Paul Montel

Sur les familles normales de fonctions analytiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 33 (1916), p. 223-302

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1916_3_33__223_0>

SUR

LES FAMILLES NORMALES

DE FONCTIONS ANALYTIQUES,

PAR M. P. MONTEL.

Introduction.

Les théorèmes de M. Picard sur l'indétermination d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé ont montré depuis longtemps comment l'existence de valeurs exceptionnelles pour une fonction analytique permet de mettre en évidence des propriétés importantes de cette fonction. Les généralisations récentes que MM. Landau, Carathéodory, Schottky ont découvertes, les recherches de M. Lindelöf sur les fonctions qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un angle ont encore confirmé cette manière de voir.

En même temps que l'attention des analystes était appelée de nouveau sur l'étude des fonctions à valeurs exceptionnelles, se développait, sous l'influence de la théorie du calcul des variations, l'étude systématique des familles de fonctions. Il semblait qu'une pareille étude ne pût rendre de services que dans la démonstration des théorèmes d'existence des solutions des équations différentielles ou des problèmes du calcul des variations. Or, les propriétés d'une famille particulière de fonctions analytiques, de celles qui, holomorphes dans un domaine, ne prennent jamais dans ce domaine ni la valeur *zéro* ni la valeur *un*, ont permis de grouper d'une manière simple et naturelle les principaux résultats obtenus sur l'indétermination des fonctions analytiques autour de leurs points singuliers et sur les séries de telles fonctions et d'en obtenir de nouveaux : c'est ce que j'ai montré dans un Mémoire récent (¹).

Je me suis placé ici à ce même point de vue pour étudier les fonctions analytiques, holomorphes ou méromorphes, qui ne prennent pas certaines valeurs dans un domaine donné : le présent travail est divisé en quatre Chapitres.

On dit qu'une famille de fonctions analytiques est *normale* dans un domaine D, si, de toute suite infinie de fonctions de cette famille, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément à l'intérieur de D.

Dans le premier Chapitre, je rappelle les propriétés des familles normales et je démontre, par une voie élémentaire, que les familles de fonctions holomorphes qui ne prennent ni la valeur o ni la valeur 1 dans un domaine sont des familles normales.

Cette démonstration est intimement liée à celle du théorème de M. Schottky : je fais voir comment la méthode que M. Borel a découverte pour démontrer le théorème de M. Picard sur les fonctions entières conduit sans modification au théorème de M. Schottky : il suffit d'appliquer la démonstration de M. Borel à une famille de fonctions sans qu'il soit nécessaire de préciser les inégalités sur lesquelles repose cette démonstration. En d'autres termes, *la méthode de M. Borel, appliquée à une seule fonction, conduit au théorème de M. Picard; appliquée à une famille de fonctions, elle conduit au théorème de M. Schottky*.

Je donne ensuite, dans le Chapitre II, une démonstration du théorème général de M. Picard qui ne fait pas appel au théorème de Weierstrass et j'apporte à ce théorème quelques précisions nouvelles en étudiant la distribution des zéros de $f(x) - a$ dans le voisinage d'un point essentiel isolé de $f(x)$, pour lequel il existe une valeur exceptionnelle. J'étends les résultats à des ensembles parfaits discontinus de points singuliers et j'établis quelques pro-

(¹) *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Annales de l'École Normale*, 1912, p. 487).

priétés nouvelles des fonctions holomorphes qui ne prennent pas deux valeurs données à l'intérieur d'un angle.

Dans le Chapitre III, j'étudie des familles normales de polynomes et j'introduis la notion de familles normales de polynomes d'ordre donné ρ : ce sont des familles de polynomes dont le module, dans un cercle de rayon r, ne dépasse pas $e^{\mathrm{H}r^\rho}$ ou encore certaines familles de polynomes pour lesquels la somme des inverses des puissances ρ des modules de leurs zéros demeure bornée. Ces familles de polynomes s'introduisent naturellement dans l'étude des fonctions entières de genre fini. Je démontre, en effet, que toute fonction entière d'ordre ρ est la limite d'une suite de polynomes d'ordre ρ et réciproquement. On retrouve, en particulier, par cette voie, les beaux résultats de M. Hadamard sur les fonctions entières de genre fini.

Dans le dernier Chapitre, je m'occupe des familles normales de fonctions méromorphes.

Pour toutes les fonctions méromorphes

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots,$$

dans lesquelles a_0 et a_1 sont fixes $(a_1 \neq 0)$ et qui appartiennent à une famille normale, il existe un nombre R, *ne dépendant que de a_0 et de a_1*, tel que, à l'extérieur du cercle de centre $x = 0$ et de rayon R, ou la fonction $f(x)$ cesse d'être méromorphe, ou cette fonction cesse d'appartenir à la famille.

Soient a, b, c trois nombres quelconques et m, n, p trois entiers dont la somme des inverses est inférieure à l'unité. Nous dirons que les racines des équations

$$f(x) - a = 0, \qquad f(x) - b = 0, \qquad f(x) - c = 0$$

sont régulières si l'ordre de multiplicité de ces racines est divisible par m pour la première, par n pour la seconde, par p pour la troisième. En substituant à la fonction modulaire dont le rôle est fondamental dans ces questions, une fonction de Schwarz, comme l'ont fait MM. Landau et Carathéodory dans leur Mémoire sur les suites de fonctions, on démontre que les fonctions $f(x)$ dont les racines sont régulières dans un domaine D forment une famille normale. Le théorème précédent s'applique alors à ces fonctions. On en conclut, par exemple, qu'il n'existe pas de fonction méromorphe dans tout le plan, telle que toutes les racines des équations précédentes soient régulières et l'on déduit de là l'impossibilité de trouver trois fonctions entières X, Y, Z vérifiant la relation

$$X^m + Y^n + Z^p = 0,$$

lorsque la somme des inverses des entiers m, n, p est inférieure à l'unité.

Ces généralisations des théorèmes de M. Picard sur l'indétermination d'une fonction autour d'un point essentiel peuvent encore être étendues au cas où il existe des racines non régulières.

Les principaux résultats de ce dernier Chapitre ont été énoncés dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 18 novembre 1912.

CHAPITRE I.

LES FAMILLES NORMALES DE FONCTIONS HOLOMORPHES.

---

1. Nous considérerons des domaines connexes D limités par une ou plusieurs courbes simples et des fonctions $f(x)$ holomorphes en tout point intérieur au domaine : nous dirons que ces fonctions sont holomorphes dans le domaine D *ouvert* ou encore *à l'intérieur du domaine* D.

Soit une famille (F) de fonctions $f(x)$, holomorphes dans l'intérieur de D; je rappelle la définition des familles normales : on dit que la famille (F) est une *famille normale dans le domaine* si, de toute suite infinie

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots,$$

de fonctions appartenant à la famille (F), on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément dans l'intérieur de D [1] vers une fonction limite qui peut être une constante finie ou infinie [2].

Nous dirons qu'une famille (F) de fonctions $f(x)$, holomorphes dans l'intérieur de D, est *normale en un point* P, intérieur à D, si elle est normale dans un cercle de centre P.

Une famille normale dans D est normale en chaque point P intérieur à D. Réciproquement, une famille normale en chaque point P intérieur à D est normale à l'intérieur de D. Soit en effet D' un domaine fermé intérieur à D; chaque point P de D' est le centre d'un cercle dans lequel la famille est normale. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, on peut recouvrir D' à l'aide d'un nombre fini de tels cercles, soient

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_p.$$

Considérons une suite infinie de fonctions $f(x)$, on peut en extraire la suite

$$f_1^1(x), \quad f_2^1(x), \quad \ldots, \quad f_n^1(x), \quad \ldots$$

convergeant dans C_1; de cette suite, on peut extraire la suite

$$f_1^2(x), \quad f_2^2(x), \quad \ldots, \quad f_n^2(x), \quad \ldots$$

convergeant dans C_2 et par suite dans C_1 et C_2, etc. On arrive ainsi à la suite

$$f_1^p(x), \quad f_2^p(x), \quad \ldots, \quad f_n^p(x), \quad \ldots$$

qui converge uniformément dans $C_1, C_2, \ldots, C_p$, c'est-à-dire dans D'. Soient alors $D_1, D_2, \ldots, D_k, \ldots$ une suite infinie de domaines fermés dont chacun est contenu dans le suivant et qui a pour limite D. On peut extraire de la suite donnée une suite $f_n^{(1)}(x)$ convergeant dans D_1, de celle-ci une suite $f_n^{(2)}(x)$ convergeant dans D_2, etc., une suite

$$f_1^{(k)}(x), \quad f_2^{(k)}(x), \quad \ldots, \quad f_n^{(k)}(x), \quad \ldots$$

---

(1) C'est-à-dire dans l'intérieur de tout domaine fermé D' complètement intérieur à D.

(2) On dit qu'une suite de fonctions converge uniformément vers l'infini dans un domaine fermé D' si le module des fonctions de la suite peut, à partir d'un certain rang et quel que soit x dans D', dépasser tout nombre positif donné.

qui converge dans D_k, alors la suite

$$f_1^{(1)}(x),\quad f_2^{(2)}(x),\quad \ldots,\quad f_n^{(n)}(x),\quad \ldots$$

converge à l'intérieur de D.

2. Parmi les familles normales dans un domaine D, il convient de distinguer les familles (F) pour lesquelles la valeur $f(x)$ de chaque fonction en un point fixe x_0 intérieur à D a un module borné. On doit avoir

$$|f(x_0)| < \alpha,$$

α étant une constante, quelle que soit la fonction $f(x)$ de la famille. Pour une telle famille, toute suite infinie admet au moins une fonction limite finie, puisque cette fonction limite est finie en x_0 : chaque fonction limite est holomorphe dans l'intérieur de D, puisque la convergence étant uniforme dans tout domaine D′ intérieur à D, il résulte d'un théorème classique de Weierstrass que la fonction limite est holomorphe dans D′.

Les fonctions de la famille (F) sont *bornées dans leur ensemble* dans l'intérieur de D; en d'autres termes, dans tout domaine D′ intérieur à D, on a, quel que soit x et quelle que soit la fonction $f(x)$ de la famille,

$$|f(x)| < M,$$

M étant une constante. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi : on pourrait, pour toute valeur de l'entier n, trouver une fonction $f_n(x)$ de la famille dont le module maximum dans D′ fût supérieur à n. Considérons alors la suite

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots;$$

il est impossible d'en extraire une suite infinie nouvelle

$$f_{\lambda_1}(x),\quad f_{\lambda_2}(x),\quad \ldots,\quad f_{\lambda_n}(x),\quad \ldots$$

tendant uniformément vers une fonction limite finie $F(x)$, car les fonctions de cette suite finiraient par différer de $F(x)$, uniformément dans D′ de moins de 1 par exemple et l'on aurait pour n assez grand

$$|f_{\lambda_n}(x) - \mathrm{F}(x)| < 1, \quad |f_{\lambda_n}(x)| < 1 + \mathrm{M}',$$

M′ étant le module maximum de $\mathrm{F}(x)$ dans D′ ; mais ce résultat est en contradiction avec le fait que, en un point au moins de D′, on a

$$|f_{\lambda_n}(x)| > \lambda_n,$$

λ_n croissant indéfiniment avec n.

3. On démontre de la même manière que la famille (F) est formée de fonctions *également continues dans l'intérieur de* D. On sait que des fonctions sont dites *également continues* dans un domaine fermé, si, à chaque nombre positif ε arbitrairement petit, on peut faire correspondre un nombre positif δ tel que, en deux points quelconques x et x' du domaine dont la distance ne dépasse pas δ, la différence des valeurs $f(x)$ et $f(x')$ d'une fonction quelconque de la famille ait un module inférieur à ε. Autrement dit, l'inégalité

$$|x - x'| \leqq \delta$$

entraîne l'inégalité

$$|f(x) - f(x')| \leqq$$

pour *toute* fonction de la famille ([1]). Les fonctions d'une famille sont dites également continues dans l'intérieur d'un domaine ouvert si elles sont également continues dans un domaine fermé quelconque intérieur au premier.

Soit D′ un domaine complètement intérieur à D ; je dis que les fonctions de la famille (F) sont également continues dans D′. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un nombre ε tel que pour chaque nombre $\frac{1}{n}$ (n entier), il y aurait au moins une fonction $f_n(x)$ de la famille pour laquelle, en deux points x et x' du domaine dont la

([1]) J'appelle *oscillation* de $f(x)$ dans un domaine fermé D′, le maximum de $|f(x) - f(x')|$ lorsque x et x' sont deux points quelconques de D′. On voit que, pour des fonctions également continues, l'oscillation de $f(x)$ ne dépasse pas ε dans tout domaine d'élongation au plus égale à δ.

distance ne dépasse pas $\frac{1}{n}$, on aurait

$$|f_n(x) - f_n(x')| > \varepsilon.$$

Considérons alors la suite

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots,$$

on peut, par hypothèse, en extraire une suite nouvelle

$$f_{\lambda_1}(x), \quad f_{\lambda_2}(x), \quad \ldots, \quad f_{\lambda_n}(x), \quad \ldots$$

convergeant uniformément dans D′ vers une fonction limite $F(x)$; on peut donc prendre n_0 assez grand pour que, n étant supérieur à n_0, on ait, quel que soit x dans D′,

$$|f_{\lambda_n}(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, puisque $F(x)$ est continue dans D′, il existe un nombre δ tel que, pour deux points x et x' de D′ dont la distance ne dépasse pas δ, le module de $f(x) - f(x')$ ne dépasse pas $\frac{\varepsilon}{3}$; on a donc, si $|x - x'| \leqq \delta$ et $n > n_0$,

$$|f_{\lambda_n}(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f_{\lambda_n}(x) - F(x')| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|F(x) - F(x')| < \frac{\varepsilon}{3};$$

on déduit de là, comme

$$f_{\lambda_n}(x) - f_{\lambda_n}(x') = f_{\lambda_n}(x) - F(x) + F(x') - f_{\lambda_n}(x') + F(x) - F(x'),$$
$$|f_{\lambda_n}(x) - f_{\lambda_n}(x') \leqq |f_{\lambda_n}(x) - F(x)| + |f_{\lambda_n}(x') - F(x')| + |F(x) - F(x')| < \varepsilon,$$

quel que soit n supérieur à n_0 et quels que soient les points x et x' de D′ dont la distance n'est pas supérieure à δ. Prenons n assez grand pour que $\frac{1}{\lambda_n} < \delta$; notre résultat sera en contradiction avec l'hypothèse que pour la fonction $f_{\lambda_n}(x)$, il existe deux points dont la distance ne dépasse pas $\frac{1}{\lambda_n}$ et par conséquent δ et pour lesquels le module de la différence des valeurs de $f_{\lambda_n}(x)$ en ces deux points est supérieur à ε : cette contradiction démontre notre théorème.

4. Nous dirons que les fonctions $f(x)$ d'une famille (F) sont *également continues en un point* P *intérieur au domaine* D, si, étant donné ε, on peut tracer un cercle de centre P dans lequel la différence $f(x)-f(x')$ ait un module inférieur à ε quelle que soit la fonction de la famille et quels que soient les points x et x' pris à l'intérieur du cercle. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Si les fonctions d'une famille (F) *sont également continues dans le domaine* D, *elles sont également continues en chaque point* P *intérieur à* D *et réciproquement.*

Supposons en effet les fonctions également continues dans D et soit $P(x_0)$ un point intérieur à D ; soit D′ un domaine intérieur à D et contenant P : à chaque nombre positif ε correspond un nombre δ tel que, pour deux points x et x' de D′ vérifiant l'inégalité

$$|x - x'| \leqq \delta,$$

on ait

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pour toute fonction $f(x)$ de la famille. Dans le cercle γ de centre x_0 et de rayon δ, on aura pour deux points x et x' de ce cercle

$$|f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|f(x_0) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Les fonctions sont donc également continues en P.

Réciproquement, supposons les fonctions également continues en chaque point intérieur à D et soit D′ un domaine complètement intérieur à D. Étant donné ε, on peut, autour de chaque point P du domaine *fermé* D′, tracer un cercle γ tel que, à son intérieur, l'oscillation de chaque fonction $f(x)$ ne dépasse pas ε. Prenons le cercle γ de plus grand rayon contenu dans D′ pour lequel cette propriété est vérifiée et soit $r(x)$ la valeur de ce rayon en chaque point x de D′. Je dis que le minimum de la fonction $r(x)$ dans D′ est positif. Soit δ la valeur de ce minimum; d'après un théorème de Weierstrass, il existe un point x_0 de D′ tel que, dans un cercle de centre x_0 et de rayon arbitrairement petit, le minimum de $r(x)$ soit encore δ (¹). Or, pour le point x_0, il existe un cercle de rayon r_0 non nul dans lequel l'oscillation de chaque fonction ne dépasse pas ε; pour tous les points x contenus dans le cercle concentrique de rayon $\frac{r_0}{2}$, la valeur de $r(x)$ est au moins égale à $\frac{r_0}{2}$, donc le minimum δ n'est pas inférieur à $\frac{r_0}{2}$. Il résulte de là que, si la distance de deux points x et x' de D′ ne dépasse pas δ, le module de $f(x) - f(x')$ ne dépasse pas ε quelle que soit la fonction $f(x)$ de la famille.

5. Considérons une famille (F) normale et bornée de fonctions holomorphes et supposons qu'aucune des fonctions limites ne soit égale à la constante a. Je dis que, *dans tout domaine* D′ *intérieur à* D, *le nombre des zéros de* $f(x) - a$ *est, quel que soit* $f(x)$, *inférieur à un entier fixe*. Nous supposons, dans cet énoncé, que chaque zéro est compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

En effet, si la proposition était inexacte, on pourrait faire correspondre à chaque entier n une fonction $f_n(x)$ de la famille telle que le nombre des zéros des $f_n(x) - a$ fût au moins égal à n dans le domaine D′. De la suite ainsi formée

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots,$$

on peut extraire une suite nouvelle

$$f_{\lambda_1}(x),\quad f_{\lambda_2}(x),\quad \ldots,\quad f_{\lambda_n}(x),\quad \ldots$$

(¹) Si le point x_0 est sur la frontière de D′, on ne prendrait que la portion du cercle intérieure à D′.

convergeant uniformément vers une fonction holomorphe limite $F(x)$ qui, par hypothèse, n'est pas égale à la constante a. La fonction $F(x)-a$ a donc dans D′ un certain nombre de zéros distincts $x_1, x_2, \ldots, x_p$, dont les degrés de multiplicité sont respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Traçons autour de ces points comme centres des cercles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ de rayons assez petits pour qu'ils soient extérieurs deux à deux et tous intérieurs à D′ (1).

Lorsque n est assez grand, les fonctions $f_{\lambda_n}(x)-a$ ont tous leurs zéros à l'intérieur des cercles γ, sinon il y aurait une infinité de ces zéros à l'extérieur de ces cercles, ils auraient au moins un point limite non intérieur à ces cercles : en ce point on aurait $F(x)=a$ (2), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Maintenant, si n est assez grand, $f_{\lambda_n}(x)-a$ a exactement α_k zéros dans le cercle γ_k; en effet $f_{\lambda_n}(x)$ tend uniformément vers $F(x)$ sur le cercle γ_k et, à partir d'une certaine valeur de n, $f_{\lambda_n}(x)$, qui diffère de $F(x)$ d'aussi peu qu'on le veut, ne s'annule pas sur la circonférence de ce cercle; d'ailleurs $f'_{\lambda_n}(x)$ tend uniformément vers $F'(x)$; on a donc

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_k}\frac{f'_{\lambda_n}(x)\,dx}{f_{\lambda_n}(x)-a}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_k}\frac{F'(x)\,dx}{F(x)-a}=\alpha_k;$$

comme l'intégrale du premier membre est égale à un entier, elle a pour valeur α_k pour n assez grand (3).

