LOUIS ROY

Sur le mouvement à trois dimensions des milieux visqueux indéfinis

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 32 (1915), p. 215-232
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1915_3_32__215_0>

SUR LE

MOUVEMENT A TROIS DIMENSIONS

DES

MILIEUX VISQUEUX INDÉFINIS;

PAR M. LOUIS ROY.

Introduction.

On sait (¹) que les équations du mouvement infiniment petit d'un milieu homogène isotrope affecté de viscosité, qui n'est soumis à aucune force extérieure et dont la température est uniforme, sont les suivantes :

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial t}+\mu\Delta\xi+\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\xi}{\partial t}-\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0,\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial t}+\mu\Delta\eta+\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\eta}{\partial t}-\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=0,\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\,\partial t}+\mu\Delta\zeta+\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\zeta}{\partial t}-\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=0,
\end{aligned}
\right.
$$

ξ, η, ζ désignant les composantes du déplacement à l'instant t et au point de coordonnées x, y, z, ρ la densité dans l'état primitif, λ et μ les deux coefficients d'élasticité de Lamé, Λ et M les deux coefficients de viscosité du milieu, Θ la densité cubique et Δ le symbole opératoire $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Ces équations sont du type auquel s'applique le théorème de

(¹) P. DUHEM, *Recherches sur l'Élasticité* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. XXI, XXII, XXIII, deuxième Partie, Chap. I, § IV).

Clebsch généralisé [1] : leur intégrale générale est de la forme

$$\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y},$$
$$\eta = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z},$$
$$\zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x},$$

Φ étant une intégrale de l'équation aux dilatations

$$(2) \qquad (\Lambda + 2M)\frac{\partial \Delta\Theta}{\partial t} + (\lambda + 2\mu)\Delta\Theta - \rho\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0$$

et P, Q, R trois intégrales de l'équation aux rotations

$$(3) \qquad M\frac{\partial \Delta\omega}{\partial t} + \mu\Delta\omega - \rho\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = 0,$$

liées entre elles par la relation

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Les équations (2) et (3) résultent d'ailleurs d'une combinaison bien connue des équations (1).

Rappelons enfin que les conditions de stabilité du milieu dans l'état primitif sont exprimées par les inégalités

$$3\lambda + 2\mu > 0, \qquad \mu > 0, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda + 2\mu > 0,$$

tandis que les conditions de signe imposées à la fonction dissipative exigent qu'on ait

$$3\Lambda + 2M > 0. \qquad M > 0, \qquad \text{d'où} \qquad \Lambda + 2M > 0.$$

Ainsi les équations (2) et (3) rentrent dans le type général

$$(4) \qquad A\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0,$$

où A et a^2 désignent deux constantes positives. Toutefois, dans le cas

(1) P. DUHEM, *Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch* (*Journ. de Math. pures et appl.*, 5e série, t. VI, 1900, p. 213).

d'un milieu fluide, on sait qu'on a $\mu = 0$; l'équation (3) est donc encore du type (4), mais où l'on y fait $a = 0$.

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (4) par $\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,d\varpi$ et qu'on intègre à l'intérieur du volume ϖ d'une sphère de rayon R décrite de l'origine comme centre, des intégrations par parties permettent de transformer l'égalité ainsi obtenue en la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + a^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}d\varpi \\ -\int \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{d}{dR}\left(a^2\varphi + \Lambda\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dS \\ +\Lambda\int\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi = 0,\end{aligned}$$

la deuxième intégrale étant étendue à la surface S de la sphère considérée. Si l'on fait croître R indéfiniment et si la fonction φ tend alors vers zéro de manière que l'intégrale de surface tende elle-même vers zéro, il viendra à la limite, puisque la troisième intégrale est positive ou nulle,

$$\frac{d}{dt}\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + a^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}d\varpi \leqq 0,$$

l'intégration s'étendant maintenant à l'espace entier. Cette inégalité montre que l'intégrale tend constamment vers zéro à partir de l'instant initial; elle permet de reconnaître que l'équation (4) jointe aux conditions initiales détermine entièrement la solution du problème, si l'on astreint celle-ci à s'annuler à l'infini de manière que l'intégrale de surface, qu'on vient de considérer, tende vers zéro.

