Émile Picard

Sur quelques points de l'histoire des représentations conformes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 32 (1915), p. 233-236
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1915_3_32__233_0>

SUR QUELQUES POINTS

DE

L'HISTOIRE DES REPRÉSENTATIONS CONFORMES;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Divers travaux d'un grand intérêt ont été publiés récemment sur la représentation conforme, en particulier par MM. Kœbe, Caratheodory et Lindelöff; il s'agit dans ces recherches de la correspondance entre les points des contours des aires. C'est une question que j'ai étudiée, il y a longtemps, quand l'aire dont on veut faire la représentation conforme sur un cercle est formée d'arcs de lignes analytiques. Je l'ai exposé dans mon cours dès 1888, et l'ai publiée dans la première édition de mon *Traité d'Analyse* en 1893; elle a été reproduite sans modification dans la seconde édition (t. II, p. 304). Je demande la permission, pour fixer ce point d'histoire, de reproduire les quelques paragraphes que je consacrais à ce problème.

1. On sait que le problème de la représentation conforme d'une aire A du plan de la variable z sur un cercle de rayon *un* ayant l'origine pour centre dans le plan de la variable Z, le point $z = z_0$ à l'intérieur de A correspondant au centre du cercle, est résolu par la formule

$$Z = f(z)$$

où

$$f(z) = e^{U+iV}.$$

On a posé

$$\begin{matrix} U = P + \log r \\ V = Q + \varphi \end{matrix} \qquad (z - z_0 = re^{i\varphi}),$$

$P(x, y)$ étant la fonction harmonique, continue dans A et prenant sur le contour C de A la valeur $-\log r$, et Q étant la fonction conjuguée de P, définie à une constante près.

2. Le problème de la représentation conforme de l'aire A sur un cercle est ainsi résolu, c'est-à-dire qu'à chaque point de l'intérieur d'une quelconque des deux aires correspond un point et un seul de l'intérieur de l'autre. Relativement aux points du contour C et de la circonférence du cercle, une difficulté se présente dont Riemann ne paraît pas s'être préoccupé. Revenons, en effet, aux deux fonctions P et Q qui ont joué le rôle essentiel. La fonction $P(x, y)$ est définie à l'intérieur de l'aire A et *sur le contour* C *lui-même*, mais il n'en est pas de même de la fonction associée Q. Celle-ci est en effet définie par l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\partial P}{\partial x} dy - \frac{\partial P}{\partial y} dx,$$

et nous ne savons rien, du moins en général, sur les valeurs de $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$ *sur le contour* C. En s'en tenant aux raisonnements précédents, on ne peut donc rien affirmer sur la correspondance des points des contours limitant les deux aires.

Dans un cas particulier, d'ailleurs très étendu, la difficulté se lève immédiatement. Supposons d'abord que le contour C soit formé tout entier d'un *seul* arc régulier de ligne analytique (une ellipse, par exemple). Comme la succession des valeurs donnée par

$$-\log r,$$

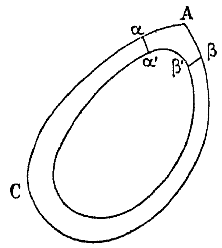
que prend $P(x, y)$ sur C, est une fonction analytique de x et y, elle est aussi une fonction analytique du paramètre avec lequel on exprime analytiquement les coordonnées d'un point de C. Nous pouvons donc faire usage d'une remarque connue; la fonction $P(x, y)$ peut s'étendre un peu au delà de C : les dérivées $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$ sont, par suite, déterminées pour tous les points de C, et il en est alors de même de $Q(x, y)$. La difficulté est levée; nous sommes assurés de la correspondance unique entre les points du contour C et de la circonférence (1).

Si l'on a un contour formé de *plusieurs* arcs réguliers de ligne analytique, la question est moins simple. La fonction $P(x, y)$ pourra bien s'étendre au delà de tous les points du contour, mais à l'exclusion des sommets (2). Nous allons montrer encore que les différents points de C correspondent à des points différents de la circonférence. Il suffira de considérer un contour C présentant une pointe unique A. Envisageons les courbes

$$U(x, y) = a$$

et leurs trajectoires orthogonales partant de deux points α et β de C situés de part et d'autre de A. Pour une valeur de a négative et très petite, nous aurons une courbe voisine de A, qui rencontrera en α' et β' les deux trajectoires orthogonales.

Considérons alors, au lieu du contour C, celui qu'on obtient en remplaçant l'arc $\alpha A \beta$ par les arcs $\alpha\alpha'$, $\alpha'\beta'$, $\beta'\beta$. Les fonctions P et Q



et, par suite, U et V sont parfaitement définies en tous les points de ce contour, ainsi que leurs dérivées du premier ordre. Dans le plan Z va correspondre à ce contour une portion déterminée de la circonférence de rayon *un* et un arc intérieur. Or, en se servant toujours de la relation

$$\frac{dU}{dn} = -\frac{dV}{ds},$$

(1) Ce résultat a été donné par M. Schwarz.

(2) On ne doit pas oublier qu'un point du contour, où se rencontrent deux lignes analytiques différentes tangentes entre elles, est, dans nos raisonnements, à considérer comme un sommet.

et en remarquant que, sur $\alpha C\beta\beta'\alpha'\alpha$, $\frac{dU}{dn}$ est toujours négatif ou nul (cette dérivée est nulle sur les portions $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ des trajectoires orthogonales), on voit que les points Z de la circonférence de rayon *un*, correspondant aux différents points de l'arc $\alpha C\beta$ de C, sont eux-mêmes différents : ils forment un arc Γ. Faisons tendre maintenant α et β vers A; l'arc Γ ira toujours en grandissant à mesure que α et β se rapprocheront respectivement de A. Nous allons montrer que la limite de Γ formera la circonférence tout entière, c'est-à-dire qu'il ne peut pas arriver que la limite de Γ soit un arc dont les extrémités a et b ne coïncident pas. En effet, dans ce cas, un certain arc ab de la circonférence de rayon *un* correspondrait au point A; en d'autres termes, z considérée comme fonction de Z serait une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon *un*, et, quand Z tend vers un point quelconque de l'arc ab, z tendrait toujours vers la même constante. Or ceci est impossible : nous le montrerons bien nettement en nous reportant aux théorèmes généraux sur les fonctions analytiques. Si l'on pose, en effet,

$$z = \varphi(X, Y) + i\psi(X, Y) \qquad (Z = X + iY),$$

les deux fonctions harmoniques φ et ψ, prenant des valeurs constantes en tous les points de ab, pourront se prolonger analytiquement au delà de ab; la fonction z de Z pourra donc se prolonger analytiquement au delà de l'arc ab; mais comme elle est, par hypothèse, constante en tous les points de ab, elle devra être constante dans toute la région où elle est définie, ce qui est absurde. On voit donc qu'au point A de C correspond *un seul* point de la circonférence de rayon *un*. *Il y a donc bien correspondance unique entre les points des deux contours.*

M. Painlevé s'est occupé le premier, dans l'étude de la représentation conforme pour les points du contour, du cas où celui-ci n'est pas formé de lignes analytiques, et il a résolu la question dans des cas étendus, comme on peut le voir dans sa remarquable Note des *Comptes rendus*, t. CXII, 1891.