Il résulte de ce qui précède que, à partir d'une valeur assez élevée de n, chaque fonction $f_{\lambda_n}(x)-a$ a exactement α_1 zéros dans γ_1, α_2 zéros dans γ_2, ..., α_p zéros dans γ_p et n'a aucun zéro hors de ces cercles. Le nombre total des zéros ne dépasserait pas $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p$ pour toutes les fonctions, ce qui contredit l'hypothèse que $f_{\lambda_n}(x)-a$ possède dans D′ plus de λ_n zéros, nombre qui croît indéfiniment avec n.

---

(1) Si $F(x)-a$ possède des zéros sur le contour C′ de D′, comme la convergence est uniforme à l'intérieur de D, on peut remplacer ce contour C′ par un contour voisin C″ tel qu'il n'y ait pas de nouveau zéro entre C′ et C″ et que le domaine D″ limité par C″ contienne D′ et soit contenu dans D.

(2) *Voir* P. MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes*, p. 122.

(3) On peut aussi, pour démontrer ce point, utiliser un théorème classique de Rouché (*voir* P. MONTEL, *loc. cit.*, et *Sur les familles de fonctions, etc.*, p. 490).

On doit donc admettre que le nombre des zéros de $f(x) - a$ dans D' est borné quelle que soit $f(x)$.

6. Nous avons vu aux paragraphes 2 et 3 qu'une famille (F) de fonctions $f(x)$ bornées en un point, possède, si elle est normale, les propriétés suivantes :

1° Les fonctions sont bornées dans l'intérieur de D ;

2° Les fonctions sont également continues dans l'intérieur de D ;

3° Les fonctions $f(x) - a$ ont, pour chaque valeur de a, un nombre fini de zéros à l'intérieur de D, si a n'est pas une fonction limite.

Examinons les réciproques des deux premières propriétés.

Tout d'abord, une famille de fonctions également continues dans l'intérieur de D est une famille normale. Je dis en effet que, de toute suite infinie de fonctions de cette famille, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément dans D vers une fonction limite finie ou vers la constante infinie ; soit D' un domaine intérieur à D et x_0 un point de D' : si x est un autre point quelconque de D', il existe un chemin joignant x_0 à x, intérieur à D' et dont la longueur est inférieure à la longueur L du contour limitant extérieurement le domaine D [1].

Soit alors un nombre ε positif et arbitraire ; par hypothèse, il existe un nombre δ tel que, en deux points de D' dont la distance est inférieure à δ, la différence $f(x) - f(x')$ ait, quelle que soit $f(x)$, un module inférieur à ε. Désignons par k un entier supérieur à $\frac{L}{\delta}$ et prenons sur le chemin xx_0 des points $x_1, x_2, \ldots, x_h$ formant avec x_0 et x les sommets d'une ligne polygonale dont chaque côté ne dépasse pas δ ; le nombre h est inférieur à $k - 1$. On a

$$\begin{gathered}|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon,\\ |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ |f(x) - f(x_h)| < \varepsilon,\end{gathered}$$

d'où

$$|f(x) - f(x_0)| \leqq k\varepsilon$$

---

[1] Nous supposons toujours que le domaine D est borné : le contour limitant extérieurement D est celui des contours limitant D qui sépare les points de D du point à l'infini.

et

$$|f(x_0)| - k\varepsilon < |f(x)| < |f(x_0)| + k\varepsilon.$$

Si les nombres $f(x_0)$ sont bornés quelle que soit $f(x)$, il en est de même des fonctions $f(x)$ et il résulte d'un théorème de Arzelà [1] que l'on peut extraire de toute suite infinie de fonctions $f(x)$ une suite nouvelle convergeant uniformément dans D′. Si les nombres $|f(x_0)|$ augmentent indéfiniment, il résulte de la dernière inégalité précédente que $f(x)$ tend uniformément vers la constante infinie. Les fonctions $f(x)$ forment donc une famille normale dans D′.

Soient alors $D_1, D_2, \ldots, D_p, \ldots$ une suite infinie de domaines tels que D_p soit complètement intérieur à D_{p+1} et ayant pour limite le domaine D et

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_p(x),\quad \ldots$$

une suite infinie de fonctions $f(x)$; on peut extraire de cette suite une suite nouvelle

$$f_1^1(x),\quad f_2^1(x),\quad \ldots,\quad f_n^1(x),\quad \ldots$$

convergeant uniformément dans D_1; de cette seconde suite, on peut extraire une nouvelle suite

$$f_1^2(x),\quad f_2^2(x),\quad \ldots,\quad f_n^2(x),\quad \ldots$$

convergeant uniformément dans D_2, etc. On formera de même une suite

$$f_1^p(x),\quad f_2^p(x),\quad \ldots,\quad f_n^p(x),\quad \ldots$$

extraite de la suite $f_n^{p-1}(x)$ et convergeant uniformément dans D_p. La suite

$$f_1^1(x),\quad f_2^2(x),\quad \ldots,\quad f_n^n(x),\quad \ldots$$

converge uniformément dans tout domaine D′ intérieur à D : en effet, prenons p assez grand pour que D_p contienne D′ à son intérieur; la suite $f_n^n(x)$, étant composée de fonctions appartenant à la suite $f_n^p(x)$, converge dans D_p et par suite dans D′.

---

(1) *Sulle serie di funzioni* (*Memorie della R. Accademia di Bologna*, 5e série, t. VIII, 1899, p. 178).

Il n'y a cependant pas identité entre les familles également continues et les familles normales : cette identité a lieu lorsque les fonctions sont bornées en un point x_0 intérieur à D; dans le cas contraire, les fonctions peuvent former une famille normale qui ne soit pas également continue. Prenons par exemple une fonction $\varphi(x)$ qui ne s'annule pas dans D : la famille des fonctions $C\varphi(x)$, où C est une constante arbitraire, n'est pas également continue : c'est cependant une famille normale.

Ainsi, il y a identité entre les familles normales et bornées en un point et les familles également continues et bornées en un point : ce sont en définitive des familles de fonctions holomorphes et bornées dans l'intérieur de D, car nous allons montrer que, réciproquement, une famille de fonctions holomorphes et bornées dans leur ensemble dans l'intérieur de D est une famille normale. Il suffit d'établir que ces fonctions sont également continues. Soit D′ un domaine complètement intérieur à D limité par un contour C′ et D″, un domaine contenant D′ et contenu dans D, limité par la courbe C″; désignons par d la plus courte distance des frontières de ces domaines D′ et D″; par x et x', deux points intérieurs à D′; on a

$$f(x) - f(x') = \frac{1}{2i\pi}\int_{C''} f(z)\left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-x'}\right]dz,$$

ou

$$f(x) - f(x') = \frac{(x-x')}{2i\pi}\int_{C''}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)(z-x')};$$

soient M le module maximum des fonctions $f(x)$ dans le domaine fermé D″, et L la longueur du contour C″, on déduit de l'égalité précédente

$$|f(x) - f(x')| < |x - x'|\frac{L}{2\pi d^2}.$$

L'égale continuité des fonctions $f(x)$ dans le domaine D résulte immédiatement de cette inégalité.

8. Les fonctions bornées dans leur ensemble dans l'intérieur d'un domaine D forment une famille normale. On sait que l'on peut remplacer cette condition par la suivante : il existe un nombre a tel que

le module de $f(x) - a$ reste supérieur à un nombre fixe pour toute fonction $f(x)$ et toute valeur de x prise dans un domaine D' intérieur à D. Cela revient à dire qu'il existe dans le plan sur lequel on représente les valeurs de $X = P + iQ = f(x)$, une région où les points x ne pénètrent pas [1].

Supposons en particulier que cette région soit le demi-plan situé à droite de la droite $P = A$; les fonctions $f(x)$ forment une famille normale. Supposons en outre que les valeurs de ces fonctions soient bornées en un point x_0 intérieur à D; on en déduit que les fonctions $f(x)$ ont un module borné dans tout domaine D' intérieur à D. Donc : si des fonctions analytiques régulières dans D ont en x_0 des valeurs dont le module est inférieur à α et si, sur la courbe limitant le domaine D, le maximum de leur partie réelle est inférieur à A, dans tout domaine D' intérieur à D, le module de ces fonctions ne dépasse pas un nombre fixe qui ne dépend que de A et de α. Prenons en particulier pour domaine D un cercle de centre origine et de rayon r et pour D' un cercle concentrique de rayon $\theta r (0 < \theta < 1)$; on a alors

$$|f(x)| < \Omega(\alpha, A, \theta).$$

La limite supérieure Ω ne dépend pas de r, car la transformation $x = rx'$ remplace les fonctions $f(x)$ relatives au cercle D de rayon r par les fonctions $g(x')$ possédant les mêmes propriétés dans le cercle D_0 de rayon 1 et le module maximum est le même pour les fonctions $f(x)$ dans le cercle D' de rayon θr et pour les fonctions $g(x')$ dans le cercle D'_0 de rayon θ, puisque deux fonctions correspondantes $f(x)$ et $g(x')$ prennent les mêmes valeurs, la première dans le cercle D' et la seconde dans le cercle D'_0 [2].

Les remarques précédentes sont des conséquences immédiates d'une

---

[1] P. Montel, *Leçons sur les séries de polynomes*, p. 27 (en note); ou *Sur les suites infinies de fonctions* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXIV, 1907, p. 306).

[2] Voici une conséquence de l'inégalité que nous venons d'établir : si pour une fonction entière, le maximum $A(r)$ de la partie réelle dans le cercle de rayon r est borné quel que soit r, cette fonction est une constante. Prenons en effet $\theta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = |a_0|$: on voit que $f(x)$ a un module borné quel que soit r. On obtient le même résultat en remplaçant $A(r)$ par le maximum $B(r)$ de la partie réelle de $-f(x)$.

inégalité de M. Hadamard qui montre en outre que $\Omega(\alpha, A, \theta)$ est infiniment grand du premier ordre par rapport à $1-\theta$. Comme j'aurai plus loin à utiliser cette inégalité, j'en rappellerai la démonstration en suivant la voie indiquée par M. Carathéodory.

Posons $f(0) = a_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ et soit $A(r)$ le maximum de la fonction P dans le cercle de rayon r; la fonction

$$X = \frac{f(x) - a_0}{A(r) - \alpha_0}$$

s'annule à l'origine et sa partie réelle est inférieure ou égale à l'unité dans le cercle de rayon r. Le point X est donc toujours à gauche de $P = 1$ et, si l'on prend deux points Q et Q' symétriques par rapport à $P = 1$, le point X est plus rapproché du point Q dont l'abscisse est inférieure à 1 que du point Q'. Prenons pour Q et Q' les points $X = 0$ et $X = 2$, la fonction

$$Y = \frac{X}{X-2}$$

s'annule à l'origine et son module est inférieur à 1 dans le cercle de rayon r; la fonction $\frac{Y}{x}$ est holomorphe dans le même cercle et le maximum de son module a lieu en un point de la circonférence; ce maximum ne dépasse donc pas $\frac{1}{r}$, puisque, sur la circonférence, Y est en module inférieur à 1. On a donc, quel que soit x dans le cercle,

$$\left|\frac{Y}{x}\right| \leqq \frac{1}{r}$$

et, en posant $|x| = \rho$,

$$|Y| \leqq \frac{\rho}{r} \quad (^1).$$

Pour tout point x intérieur au cercle de rayon θr, on a

$$\frac{\rho}{r} \leqq \theta$$

(1) Cette remarque sur une fonction Y, nulle à l'origine et dont le module est inférieur à 1 dans le cercle de centre origine et de rayon r, est due à M. Schwarz (*Zur Theorie der Abbildung* : *Ges. math. Abh.*, t. II, p. 110).

et

$$|Y| \leqq \theta,$$

d'où

$$\left|\frac{X}{X-2}\right| \leqq \theta,$$

$$|X| \leqq \theta |X-2| \leqq \theta |X| + 2\theta,$$

$$|X| \leqq \frac{2\theta}{1-\theta},$$

c'est-à-dire

$$|f(x) - a_0| \leqq \frac{2\theta}{1-\theta}[A(r) - \alpha_0];$$

c'est l'inégalité de M. Hadamard. On en déduit

$$|f(x)| \leqq |a_0| + \frac{2\theta}{1-\theta}[A(r) - \alpha_0] \leqq |a_0| + \frac{2\theta}{1-\theta}[A(r) + |a_0|].$$

Supposons $A(r) > |a_0|$, alors

$$|f(x)| \leqq A(r) + \frac{4\theta}{1-\theta}A(r) = \frac{1+3\theta}{1-\theta}A(r) < \frac{4A(r)}{1-\theta};$$

si l'on appelle $M(\rho)$, le maximum du module de $f(x)$ dans le cercle de rayon ρ, on a

$$M(\theta r) < \frac{4A(r)}{1-\theta} \qquad [A(r) > |a_0|],$$

inégalité dont nous aurons bientôt à nous servir.

D'autre part, on peut écrire évidemment, si $-B(r)$ est le minimum de P dans le cercle de rayon r,

$$|-B(r) - \alpha_0| \leqq |f(x) - a_0| \leqq \frac{2\theta}{1-\theta}[A(r) - \alpha_0],$$

d'où

$$B(r) \leqq -\alpha_0 + \frac{2\theta}{1-\theta}[A(r) - \alpha_0]$$

et, si $A(r) > -\alpha_0$,

$$B(\theta r) < \frac{4A(r)}{1-\theta}.$$

9. Une famille de fonctions holomorphes et bornées dans l'intérieur

d'un domaine D est une famille normale : soit D', un domaine intérieur à D; lorsque x parcourt D', le point $X = f(x)$ parcourt un domaine Δ'_f et notre hypothèse peut être énoncée de la manière suivante : les domaines Δ'_f sont, quelle que soit $f(x)$, contenus dans un cercle fixe.

Je dis que l'on peut faire une hypothèse moins restrictive sur la nature de ces domaines sans que la famille cesse d'être normale : supposons seulement que les *aires* de ces domaines demeurent, quelle que soit $f(x)$, inférieures à un nombre fixe M. Les fonctions forment encore une famille normale. Nous pouvons toujours supposer que les fonctions $f(x)$ sont bornées en un point x_0 de D, car on peut sans changer l'aire de Δ'_f remplacer la fonction $f(x)$ par la fonction $f(x) - f(x_0)$ qui s'annule pour $x = x_0$. Il faut donc montrer que les fonctions $f(x)$ supposées bornées en un point x_0 de D sont également continues dans l'intérieur de D. Traçons un cercle C de centre x_0 et de rayon r qui soit contenu dans D : je vais montrer que les fonctions sont bornées dans le cercle C' concentrique à C et de rayon $\frac{r}{2}$.

Considérons une suite infinie de fonctions $f(x)$; si le maximum $A(\rho)$ de la partie réelle de la fonction $f(x)$ est borné sur C', cette suite est normale, sinon on peut en extraire une autre suite dans laquelle les nombres $A\left(\frac{r}{2}\right)$ augmentent indéfiniment.

Dans cette nouvelle suite, si le maximum $B(\rho)$ de la partie réelle de $-f(x)$ est borné sur C', la suite est normale, sinon on peut en extraire une suite nouvelle dans laquelle $B\left(\frac{r}{2}\right)$ augmente indéfiniment. On obtiendra donc une suite de fonctions

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots$$

telle que l'oscillation de la partie réelle de $f_n(x)$, sur le cercle C', soit supérieure à n,

$$A\left(\frac{r}{2}\right) + B\left(\frac{r}{2}\right) > n$$

et aussi

$$A(\rho) + B(\rho) > n$$

pour $\rho > \frac{r}{2}$.

Lorsque x décrit l'anneau CC', X décrit une surface dont l'aire est inférieure à M; donc on a

$$\iint\left[\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)^2\right] d\xi\, d\eta < M$$

et, en passant aux coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} M &> \iint\left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)^2\right] \rho\, d\rho\, d\omega \\ &> \iint \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)^2 d\rho\, d\omega > \frac{2}{r}\int_{\frac{r}{2}}^{r} d\rho \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)^2 d\omega. \end{aligned}$$

Mais, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)^2 d\omega > \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial P}{\partial \omega}\right| d\omega\right)^2 > \frac{n^2}{2\pi}$$

pour la fonction $f_n(x)$; on déduirait de là

$$M > \frac{n^2}{2\pi},$$

ce qui est impossible. Donc la suite est normale.

On en déduit aisément que la famille $f(x)$ est une famille normale.

En résumé, si les domaines Δ'_f ont des aires bornées dans leur ensemble, les fonctions $f(x)$ ainsi que les fonctions P et Q forment des familles normales. La démonstration ne fait intervenir que l'une des fonctions P ou Q; on peut donner à l'énoncé une forme qui ne fasse intervenir que l'une de ces fonctions. L'aire de Δ'_f est en effet représentée par l'intégrale

$$\iint_{\Delta'_f} dP\, dQ = \iint_{D'}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)^2\right] d\xi\, d\eta.$$

Considérons alors une famille de fonctions harmoniques à l'intérieur de D, telles que l'intégrale précédente soit bornée pour toutes les fonctions $f(x)$ quand on fixe le domaine D' intérieur à D; on peut énoncer au sujet de ces fonctions le théorème suivant :

Les fonctions P, *harmoniques dans l'intérieur d'un domaine* D *et telles* *que l'intégrale de Riemann étendue à un domaine fixe intérieur à* D *soit bornée quelle que soit la fonction $f(x)$, forment une famille normale.*

M. Lebesgue avait déjà démontré la même proposition pour des fonctions plus générales qui n'ont en commun avec les fonctions harmoniques que les propriétés d'être continues et monotones, c'est-à-dire de ne prendre dans chaque domaine leurs valeurs maximum et minimum que sur la frontière de ce domaine : ce théorème a servi de point de départ à ses recherches sur le principe de Dirichlet [1].

On sait et nous verrons bientôt que des fonctions $f(x)$ forment une famille normale si ces fonctions ne prennent pas certaines valeurs exceptionnelles ne remplissant pas nécessairement des domaines; mais la généralisation précédente du théorème sur les fonctions bornées est d'une autre nature, car on ne peut affirmer *a priori* qu'il y aura des points exceptionnels pour tous les domaines Δ'_f.

10. Les régions exceptionnelles dont les domaines Δ'_f ne possèdent aucun point peuvent, comme je l'ai démontré, se réduire à des lignes [2]. Ce résultat peut être étendu au cas d'un ensemble linéaire continu quelconque [3].

Avec ces nouvelles hypothèses, les familles de fonctions qui admettent pour valeurs exceptionnelles les affixes des points du plan des x situés sur ces lignes où ces continus linéaires sont des familles normales. Mais on peut réduire à deux le nombre des valeurs exceptionnelles et les familles demeurent normales : j'ai établi précédemment ce résultat en utilisant la fonction modulaire [4].

Nous nous proposons ici de retrouver ce théorème par une voie élémentaire en démontrant d'abord par cette voie des propositions dues, la première à M. Schottky, la seconde à M. Landau.

M. Schottky, en employant la méthode de démonstration dont

---

(1) H. Lebesgue, *Sur le principe de Dirichlet* (*Circolo matematico di Palermo*, t. XXIV, 1907, p. 16).

(2) *Sur les familles de fonctions, etc.*, p. 494.

(3) *Voir* P. Fatou, *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLI, 1913, p. 113).

(4) *Loc. cit.*, p. 497. Cette démonstration a été simplifiée par M. de la Vallée Poussin, *Démonstration simplifiée du théorème fondamental de M. Montel sur les familles normales de fonctions* (*Annals of Mathematics*, 2e série, vol. XVII, 1915, p. 5).

M. Borel s'est servi pour établir le théorème de M. Picard relatif aux valeurs exceptionnelles des fonctions entières ([1]) et en la modifiant convenablement, a démontré un théorème général sur les fonctions qui admettent deux valeurs exceptionnelles ([2]). Nous allons voir comment la considération des familles normales nous permettra d'arriver au théorème de M. Schottky en suivant la marche de M. Borel. On peut dire que *la démonstration de M. Borel, appliquée à une seule fonction, conduit au premier théorème de M. Picard et que, appliquée à une famille de fonctions, elle conduit au théorème de M. Schottky.*

Considérons la famille (E) des fonctions $f(x)$ holomorphes à l'intérieur et sur la circonférence du cercle de centre $x = 0$ et de rayon 1 dans lequel elles ne prennent jamais les valeurs 0 et 1 et telles que les nombres $f(0) = a_0$ vérifient les inégalités

$$|a_0| < \alpha, \qquad \left|\frac{1}{a_0}\right| < \alpha, \qquad \left|\frac{1}{1 - a_0}\right| < \alpha,$$

α étant une constante.