Dans un Mémoire antérieur (1), nous avons formé et étudié l'intégrale de l'équation (4) dans le cas d'un milieu indéfini et d'une seule coordonnée x. Afin de faciliter certaines intégrations, nous avons été conduit à substituer, aux fonctions d'état initial arbitrairement données, des fonctions aussi voisines qu'on voulait des précédentes, mais analytiques. En conservant le même degré de généralité pour ces

(1) L. Roy, *Sur le mouvement des milieux visqueux et les quasi-ondes* (*Recueil des Savants étrangers de l'Académie des Sciences*, t. XXXV, n° 2).

fonctions d'état initial, nous avons reconnu qu'une remarque récente de M. Duhem [1] permet d'étendre, au cas général du mouvement à trois dimensions, les résultats que nous avons précédemment obtenus dans le cas d'une seule dimension ; c'est cette extension que nous nous proposons d'exposer. Enfin, comme les formules que nous obtiendrons supposent que a n'est pas nul, nous terminerons par l'étude directe du cas particulier où $a = 0$; ceci correspond, comme nous l'avons vu, à l'équation aux rotations dans le mouvement des fluides [2].

I. — Expression de l'intégrale.

Lorsque la fonction φ ne dépend que d'une seule coordonnée x, nous avons intégré l'équation (4) en lui adjoignant des conditions initiales de la forme :

Pour $t = 0$,

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \alpha\sqrt{\varepsilon})\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{\varepsilon}}\, d\xi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x + \alpha\sqrt{\varepsilon})\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{\varepsilon}}\, d\xi,$$

$f(x)$ et $g(x)$ désignant deux fonctions arbitraires et ε un paramètre positif pouvant toujours être choisi assez petit pour que les fonctions d'état initial diffèrent d'aussi peu qu'on veut des fonctions arbitraires $f(x)$ et $g(x)$. Dans le cas actuel de trois coordonnées x, y, z, nous prendrons des conditions initiales de même forme, de sorte que les équations du problème seront

$$(4) \qquad \Lambda \frac{\partial\, \Delta\varphi}{\partial t} + a^2\, \Delta\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0;$$

---

(1) P. Duhem, *Remarque élémentaire sur le problème des ondes sphériques* (*Comptes rendus Acad. des Sc.*, t. 156, 9 juin 1913, p. 1727).

(2) Le présent Mémoire a été résumé en deux Notes insérées aux *Comptes rendus* des séances de l'Académie des Sciences :

Sur le mouvement à trois dimensions des milieux visqueux indéfinis, t. 158, 27 avril 1914, p. 1158;

Sur les quasi-ondes à trois dimensions, t. 158, 4 mai 1914, p. 1263.

pour $t=0$,

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{(\sqrt{\pi\varepsilon})^3}\displaystyle\iiint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{r^2}{\varepsilon}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \dfrac{1}{(\sqrt{\pi\varepsilon})^3}\displaystyle\iiint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{r^2}{\varepsilon}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \end{cases}$$

avec

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

et $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ désignant deux fonctions arbitrairement données. On reconnaît dans les expressions (5) les formules du refroidissement d'un milieu athermane indéfini, où ε désignerait le temps et $f(x, y, z)$ ou $g(x, y, z)$ la température initiale. Donc, en donnant au paramètre positif ε une valeur suffisamment petite, on peut toujours faire en sorte que, pour $t=0$, φ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ diffèrent respectivement et aussi peu qu'on veut des fonctions arbitraires $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$.

Si nous posons

$$dq = f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \qquad dq' = g(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

nous sommes d'abord ramenés à chercher une fonction φ_1 satisfaisant aux équations

$$\Lambda \frac{\partial\, \Delta\varphi_1}{\partial t} + a^2 \Delta\varphi_1 - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = 0;$$

pour $t=0$,

$$\varphi_1 = \frac{dq}{(\sqrt{\pi\varepsilon})^3} e^{-\frac{r^2}{\varepsilon}}, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \frac{dq'}{(\sqrt{\pi\varepsilon})^3} e^{-\frac{r^2}{\varepsilon}}.$$

Cette fonction obtenue, la fonction φ s'en déduira en intégrant la fonction infiniment petite φ_1 dans tout l'espace et nous obtiendrons ainsi l'intégrale du problème.

