frac{z_2}{z_1}, \qquad h = \frac{z_3}{z_1}, \qquad g' = \frac{z_4}{z_1},$$

et l'on supposera que le point (g, h, g') est dans le domaine (I). A', C, C' pourront être pris positifs.

Donnons à x_1 la valeur *un*, à x_2 et à x_3 des valeurs fixes quelconques, et faisons croître indéfiniment le coefficient de i dans x_4 ; x_5 sera pris de manière à annuler f : dès que le coefficient de i dans x_4 sera assez grand, nous serons dans le domaine (I); cela revient en effet à dire que si, $g - g'$ et h restant fixes, le coefficient de i dans $g + g'$ augmente indéfiniment, $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ et $\mathcal{G} + \mathcal{G}'$ finissent par devenir et rester positifs : ce qui est évident.

Reprenons donc l'étude de la série Θ. En groupant les termes d'une façon convenable, on trouve immédiatement que c'est le produit de la fonction rationnelle [1]

$$\left[\frac{D(g, h, g')}{D(x, y, z)}\right]^k \tag{42}$$

par une fonction de

$$\frac{x_2}{x_1}, \quad \frac{x_3}{x_1}, \quad e^{\frac{2\pi i x_4}{a_4''' x_1}}$$

holomorphe dans tout le domaine (I) et nulle en même temps que la troisième variable; a_4''' a ici le même sens que dans les formules (13).

---

[1] x, y, z et k ont ici le même sens que dans le Chapitre V de ma Thèse.

Comme a''_4 est un diviseur de (¹) $2m$, nous pouvons sans inconvénient remplacer cette troisième variable par $e^{\frac{\pi i x_4}{m x_1}}$. Mais on peut aussi considérer cette fonction comme une fonction uniforme de

$$e^{\frac{\pi i x_2}{m x_1}}, \quad e^{\frac{\pi i x_3}{m x_1}}, \quad e^{\frac{\pi i x_4}{m x_1}},$$

holomorphe dans tout le polyèdre fondamental, sauf peut-être au point (o, o, o, o, 1). On peut développer cette fonction en série de Laurent

$$\Sigma A_{\alpha,\beta,\gamma}\, e^{\frac{\pi i}{m x_1}(\alpha x_2+\beta x_3+\gamma x_4)},$$

ce développement étant valable dans tout le domaine (I); pour des valeurs fixes des deux premières variables, ce développement est valable dès que la troisième est assez petite, et s'annule avec elle : donc γ est toujours positif. Mais, par un changement de variable remplaçant x_4 par $x_4 - Mx_2 - Nx_3$, où M et N sont des nombres rationnels, et conservant x_2 et x_3, on peut faire en sorte que $\psi(1, 0, 0)$ et $\psi(0, 1, 0)$ soient tous deux négatifs : alors on sera sûr que α et β seront, comme γ, de signe constant, positifs par exemple.

Notre démonstration serait faite si nous étions sûrs que, dans tout le polyèdre fondamental, ou du moins dans la partie de ce polyèdre qui est voisine du point (o, o, o, o, 1), $\mathfrak{z}\frac{x_2}{x_1}$, $\mathfrak{z}\frac{x_3}{x_1}$, $\mathfrak{z}\frac{x_4}{x_1}$ sont tous positifs; mais il est peut-être impossible de trouver un polyèdre fondamental remplissant cette condition. Seulement, un nouveau changement de variables à coefficients rationnels portant sur x_2 et x_3, ou encore le changement de x_2 en $x_2 + Mx_4$ et de x_3 en $x_3 + Nx_4$, où M et N sont rationnels, permet, sans que α, β, γ cessent d'être positifs, de remplir la condition pour une nouvelle partie du polyèdre; un nombre fini de changements de variables de cette sorte permettra de remplir tout le polyèdre.

Donc Θ est dans le polyèdre fondamental le produit du facteur rationnel (46) par une fonction holomorphe même au point (o, o, o, o, 1) de trois variables convenablement choisies; il est entendu qu'il peut y

(¹) m peut être supposé positif : on l'y amène au besoin en changeant x_5 en $-x_5$.

avoir besoin de systèmes différents de trois variables, suivant la région du polyèdre.

Le facteur rationnel disparaissant dans les quotients invariants de fonctions Θ, les fonctions invariantes formées par cette voie auront, dans le même polyèdre, le caractère de fonctions rationnelles des mêmes variables au point $(0, 0, 0, 0, 1)$. Donc quatre quelconques de ces fonctions sont liées par une relation algébrique.

17. Nous prenons maintenant le cas où la quadrique possède des génératrices rationnelles. Les points du polyèdre fondamental où nous avons à étudier les singularités des fonctions Θ sont de deux sortes : des points réels, en nombre fini, et des points imaginaires situés sur un nombre fini de portions de génératrices rationnelles. Mais on peut reproduire la même démonstration que dans le cas précédent, en s'arrangeant seulement pour que, après chaque changement de variables, $\psi(0, 0, 1) = 0$: la différence de forme du polyèdre fondamental pour les grandes valeurs de $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{K}^2$ n'empêche pas de réaliser la même condition pour $\mathfrak{z}\dfrac{x_2}{x_1}$, $\mathfrak{z}\dfrac{x_3}{x_1}$, $\mathfrak{z}\dfrac{x_4}{x_1}$: le résultat est absolument le même.

Les propriétés de ces fonctions de trois variables sont, on le voit, très analogues à celles des fonctions hyperabéliennes qui proviennent du groupe des transformations semblables d'une forme quaternaire.