Le théorème de M. Schottky affirme que, à l'intérieur de tout cercle concentrique de rayon $\theta\,(0 < \theta < 1)$, on a, quel que soit x et pour toutes les fonctions $f(x)$ de la famille

$$|f(x)| < \Omega(\alpha, \theta),$$

Ω étant un nombre fixe pour toutes les fonctions $f(x)$ et qui ne dépend que de α et de θ.

Comme on peut toujours remplacer le nombre α par un nombre plus grand, nous pouvons toujours supposer que α est supérieur aux différentes valeurs numériques en nombre fini que nous introduirons

---

([1]) E. Borel, *Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard* (*C. R. Acad. Sc.*, t. CXXII, 1896, p. 1045-1048); *Leçons sur les fonctions entières*, Note 1, p. 103.

([2]) Schottky, *Ueber den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen* (*Sitzungsberichte der kgl. preuss. Akad. d. W.*, 1904, p. 1244-1262); *Ueber zwei Beweise des allgemeinen Picardschen Satzes* (*Ibid.*, 1907, p. 823-840). La démonstration de M. Schottky a été simplifiée par M. Lindelöf [*Sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions monogènes* (*Comptes rendus du Congrès de Stockholm*, 1909)] et tout récemment par M. Bernays [*Zur elementaren Theorie der Landauschen funktion* $\varphi(\alpha)$ (*Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, 1913)].

dans la démonstration. Posons

$$G_1(x) = \log f(x),$$
$$G_2(x) = \log[1 - f(x)],$$

les logarithmes étant définis de façon que, pour $x = 0$, on obtienne la valeur principale, c'est-à-dire que, par exemple,

$$G_1(0) = \log a_0 = \log|a_0| + i \arg a_0, \qquad -\pi < \arg a_0 \leqq +\pi.$$

Les fonctions $G_1(x)$ et $G_2(x)$ sont holomorphes dans le cercle de rayon 1 et vérifient l'identité

$$e^{G_1(x)} + e^{G_2(x)} = 1.$$

Nous désignerons par C_t le cercle de centre origine et de rayon t et par $-B_1(t)$ le minimum de la partie réelle de $G_1(x)$ sur le cercle C_t. Traçons deux cercles $C_{\theta'}$ et $C_{\theta''}$, de rayons θ' et θ'', équidistants du cercle C_θ $(\theta' < \theta < \theta'')$. Les fonctions de la famille (E) se partagent en deux groupes (E_1) et (E_2). Les fonctions du groupe (E_1) sont telles que

$$B_1(\theta) \leqq \log\alpha + \pi;$$

elles sont donc bornées dans le cercle C_θ, car

$$|f(x)| \geqq e^{-B_1(\theta)} \geqq \frac{e^{-\pi}}{\alpha} \qquad \text{avec} \qquad |a_0| < \alpha;$$

les fonctions du groupe (E_2) sont en nombre infini, sinon le théorème serait démontré et l'on a pour chacunes d'elles

$$B_1(\theta) > \log\alpha + \pi > |\log a_0|.$$

On peut donc écrire, en s'appuyant sur les résultats du n° 8,

$$M_1(\theta') < \frac{4B_1(\theta)}{h}, \qquad h = \frac{\theta'' - \theta'}{2},$$

$M_1(t)$ et $M_2(t)$ désignant les modules maximums de $G_1(x)$ et de $G_2(x)$ sur le cercle C_t. Nous allons maintenant comparer $B_1(\theta)$ à $M_2(\theta'')$; la fonction $\mathcal{R}(G_1)$ atteint son minimum $-B_1(\theta)$ en un point x_0 du cercle C_θ; on a en ce point

$$|e^{G_1(x_0)}| = e^{-B_1(\theta)},$$

$$e^{G_1(x_0)} = 1 - e^{G_2(x_0)},$$

$$(1) \qquad G_2(x_0) = \log[1 - e^{G_1(x_0)}] + 2ni\pi,$$

le logarithme étant défini à l'aide de sa détermination principale pour $x = 0$ et n étant un entier convenable; on déduit de là

$$(2) \qquad \min|G_2(x) - 2ni\pi| \leqq |G_2(x_0) - 2ni\pi| = |\log[1 - e^{G_1(x_0)}]|;$$

or

$$|e^{G_1(x_0)}| = e^{-B_1(\theta)} < e^{-\log\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

et, α étant supposé supérieur à 4,

$$e^{-B_1(\theta)} < \frac{1}{2}.$$

D'autre part, d'après la remarque de M. Schwarz rappelée au n° 8,

$$|\log(1-u)| < \frac{\text{max. de } |\log(1-u)| \text{ pour } |u| = \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} |u| < 2|u|,$$

si $|u| < \frac{1}{2}$; d'où

$$(3) \qquad |\log[1 - e^{G_1(x_0)}]| < 2e^{-B_1(\theta)} = e^{-B_1(\theta)+\log 2} < e^{-\frac{1}{2}B_1(\theta)},$$

car on a supposé $\alpha > 4$. Posons

$$\Gamma(x) = \log[G_2(x) - 2ni\pi],$$

le nombre n ayant été défini précédemment et le logarithme étant toujours déterminé par sa valeur principale à l'origine.

La fonction $\Gamma(x)$ est holomorphe dans C_1 puisque $G_2(x)$ ne prend aucune valeur de la forme $2ni\pi$; appelons $-\beta(t)$ le minimum de sa partie réelle sur le cercle C_t, on aura

$$-\beta(\theta) = \text{min.} \log|G_2(x) - 2ni\pi| < \log e^{-\frac{1}{2}B_1(\theta)} = -\frac{1}{2}B_1(\theta),$$

donc
$$B_1(\theta) < 2\beta(\theta),$$
et
$$M_1(\theta') < \frac{8\beta(\theta)}{h}.$$

Soit maintenant $\alpha(t)$ le maximum de la partie réelle de $\Gamma(x)$ sur le cercle C_t. Nous diviserons les fonctions de la famille (E_2) en deux nouveaux groupes (E'_1) et (E'_2). Pour chaque fonction $f(x)$ appartenant au premier groupe (E'_1), il existe un entier déterminé $\overline{n}$ tel que
$$\alpha(\theta'') \leqq \log \alpha.$$

Les fonctions du groupe (E'_1) sont bornées dans C_θ, car on a
$$|1 - f(x)| = |e^{G_1(x) - 2\overline{n}i\pi}| \leqq e^{\alpha(\theta)} < \alpha,$$
$$|f(x)| < 1 + \alpha.$$

Pour les fonctions appartenant au second groupe (E'_2), on aura, *quel que soit l'entier n*,
$$\alpha(\theta'') > \log \alpha,$$

et, par conséquent, d'après l'inégalité de la fin du n° 8,
$$\beta(\theta) < \frac{4\alpha(\theta'')}{h},$$
car
$$-\mathcal{R}[\Gamma(0)] = \log \left| \frac{1}{1 - a_0} \right| < \log \alpha < \alpha(\theta'').$$

Considérons les fonctions $f(x)$ et $\Gamma(x)$ appartenant à ce dernier groupe : elles sont en nombre infini, sinon le théorème serait démontré. On a les relations
$$\alpha(\theta'') = \max \log |G_2(x) - 2ni\pi|$$
et
$$|G_2(x) - 2ni\pi| \leqq |G_2(x)| + 2\pi|n| \leqq M_2(\theta'') + |2n\pi|;$$

d'ailleurs, d'après les inégalités (2) et (3),
$$|2n\pi| < |G_2(x_0)| + e^{-\frac{1}{2}B_1(\theta)} < M_2(\theta'') + 1.$$

Plaçons dans un nouveau groupe (E''_1) les fonctions $f(x)$ pour lesquelles $M_2(\theta'') \leqq 1$: elles sont évidemment bornées dans C_θ. Les autres qui constituent le groupe (E''_2) sont telles que $M_2(\theta'') > 1$, et

$$|2n\pi| < 2M_2(\theta''),$$

donc

$$\alpha(\theta'') < \log 3M_2(\theta''),$$

d'où

$$M_1(\theta') < \frac{32 \log 3 M_2(\theta'')}{h^2}$$

et, comme pour $x > 0$, $\log x < \sqrt{x}$,

$$M_1(\theta') < \frac{32\sqrt{3}}{h^2}\sqrt{M_2(\theta'')}.$$

On obtiendrait de même l'inégalité

$$M_2(\theta') < \frac{32\sqrt{3}}{h^2}\sqrt{M_1(\theta'')},$$

et, en appelant $M(t)$ le plus grand des deux nombres $M_1(t)$, et $M_2(t)$,

$$M(\theta') < \frac{32\sqrt{3}}{h^2}\sqrt{M(\theta'')};$$

posons $\mu(t) = \frac{M(t)}{3(32)^2}$, il vient

$$\mu(\theta') < \frac{\sqrt{\mu(\theta'')}}{h^2}.$$

La suite du raisonnement est classique : soient $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ les valeurs de μ correspondant à une suite infinie de cercles dont le premier C est C_θ; le second C_1 est équidistant de C_θ et $C_{\theta''}$; le troisième C_2 est équidistant de C_1 et $C_{\theta''}$, etc., nous pourrons écrire les inégalités

$$\mu < 4 \quad \frac{\sqrt{\mu_1}}{h^2},$$

$$\mu_1 < 4^2 \quad \frac{\sqrt{\mu_2}}{h^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mu_n < 4^{n+1}\frac{\sqrt{\mu_{n+1}}}{h^2},$$

et, en extrayant les racines d'ordre $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$,

$$\mu < 4 \frac{\sqrt{\mu_1}}{h^2},$$

$$\mu_1^{\frac{1}{2}} < 4^{\frac{2}{2}} \frac{(\mu_2)^{\frac{1}{2^2}}}{h^{\frac{2}{2}}},$$

$$\mu_2^{\frac{1}{2^2}} < 4^{\frac{3}{2^2}} \frac{(\mu_3)^{\frac{1}{2^3}}}{h^{\frac{2}{2^2}}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(\mu_n)^{\frac{1}{2^n}} < 4^{\frac{n+1}{2^n}} \frac{(\mu_{n+1})^{\frac{1}{2^{n+1}}}}{h^{\frac{2}{2^n}}},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\mu < (\mu_{n+1})^{\frac{1}{2^{n+1}}} \frac{4^{\left(1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{n+1}{2^n}\right)}}{h^{2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}} < (\mu_{n+1})^{\frac{1}{2^{n+1}}} \left(\frac{4}{h}\right)^4,$$

car $h < 1$, et

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots = 4,$$

donc

$$\mu < (\mu'')^{\frac{1}{2^{n+1}}} \left(\frac{4}{h}\right)^4,$$

μ'' étant la valeur de μ sur le cercle C''; comme n est aussi grand qu'on le veut, on déduit de là

$$\mu \leqq \left(\frac{4}{h}\right)^4 \qquad \text{et} \qquad M(\theta) < \frac{3.4^9}{h^4}.$$

Ce résultat, valable pour chaque fonction du groupe (E_2'''), montre que ces fonctions sont bornées dans C_θ; la famille (E) est formée par la réunion des fonctions des familles (E_1), (E_1'), (E_1''), et (E_2'') : comme dans chaque groupe, les fonctions sont bornées dans leur ensemble; il en est de même pour la famille (E).

Voici maintenant l'énoncé du théorème correspondant de

M. Landau. Considérons la famille ($\mathcal{E}$) des fonctions $f(x)$, holomorphes dans le cercle de rayon 1 où elles ne prennent ni la valeur 0 ni la valeur 1, et supposons que

$$|f(0)| = |a_0| < \alpha;$$

alors, dans tout cercle concentrique et de rayon $\theta < 1$, on a

$$|f(x)| < \Omega(\alpha, \theta) \quad (^1).$$

Pour démontrer que les fonctions $f(x)$ sont bornées dans le cercle C, il suffit, puisqu'elles sont bornées pour $x = 0$, de montrer qu'elles forment une famille normale. Choisissons une suite infinie arbitraire de fonctions $f(x)$; si les valeurs correspondantes de a_0 ont une au moins de leurs valeurs limites différente de 0 et de 1, choisissons la suite

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots,$$

extraite de la précédente telle que la suite des valeurs de a_0 ait pour limite cette valeur α_0 différente de 0 et de 1 et telle que

$$|f_n(0) - \alpha_0| < \alpha',$$

$2\alpha'$ étant égal au plus petit des nombres

$$|\alpha_0|, \quad |1 - \alpha_0| \quad \text{et} \quad \frac{1}{|\alpha_0|}.$$

On a alors

$$|a_0| < \alpha' + |\alpha_0| \leqq \frac{3}{2}|\alpha_0| \leqq \frac{3}{4\alpha'} < \frac{1}{\alpha'},$$

$$\left|\frac{1}{a_0}\right| > \alpha', \qquad |a_0| > |\alpha_0| - \alpha' \geqq \alpha', \qquad |1 - a_0| \geqq |1 - \alpha_0| - \alpha' \geqq \alpha',$$

---

(1) *Voir* Bohr et Landau, *Ueber das Verhalten von* $\zeta(s)$ *und* $\zeta_k(s)$ *in der Nähe der Geraden* $\sigma = 1$ (*Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1910, p. 309). M. Bernays a donné, à partir du théorème de M. Schottky, une démonstration simple de ce théorème, que MM. Landau et Carathéodory ont publiée dans leur Mémoire : *Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen* (*Sitzungsberichte der K. Preussischen Akad. der Wissenschaften*, 1911, p. 597). La démonstration de M. Bernays a été encore simplifiée par M. Lévy : *Remarques sur le théorème de M. Picard* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XL, 1912, p. 25). J'ai donné, de ce théorème, une démonstration qui permet de le déduire immédiatement de celui de M. Schottky à l'aide de la notion de famille normale : *Sur les familles de fonctions*, etc. (*Annales de l'École Normale*, 1912, p. 517).

et la suite des $f_n(x)$ est normale, d'après le théorème de M. Schottky.

Si la seule limite des a_0 est l'unité, on prendra la suite des fonctions

$$\varphi_n(x) = \frac{\log f_n(x) + 2i\pi}{4i\pi}$$

(pour $x = 0$, $\log a_0$ a sa détermination principale); les nombres $\varphi_n(0)$ ont pour limite $\frac{1}{2}$ et chaque fonction $\varphi_n(x)$ ne prend ni la valeur 0 ni la valeur 1 dans le cercle de rayon unité : la suite des $\varphi_n(x)$ est donc normale et il en est de même de la suite des

$$f_n(x) = e^{4i\pi\,\varphi_n(x)}.$$

Si la seule limite des a_0 est zéro, on remplace $f_n(x)$ par $1 - f_n(x)$ et l'on est ramené au cas précédent ([1]).

Donc, de toute suite infinie de fonctions appartenant à la famille ($\mathcal{E}$), on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément vers une limite : cette famille est donc une famille normale, et comme toutes les fonctions sont bornées pour $x = 0$, elles sont bornées dans leur ensemble dans tout cercle C_θ.

Il résulte de ce qui précède qu'*une famille de fonctions holomorphes dans le cercle de rayon* 1, *à l'intérieur duquel elles ne prennent ni la valeur* 0 *ni la valeur* 1, *est une famille normale;* en effet, si les nombres a_0, relatifs à une suite infinie de ces fonctions, ont au moins une de leurs valeurs limites finie, on peut extraire de cette suite, une suite convergeant vers une fonction finie; si la seule limite des a_0 est l'infini, la suite des fonctions $\frac{1}{f_n(x)}$ donne naissance à une suite

---

([1]) Remarquons que les fonctions $\varphi_n(x)$ ne prennent jamais la valeur $\frac{1}{2}$; par conséquent toute fonction limite des $\varphi_n(x)$ prenant la valeur $\frac{1}{2}$ pour $x = 0$ est nécessairement égale à la constante $\frac{1}{2}$ (*Sur les familles de fonctions*, etc., p. 490) et la suite correspondante des fonctions $f_n(x)$ converge uniformément vers l'unité. De même, si les nombres a_0 ont pour limite zéro, toute suite convergente formée avec les $f_n(x)$ correspondants, converge uniformément vers zéro.

convergeant uniformément vers zéro et la suite correspondante des $f(x)$ tend uniformément vers l'infini.

11. Les théorèmes précédents s'étendent immédiatement, comme l'on sait, à un domaine limité par un nombre quelconque de contours : cela résulte du fait que, si une famille de fonctions est normale autour de chaque point d'un domaine fermé, elle est normale dans ce domaine et, si les fonctions de cette famille sont bornées en un point intérieur au domaine, la famille est normale et bornée dans l'intérieur du domaine.

Les fonctions d'une famille normale qui sont bornées en un point P intérieur au domaine D ont des modules qui, à l'intérieur d'un domaine D′ complètement intérieur à D et contenant P, restent inférieurs à un nombre fixe $\Omega(\alpha)$, si α est le module maximum des fonctions au point P. Ce nombre $\Omega(\alpha)$ demeure le même si l'on remplace les domaines D, D′ et le point P par les domaines Δ, Δ' et le point Π qui leur correspondent par une transformation conforme et les fonctions $f(x)$ de la famille normale dans D, par les fonctions $\varphi(x)$ correspondantes qui sont normales dans Δ. En particulier, si les fonctions $f(x)$ ne prennent pas les valeurs 0 et 1 dans D, les fonctions correspondantes $\varphi(x)$ ne prennent pas les valeurs 0 et 1 dans Δ, puisque, en deux points correspondants, deux fonctions correspondantes prennent la même valeur.

CHAPITRE II.

SUR L'INDÉTERMINATION DES FONCTIONS ANALYTIQUES AUTOUR DE LEURS POINTS SINGULIERS.

12. On sait combien il est aisé de déduire du théorème de M. Schottky la généralisation, maintenant classique, que M. Landau a donnée du théorème de M. Picard sur les fonctions entières et les autres généralisations de même nature.

Ce même théorème de M. Schottky conduit aussi très simplement, comme je l'ai montré [1], à une démonstration du théorème général de M. Picard sur l'indétermination d'une fonction uniforme autour d'un point singulier isolé. La démonstration que j'ai donnée repose sur le théorème de Weierstrass, lequel affirme que, dans le voisinage du point essentiel, la fonction s'approche autant qu'on le veut d'une valeur quelconque. On peut modifier la méthode suivie de manière à ne pas faire intervenir le théorème de Weierstrass, ce qui n'est pas sans intérêt à cause des extensions de ce mode de démonstration au cas de points singuliers non isolés.

Traçons une circonférence C ayant pour centre le point singulier isolé $x = 0$ et dont le rayon est assez petit pour que $f(x)$ n'ait pas d'autre point singulier à l'intérieur de C et ne prenne dans ce cercle aucune de deux valeurs que l'on peut supposer être 0 et 1. Nous allons démontrer que nos hypothèses sont incompatibles. On peut toujours admettre, en remplaçant au besoin x par kx, que le cercle C a pour rayon le nombre 2. Traçons une infinité de cercles concentriques à C : $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$ ayant respectivement pour rayons $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ et considérons les fonctions $f_n(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$; lorsque x décrit l'anneau Γ_0 compris entre C et C_1, la fonction $f_n(x)$ prend les mêmes valeurs que $f(x)$ dans l'anneau Γ_n compris entre C_{n-1} et C_{n+1}, les fonctions $f_n(x)$ forment donc dans l'anneau Γ_0 une famille normale. On peut donc en extraire une suite infinie, bornée dans Γ_0 ou bien on peut extraire une telle suite de la famille des fonctions holomorphes $\frac{1}{f_n(x)}$. Dans le premier cas, si $f_{\lambda_1}(x), f_{\lambda_2}(x), \ldots, f_{\lambda_n}(x), \ldots$ est la suite bornée ainsi extraite, les modules de ces fonctions demeurent inférieurs à un nombre fixe M sur le cercle C_0.