Or, les conditions initiales ne dépendant plus que de r, la fonction φ_1 sera elle-même une certaine fonction de r et de t, soit $\varphi_1(r, t)$; en tenant compte de ce que

$$\Delta\varphi_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r\varphi_1}{\partial r^2},$$

l'équation indéfinie devient

$$\Lambda \frac{\partial^3 r \varphi_1}{\partial r^2 \partial t} + a^2 \frac{\partial^2 r \varphi_1}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 r \varphi_1}{\partial t^2} = 0,$$

de sorte qu'en posant $\psi = r\varphi_1$, on est ramené à intégrer les équations

$$\Lambda \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0;$$

pour $t = 0$,

$$\psi = \frac{dq}{(\sqrt{\pi\varepsilon})^3} r e^{-\frac{r^2}{\varepsilon}}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{dq'}{(\sqrt{\pi\varepsilon})^3} r e^{-\frac{r^2}{\varepsilon}},$$

qui ne dépendent plus que d'une seule variable géométrique r et auxquelles nous pouvons, par suite, appliquer immédiatement les résultats obtenus dans notre précédent Mémoire.

Nous avons ainsi, en posant encore

$$\lambda = \frac{\Lambda}{2a^2}, \qquad \tau = \frac{t}{\lambda},$$

$$(6) \quad \psi(r, t) = \frac{1}{\pi a (\sqrt{\pi\varepsilon})^3} \int_0^\infty \left[\frac{dq}{\lambda} \left(\alpha \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} + \operatorname{ch} \alpha\tau \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) + dq' \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha \sqrt{\alpha^2 - 1}} \right] F(\alpha) e^{-\tau\alpha^2} d\alpha,$$

avec

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-\frac{\xi^2}{\varepsilon}} \cos \alpha \frac{r - \xi}{a\lambda} d\xi.$$

Cette intégrale est facile à calculer : une intégration par parties donne tout d'abord

$$F(\alpha) = \frac{\varepsilon\alpha}{2a\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\varepsilon}} \sin \alpha \frac{r - \xi}{a\lambda} d\xi.$$

Si maintenant on développe la quantité $\sin \alpha \frac{r - \xi}{a\lambda}$ et qu'on tienne compte de ce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\varepsilon}} \sin \frac{\alpha\xi}{a\lambda} d\xi = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\varepsilon}} \cos \frac{\alpha\xi}{a\lambda} d\xi = \sqrt{\pi\varepsilon}\, e^{-\frac{\varepsilon}{4a^2\lambda^2}\alpha^2},$$

il vient immédiatement

$$F(\alpha) = \frac{\varepsilon\alpha}{2a\lambda} \sqrt{\pi\varepsilon} \sin \frac{\alpha r}{a\lambda} e^{-\frac{\varepsilon}{4a^2\lambda^2}\alpha^2}.$$

Posons enfin

$$\theta = \tau + \frac{\varepsilon}{4a^2\lambda^2}$$

et l'égalité (6) s'écrira

$$(7)\quad 2\pi^2 a^2 \lambda \psi(r, t) = \frac{dq}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2} \alpha \left(\alpha \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} + \operatorname{ch} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \sin \frac{\alpha r}{a\lambda} d\alpha$$
$$+ dq' \int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2} \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \sin \frac{\alpha r}{a\lambda} d\alpha.$$

Ces deux dernières intégrales se rattachent d'une manière très simple aux intégrales

$$(8)\quad \begin{cases} \mathcal{F}(y, \tau) = \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2} \left(\alpha \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} + \operatorname{ch} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \cos \alpha y \, d\alpha, \\ \mathcal{G}(y, \tau) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2} \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1}} \cos \alpha y \, d\alpha, \end{cases}$$

que nous avons considérées dans notre précédent Mémoire (¹); on voit en effet qu'on a

$$(9)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2} \alpha \left(\alpha \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} + \operatorname{ch} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \sin \alpha y \, d\alpha, \\ -\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2} \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \sin \alpha y \, d\alpha, \end{cases}$$

de sorte que l'égalité (7) s'écrit

$$\psi(r, t) = -\frac{1}{2\pi^2 a} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mathcal{F}\left(\frac{r}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) dq + \mathcal{G}\left(\frac{r}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) dq' \right].$$

L'intégrale du problème est donc en définitive

$$(10)\quad \varphi(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi^2 a} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mathcal{F}\left(\frac{r}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) f(\xi, \eta, \zeta) \right.$$
$$\left. + \mathcal{G}\left(\frac{r}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) g(\xi, \eta, \zeta) \right] \frac{d\xi \, d\eta \, d\zeta}{r}.$$

(¹) *Savants étrangers*, t. XXXV, n° 2, p. 25.

Son développement en série se déduit de ceux obtenus pour les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, soit

$$\mathcal{F}\left(\frac{r}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) = \frac{a\sqrt{\pi}}{2} e^{-\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^{2n}}{2n!} \left(-\frac{at}{2n+1} \frac{\partial^2 \mathrm{I}_n}{\partial r^2} + \frac{\mathrm{I}_n}{a\lambda}\right),$$

$$\mathcal{G}\left(\frac{r}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{t}{\lambda} e^{-\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^{2n}}{(2n+1)!} \mathrm{I}_n,$$

en désignant par I_n la fonction

$$\mathrm{I}_n(r, \theta) = \frac{\partial^{3n}}{\partial\theta^n \, \partial r^{2n}} \left(\frac{e^{\theta - \frac{r^2}{4a^2\lambda^2\theta}}}{\sqrt{\theta}}\right).$$

On obtient ainsi le développement cherché

$$(11) \quad \varphi(x, y, z, t)$$

$$= -\frac{e^{-\theta}}{4\sqrt{\pi^3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^{2n}}{2n!}$$

$$\times \iiint_{-\infty}^{\infty} \left[\left(-\frac{at}{2n+1} \frac{\partial^3 \mathrm{I}_n}{\partial r^3} + \frac{1}{a\lambda} \frac{\partial \mathrm{I}_n}{\partial r}\right) f(\xi, \eta, \zeta) \right.$$

$$\left. + \frac{t}{2n+1} \frac{1}{a\lambda} \frac{\partial \mathrm{I}_n}{\partial r} g(\xi, \eta, \zeta)\right] \frac{d\xi \, d\eta \, d\zeta}{r}.$$

II. — Expression asymptotique de l'intégrale lorsque la viscosité est très faible.

Pour obtenir l'expression asymptotique de l'intégrale (10) lorsque la viscosité est très faible, nous devons rechercher l'expression asymptotique des fonctions

$$(12) \qquad -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y},$$

lorsque la variable $\tau = \frac{t}{\lambda}$ a une valeur très grande, la deuxième y conservant une valeur quelconque. Nous avons trouvé dans ces conditions ([1])

$$
(13) \quad \begin{cases} \mathcal{F}(y,\tau) \sim \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\theta\alpha^2}(\alpha \sin\alpha\tau + \cos\alpha\tau)\cos\alpha y\, d\alpha, \\ \mathcal{G}(y,\tau) \sim \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\theta\alpha^2}\dfrac{\sin\alpha\tau}{\alpha}\cos\alpha y\, d\alpha, \end{cases}
$$

les signes $\sim$ indiquant des égalités asymptotiques où les termes négligés sont, quelle que soit y, au plus de l'ordre de $\frac{\tau}{\lambda\theta^2}$ pour la première et au plus de l'ordre de $\frac{\tau}{\sqrt{\theta^3}}$ pour la deuxième.

Nous allons montrer que l'on conserve un degré d'approximation suffisant, en dérivant par rapport à y les deux membres des égalités (13), bien que celles-ci ne soient qu'approchées, c'est-à-dire qu'on a aussi

$$
(14) \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial y} \sim \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\theta\alpha^2}\alpha(\alpha \sin\alpha\tau + \cos\alpha\tau)\sin\alpha y\, d\alpha, \\ -\dfrac{\partial\mathcal{G}}{\partial y} \sim \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\theta\alpha^2}\sin\alpha\tau \sin\alpha y\, d\alpha. \end{cases}
$$

Démontrons, par exemple, la seconde de ces égalités; nous allons suivre une marche identique à celle qui nous a conduits antérieurement à la deuxième égalité (13).

Récrivons la deuxième égalité (9)

$$
-\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial y} = \int_0^{\infty} e^{-\theta\alpha^2}\frac{\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}}\sin\alpha y\, d\alpha
$$

et soit η un nombre positif plus petit que l'unité : nous pouvons décomposer l'intégrale précédente en trois autres et écrire

$$
-\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial y} = \int_0^{\eta} + \int_{\eta}^{1} + \int_1^{\infty}.
$$

Quand α est compris entre η et 1, écrivons la fonction sous le signe $\int$:

$$
e^{-\theta\alpha^2}\frac{\sin\alpha\tau\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\sin\alpha y;
$$

([1]) L. Roy, *loc. cit.*, p. 38 et 54, et aussi *Comptes rendus Ac. des Sc.*, t. 156, 28 avril 1913, p. 1309.