Alors, la fonction $f(x)$ a son module inférieur à M sur les cercles $C_{\lambda_1}, C_{\lambda_2}, \ldots, C_{\lambda_n}, \ldots$ dont les rayons décroissent jusqu'à zéro : on en conclut que $f(x)$ est bornée entre deux cercles consécutifs de cette série de cercles et par suite inférieure en module à M autour de l'origine : la fonction serait donc régulière en ce point. Dans le second cas, on

---

[1] *Sur les familles de fonctions, etc.*, p. 514.

démontrerait de la même manière que $\frac{1}{f(x)}$ est régulière à l'origine et que, par conséquent, $f(x)$ est régulière ou admet un pôle en ce point. Dans l'un et l'autre cas l'origine ne peut être un point essentiel et le théorème est démontré.

13. Le mode de raisonnement précédent peut nous conduire à des conclusions plus précises : la démonstration repose sur l'existence d'une infinité d'anneaux *semblables* ayant pour limite le point $x = 0$ et dans lesquels la fonction ne prend aucune des valeurs 0 et 1.

Supposons alors que la fonction admette une valeur exceptionnelle unique que nous pouvons imaginer être la valeur zéro et considérons les racines de l'équation $f(x) = a$, a étant une valeur différente quelconque, *un* par exemple. Soient

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots$$

les modules des zéros distincts de $f(x) - 1$ rangés par ordre de grandeur décroissante et considérons les nombres $\frac{r_{n+1}}{r_n}$: toutes leurs valeurs limites, lorsque n croît indéfiniment, sont inférieures ou égales à l'unité; supposons que l'une d'elles soit un nombre k inférieur à 1 et soit

$$\frac{r_{\lambda_1+1}}{r_{\lambda_1}}, \quad \frac{r_{\lambda_2+1}}{r_{\lambda_2}}, \quad \ldots, \quad \frac{r_{\lambda_n+1}}{r_{\lambda_n}}, \quad \ldots,$$

une suite correspondante ayant pour limite k, telle que, quel que soit n, on ait

$$\frac{r_{\lambda_n+1}}{r_{\lambda_n}} < \varepsilon \qquad (k \leqq \varepsilon < 1).$$

Traçons les cercles C'_n de rayons r_{λ_n} et les cercles C''_n de rayons $\varepsilon r_{\lambda_n}$; comme l'on a

$$\varepsilon r_{\lambda_n} > r_{\lambda_{n+1}},$$

les anneaux semblables C'_n, C''_n n'empiètent pas les uns sur les autres; on en déduit, par un raisonnement identique à celui du numéro précédent, que la fonction $f(x)$ ou la fonction $\frac{1}{f(x)}$ est bornée sur une infinité de cercles C_n équidistants des cercles C'_n, C''_n. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si une fonction $f(x)$ admet une valeur exceptionnelle et si

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots,$$

sont les modules des racines distinctes de l'équation $f(x) = a$, a étant un nombre quelconque distinct de cette valeur exceptionnelle, rangés par ordre de grandeur décroissante, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = 1.$$

Considérons en particulier une fonction entière de genre fini ou infini et désignons par $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ la suite des modules de ses zéros distincts rangés par ordre de grandeur croissante ; si l'une des limites du rapport $\frac{r_n}{r_{n+1}}$ est inférieure à l'unité, la fonction n'a pas de valeur exceptionnelle. Par exemple, si toutes les limites de ce rapport sont inférieures à un nombre plus petit que 1, la fonction qui est alors égale au produit par un facteur exponentiel de genre fini ou infini d'un produit canonique de genre zéro, ne peut avoir de valeur exceptionnelle.

14. Soit $f(x)$ une fonction admettant une valeur exceptionnelle autour du point essentiel O. Construisons, comme au n° 12, une suite infinie de cercles concentriques à O ; C, $C_0, \ldots, C_n, \ldots$, dont les rayons décroissent jusqu'à zéro. Je dis que le nombre des racines de l'équation $f(x) = a$ contenues dans l'anneau Γ_n de rang n, ne peut rester borné quel que soit n. Supposons en effet qu'il en soit ainsi et que ce nombre reste inférieur ou égal à l'entier fixe p ; on peut toujours admettre que $a = 1$, et que la valeur exceptionnelle soit zéro. Introduisons les fonctions $f_n(x)$ du n° 12 ; l'équation

$$f_n(x) = 1$$

n'a pas plus de p racines dans l'anneau Γ_0. La fonction $\sqrt[p+1]{f_n(x)}$, où l'on a choisi arbitrairement la détermination du radical en un point fixe x_0 de l'anneau, est uniforme et holomorphe dans cet anneau; elle ne prend pas l'une au moins ω des valeurs des racines $(p+1)^{\text{ième}}$ de l'unité; donc la fonction

$$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt[p+1]{f_n(x)}}{\omega}$$

ne prend ni la valeur o ni la valeur 1 dans l'anneau : les fonctions $\varphi_n(x)$ forment une famille normale; si elles sont bornées, il en est de même des fonctions $f_n(x)$ et l'on en conclut comme plus haut que $f(x)$ est régulière en O. Si elles ne sont pas bornées, on peut en extraire une suite ayant pour limite l'infini et l'on en conclut que $\frac{1}{f(x)}$ est régulière en O. L'hypothèse faite est donc inadmissible et le nombre des racines de l'équation

$$f(x) = 1$$

contenues dans l'anneau Γ_n ne peut rester borné quel que soit n. Je dis que *toutes ses limites sont infinies :* en effet, dans le cas contraire, on pourrait trouver une suite d'anneaux correspondant aux cercles

$$C_{\lambda_1}, \quad C_{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad C_{\lambda_n}, \quad \ldots,$$

dans lesquels le nombre de ces racines serait borné et le raisonnement que nous venons de faire serait applicable à cette suite d'anneaux.

On peut exprimer autrement le résultat précédent. Soit $\theta(n)$ le nombre des racines de $f(x) = 1$ comprises entre C_0 et C_n; je dis que $\frac{\theta(n)}{n}$ *augmente indéfiniment avec* n, car, si, pour une infinité de valeurs de n, on avait

$$\frac{\theta(n)}{n} < p,$$

p étant un entier fixe, on en déduirait l'existence d'une infinité d'anneaux dans lesquels le nombre de ces racines ne dépasserait pas le nombre p [1].

---

[1] En effet, s'il n'y avait qu'un nombre fini n_0 d'anneaux pour lesquels ce nombre ne

Soit alors r le rayon d'un cercle quelconque concentrique à O et

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leqq r < \frac{1}{2^n}.$$

On a

$$\log\frac{1}{r} > n \log 2,$$

et comme

$$\theta(r) \geqq \theta(n),$$

$$\frac{\theta(r)}{\log\frac{1}{r}} \geqq \frac{\theta(n)}{\log\frac{1}{r}} > \frac{\theta(n)}{n\log 2};$$

donc, si l'une des limites du rapport $\dfrac{\theta(r)}{\log\frac{1}{r}}$ était finie, il en serait de même de la suite correspondante des valeurs de $\dfrac{\theta(n)}{n\log 2}$ ou des valeurs de $\dfrac{\theta(n)}{n}$. Donc, $\dfrac{\theta(r)}{\log\frac{1}{r}}$ augmente indéfiniment avec $\dfrac{1}{r}$.

Ce théorème nous donne une limite inférieure du nombre des zéros de $f(x) - 1$ dans le voisinage du point O. En particulier, si l'on considère une fonction entière ayant une valeur exceptionnelle, on peut affirmer que, a étant un nombre quelconque différent de la valeur exceptionnelle, *le nombre des zéros de $f(x) - a$ de module inférieur à r croît plus vite que* $\log r$.

15. Soit maintenant $f(x)$ une fonction holomorphe quelconque dont le point zéro est un point essentiel isolé : la fonction

$$\varphi(x) = e^{\frac{2i\pi}{h}f(x)}$$

---

dépasse pas p, on aurait nécessairement pour $n > n_0$,

$$\theta(n) > (n - n_0)p$$

ou

$$\frac{\theta(n)}{n} > \left(1 - \frac{n_0}{n}\right)p$$

et la plus petite limite de $\dfrac{\theta(n)}{n}$ serait au moins égale à p.

est une fonction ayant les mêmes propriétés et possédant en outre la valeur exceptionnelle zéro et la période h. Les racines de l'équation

$$\varphi(x) = \mathrm{A}$$

correspondent à des valeurs de $f(x)$ qui sont de la forme $a + nh$, n étant un entier positif, négatif ou nul, et réciproquement toutes les valeurs de $f(x)$ qui sont de cette forme donnent à $\varphi(x)$ une même valeur A. D'où le théorème :

Désignons par $\theta(r)$ le nombre total des racines des équations

$$f(x) = a + nh$$

dont le module est inférieur à r : $\theta(r)$ croît plus vite que $\log \frac{1}{r}$.

16. Les procédés de raisonnement que nous venons d'employer dans le cas d'un seul point singulier peuvent être utilisés pour certains ensembles discontinus de points singuliers; ce sont les ensembles discontinus (e) qui possèdent la propriété suivante : on peut entourer chaque point P d'un tel ensemble (e) d'une suite infinie d'anneaux de forme quelconque, ne contenant aucun point de l'ensemble, semblables entre eux et de dimensions décroissant jusqu'à zéro. Il en résulte que l'on peut entourer chaque point de P de (e) d'une courbe fermée sur laquelle ne se trouve aucun point de l'ensemble et dont la longueur est aussi petite que l'on veut; il suffit de tracer dans l'un des anneaux une courbe de longueur finie et de considérer les courbes semblables dans les autres anneaux dont les dimensions sont de plus en plus petites. Un tel ensemble (e) appartient à la famille des ensembles que M. Painlevé a appelés linéaires et au sujet desquels il a démontré le théorème suivant :

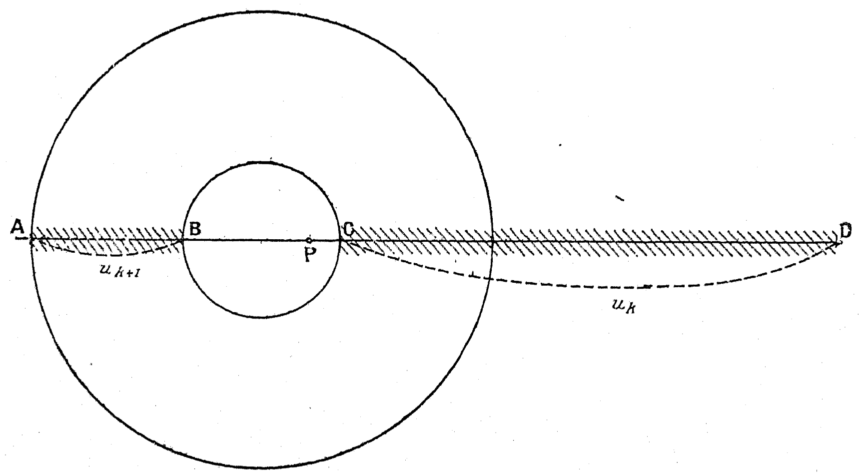
Si une fonction uniforme admet comme points singuliers les points d'un ensemble parfait discontinu linéaire, chacun des points de cet ensemble est un point d'indétermination complète (1).

(1) PAINLEVÉ, *Leçons de Stockholm;* voir aussi ZORETTI, *Leçons sur le prolongement analytique*, p. 79.

Nous pouvons répéter autour de chaque point P de (e) le raisonnement que nous avons fait autour d'un point essentiel isolé et nous en conclurons que la fonction $f(x)$ ne peut avoir, autour de chaque point P, qu'une valeur exceptionnelle et, de même que pour un point isolé, nous n'avons pas utilisé le théorème de Weierstrass, nous n'aurons pas besoin ici de nous servir du théorème de M. Painlevé.

Voici deux exemples de tels ensembles : considérons le segment (0, 1) et construisons l'ensemble parfait discontinu de la manière suivante : nous enlevons du segment unité un segment u_1 de longueur $\frac{1}{3}$ dont le milieu coïncide avec celui du segment (0, 1), enlevons ensuite deux segments u_2 de longueur commune $\frac{1}{3^2}$ et dont les milieux coïncident respectivement avec ceux des deux segments restant après la première opération; on enlève ensuite quatre segments u_3 de longueur $\frac{1}{3^3}$, etc.; l'ensemble des points non intérieurs aux segments découpés est un ensemble parfait discontinu de mesure superficielle nulle. Soit P (*fig.* 1) un point de l'ensemble, il est situé entre deux

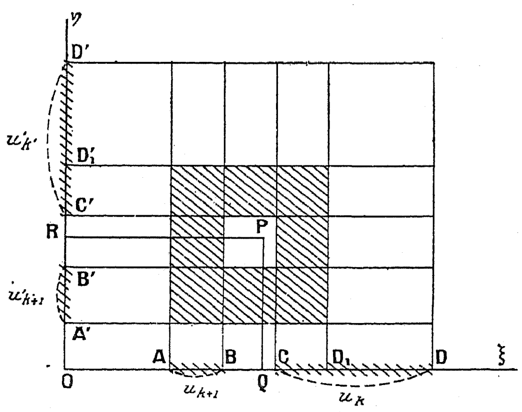
Fig. 1.



segments u_k et u_{k+1} appelés AB et CD sur la figure. Traçons le cercle de diamètre BC et le cercle concentrique passant par A; nous formons ainsi un anneau entourant P, ne contenant aucun point de l'ensemble et le rapport des rayons des cercles limitant l'anneau est 3 ; il est donc indépendant de k et tous les anneaux ainsi construits sont semblables (¹).

Donnons maintenant un exemple d'ensemble (e) dont les points ne sont plus situés sur une droite : soit $x = \xi + i\eta$ et considérons sur l'axe $O\xi$ l'ensemble (e_1) précédent et sur l'axe $O\eta$ l'ensemble obtenu en faisant tourner de 90° autour de O les points de (e_1) : nous appellerons u_k et u'_k les segments égaux correspondants. L'ensemble (e) formé par les points P du plan dont la projection sur $O\xi$ est un point Q de l'ensemble (e_1) et la projection sur $O\eta$ est un point R de l'ensemble (e_2) est un ensemble parfait discontinu de mesure superficielle nulle. Soient (*fig.* 2) u_k et u_{k+1} deux segments AB et CD qui com-

Fig. 2.



prennent Q et A'B', C'D' les segments u'_k et u'_{k+1} correspondants qui comprennent R. Soit D_1 un point de CD tel que $CD = AB$ et D'_1 un point de C'D' tel que $C'D' = A'B'$; les parallèles à O menées par A, B, C, D, et les parallèles à O menées par A', B', C', D' déterminent un cadre rectangulaire qui entoure P. Le rapport des longueurs des côtés extérieurs et intérieurs du cadre est égal à 3 : il est indépendant de k et tous ces cadres sont semblables. La proposition s'applique donc à un tel ensemble.

(¹) Ces anneaux ne sont pas concentriques, mais cela ne modifie en rien le procédé de démonstration.

Je ne sais pas si le théorème est vrai pour tous les ensembles ponctuels; pour un ensemble non ponctuel, les points singuliers ne sont plus nécessairement des points d'indétermination complète ([1]).

Le problème se pose dans ce cas de savoir quelles sont les valeurs du domaine d'indétermination qui peuvent être exceptionnelles pour la fonction.

17. Examinons maintenant le cas d'un secteur AOB, dans lequel une fonction $f(x)$ est holomorphe, sauf au point O, et rappelons d'abord les résultats obtenus par M. Lindelöf et ceux que j'ai obtenus précédemment relativement à l'ensemble des valeurs limites de $f(x)$ lorsque x tend vers zéro en restant à l'intérieur du secteur.

Supposons que x tende vers zéro en suivant le rayon OL, si l'une des valeurs limites de la fonction $f(x)$ qui ne prend dans le secteur ni la valeur 0 ni la valeur 1 est égale à 0, 1 ou ∞, il en sera de même sur tout autre rayon situé *à l'intérieur* du secteur AOB. Si, sur le rayon OL, les valeurs de $f(x)$ ou de $\frac{1}{f(x)}$ ou de $\frac{1}{1-f(x)}$ ont leurs modules bornés, il en sera de même pour tout autre rayon OL′ ([2]). Enfin, si sur OL, $f(x)$ a une limite unique α, $f(x)$ tend uniformément vers cette limite dans tout secteur A′OB′, complètement intérieur à AOB ([3]).

Voici maintenant quelques propositions nouvelles : traçons l'arc de cercle C_{-1}, dont on peut supposer le rayon égal à 2, puis les arcs de cercles

$$C_0,\quad C_1,\quad C_2,\quad \ldots,\quad C_n,\quad \ldots,$$

concentriques et de rayons $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ et considérons (*fig.* 3)

([1]) M. Denjoy a construit une fonction $f(x)$ telle que chacun des points d'un ensemble discontinu semi-linéaire est un point singulier de la fonction dont le domaine d'indétermination est formé par un anneau circulaire [*Sur les fonctions analytiques uniformes à singularités discontinues* (*C. R. Acad. Sc.*, t. CXLIX, 1909, p. 258)].

([2]) LINDELÖF, *Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXXV, n° 7, 1908).

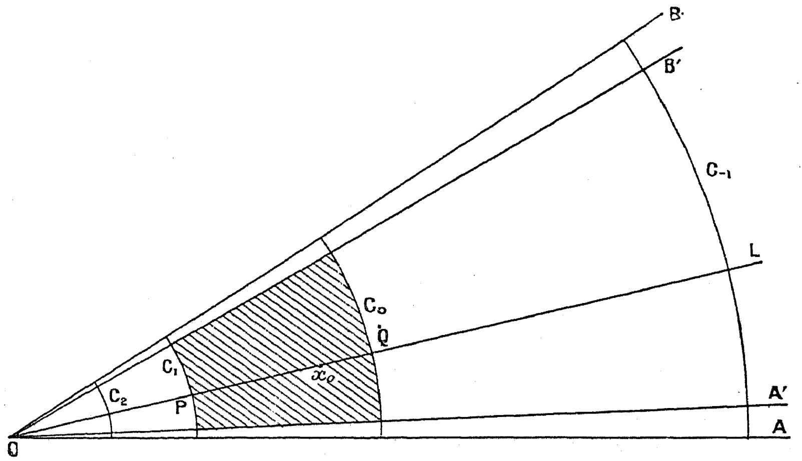
([3]) *Sur les familles de fonctions*, etc., p. 517.

les secteurs Γ_n limités par les droites OA, OB et les arcs $C_{n-1}\,C_{n+2}\,(n \geqq 0)$; ces secteurs sont homothétiques de l'un d'entre eux $C_{-1}\,C_2$ par exemple, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2^n}\cdot$ Soit

$$f_n(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\cdot$$

La fonction $f_n(x)$ prend, dans le secteur annulaire Γ_0, les mêmes valeurs que la fonction $f_n(x)$ dans le secteur annulaire Γ_n. La famille

Fig. 3.



des fonctions $f_n(x)$ est normale dans le domaine D limité par les arcs C_0 et C_1 d'une part et, d'autre part, par les rayons OA′ et OB′ intérieurs au secteur AOB et aussi voisins que l'on veut des rayons limites OA et OB.