on a manifestement

$$\left| e^{-\theta\alpha^2} \sin\alpha\tau\sqrt{1-\alpha^2} \sin\alpha y \right| < e^{-\theta\eta^2},$$

donc

$$\left| \int_\eta^1 \right| < e^{-\theta\eta^2} \int_\eta^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = e^{-\theta\eta^2} \left(\frac{\pi}{2} - \arc\sin\eta \right),$$

quantité qui tend vers zéro quand τ augmente indéfiniment. Quand α est supérieur à 1, on a

$$\left| e^{-\theta\alpha^2} \operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1} \sin\alpha y \right| < \frac{1}{2} e^{-\frac{\tau}{2} - \frac{\varepsilon}{4a^2\lambda^2}\alpha^2},$$

donc

$$\left| \int_1^\infty \right| < \frac{e^{-\frac{\tau}{2}}}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{4a^2\lambda^2}\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2-1}} d\alpha,$$

quantité qui tend également vers zéro pour τ infini, puisque ε a une valeur positive. Nous sommes donc ramenés, en définitive, à rechercher la limite de l'intégrale

$$(15) \qquad \int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2} \frac{\sin\alpha\tau\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sin\alpha y \, d\alpha.$$

Or, nous avons antérieurement reconnu qu'on a (1)

$$\frac{\sin\alpha\tau\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \sin\alpha\tau + \varepsilon\alpha\tau,$$

avec

$$|\varepsilon| < \alpha^2 \varpi(\alpha),$$

$\varpi(\alpha)$ étant une série entière en α^2 à termes tous positifs; l'intégrale (15) a donc pour expression

$$\int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2} \sin\alpha\tau \sin\alpha y \, d\alpha + \int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2} \varepsilon\alpha\tau \sin\alpha y \, d\alpha.$$

Nous allons montrer que la dernière intégrale est au plus de l'ordre de $\frac{\tau}{\theta^2}$; nous avons déjà

$$\left| \int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2} \varepsilon\alpha\tau \sin\alpha y \, d\alpha \right| < \frac{\tau}{\theta} \int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2} \varpi(\alpha)\, \theta\alpha^3 \, d\alpha,$$

de sorte que tout revient à établir que la dernière intégrale est de

(1) *Savants étrangers*, t. XXXV, n° 2, p. 40.

l'ordre de $\frac{1}{\theta}$. Or cela résulte immédiatement de la double inégalité

$$\int_0^{\eta} e^{-\theta\alpha^2}\varpi(\alpha)\,\theta\alpha^3\,d\alpha < \varpi(\eta)\int_0^{\eta} e^{-\theta\alpha^2}\,\theta\alpha^3\,d\alpha < \frac{\varpi(\eta)}{2\theta}\int_0^{\infty} e^{-u}\,u\,du,$$

puisque la dernière intégrale a une valeur finie.

Enfin, comme on a

$$\left|\int_{\eta}^{\infty} e^{-\theta\alpha^2}\sin\alpha\tau\sin\alpha y\,d\alpha\right| < \int_{\eta}^{\infty} e^{-\theta\alpha^2}\,d\alpha < \frac{1}{\eta}\int_{\eta}^{\infty} e^{-\theta\alpha^2}\,\alpha\,d\alpha = \frac{e^{-\theta\eta^2}}{2\theta\eta},$$

il résulte de ce qui précède qu'on a bien la deuxième égalité (14), les termes négligés étant au plus de l'ordre de $\frac{\tau}{\theta^2}$.

La première égalité (14) s'établirait en procédant d'une manière analogue et l'on reconnaîtrait que les termes négligés sont au plus de l'ordre de $\frac{\tau}{\lambda\sqrt{\theta^5}}$.

Les expressions asymptotiques (14) peuvent donc se calculer soit en effectuant les intégrations des seconds membres, soit plus simplement en dérivant par rapport à y les expressions asymptotiques que nous avons précédemment obtenues pour les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y} \sim \frac{1}{8\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\theta^3}}\Bigg\{&\left[1-\frac{\tau-y}{\sqrt{\theta}}\left(\sqrt{\theta}+\frac{\tau-y}{2\sqrt{\theta}}\right)\right]e^{-\frac{(\tau-y)^2}{4\theta}}\\
&-\left[1-\frac{\tau+y}{\sqrt{\theta}}\left(\sqrt{\theta}+\frac{\tau+y}{2\sqrt{\theta}}\right)\right]e^{-\frac{(\tau+y)^2}{4\theta}}\Bigg\},\\
-\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial y} \sim \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}&\left[e^{-\frac{(\tau-y)^2}{4\theta}}-e^{-\frac{(\tau+y)^2}{4\theta}}\right].
\end{aligned}$$