Supposons que, sur OL, l'ensemble des valeurs limites de $f(x)$ soit dénombrable et désignons par $\alpha_i\,(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ toutes les valeurs limites : soit x_0 un point D situé sur OL, formons la suite des nombres

$$f_0(x_0),\quad f_1(x_0),\quad f_2(x_0),\quad \ldots,\quad f_n(x_0),\quad \ldots,$$

c'est-à-dire la suite

$$f(x_0),\quad f\left(\frac{x_0}{2}\right),\quad f\left(\frac{x_0}{2^2}\right),\quad \ldots,\quad f\left(\frac{x_0}{2^n}\right),\quad \ldots.$$

On sait extraire de cette suite une suite nouvelle ayant une limite α_k; soit

$$f_{\lambda_1}(x),\quad f_{\lambda_2}(x),\quad \ldots,\quad f_{\lambda_n}(x),\quad \ldots;$$

cette suite qui, en x_0, converge vers α_k; puisque les fonctions appartiennent à une famille normale, on peut extraire de cette dernière suite de fonctions, une suite nouvelle

$$f_{\mu_1}(x),\quad f_{\mu_2}(x),\quad \ldots,\quad f_{\mu_n}(x),\quad \ldots,$$

qui converge uniformément vers une fonction limite $F(x)$ telle que $F(x_0)=\alpha_k$. Soit PQ, la portion du rayon Ox_0L contenue dans D; les valeurs de $F(x)$ sur PQ ne sont autres que certains des α_k; or $F(x)$ est analytique sur PQ, cette fonction ne peut avoir sur PQ une infinité dénombrable de valeurs distinctes seulement sans se réduire à une constante qui est nécessairement α_k. On voit donc que sur tout rayon OL′ contenu dans l'angle A′OB′, l'une des valeurs limites de la fonction est α_k. D'ailleurs sur OL′, il ne peut y avoir une autre limite β différente des α_i, car on démontrerait de la même manière, en opérant sur β comme on l'a fait sur α_k, que l'on peut trouver une suite

$$f_{\nu_1}(x),\quad f_{\nu_2}(x),\quad \ldots,\quad f_{\nu_n}(x),\quad \ldots,$$

convergeant vers une fonction analytique $F_1(x)$ qui, n'ayant sur PQ qu'une suite dénombrable de valeurs, se réduirait à la constante β. Alors β serait l'un des α_i. Donc :

Si dans un secteur AOB, *la fonction holomorphe $f(x)$ ne prend ni la valeur* 0 *ni la valeur* 1 *et si, sur un rayon* OL, *l'ensemble des valeurs limites de $f(x)$ est dénombrable, sur tout rayon* OL′ *intérieur au secteur, l'ensemble des valeurs limites est le même.*

Supposons en particulier que la fonction $f(x)$ ait sur le rayon OL une limite unique α, il en sera de même pour tout rayon OL′ : d'ailleurs, les fonctions $f_n(x)$ convergeant toutes vers α dans D, leur convergence est uniforme dans D, c'est-à-dire que $f(x)$ converge uniformément vers α dans le secteur A′OB′; c'est la proposition que j'ai démontrée dans le Mémoire cité.

18. Admettons maintenant que, sur le rayon OL, aucune des valeurs limites ne soit égale à zéro, ou à un, ou à l'infini. On peut toujours supposer que l'on est dans ce dernier cas en remplaçant, au besoin, $f(x)$ par $\frac{1}{f(x)}$ ou par $\frac{1}{1-f(x)}$; alors, les fonctions $f_n(x)$ sont bornées en x_0 et par conséquent dans D; donc, la fonction $f(x)$ est bornée dans le secteur A'OB'.

Les fonctions $f_n(x)$ forment une famille également continue; étant donné ε, on peut trouver un nombre δ, tel que, pour deux points x et x' de D dont la distance ne dépasse pas δ, le module de la différence $f_n(x) - f_n(x')$ ne dépasse pas ε quel que soit n. Voici quelques conséquences de cette propriété :

1° *Les valeurs limites de $f(x)$ lorsque x tend vers zéro en restant intérieur au secteur* A'OB' *sont les mêmes que les valeurs limites de $f_n(x_0)$, lorsque, x_0 étant un point fixe de* D, *n croît indéfiniment.*

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ une suite infinie de points de A'OB' tels que $\lim x_n = 0$ et que $\lim f(x_n) = \alpha$ et soient $(x_1)^0, (x_2)^0, \ldots, (x_n)^0, \ldots$ les points correspondants de $D[(x_n)^0 = 2^n x_n]$, ces derniers points ont dans D au moins un point limite x_0, soit

$$(x_{\lambda_1})^0, \quad (x_{\lambda_2})^0, \quad \ldots, \quad (x_{\lambda_n})^0, \quad \ldots,$$

une suite formée avec des $(x_n)^0$ qui a pour limite unique x_0. On a

$$\lim_{n=\infty} f_n[(x_{\lambda_n})^0] = \alpha.$$

Prenons n assez grand pour que

$$|f_n[(x_{\lambda_n})^0] - \alpha| < \varepsilon,$$

et pour que

$$|x_0 - (x_{\lambda_n})^0| < \delta,$$

on aura alors

$$|f_n[(x_{\lambda_n})^0] - f_n(x_0)| < \varepsilon,$$

d'où

$$|f_n(x_0) - \alpha| < 2\varepsilon,$$

donc

$$\lim f_n(x_0) = \alpha.$$

Réciproquement, si α est une limite des valeurs $f(x_0)$, α est la limite pour n infini des valeurs $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\cdot$ En d'autres termes, les valeurs limites de $f(x)$ sont les mêmes que les valeurs limites des suites $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ où x est un point fixe quelconque de D. On démontrerait de même que l'ensemble des valeurs limites de $f(x)$ sur OL coïncide avec l'ensemble des limites de $f_n(x_0)$ sur PQ.

2° *Soit* Ω_L *le domaine d'indétermination formé par les valeurs limites de* $f(x)$ *sur* OL, *ce domaine varie d'une manière continue avec la demi-droite* OL.

Précisons le sens de cet énoncé : donnons-nous un nombre ε positif et arbitrairement petit, je dis que l'on peut trouver un nombre φ tel que si OL′ est une demi-droite faisant avec OL un angle inférieur à φ, à chaque valeur du domaine Ω_L correspond au moins une valeur du domaine $\Omega_{L'}$ telle que le module de leur différence ne dépasse pas ε. On peut encore dire : traçons, dans le plan des $X = f(x)$, un cercle de rayon ε autour de chaque point de Ω_L pris comme centre et soit Ω_L^ε l'ensemble formé par les points intérieurs à l'un au moins de ces cercles ; l'ensemble Ω_L^ε contient l'ensemble $\Omega_{L'}$.

Portons sur le cercle C_0, de part et d'autre du point P où cet arc rencontre OL, des arcs PP_1 et PP_2 dont la corde est égale au nombre δ introduit plus haut : je dis que l'on peut prendre $\widehat{POP_1} = \widehat{POP_2} = \varphi$. Soit, en effet, x'_0 un point du rayon OL′ contenu dans D et dans l'angle $\widehat{P_1OP_2}$; il suffit d'étudier l'ensemble des valeurs limites des nombres $f_n(x'_0)$, ensemble qui coïncide avec $\Omega_{L'}$.

Appelons x_0 le point de OL qui a le même module que x'_0, on a

$$|x_0 - x'_0| < PP_1 < \delta;$$

donc

$$|f_n(x_0) - f_n(x'_0)| < \varepsilon.$$

Par conséquent, à chaque valeur limite des $f_n(x'_0)$ correspond une valeur limite des $f_n(x_0)$ qui en diffère, en module, de moins de ε.

Traçons une courbe S passant en O et contenue tout entière dans l'angle $\widehat{P_1OP_2}$ et soit Ω_S l'ensemble des valeurs limites de $f(x)$ lorsque x tend vers zéro en restant sur S : Ω_S est contenu dans Ω_L^ε. En effet, les valeurs limites de $f(x)$ dans l'intérieur de $\widehat{P_1OP_2}$ sont les mêmes que les valeurs limites de $f_n(x_0)$ pour un point x_0 de D situé dans $\widehat{P_1OP_2}$ et ces valeurs limites font toutes partie de l'ensemble Ω_L^ε.

Supposons en particulier que la courbe S soit tangente en O à OL, alors Ω_S appartient à Ω_L^ε quel que soit ε : donc Ω_S coïncide avec Ω_L; en d'autres termes, pour deux courbes tangentes en O, l'ensemble des valeurs limites est le même. C'est un théorème dû à M. Lindelöf.

3° *Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, les modules, rangés par ordre de grandeur non croissante, des racines de l'équation $f(x) = a$, contenues dans le secteur* A′OB′ : *la série*

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n + \ldots$$

est convergente à moins que, sur tout rayon OL, *a ne soit une des valeurs limites de $f(x)$* (1).

En effet, les racines de l'équation $f(x) = a$ contenues dans le secteur annulaire D_n limité par OA′, OB′ et les cercles C_n, C_{n+1} correspondent aux racines de $f_n(x) = a$ contenues dans D. Or, le nombre de ces racines, chacune d'elles étant comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité, est inférieur à un entier fixe p indépendant de n, comme on l'a vu au n° 5, car aucune des fonctions limites n'est égale à la constante a par hypothèse; donc la somme des modules des racines de $f(x) = a$ contenues dans D_n ne dépasse pas $\frac{p}{2^n}$. Soit m un entier quelconque et q le quotient entier par excès de m par p; on a $pq > m$ et, si l'on désigne par S_m la somme des m premiers

(1) On suppose que, si plusieurs racines ont le même module, ce nombre figure dans la série autant de fois qu'il y a de racines ayant ce module. De même, si une racine est multiple, elle doit être considérée comme équivalente à plusieurs racines de même module.

termes de la série des modules, on a

$$S_m < S_{pq} < p + \frac{p}{2} + \ldots + \frac{p}{2^q} < 2p.$$

La série est donc convergente.

CHAPITRE III.

LES FAMILLES NORMALES DE POLYNOMES D'ORDRE FINI.

---

19. Considérons la famille des polynomes $P(x)$ possédant les propriétés suivantes :

1° On a

$$P(0) = 1;$$

2° Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les racines du polynome P et $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ leurs modules, la somme $\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2} + \ldots + \frac{1}{\rho_n}$ reste inférieure à un nombre fixe S :

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \ldots + \frac{1}{\rho_n} < S.$$

Je dis que les polynomes P forment une famille normale et bornée. On a, en effet,

$$P(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right),$$

et si $|x| = r$, comme

$$\left|1 - \frac{x}{\alpha_i}\right| < e^{\frac{r}{\rho_i}},$$

$$|P(x)| < e^{r\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \ldots + \frac{1}{\rho_n}\right)} < e^{Sr}.$$

La famille des polynomes $P(x)$ est normale et bornée dans tout domaine fini : de toute suite infinie de ces fonctions P on peut extraire une suite nouvelle $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ (on peut toujours supposer P_n de degré n) convergeant dans un cercle C donné vers une fonction limite $f(x)$; d'ailleurs, puisque les polynomes sont bornés dans tout domaine fini, il résulte d'un théorème classique de Stieltjès, que la série converge uniformément dans toute région finie du plan : $f(x)$ est une fonction entière.

Je dis que cette fonction entière est de la forme $e^{\mathrm{A}x}.\mathrm{G}(x)$, où A est une constante et $\mathrm{G}(x)$ un produit canonique de genre nul.

Soient en effet $a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots$ les racines de $f(x)$ et $r_1, r_2, \ldots, r_p, \ldots$ leurs modules. Prenons un nombre fixe p de ces racines et traçons un cercle C contenant ces p racines et celles-là seulement; la suite $\mathrm{P}_n(x)$ converge uniformément dans C; il en résulte que, si n est assez grand, chaque polynome $\mathrm{P}_n(x)$ a une racine et une seule dans le voisinage des $a_1, a_2, \ldots, a_p$; donc la somme

$$\frac{1}{r_1}+\ldots+\frac{1}{r_p}$$

est la limite par n infini, de

$$\frac{1}{\rho_1^{(n)}}+\frac{1}{\rho_2^{(n)}}+\ldots+\frac{1}{\rho_p^{(n)}},$$

en désignant par $\rho_1^{(n)}, \rho_2^{(n)}, \ldots, \rho_n^{(n)}$ les modules des racines $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)}$ du polynome $\mathrm{P}_n(x)$; on en déduit que

$$\frac{1}{r_1}+\ldots+\frac{1}{r_p}<\mathrm{S},$$

quel que soit p : donc la série $\frac{1}{r_n}$ est convergente.

Soit

$$\mathrm{G}(x)=\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a_n}\right)\cdots$$

le produit canonique correspondant, formons

$$\varphi(x)=e^{\mathrm{S}_0 x}\,\mathrm{G}(x)=\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{x}{a_i}\right)e^{\frac{x}{a_i}},$$

S_0 désignant la somme de la série convergente $\frac{1}{a_n}$, et soit

$$\varphi_n(x) = \prod_{i=1}^{i=n}\left(1-\frac{x}{\alpha_i^{(n)}}\right)e^{\frac{x}{\alpha_i^{(n)}}} = e^{\sigma_0^{(n)}x}\,P_n(x),$$

où

$$\sigma_0^{(n)} = \frac{1}{\alpha_1^{(n)}}+\frac{1}{\alpha_2^{(n)}}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n^{(n)}}.$$

Je me propose de démontrer que $\varphi_n(x)$ converge uniformément vers $\varphi(x)$ dans toute région finie du plan. Supposons que x reste à l'intérieur d'un cercle de rayon r : on peut choisir i assez grand pour que l'on ait $r_i > r' > 2r$; il suffit de prendre i supérieur au nombre n_0 des racines de $\varphi(x)$ de module non supérieur à r' et de supposer n assez grand pour que $P_n(x)$ ait une racine et une seule dans le voisinage de chacun des zéros, $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$.

On sait que si $|u| < 1$, on a

$$|(1-u)e^u| < e^{\frac{|u|^2}{1-|u|}},$$

et, si $|u| < \frac{1}{2}$, il en résulte

$$|(1-u)\,e^u| < e^{2|u|^2};$$

donc, puisque $\frac{r}{\rho_i} < \frac{1}{2}$ si $i > n_0$,

$$\left|\left(1-\frac{x}{\alpha_i^{(n)}}\right)e^{\frac{x}{\alpha_i^{(n)}}}\right| < e^{\frac{2r^2}{(\rho_i^{(n)})^2}}$$

pour n assez grand et

$$\left|\prod_{i=n_0}^{i=n}\left(1-\frac{x}{\alpha_i^{(n)}}\right)e^{\frac{x}{\alpha_i^{(n)}}}\right| < e^{2r^2\left[\frac{1}{\rho_{n_0}^{(n)2}}+\frac{1}{(\rho_{n_0+1}^{(n)})^2}+\frac{1}{(\rho_{n_0+2}^{(n)})^2}+\ldots+\frac{1}{(\rho_n^{(n)})^2}\right]} < e^{\frac{2r^2}{r'}S}.$$

On peut prendre r' assez grand pour que le second membre soit aussi voisin de 1 que l'on veut, égal par exemple à $1+\theta'\varepsilon$, $(-1<\theta'<1)$.

On aura de même

$$\left|\prod^{i=\infty}\left(1-\frac{x}{a_i}\right)e^{\frac{x}{a_i}}\right| < e^{\frac{2r^2S}{r'}} = 1+\theta''\varepsilon \qquad (-1<\theta''<1);$$

or,

$$\varphi_n(x) = \prod_{i=1}^{i=n_0} \prod_{i=n_0+1}^{i=n} = \prod_{i=1}^{i=n_0}{}_n(x)(1+\theta'\varepsilon)$$

et

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{i=n_0} \prod_{i=n_0+1}^{i=\infty} = \prod_{i=1}^{i=n_0}(x)(1+\theta''\varepsilon).$$

Or, dans les derniers membres, $\Pi_n(x)$ a pour limite $\Pi(x)$ puisque les $\alpha_i^{(n)}$ ont respectivement pour limites les a_i; on a donc, pour n assez grand,

$$\prod_{i=1}^{i=n_0}{}_n(x) = \prod_{i=1}^{i=n_0}(x)(1+\theta'''\varepsilon) = \varphi(x)\frac{(1+\theta'''\varepsilon)}{(1+\theta''\varepsilon)},$$

donc

$$\varphi_n(x) = \varphi(x)\,\frac{(1+\theta'\varepsilon)(1+\theta'''\varepsilon)}{1+\theta''\varepsilon}$$

et $\varphi_n(x)$ a pour limite $\varphi(x)$. D'ailleurs $\sigma_0^{(n)}$ a une limite σ_0 puisque

$$|\sigma_0^{(n)}| < S \quad (^1).$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n=\infty} P_n(x) = \lim_{n=\infty} e^{-\sigma_0^{(n)}x}\varphi_n(x) = e^{-\sigma_0 x}\lim \varphi_n(x) \\ &= e^{(S_0-\sigma_0)x}G(x) = e^{Ax}G(x). \end{aligned}$$

On déduit aisément de ce qui précède que les polynomes $P(x)$ qui satisfont seulement à la seconde condition forment une famille normale. On peut d'ailleurs remplacer ces polynomes par des fonctions entières de la forme $e^{Ax+B}.G(x)$ satisfaisant à la condition que la somme de la série $\frac{1}{r_n}$ soit inférieure à un nombre fixe S.

21. Considérons à présent la famille des polynomes $P(x)$ possédant les deux propriétés suivantes :

---

(1) En effet, si l'on avait deux limites différentes α et β, on en déduirait, puisque $\varphi_n(x) = e^{\sigma_0^{(n)}x}P_n(x)$,

$$e^{\alpha x} = e^{\beta x} \qquad (\alpha = \beta),$$

car la limite de $P_n(x)$ n'est pas identiquement zéro.

1° $P(0)=1$;

2° On a, quel que soit le polynome $P(x)$, l'inégalité

$$\frac{1}{\rho_1^\rho}+\frac{1}{\rho_2^\rho}+\ldots+\frac{1}{\rho_n^\rho}<S,$$

dans laquelle ρ et S sont des constantes. Ici, les polynomes $P(x)$ ne formeront pas une famille normale et bornée, nous allons voir qu'il est nécessaire pour qu'il en soit ainsi d'introduire une troisième condition. Soit p le plus grand entier inférieur à ρ

$$p<\rho\leqq p+1.$$

Formons les fonctions

$$\varphi(x)=e^{Q(x)}P(x)=\prod_{i=1}^{i=n}\left(1-\frac{x}{\alpha_i}\right)e^{\frac{x}{\alpha_i}+\frac{x^2}{2\alpha_i^2}+\ldots+\frac{x^p}{p\alpha_i^p}},$$

$$Q(x)=x\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{\alpha_i}+\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{\alpha_i^2}+\ldots+\frac{x^p}{p}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{\alpha_i^p}.$$

On a, lorsque $|u|<1$, l'inégalité

$$\left|(1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}}\right|<e^{k|u|^\rho},$$

pour une valeur convenable de k et quel que soit u (¹). Par conséquent :

$$\left|\left(1-\frac{x}{\alpha_i}\right)e^{\frac{x}{\alpha_i}+\ldots+\frac{x^p}{p\alpha_i^p}}\right|<e^{k\frac{r^\rho}{\rho_i^\rho}}$$

et

$$\left|\prod_{i=1}^{i=n}\left(1-\frac{x}{\alpha_i}\right)e^{\frac{x}{\alpha_i}+\frac{x^2}{2\alpha_i^2}+\ldots+\frac{x^p}{p\alpha_i^p}}\right|<e^{kr^\rho\left(\frac{1}{\rho_1^\rho}+\frac{1}{\rho_2^\rho}+\ldots+\frac{1}{\rho_n^\rho}\right)}<e^{kSr^\rho},$$

donc

$$|\varphi(x)|<e^{Hr^\rho},$$

H étant une constante fixe, quelle que soit la fonction φ.

Voyons maintenant dans quelles conditions les polynomes $P(x)$

(¹) *Voir* par exemple E. Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 51.

formeront une famille normale et bornée. On a

$$P(x) = \varphi(x) e^{-Q(x)},$$

les fonctions $\varphi(x)$ formant une famille normale, il faut et il suffit que les polynomes $Q(x)$ qui sont tous de degré p, forment une famille normale et bornée; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que leurs coefficients soient bornés; or ces coefficients sont, à des facteurs numériques près, les sommes des puissances $1, 2, \ldots, p$ des inverses des racines des équations

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n = P(x) = 0.$$

Ce sont des polynomes en $c_1, c_2, \ldots, c_p$: ils seront bornés si ces nombres sont bornés. On doit donc supposer que ces p premiers coefficients soient bornés ou encore que les polynomes $P(x)$ soient bornés dans un cercle aussi petit que l'on veut de centre d'origine. Donc :

Si une famille de polynomes $P(x)$ *possède les propriétés suivantes :*

1° $P(0) = 1$;

2° $$\frac{1}{\rho_1^\rho} + \frac{1}{\rho_2^\rho} + \ldots + \frac{1}{\rho_n^\rho} < S;$$

3° *Les valeurs de* $P'(0), P''(0), \ldots, P^{(p)}(0)$ *sont bornées* $(p < \rho \leqq p + 1)$.
Cette famille est normale et bornée dans toute région finie du plan.

Nous dirons que c'est une famille normale de polynomes d'ordre ρ.

22. De toute suite infinie de polynomes $P(x)$, on peut extraire une suite nouvelle

$$P_1(x), \quad P_2(x), \quad \ldots, \quad P_n(x), \quad \ldots \quad [1]$$

convergeant uniformément vers une fonction limite $f(x)$: *je dis que* $f(x)$ *est une fonction entière de genre* p *au plus.*

Il va nous suffire de reprendre la démonstration donnée pour $\rho = 1$.

---

[1] On peut toujours supposer que les nombres n sont des entiers croissants et que $P_n(x)$ est exactement de degré n; il suffit d'éliminer certains polynomes de la suite qui ne comprend évidemment qu'un nombre fini de polynomes dont le degré est inférieur à un entier fixe, sinon la limite serait un polynome.

Supposons d'abord $\rho < p + 1$. La fonction $f(x)$ a un certain nombre de zéros

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

qui sont aussi les zéros de la fonction limite de la suite

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots.$$

Les racines de $f(x)$ sont telles que la série $\sum \frac{1}{r_i^\rho}$ soit convergente; la démonstration est la même que dans le cas de $\rho = 1$.

Or

$$\varphi_n(x) = P_n(x) e^{Q_n(x)};$$

les Q_n ont pour limite un polynome $Q(x)$ de degré p, et

$$f(x) = \lim \varphi_n(x) e^{Q(x)}.$$

Il suffit donc de démontrer que $\lim \varphi_n(x)$ est une fonction entière de genre p. C'est évidemment une fonction entière, puisque les φ_n convergent uniformément dans toute région finie du plan.

Posons

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) e^{\frac{x}{a_i} + \frac{x^2}{2a_i^2} + \ldots + \frac{x^p}{pa_i^p}}.$$

Je vais démontrer que

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x).$$

Prenons un cercle C de centre origine et de rayon r; dans le cercle concentrique de rayon $r' > 2r$, la fonction $\varphi(x)$ a un nombre de zéros égal à n_0, il en est par conséquent de même des fonctions $\varphi_n(x)$ pour n assez grand.

Donc

$$r_i > r' > 2r \qquad \text{et} \qquad \rho_i^{(n)} > r' > 2r$$

si

$$i > n_0.$$

Or, si $|u| < \frac{1}{2}$,

$$\left| (1 - u) e^{u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}} \right| < e^{2|u|^{p+1}},$$

et par suite

$$\left|\prod_{i=n_0+1}^{i=n}\left(1-\frac{x}{\alpha_i^{(n)}}\right)e^{\frac{x}{\alpha_i^{(n)}}+\frac{x^2}{2(\alpha_i^{(n)})^2}+\ldots+\frac{x^p}{p(\alpha_i^{(n)})^p}}\right|<e^{2r^{p+1}\left(\frac{1}{\rho_{n_0+1}^{p+1}}+\ldots+\frac{1}{\rho_n^{p+1}}\right)}$$

$$<e^{\frac{2r^{p+1}}{r'^{p+1-\varrho}}\left(\frac{1}{\rho_{n_0+1}^{\varrho}}+\ldots+\frac{1}{\rho_n^{\varrho}}\right)},$$

donc

$$\left|\prod_{i=n_0+1}^{i=n}\left(1-\frac{x}{\alpha_i^{(n)}}\right)e^{\frac{x}{\alpha_i^{(n)}}+\frac{x^2}{2(\alpha_i^{(n)})^2}+\ldots+\frac{x^p}{p(\alpha_i^{(n)})^p}}\right|<e^{\frac{2Sr^{p+1}}{r'^{p+1-\varrho}}}$$

et

$$\left|\prod_{i=n_0+1}^{i=\infty}\left(1-\frac{x}{a_i}\right)e^{\frac{x}{a_i}+\frac{x^2}{2a_i^2}+\ldots+\frac{x^p}{pa_i^{p-1}}}\right|<e^{\frac{2Sr^{p+1}}{r'^{p+1-\varrho}}}.$$

On peut prendre r' assez grand pour que le second membre de chaque inégalité diffère de 1 de moins de ε, ε étant choisi à l'avance; on aura alors

$$\varphi_n(x)=\Pi_n(x)(1+\theta'\varepsilon)\qquad(-1<\theta'<+1),$$
$$\varphi(x)=\Pi(x)(1+\theta''\varepsilon)\qquad(-1<\theta''<+1),$$

en posant

$$\Pi_n(x)=\prod_{i=1}^{i=n_0}\left(1-\frac{x}{\alpha_i^{(n)}}\right)e^{\frac{x}{\alpha_i^{(n)}}+\frac{x^2}{2(\alpha_i^{(n)})^2}+\ldots+\frac{x^p}{p(\alpha_i^{(n)})^p}},$$

$$\Pi(x)=\prod_{i=1}^{i=n_0}\left(1-\frac{x}{a_i}\right)e^{\frac{x}{a_i}+\frac{x^2}{2a_i^2}+\ldots+\frac{x^p}{pa_i^p}}.$$

Or les nombres $a_1^{(n)}, \ldots, a_{n_0}^{(n)}$ ont pour limites $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$; on peut donc prendre n assez grand pour que

$$\Pi_n(x)=\Pi(x)(1+\theta'''\varepsilon)\qquad(-1<\theta'''<+1);$$

on aura alors

$$\varphi_n(x)=\varphi(x)\frac{(1+\theta'\varepsilon)(1+\theta'''\varepsilon)}{1+\theta''\varepsilon}$$

pour n assez grand. La proposition est établie.

Dans le cas de $\rho=p+1$, on raisonnera exactement comme pour $\rho = 1$; on prendra

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{i=\infty}\left(1 - \frac{x}{a_i}\right) e^{\frac{x}{a_i} + \frac{x^2}{2a_i^2} + \ldots + \frac{x^{p+1}}{(p+1)a_i^{p+1}}}$$

et

$$\varphi_n(x) = \prod_{i=1}^{i=n}\left(1 - \frac{x}{\alpha_i^{(n)}}\right) e^{\frac{x}{\alpha_i^{(n)}} + \frac{x^2}{2(\alpha_i^{(n)})^2} + \ldots + \frac{x^{p+1}}{(p+1)(\alpha_i^{(n)})^{p+1}}},$$

et l'on démontrera de la même manière que $\varphi_n(x)$ a pour limite $\varphi(x)$. Par conséquent la suite des polynomes $P(x)$ aura pour limite

$$f(x) = \varphi(x)\, e^{-Q(x)},$$

si les polynomes $Q_n(x)$ ont une limite $Q(x)$; or, les polynomes $Q_n(x)$ sont ici de degré $p+1$, mais le coefficient de x^{p+1} qui est

$$\frac{1}{p+1}\left[\frac{1}{(\alpha_1^{(n)})^{p+1}} + \ldots + \frac{1}{(\alpha_n^{(n)})^{p+1}}\right]$$

est borné par hypothèse, donc les coefficients de ces polynomes sont tous bornés [1]. Remarquons maintenant que $\varphi(x)$ peut s'écrire

$$\varphi(x) = e^{\frac{x^{p+1}}{p+1}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{a_i^{p+1}}}\, G(x),$$

où $G(x)$ est le produit canonique de genre p

$$G(x) = \prod_{i=1}^{i=\infty}\left(1 - \frac{x}{a_i}\right) e^{\frac{x}{a_i} + \frac{x^2}{2a_i^2} + \ldots + \frac{x^p}{pa_i^p}},$$

produit qui est convergent, car la série $\sum \frac{1}{a_i^{p+1}}$ l'est ; le coefficient de x^{p+1} dans l'exponentielle est la somme S' de la série convergente

$$\frac{1}{p+1}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{a_i^{p+1}}.$$

---

(1) On démontre comme à la page 269, en note, que la limite $Q(x)$ est unique.

Donc

$$f(x) = e^{Sx^{p+1} - Q(x)} G(x) = e^{Q_1(x)} G(x),$$

Q_1 désignant un polynome de degré $p+1$. La fonction $f(x)$ est de genre $p+1$ et son produit canonique de genre p. On peut dire aussi que $f(x)$ est égale au produit par $e^{Ax^{p+1}}$ d'une fonction entière de genre p.

Donc : *la fonction limite d'une suite convergente de polynomes d'ordre* ρ *est une fonction entière dont le genre est* $E(\rho)$, *plus grand entier contenu dans* ρ*; si* ρ *est un entier, le produit canonique qui entre dans la fonction entière est de genre* $\rho - 1$ [1].

23. Nous avons vu que, dans une famille normale de polynomes $P(x)$ d'ordre ρ, chaque polynome $P(x)$ vérifiait l'inégalité

$$|P(x)| < e^{Hr^\rho},$$

H étant une constante indépendante du polynome.

Réciproquement considérons une famille de polynomes $P(x)$ vérifiant les conditions suivantes :

1° $P(0) = 1$;

2° On a, pour $|x| \leqq r$,

$$|P(x)| < e^{Hr^\rho}.$$

Je dis que les sommes

$$\frac{1}{\rho_1^{\rho+\varepsilon}} + \frac{1}{\rho_2^{\rho+\varepsilon}} + \ldots + \frac{1}{\rho_n^{\rho+\varepsilon}}$$

sont bornées pour une valeur quelconque fixe de ε. Les polynomes $P(x)$ étant bornés dans un cercle de rayon r, le nombre des racines contenues dans ce cercle est borné pour tous ces polynomes : la limite supérieure nous sera fournie par le théorème de M. Schou appliqué

---

[1] Cette proposition a été démontrée par M. Lindwart dans sa Thèse : *Ueber eine Methode von Laguerre zur Bestimmung des Geschlechts einer ganzen Funktion* (*Inaug. Dissertation*, Göttingen, 1914) par une méthode différente reposant sur une idée de Laguerre.

aux polynomes. Soit

$$P(x)=\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha_k}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_{k+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right).$$

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les racines contenues dans le cercle de rayon r, et soit

$$Q(x)=(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)\ldots(\alpha_k-x).$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fonction régulière dans le cercle de rayon $3r$ et sa valeur pour $x=0$ est inférieure en module à la valeur maximum de son module sur le cercle de rayon $3r$. On a sur ce cercle

$$|Q(x)| \geqq 2^k r^k, \qquad |P(x)| \leqq e^{H3^\rho r^\rho};$$

donc

$$\left|\frac{P(0)}{Q(0)}\right| = \frac{1}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_k} \leqq \frac{e^{H3^\rho r^\rho}}{2^k r^k},$$

et comme

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_k} \geqq \frac{1}{r^k},$$

il vient

$$2^k \leqq e^{H3^\rho r^\rho},$$

d'où

$$k \leqq \frac{H3^\rho}{\log 2} r^\rho < hr^\rho.$$

Soit alors α_i une racine du polynome $P(x)$, les modules $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$, des racines étant rangés par ordre de grandeur non décroissante et chaque racine répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité ; si l'on prend $r=\rho_i$, on aura

$$i \leqq k,$$

donc

$$i \leqq h\rho_i^\rho, \qquad \frac{1}{\rho_i} \leqq \left(\frac{h}{i}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \qquad \frac{1}{\rho_i^{\rho+\varepsilon}} < \left(\frac{h}{i}\right)^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho}},$$

$$\frac{1}{\rho_1^{\rho+\varepsilon}} + \frac{1}{\rho_2^{\rho+\varepsilon}} + \ldots + \frac{1}{\rho_n^{\rho+\varepsilon}} < h^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho}} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i^{1+\frac{\varepsilon}{\rho}}} \leqq S(\varepsilon),$$

car la somme $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i^{1+\frac{\varepsilon}{\rho}}}$ est inférieure à la somme $S(\varepsilon)$ de la série convergente $\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i^{1+\frac{\varepsilon}{\rho}}}$. *Les polynomes sont donc d'ordre* $\rho+\varepsilon$ *quelque petit que soit* ε : *nous dirons encore que ce sont des polynomes d'ordre* ρ.

Remarque I. — On peut supposer que l'inégalité vérifiée par $P(x)$ n'ait lieu que pour des valeurs de r supérieures à r_0. Dans le cercle de rayon r_0, les polynomes sont bornés, donc le nombre de leurs racines ne dépasse pas un nombre fixe n_0; d'autre part ces polynomes prenant la valeur 1 à l'origine et formant une famille normale, le module de toutes les racines reste supérieur à un nombre fixe ρ_0. On a donc pour tout polynome de degré n

$$\frac{1}{\rho_1^{\rho+\varepsilon}}+\ldots+\frac{1}{\rho_{n_0}^{\rho+\varepsilon}} \leqq \frac{n_0}{\rho_0^{\rho+\varepsilon}}=s(\varepsilon)$$

(si $n \geqq n_0$; si $n<n_0$, la somme est étendue à n).

D'autre part, on voit comme précédemment que

$$\frac{1}{\rho_{n_0+1}^{\rho+\varepsilon}}+\ldots+\frac{1}{\rho_n^{\rho+\varepsilon}}<s'(\varepsilon) \qquad (n>n_0),$$

donc

$$\frac{1}{\rho_1^{\rho+\varepsilon}}+\frac{1}{\rho_2^{\rho+\varepsilon}}+\ldots+\frac{1}{\rho_n^{\rho+\varepsilon}}<s(\varepsilon)+s'(\varepsilon)<S(\varepsilon).$$

Remarque II. — On peut remplacer l'inégalité initiale par la suivante : quel que soit ε, on a, pour r supérieur à un nombre $r_0(\varepsilon)$, le même pour tous les polynomes,

$$|P(x)|<e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Il suffit, dans la démonstration précédente, de remplacer ρ par $\rho+\frac{\varepsilon}{2}$ et ε par $\frac{\varepsilon}{2}$ pour arriver à des conclusions identiques; *nous dirons encore que les polynomes sont d'ordre* ρ.

24. Pour appliquer les résultats précédents aux fonctions entières de genre fini, je démontrerai le théorème suivant :

Pour qu'une fonction entière soit d'ordre apparent ρ, il faut et il suffit qu'elle soit la limite d'une suite infinie de polynomes d'ordre ρ.

La condition est suffisante, car si l'on a pour tous les polynomes de la suite

$$|P(x)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{pour} \quad r > r_0(\varepsilon),$$

comme la convergence est uniforme dans un cercle fixe quelconque de rayon $r > r_0$, on a

$$|f(x)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{pour} \quad r > r_0(\varepsilon).$$

Inversement, supposons que

$$|f(x)| < e^{r^{\rho+\varepsilon'}} \quad \text{pour} \quad r > R(\varepsilon').$$

Soit

$$f(x) = 1 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots.$$

On sait que si $M(r)$ est le maximum du module d'une fonction entière sur le cercle de rayon r et $\mathfrak{M}(r)$ le maximum dans le même cercle de la fonction

$$1 + |c_1|x + |c_2|x^2 + \ldots + |c_n|x^n + \ldots,$$

on a (¹)

$$\mathfrak{M}(r) < (r+1)\,M(r+1),$$

si $M(r) \leqq e^{r^{\rho+\varepsilon'}}$, on aura

$$\mathfrak{M}(r) < (r+1)e^{(r+1)^{\rho+\varepsilon'}} < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

pour r assez grand $> r_0(\varepsilon)$. Posons

$$P_n(x) = 1 + c_1 x + \ldots + c_n x^n;$$

la suite $P_n(x)$ converge vers $f(x)$ dans tout domaine fini et l'on a, dans le cercle de rayon $r > r_0(\varepsilon)$,

$$|P_n(x)| < |1 + |c_1|x + \ldots + |c_n|x^n| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Les polynomes $P_n(x)$ forment une famille normale d'ordre ρ.

25. On déduit aisément de là un théorème fondamental de

(¹) *Voir* par exemple E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 64.

M. Hadamard, relatif aux fonctions entières de genre fini (¹). Supposons que l'on ait, pour une fonction entière $f(x)$, l'inégalité

$$|f(x)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{pour} \quad r > r_0(\varepsilon).$$

Cette fonction est alors la limite d'une suite normale de polynomes d'ordre ρ : il en résulte que c'est une fonction entière de genre $E(\rho)$. D'ailleurs l'ordre réel de la suite des zéros de $f(x)$ est aussi ρ, puisque la série

$$\frac{1}{r_1^{\rho+\varepsilon}} + \ldots + \frac{1}{r_n^{\rho+\varepsilon}} + \ldots$$

est convergente quelque petit que soit ε. Remarquons en outre que l'on peut prendre comme polynomes d'approximation les polynomes sections de la série entière :

$$P_n(x) = 1 + c_1 x + \ldots + c_n x^n.$$

26. Il serait aisé de déduire des considérations précédentes des inégalités relatives aux coefficients c_n de la série $f(x)$.

Inversement, ces inégalités étant supposées satisfaites, on en déduirait l'ordre apparent de $f(x)$ et par suite son genre. La démonstration de ce dernier résultat qui est aussi due à M. Hadamard a été donnée directement par M. Lindwart en introduisant des polynomes d'approximation de genre donné; on voit comment il est possible d'édifier une théorie des fonctions entières de genre fini, reposant sur l'emploi des suites de polynomes d'ordre donné.

Je n'insiste pas sur les applications des propriétés de ces suites de polynomes à la démonstration des théorèmes de Laguerre sur les fonctions entières limites de suites de polynomes dont les racines sont réelles (²) et sur leurs généralisations (³).

(¹) J. Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann* (*Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. IX, 1893, p. 171-215).

(²) *Œuvres de Laguerre*, t. I, 1898, p. 174-177. Paris, Gauthier-Villars.

(³) *Voir* G. Polyà, *Ueber Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln* (*Circolo mat. di Palermo*, t. XXXVI, 1913, p. 279); *Ueber Annäherung durch Polynome deren sämtlichen Wurzeln in einem Winkelraum fallen* (*Nachrichten von der Kgl. Ge-*

Je me bornerai à donner comme exemple une application aux polynomes sections d'une série entière.

Soit

$$P_n(x) = 1 + c_1 x + \ldots + c_n x^n,$$

le polynome formé par les $n+1$ premiers termes de la série

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots.$$

Les polynomes $P_n(x)$ possèdent les propriétés 1° et 3° des familles normales d'ordre donné, puisque les premiers coefficients sont invariables; si donc, on a en outre la propriété 2°

$$\frac{1}{\rho_1^\rho} + \frac{1}{\rho_2^\rho} + \ldots + \frac{1}{\rho_n^\rho} < S,$$

on peut affirmer qu'ils forment une famille normale d'ordre ρ. Je dis que, dans ces conditions, la série converge dans tout le plan.

Il suffit de montrer pour cela que, de toute suite infinie de polynomes $P_n(x)$, on peut extraire une suite nouvelle convergeant dans chaque domaine fini toujours vers la même fonction $f(x)$. Prenons un cercle C de centre origine, la série extraite converge vers une fonction $f(x)$, et ses dérivées pour $x=0$, convergent vers celles de $f(x)$ au même point; ce sont précisément les nombres c_1, $2!c_2$, $3!c_3$, ..., $n!c_n$. Il en résulte que la fonction entière $f(x)$ a pour développement

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots.$$

Donc la série converge dans tout le plan.

Supposons par exemple que les polynomes $P_n(x)$ aient toutes leurs racines réelles et positives, on a alors

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \ldots + \frac{1}{\rho_n} = -c_1;$$

selschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1913, p. 326. — E. LINDWART et G. POLYÀ, *Ueber einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln* (*Circolo mat.*, t. XXXVII, 1914, p. 297). *Voir* aussi le Mémoire déjà cité de M. Lindwart et une Note de M. Jentzsch : *Sur l'extension d'un théorème de Laguerre* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CLVIII, 1914, p. 780).

donc la série représente une fonction entière de la forme $e^{Ax}G(x)$, où $G(x)$ est un produit canonique d'ordre zéro.

Supposons encore que les polynomes $P_n(x)$ aient leurs racines réelles et de signes quelconques, on a

$$\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}+\ldots+\frac{1}{\rho_n^2}=c_1^2-2c_2.$$

Donc, la série représente une fonction entière égale au produit par e^{Ax^2} d'une fonction entière de genre 1.

Ces deux derniers théorèmes, dus à M. Petrovitch (¹), se démontrent ainsi d'une façon très simple. Mais ce mode de démonstration conduit à une généralisation immédiate. *Il suffit de supposer qu'une infinité de polynomes sections* $P_n(x)$ *de degrés indéfiniment croissants possèdent les propriétés énoncées pour que les résultats subsistent.*

CHAPITRE IV.

LES FAMILLES NORMALES DE FONCTIONS MÉROMORPHES ET LEURS APPLICATIONS.

27. Considérons une suite infinie de fonctions

$$(1)\qquad f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_\nu(x),\quad \ldots,$$

méromorphes dans un domaine simplement connexe D; nous dirons que cette suite converge en un point x_0 de D, si les nombres $f_\nu(x_0)$ ont une limite finie ou infinie lorsque ν croît indéfiniment.

Supposons que la suite converge en tout point de D et soit $f(x)$ la fonction limite.

(¹) *Sur une classe de séries entières* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXLIII, 1906, p. 208); *Sur certaines transcendantes entières* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXIV, 1906, p. 165); *Une classe remarquable de séries entières* (*Atti del IV^e Congresso dei Matematici*, Rome, 1908, t. II, p. 36); *Théorème sur les séries de Taylor* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLVI, 1908, p. 272).

La convergence sera uniforme au point x_0 intérieur à D, si l'on peut tracer un cercle C de centre x_0 contenu tout entier dans D tel que, si $f(x_0)$ est fini, la suite $f_\nu(x)$ soit formée de fonctions holomorphes dans C et convergeant uniformément vers $f(x)$ dans ce cercle et si $f(x_0)$ est infinie, la suite $\frac{1}{f_\nu(x)}$ soit formée de fonctions holomorphes dans C et convergeant uniformément vers $\frac{1}{f(x)}$ dans ce cercle.

En d'autres termes, étant donné le nombre positif ε, il lui correspond un nombre entier p tel que pour $\nu > p$, on ait, dans le cercle C,

$$|f(x) - f_\nu(x)| < \varepsilon,$$

si $f(x_0)$ est finie et

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f_\nu(x)}\right| < \varepsilon,$$

si $f(x_0)$ est infinie. Il résulte de cette définition que dans le cercle C la fonction $f(x)$ ou la fonction $\frac{1}{f(x)}$ est holomorphe; $f(x)$ est donc méromorphe dans C. Cette fonction peut d'ailleurs être une constante finie ou infinie.

Nous dirons que la suite (1) converge uniformément dans un domaine D_1, intérieur à D, si la convergence est uniforme en tout point du domaine fermé D_1. A chaque point x_0 de D_1 correspond un cercle C; il résulte du théorème de Borel-Lebesgue que l'on peut recouvrir entièrement D_1 à l'aide d'un nombre fini de cercles C; dans chacun de ces cercles la fonction $f(x)$ est méromorphe, elle est donc méromorphe dans D_1. Nous n'excluons pas le cas où la fonction $f(x)$ est une constante finie ou infinie.

Nous dirons enfin que la suite (1) converge uniformément dans le domaine ouvert D, si elle converge uniformément dans tout domaine D_1, fermé et intérieur à D, ou ce qui revient au même, si la convergence est uniforme en tout point x_0 intérieur à D [1].

---

[1] MM. Carathéodory et Landau ont adopté une autre définition de la convergence uniforme des suites de fonctions méromorphes. Les deux définitions se ramènent aisément l'une à l'autre. [Voir *Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen* (*Sitzungsberichte der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1911, p. 604)].

28. Soit maintenant une famille (F) composée de fonctions $f(x)$ méromorphes dans le domaine D : nous dirons que cette famille est *normale* si, de toute suite infinie formée avec les fonctions de la famille, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément dans le domaine ouvert D, vers une fonction limite. Cette fonction limite est une fonction méromorphe qui peut, dans certains cas, être une constante finie ou infinie.

29. Voici des exemples de familles normales : *les fonctions méromorphes dans* D *et telles que les valeurs de* $X = f(x)$ *ne recouvrent jamais une portion* Γ *du plan des* X *forment une famille normale.* Soit en effet a un point de la région exclue du plan des X, on a

$$|f(x) - a| > K,$$

K étant une constante positive, quelle que soit la fonction considérée et la valeur de x dans D ; les fonctions

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - a} \tag{2}$$

sont holomorphes dans D et leurs modules restent inférieurs à $\frac{1}{K}$. Donc, de toute suite infinie (Σ) de fonctions $g(x)$, on peut extraire une suite nouvelle

$$g_1(x), \quad g_2(x), \quad \ldots, \quad g_\nu(x), \quad \ldots$$

ayant une fonction limite finie $g(x)$. Considérons la suite (S) des fonctions $f(x)$ correspondant à la suite (Σ) à l'aide de la relation (2) et extrayons de (S) la suite

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_\nu(x), \quad \ldots,$$

dans laquelle

$$f_\nu(x) = a + \frac{1}{g_\nu(x)}.$$

Si $g(x)$ n'est pas la constante 0 elle n'a, dans tout domaine intérieur à D, qu'un nombre fini de zéros ; pour toute valeur x_0, distincte d'un zéro de $g(x)$, $f_\nu(x)$ converge uniformément vers

$$f(x) = a + \frac{1}{g(x)};$$

pour chaque zéro de $g(x)$, $\frac{1}{f_\nu(x)}$ converge uniformément vers zéro, car

$$\frac{1}{f_\nu(x)} = \frac{g_\nu(x)}{1 + a g_\nu(x)}.$$

Enfin si $g(x)$ est identiquement nulle, $\frac{1}{f_\nu(x)}$ converge uniformément vers zéro dans D et la suite $f_\nu(x)$ a pour limite la constante infinie. Dans tous les cas, la suite $f_\nu(x)$ converge uniformément vers une fonction limite.

30. On peut substituer au continu superficiel Γ un continu linéaire quelconque; en d'autres termes, *les fonctions $f(x)$ méromorphes dans le domaine* D *dans lequel elles ne prennent aucune des valeurs d'un continu linéaire quelconque* Γ *forment une famille normale.*

On peut reprendre la démonstration précédente en substituant aux fonctions méromorphes $f(x)$ les fonctions holomorphes

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - a},$$

a étant un point quelconque du continu Γ. Les fonctions $g(x)$ ne prennent pas les valeurs d'un continu linéaire Γ' lié au premier par la transformation

$$X' = \frac{1}{X - a}.$$

Nous savons que, dans ces conditions, les fonctions $g(x)$ forment une famille normale : on en déduit, comme plus haut, qu'il en est de même des fonctions $f(x)$.

31. Les énoncés précédents ne sont que des cas particuliers de la proposition suivante :

Les fonctions $f(x)$ méromorphes dans le domaine D *où elles ne* *prennent jamais les valeurs distinctes a, b, c forment une famille normale.*

Cela résulte, ici encore, de ce que les fonctions holomorphes

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - a}$$

qui admettent deux valeurs exceptionnelles $\frac{1}{b-a}$ et $\frac{1}{c-a}$ forment une famille normale.

32. *Les familles de rang* (m, n, p). — Nous allons maintenant nous occuper d'une famille normale de fonctions méromorphes plus générale que les précédentes. Soient m, n, p trois entiers positifs vérifiant l'inégalité

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1$$

et les fonctions $f(x)$ méromorphes dans le domaine D, telles que toutes les racines de l'équation

$$f(x) = a,$$

intérieures à D, aient leurs degrés de multiplicité divisible par m; que toutes les racines de l'équation

$$f(x) = b,$$

intérieures à D, aient leurs degrés de multiplicité divisible par n; que toutes les racines de l'équation

$$f(x) = c,$$

intérieures à D, aient leurs degrés de multiplicité divisible par p.

Nous dirons que les racines de ces équations sont respectivement *régulières* par rapport aux entiers m, n, p; dans le cas contraire, les racines seront dites *irrégulières*. En particulier les fonctions $f(x)$ ne prenant aucune des valeurs a, b, ou c appartiennent à la famille quels que soient les entiers m, n, p. Il en est de même des fonctions identiques à l'une des constantes a, b, ou c. Si toutes les racines sont régulières dans le domaine D, nous dirons que la famille de fonctions est de rang (m, n, p).

Une telle famille est une famille normale (¹).

Substituons d'abord à la famille (F) des fonctions $f(x)$, la famille (G) des fonctions $g(x)$

$$g(x) = \frac{f(x) - a}{f(x) - b} : \frac{c - a}{c - b}.$$

Je dis que les deux familles (F) et (G) sont normales en même temps.

Cela revient à démontrer que deux familles de fonctions méromorphes se déduisant l'une de l'autre par une transformation homographique sont normales en même temps. Supposons donc que l'on ait

$$g(x) = \frac{\alpha f(x) + \beta}{\gamma f(x) + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \text{ (²)}.$$

Il suffit de montrer que si une suite infinie

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_\nu(x), \quad \ldots,$$

par exemple, converge uniformément vers une fonction $f_0(x)$, la suite correspondante

$$g_1(x), \quad g_2(x), \quad \ldots, \quad g_\nu(x), \quad \ldots$$

dans laquelle

$$g_\nu(x) = \frac{\alpha f_\nu(x) + \beta}{\gamma f_\nu(x) + \delta},$$

converge aussi uniformément. D'abord, si $f_0(x)$ est égale à la constante $-\frac{\delta}{\gamma}$, les fonctions

$$\frac{1}{g_\nu(x)} = \frac{\gamma f_\nu(x) + \delta}{\alpha f_\nu(x) + \beta}$$

convergent uniformément vers zéro; donc la suite $g_\nu(x)$ converge

---

(¹) M. Landau et M. Carathéodory ont établi dans le Mémoire cité plus haut (p. 604) une proposition équivalente à celle-ci reposant sur un principe général relatif aux familles normales de fonctions analytiques (Voir *Leçons sur les séries de polynomes*, p. 21).

(²) On a ici

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0.$$

uniformément vers l'infini. Si $f_0(x)$ n'est pas identique à $-\frac{\delta}{\gamma}$, l'équation

$$f_0(x) = -\frac{\delta}{\gamma} \tag{3}$$

a un nombre fini de racines dans tout domaine intérieur à D. Soit x_0 un point de D distinct de ces racines, on peut tracer un cercle C de centre x_0 tout entier dans D et ne comprenant dans son intérieur aucune de ces racines; dans ces conditions, la suite $g_\nu(x)$ converge uniformément dans C, vers la fonction

$$g_0(x) = \frac{\alpha f_0(x) + \beta}{\gamma f_0(x) + \delta}.$$

Soit maintenant x_1 une racine de l'équation (3); on a nécessairement

$$f_0(x_1) \neq -\frac{\beta}{\alpha};$$

donc, dans un cercle de centre x_1, les fonctions

$$\frac{1}{g_\nu(x)} = \frac{\gamma f_\nu(x) + \delta}{\alpha f_\nu(x) + \beta}$$

convergent uniformément vers la fonction

$$\frac{1}{g_0(x)} = \frac{\gamma f_0(x) + \delta}{\alpha f_0(x) + \beta}$$

et la fonction $g_0(x)$ limite de la suite $g_\nu(x)$ dans le cercle admet un pôle en x_1.

Inversement, si la suite $g_\nu(x)$ converge uniformément dans D, il en est de même de la suite $f_\nu(x)$.

Nous sommes donc ramenés à démontrer que la famille (G) des fonctions $g(x)$ est une famille normale, les racines des équations

$$g(x) = 0, \qquad g(x) = 1, \qquad g(x) = \infty$$

intérieures à D, ayant leurs degrés de multiplicité divisibles respectivement par m, n, p.

Prenons une suite infinie (Σ) de fonctions $g(x)$.

Il faut démontrer que, de cette suite, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément dans D.

Soit donc

$$g_1(x), \quad g_2(x), \quad \ldots, \quad g_\nu(x), \quad \ldots$$

la suite (Σ).

Considérons le plan de la variable complexe X et traçons dans ce plan les coupures rectilignes $(-\infty, 0)$ et $(+1, +\infty)$ le long de l'axe des valeurs réelles. Considérons de même le plan d'une autre variable complexe Z et le cercle Γ de centre O $(Z = 0)$ et de rayon unité ; traçons le triangle curviligne OAB défini de la manière suivante : OA est une portion de l'axe des quantités réelles, OB un axe faisant avec le premier l'angle $\frac{\pi}{m}$; AB un arc de cercle orthogonal à Γ et faisant avec les segments AO et BO les angles $\frac{\pi}{p}$ et $\frac{\pi}{n}\cdot$ De l'inégalité

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1,$$

résulte la possibilité de construire ce triangle. Prenons l'image du triangle OAB successivement par rapport à chacun de ses côtés et répétons la même construction pour les trois triangles obtenus ; continuons indéfiniment cette opération ; on sait qu'on arrivera ainsi à remplir complètement l'intérieur du cercle Γ qui sera pavé à l'aide d'une infinité de triangles dont les côtés sont des arcs de cercle (ou des droites) coupant Γ à angle droit. Deux de ces triangles sont dits *congruents* entre eux et se correspondent point par point par une transformation homographique effectuée sur la variable Z.

Adjoignons au triangle OAB, le triangle OAB′ symétrique du premier par rapport à OA, le quadrilatère OBAB′ sera appelé *quadrilatère fondamental.*

Il existe une fonction de Schwarz

$$Z = \omega(X)$$

effectuant la représentation conforme du plan des X muni de ses coupures sur le quadrilatère fondamental, de manière que le point O corresponde à $X = 0$, le point A à $X = 1$ et les points B et B′ à $X = \infty$; les segments OB et OB′ correspondent aux deux bords supérieur et inférieur de la coupure $(-\infty, 0)$ et les arcs AB et AB′ correspondent aux deux bords supérieur et inférieur de la coupure $(+1, +\infty)$. Si le point X se déplace dans son plan d'une manière continue, en traversant les coupures, le point Z se déplace en passant d'un quadrilatère à un quadrilatère congruent sans jamais sortir du cercle Γ; on a donc

$$|\omega(X)| \leqq 1.$$

Les sommets d'un quadrilatère fondamental et leurs homologues dans les quadrilatères congruents sont les seuls points de Γ correspondant aux valeurs $0, 1, \infty$ de X. Ce sont des points critiques de $\omega(X)$; le point O et ses homologues sont des points de ramification d'ordre m; le point A et ses homologues, des points de ramification d'ordre n; le point B et ses homologues, des points de ramification d'ordre p.

La fonction inverse de $\omega(X)$

$$X = \rho(Z)$$

est uniforme et méromorphe dans le cercle Γ et admet la circonférence de Γ comme coupure. Elle prend la même valeur en deux points homologues de deux quadrilatères congruents (1).

Choisissons une valeur x_0 fixe dans l'intérieur de D et posons

$$\varphi(x) = \omega[g(x)]$$

en prenant pour $\varphi(x_0)$ la valeur située dans le quadrilatère fondamental (2).

La fonction $\varphi(x)$ est uniforme dans le domaine D; en effet $g(x)$ est uniforme dans D et $\omega(X)$ est uniforme en X pour toutes les valeurs de X distinctes de $0, 1, \infty$. Lorsque $g(x)$ prend l'une de ces valeurs, zéro par exemple, on a, dans le voisinage de la valeur correspondante x_1

(1) Pour l'étude de la fonction $\omega(X)$ et de son inverse, on pourra consulter le *Traité d'Analyse* de M. E. Picard, t. III, p. 322 et suivantes.

(2) Si $g(x_0)$ est situé sur une des coupures du plan des X, on fera, par exemple, la convention que ce point appartient au bord supérieur de la coupure.

de x,

$$X = g(x) = (x - x_1)^{hm}[\alpha_0 + \alpha_1(x - x_1) + \ldots] \qquad (\alpha_0 \neq 0),$$

h étant un entier et d'autre part

$$\omega(X) - \omega(0) = X^{\frac{1}{m}}[\beta_0 + \beta_1 X + \ldots];$$

on déduit de là que $\omega[g(x)]$ est uniforme autour de x_1. Un raisonnement semblable s'appliquerait aux points pour lesquels $g(x)$ est égale à l'unité ou à l'infini.

On a d'ailleurs, quel que soit x dans D,

$$|\varphi(x)| < 1.$$

Considérons alors la suite

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_\nu(x), \quad \ldots,$$

dans laquelle

$$\varphi_\nu(x) = \omega[g_\nu(x)].$$

Les fonctions $\varphi_\nu(x)$ sont bornées dans leur ensemble puisque $|\varphi_\nu(x)| < 1$. On peut donc, de cette suite, extraire une suite nouvelle que nous appellerons encore

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_\nu(x), \quad \ldots$$

convergeant uniformément dans l'intérieur de D vers une fonction limite $\varphi(x)$. On a $|\varphi(x)| < 1$ pour tout point x intérieur à D, car $|\varphi(x)|$ ne peut être maximum dans l'intérieur de D et ne dépasse jamais l'unité. Soit x_1 un point quelconque intérieur à D.

Supposons d'abord que $Z_1 = \varphi(x_1)$ soit distinct d'un sommet d'un quadrilatère.

Soit δ la plus courte distance du point Z_1 aux sommets des quadrilatères qui couvrent Γ. Traçons, dans le plan des x, un cercle C de centre x_1 et de rayon assez petit pour que

$$|\varphi(x) - Z_1| < \frac{1}{2}\delta$$

et prenons ν_0 assez grand pour que l'inégalité $\nu > \nu_0$ entraîne

$$|\varphi(x) - \varphi_\nu(x)| < \frac{1}{2}\delta$$

pour tout point du cercle C. On en déduit

$$|\varphi_\nu(x) - Z_1| < \delta,$$

quel que soit $\nu > \nu_0$ et x dans C. La fonction

$$g_\nu(x) = \rho[\varphi_\nu(x)]$$

est alors régulière dans C et ne prend dans ce cercle ni la valeur o ni la valeur 1 puisque $\varphi_\nu(x)$ ne coïncide jamais avec un sommet de quadrilatère. Les $g_\nu(x)$ forment donc une famille normale. D'ailleurs cette suite converge en chaque point de C, puisque la suite des $\varphi_\nu(x)$ converge et $\rho(Z)$ est une fonction continue de Z. Donc la convergence est uniforme dans C (1) et la suite $g_\nu(x)$ a pour limite

$$g(x) = \rho[\varphi(x)] \quad (2).$$

Nous avons supposé dans ce qui précède que Z_1 était différent d'un sommet de quadrilatère; supposons maintenant, par exemple, que Z_1 coïncide avec un sommet homologue de O.

---

(1) Voir *Sur les familles de fonctions analytiques, etc.*, p. 531.

(2) On peut d'ailleurs montrer directement la convergence uniforme des $g_\nu(x)$: en effet $\rho(Z)$ est uniformément continue pour tout point du cercle $|Z - Z_1| < \delta$, c'est-à-dire que, étant donné ε, on peut lui faire correspondre η tel que l'inégalité

$$|Z - Z'| < \eta$$

entraîne

$$|\rho(Z) - \rho(Z')| < \varepsilon.$$

Prenons ν assez grand pour que

$$|\varphi(x) - \varphi_\nu(x)| < \eta;$$

comme les valeurs $Z = \varphi(x)$ et $Z' = \varphi_\nu(x)$ sont à l'intérieur du cercle $|Z - Z_1| < \delta$, on aura

$$|\rho[\varphi(x)] - \rho[\varphi_\nu(x)]| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$|g(x) - g_\nu(x)| < \varepsilon$$

pour ν assez grand.

Désignons par δ la plus courte distance du point Z_1 aux sommets des quadrilatères qui sont homologues de A et de B.

On obtiendra, comme plus haut, un cercle C pour les points duquel

$$|\varphi_\nu(x) - Z_1| < \delta,$$

si $\nu > \nu_0$. Les fonctions $g_\nu(x)$ correspondantes seront régulières dans C et ne prendront pas la valeur 1 dans ce cercle, mais elles pourront prendre la valeur 0. Introduisons les fonctions

$$h_\nu(x) = \sqrt[m]{g_\nu(x)},$$

en choisissant pour chaque fonction $h_\nu(x)$ une valeur déterminée du radical pour x_0. Ces fonctions sont régulières dans C puisque $g_\nu(x)$ est régulière et que l'ordre de multiplicité de ses zéros est divisible par m. Ces fonctions admettant au moins deux valeurs exceptionnelles dans C, l'unité et une racine $m^{\text{ième}}$ imaginaire de l'unité (m est nécessairement au moins égal à deux).

Les $h_\nu(x)$ forment une famille normale ; on en déduit aussitôt qu'il en est de même pour la suite $g_\nu(x)$ et que cette suite converge uniformément dans C.

Si $g(x_1)$ était égal à 1, on remplacerait $g(x)$ par $1 - g(x)$ et si $g(x_1)$ était infini, on remplacerait $g(x)$ par $\frac{1}{g(x)}$ (1).

En résumé, la suite $g_\nu(x)$ converge uniformément autour de la valeur x_1. Or, cette valeur x_1 peut être prise arbitrairement à l'intérieur de D.

Par conséquent, la suite $g_\nu(x)$ converge uniformément autour de tout point intérieur à D : la convergence est uniforme dans D.

33. Considérons maintenant une famille de fonctions $f(x)$ méromorphes dans le domaine D et bornées en un point $P(x_0)$ intérieur à ce domaine : Soit D′ un domaine complètement intérieur à D et con-

(1) Remarquons que le dernier mode de raisonnement que nous avons adopté pour le cas où $g(x_1) = 0$ convient aussi au cas où $g(x_1)$ est différent de 0, 1, ∞; il suffit de prendre pour δ la plus courte distance de Z_1 aux sommets des quadrilatères qui sont homologues de A et de B.

tenant P. Je dis que *le nombre des pôles de chaque fonction contenus dans* D′ *est inférieur à un nombre fixe.* S'il en était autrement, on pourrait, quel que soit l'entier ν, trouver une fonction $f_\nu(x)$ de la famille, dont le nombre des pôles ou plus exactement la somme des degrés de multiplicité des pôles fût supérieure à ν. Soit alors

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_\nu(x), \quad \ldots$$

la suite infinie ainsi obtenue, on peut en extraire une suite nouvelle

$$f_{\lambda_1}(x), \quad f_{\lambda_2}(x), \quad \ldots, \quad f_{\lambda_n}(x), \quad \ldots$$

convergeant uniformément vers une fonction méromorphe, puisque la famille est normale et que les nombres $f_{\lambda_n}(x_0)$ sont des nombres bornés.

Or, la fonction limite n'a qu'un nombre fini de pôles, dans le domaine fermé D′; soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ces pôles, dont les degrés de multiplicité sont respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Donnons-nous un nombre ε positif arbitrairement petit; on peut tracer un nombre fini de cercles dont k d'entre eux, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, ont pour centres les points $a_1, \ldots, a_k$ et qui recouvrent entièrement le domaine fermé D′. Pour n assez grand, on a

$$\left|\frac{1}{f_{\lambda_n}(x)} - \frac{1}{F(x)}\right| < \varepsilon$$

dans les cercles γ_i,

$$|f_{\lambda_n}(x) - F(x)| < \varepsilon$$

dans les autres cercles.

Il résulte de là que les fonctions $\frac{1}{f_{\lambda_n}(x)}$ sont holomorphes dans les cercles γ_i et convergent uniformément dans ces cercles vers la fonction holomorphe $\frac{1}{F(x)}$. Le nombre des zéros de $\frac{1}{F(x)}$ est dans chaque cercle pour n assez grand, égal au nombre des zéros de $\frac{1}{f_{\lambda_n}(x)}$; en d'autres termes, dans le cercle γ_i la fonction f_{λ_n}, pour n assez grand, a α_i pôles.

Elle n'en a pas en dehors des cercles γ à cause de la seconde inégalité, donc le nombre des pôles ne dépasse pas le nombre

$$p = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k.$$

Ce qui contredit l'hypothèse qu'il dépasse λ_n pour la fonction $f_{\lambda_n}(x)$.

On démontrerait, comme pour les familles de fonctions holomorphes, que le nombre des zéros de $f(x) - a$ est borné dans le domaine D'.

34. Voici maintenant une proposition qui nous sera fort utile pour la suite : *il existe un cercle* (c) *de centre* P *tel qu'aucune des fonctions de la famille n'ait de pôle à l'intérieur de* (c). Si l'on a

$$|f(x_0)| < \alpha,$$

le rayon du cercle (c) ne dépend que de α et de la forme du domaine D.

Si le cercle (c) n'existait pas, on pourrait trouver une fonction $f(x)$ de la famille possédant un pôle dont la distance à P fût inférieure à $\frac{1}{\nu}$ et cela quel que soit l'entier ν.

De la suite infinie

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_\nu(x), \quad \ldots,$$

on peut extraire une suite nouvelle

$$f_{\lambda_1}(x), \quad f_{\lambda_2}(x), \quad \ldots, \quad f_{\lambda_n}(x), \quad \ldots$$

convergeant uniformément dans le domaine D' intérieur à D vers une fonction méromorphe $F(x)$: la fonction $F(x)$ est finie en x_0 et par conséquent dans un cercle (c') de centre x_0 et intérieur à D'. La convergence étant uniforme dans ce cercle, pour n assez grand, $f_{\lambda_n}(x)$ diffère de $F(x)$ d'aussi peut qu'on le veut et par conséquent est bornée dans (c'); cela contredit l'hypothèse que $f_{\lambda_n}(x)$ a un pôle situé à une distance de P inférieure à $\frac{1}{\lambda_n}$, puisque λ_n augmente indéfiniment avec n.

Si l'on fait une représentation conforme du domaine D sur un autre domaine Δ, au point P intérieur à D, correspondra un point Π intérieur à Δ ; à la famille normale des fonctions méromorphes dans D et inférieures en module à α au point P correspondra la famille normale des fonctions méromorphes dans Δ et dont le module est, au point Π, inférieur à α. Au cercle (c) de centre P correspond une courbe (γ) entourant Π et aucune fonction de la famille normale dans Δ n'a de pôle à l'intérieur de (γ). Si, en particulier, aux cercles de centre P correspondent des cercles de centre Π, c'est-à-dire si la transformation conforme est une similitude, la courbe (γ) devient le cercle défini par le théorème précédent et relatif au point Π, au domaine Δ et au nombre α.

35. Supposons que le domaine D soit celui d'un cercle (C) de centre P et de rayon R, le cercle (c) est un cercle concentrique de rayon r et l'on a la proposition suivante : *le rapport* $\frac{r}{R}$ *est constant pour tous les cercles* C, *si le nombre* α *demeure fixe*.

En effet la transformation conforme $x = Rx'$ fait correspondre aux points du cercle (C), les points du cercle (C_0) concentrique et de rayon 1 et les centres P sont des points homologues. A la famille des fonctions méromorphes normales dans (C) et dont le module est en P inférieur à α correspond la famille normale des fonctions méromorphes dans (C_0) et bornées, en module, au point P par le nombre α. Au cercle (c), correspond le cercle (c_0) de rayon $\frac{r}{R}$, et le rayon de ce dernier cercle est un nombre r_0 qui ne dépend que de α. Donc

$$\frac{r}{R} = r_0(\alpha).$$

Il résulte de là que, à l'intérieur du cercle (c), les fonctions forment une famille normale et bornée de fonctions holomorphes ; par exemple, dans un cercle (c') concentrique à (c) et de rayon θr $(0 < \theta < 1)$; on a

$$|f(x)| \leqq \Omega(\alpha, \theta),$$

le nombre Ω ne dépendant pas de R, comme le montre un raisonnement identique aux précédents.

Considérons alors toutes les fonctions méromorphes autour de $x = 0$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

et dont les premiers coefficients a_0 et a_1 sont donnés : *il existe un nombre* R_0 *ne dépendant que de* a_0 *et de* a_1 *tel que, à l'extérieur de ce cercle, ou les fonctions cessent d'être méromorphes, ou la famille cesse d'être normale*. Si le fait que la famille est normale résulte d'une propriété (J) de chaque fonction $f(x)$, on peut dire que, *à l'extérieur du cercle de centre origine et de rayon* R_0, *toute fonction analytique dont l'élément à l'origine débute par les coefficients* a_0 *et* a_1 *ou bien cesse d'être méromorphe, ou bien cesse de posséder la propriété* (J).

Les théorèmes de MM. Landau, P. Lévy, Montel sont des applications aux fonctions holomorphes de ce principe général.

En effet, considérons les fonctions $f(x)$ méromorphes dans un cercle (C) de rayon R et formant une famille normale dans ce cercle; on suppose que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$$

à l'origine.

Dans le cercle (c) de centre origine et de rayon $r = r_0 R$, les fonctions $f(x)$ sont holomorphes et dans le cercle (c') concentrique et de rayon $\frac{r}{2}$, on a

$$|f(x)| \leqq M(a_0).$$

Or

$$|a_1| \leqq \frac{\text{max. de } |f(x)| \text{ sur } (c')}{\frac{r}{2}} \leqq \frac{2\,M(a_0)}{r_0 R},$$

donc

$$R \leqq \frac{2\,M(a_0)}{r_0 |a_1|},$$

et comme r_0 ne dépend que de a_0

$$R \leqq \frac{N(a_0)}{|a_1|} = R_0.$$

On voit de même que si l'on suppose seulement que $|a_0| < \alpha$, on a

$$R \leqq \frac{N_1(\alpha)}{|a_1|}.$$

36. Appliquons la proposition précédente aux fonctions méro-

morphes $f(x)$ pour lesquelles les deux premiers coefficients sont fixes ($a_1 \neq 0$) et qui sont de rang (m, n, p). *Il existe une valeur* R_0 *ne dépendant que de* a_0 *et de* a_1 *telle que, à l'intérieur du cercle* (C_0) *de centre origine et de rayon* R_0 *ou bien* $f(x)$ *n'est plus méromorphe ou bien elle n'est plus de rang* (m, n, p) (1).

Si $p = \infty$, le théorème s'applique à des fonctions holomorphes; si $m = n = p = \infty$, on retrouve le théorème de M. Landau.

On déduit évidemment de là, le théorème suivant :

Si $f(x)$ est une fonction méromorphe dans tout le plan, et si m, n, p sont trois entiers dont la somme des inverses est inférieure à l'unité, et a, b, c, trois nombres complexes quelconques, il n'est pas possible que tous les zéros de $f(x) - a$ aient un ordre multiple de m, tous les zéros de $f(x) - b$ un ordre multiple de n, tous les zéros de $f(x) - c$ un ordre multiple de p (2).

37. Soit $f(x)$ une fonction entière, nous venons de voir qu'il est impossible que tous les zéros de $f(x)$ aient un ordre de multiplicité multiple de m et tous ceux de $f(x) - 1$, un ordre multiple de n, si $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$.

Si cela était possible, on aurait

$$f(x) = X^m, \qquad 1 - f(x) = Y^n,$$

X et Y étant des fonctions entières vérifiant l'égalité

$$X^m + Y^n = 1. \tag{1}$$

On peut donc dire que le théorème précédent, appliqué aux fonctions holomorphes, revient à l'impossibilité de trouver deux fonctions entières, X et Y, vérifiant l'identité (1) $\left(\text{lorsque } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1\right)$.

---

(1) *Voir* au sujet des questions précédentes : CARATHÉODORY, *Sur quelques applications du théorème de Landau-Picard* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXLIV, 1907, p. 1203); et P. MONTEL, *Sur quelques généralisations des théorèmes de M. Picard* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CLV, 1912, p. 1000).

(2) Si c est infini on remplace $f(x) - c$ par $\frac{1}{f(x)}$.

Posons

$$G_1 = m(X-1),$$
$$G_2 = n\,(Y-1);$$

G_1 et G_2 sont des fonctions entières ; l'égalité (1) devient

$$\left(1+\frac{G_1}{m}\right)^m + \left(1+\frac{G_1}{n}\right)^n = 1.$$

Si l'on fait croître m et n indéfiniment, cette identité devient

$$(2) \qquad e^{G_1} + e^{G_2} = 1.$$

Or l'égalité (2) est celle qui a servi de point de départ à M. Borel pour sa démonstration élémentaire du théorème de M. Picard. On pourrait, en partant de l'égalité (1), tenter une démonstration élémentaire du théorème du numéro précédent, c'est-à-dire une démonstration ne faisant pas intervenir les propriétés des fonctions de Schwarz.

Considérons encore le cas d'une fonction méromorphe $f(x)$ dans le plan et qui serait de rang (m, n, p) ; si tous les pôles ont des degrés multiples de m, il existe une fonction entière admettant tous ces pôles comme zéros et dont la racine $m^{\text{ième}}$ est une fonction entière X ; cette fonction est donc X^m. La fonction $X^m f(x)$ est entière et tous ses zéros ont des ordres multiples de n, on a donc

$$X^m f(x) = -Y^n,$$

Y étant une fonction entière. De même si les zéros de $f(x)-1$ ont des degrés multiples de p, il en est de même de ceux de $X^m[f(x)-1]$; donc

$$X^m[f(x)-1] = Z^p.$$

Z étant une fonction entière ; on déduirait de là, en éliminant $f(x)$,

$$X^m + Y^n + Z^p = 0.$$

D'après le numéro précédent, cette identité est impossible. Donc, si *m, n, p sont des entiers vérifiant l'inégalité*

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1,$$

il est impossible de trouver trois fonctions entières vérifiant l'identité

$$X^m + Y^n + Z^p = 0.$$

Par exemple, si m est un entier supérieur à 3, on ne peut satisfaire à l'équation

$$X^m + Y^m + Z^m = 0$$

à l'aide de trois fonctions entières d'une variable.

38. Il est facile d'étendre les résultats obtenus pour les fonctions méromorphes dans le plan, aux fonctions méromorphes autour d'un point essentiel isolé lorsque l'un des nombres m, n, p est infini, c'est-à-dire lorsque la fonction admet une valeur exceptionnelle. On peut toujours supposer que le point essentiel est à l'origine et que les valeurs a, b, c sont respectivement 0, 1, ∞. Nous avons donc affaire, si p est infini, à une fonction $f(x)$ holomorphe autour de l'origine qui est un point essentiel isolé; nous supposons que les zéros de $f(x)$ sont réguliers relativement à m et les zéros de $f(x) - 1$ réguliers relativement au nombre n et l'on a

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1.$$

Je dis que cette hypothèse est inadmissible.

Soit C_{-1} le cercle dont ce rayon est supposé égal à 2, dans lequel les propriétés précédentes sont vérifiées.

Traçons les cercles $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$ concentriques à l'origine et ayant respectivement pour rayons $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$. Désignons par Γ_n l'anneau compris entre les cercles C_n et C_{n+1} et par Γ'_n l'anneau compris entre C_{n-1} et C_{n+2} et posons $f_n(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Lorsque x parcourt l'anneau Γ'_0, $\frac{x}{2^n}$ parcourt l'anneau Γ'_n et si x reste dans Γ_0, $\frac{x}{2^n}$ reste dans Γ_n; la fonction $f_n(x)$ prend dans les anneaux Γ'_0 et Γ_0 les mêmes valeurs que la fonction $f(x)$ dans les anneaux Γ'_n et Γ_n. Dans le domaine Γ'_0, les fonctions $f_n(x)$ forment une famille normale. Soit x_0 un point de Γ_0, si les nombres $f_n(x_0)$ ont une de leurs limites qui est finie, on peut extraire de la suite $f_n(x)$ une suite

$$f_{\lambda_1}(x),\quad f_{\lambda_2}(x),\quad \ldots,\quad f_{\lambda_n}(x),\quad \ldots$$

qui converge uniformément dans Γ_0 vers une fonction holomorphe. Les fonctions $f_{\lambda_n}(x)$ sont alors bornées dans Γ_0 et en particulier sur C. Il en résulte que la fonction $f(x)$ est bornée sur les cercles

$$C_{\lambda_0},\quad C_{\lambda_1},\quad \ldots,\quad C_{\lambda_n},\quad \ldots$$

et inférieure en module à un nombre fixe M indépendant de n; elle serait bornée autour de $x = 0$, ce qui est impossible. Donc les nombres $f_n(x_0)$ ont pour unique limite l'infini. Je dis que, quel que soit le nombre fixe positif M, on a, pour n assez grand,

$$|f_n(x)| > M$$

pour tout point de Γ_0. S'il en était autrement on pourrait trouver un nombre M et une infinité de fonctions $f_n(x)$, soient

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots$$

telles que pour chacune d'elles il y ait au moins un point de Γ_0 pour lequel

$$|f_n(x)| < M.$$

De la suite $f_n(x)$ on peut extraire une suite nouvelle $f_{\lambda_n}(x)$ convergeant uniformément vers une fonction limite qui ne peut être que la constante infinie puisque limite $f_{\lambda_n}(x_0) = \infty$. Or ceci est en contradiction avec l'hypothèse que, quel que soit n, il y a un point x de Γ_0 pour lequel

$$|f_n(x)| < M.$$

Il résulte de là que $f(x)$ augmenterait indéfiniment pour $x = 0$, ce qui est impossible.

La proposition est établie. Donc: *Si $f(x)$ est une fonction holomorphe autour du point singulier* O *et si m et n sont deux entiers tels que*

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1,$$

l'une au moins des équations

$$f(x)=0, \qquad f(x)=1$$

a une infinité de racines irrégulières par rapport à m ou à n.

Considérons la relation $X^m + Y^n = 1$ dans laquelle les entiers m et n vérifient l'inégalité $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$; si l'on résout cette relation à l'aide de deux fonctions uniformes de x, il résulte de ce qui précède que ces fonctions ont d'autres singularités que des points essentiels isolés.

39. Le théorème du n° 36 peut s'étendre à une fonction méromorphe quelconque autour du point essentiel O : la démonstration repose sur les propriétés des substitutions relatives à la fonction de Schwarz que nous avons introduite plus haut. Je n'ai pu encore parvenir à en donner une démonstration satisfaisante en restant dans l'ordre d'idées adopté dans les pages précédentes.

40. Je me borne à indiquer en terminant que l'introduction des familles quasi-normales [1] de fonctions méromorphes permet d'étendre les théorèmes précédents au cas où chaque équation admet un nombre fini de racines irrégulières. Par exemple, *pour une fonction méromorphe dans tout le plan, on peut affirmer que l'une au moins des équations*

$$f(x)-a=0, \qquad f(x)-b=0, \qquad f(x)-c=0$$

admet une infinité de racines irrégulières, relativement aux entiers m, n, p tels que $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1$.

Cette proposition est une conséquence de la suivante : soit

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

l'élément à l'origine, d'une fonction méromorphe dans le cercle de rayon R. Nous supposons que le nombre des racines irrégulières des équations précédentes, contenues dans ce cercle, ne dépasse pas l'entier q et que ces racines ont un module supérieur ou égal

(1) Voir *Sur les familles de fonctions*, etc., p. 506.

à $\theta R (0 < \theta < 1)$. Dans ces conditions, on a, si a_1 est différent de zéro,

$$R \leqq \frac{N(a_0, q, \theta)}{|a_1|},$$

le nombre $N(a_0, q, \theta)$ étant borné lorsque $|a_0|$ est borné. Si m, n, p deviennent infinis et si la fonction est holomorphe, on retrouve un théorème que j'ai énoncé précédemment.

Paris, le 25 juillet 1914.