Remplaçons maintenant dans ces formules y par $\frac{r}{a\lambda}$, tenons compte de ce que $\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{a\lambda}\frac{\partial}{\partial y}$ et nous aurons, en revenant à la constante Λ,

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial r}\mathcal{F}\left(\frac{r}{a\lambda},\frac{t}{\lambda}\right) \sim\ & \frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{(\varepsilon+2\Lambda t)^3}}\left\{r-at+\frac{\Lambda}{a}\left[\frac{1}{2}-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon+2\Lambda t}\right]\right\}e^{-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon-2\Lambda t}}\\
&+\frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{(\varepsilon+2\Lambda t)^3}}\left\{r+at-\frac{\Lambda}{a}\left[\frac{1}{2}-\frac{(r+at)^2}{\varepsilon+2\Lambda t}\right]\right\}e^{-\frac{(r+at)^2}{\varepsilon+2\Lambda t}},\\
-\frac{\partial}{\partial r}\mathcal{G}\left(\frac{r}{a\lambda},\frac{t}{\lambda}\right) \sim\ & \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\varepsilon+2\Lambda t}}\left[e^{-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon+2\Lambda t}}-e^{-\frac{(r+at)^2}{\varepsilon+2\Lambda t}}\right];
\end{aligned}\right.$$

la première de ces égalités est approchée aux termes près de l'ordre de

$$\frac{1}{a\lambda^2}\frac{\tau}{\sqrt{\theta^5}} = \frac{8\Lambda^2 t}{\sqrt{(\varepsilon + 2\Lambda t)^5}},$$

la seconde, aux termes près de l'ordre de

$$\frac{1}{a\lambda}\frac{\tau}{\theta^2} = \frac{4\Lambda^2 t}{a(\varepsilon + 2\Lambda t)^2}.$$

Cela posé, imaginons tout d'abord qu'on attribue au coefficient de viscosité Λ une valeur fixe et qu'on fasse croître t indéfiniment; τ croîtra aussi indéfiniment et nous voyons alors, d'après les formules (16), que les fonctions $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r}, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r}$ tendent vers zéro. On a donc aussi, d'après l'égalité (10),

$$\lim_{t=\infty} \varphi(x, y, z, t) = 0.$$

Supposons ensuite que, t ayant une valeur positive quelconque, on fasse tendre Λ vers zéro; τ croîtra encore indéfiniment et, pour Λ très petit, nous aurons les égalités (16). On en déduit, d'après la formule (10), l'expression asymptotique correspondante de l'intégrale, que nous représenterons par $\varphi(x, y, z, t, \Lambda)$,

$$(17)\quad \varphi(x, y, z, t, \Lambda)$$
$$\sim \frac{1}{2\left[\sqrt{\pi(\varepsilon + 2\Lambda t)}\right]^3}\iiint_{-\infty}^{8} \left(\left\{ r - at + \frac{\Lambda}{a}\left[\frac{1}{2} - \frac{(r-at)^2}{\varepsilon + 2\Lambda t}\right]\right\} e^{-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon + 2\Lambda t}}\right.$$
$$\left. + \left\{ r + at - \frac{\Lambda}{a}\left[\frac{1}{2} - \frac{(r+at)^2}{\varepsilon + 2\Lambda t}\right]\right\} e^{-\frac{(r+at)^2}{\varepsilon + 2\Lambda t}}\right) \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$
$$+ \frac{1}{4a\sqrt{\pi^3(\varepsilon + 2\Lambda t)}}\iiint_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon + 2\Lambda t}} - e^{-\frac{(r+at)^2}{\varepsilon + 2\Lambda t}}\right]\frac{g(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

égalité asymptotique où les termes négligés sont au plus de l'ordre de Λ^2.

Cette formule va nous permettre d'établir la continuité de l'intégrale par rapport à Λ pour $\Lambda = 0$.

En effet, quand Λ est nul, l'équation (4) se réduit à l'équation du son

$$a^2\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Cherchons l'expression de son intégrale, qui correspond aux mêmes conditions initiales (5) et que nous représenterons par $\varphi(x, y, z, t, 0)$: en suivant une marche identique à la précédente, nous sommes ramenés à intégrer l'équation

$$a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

avec, pour $t = 0$:

$$\psi = \frac{dq}{(\sqrt{\pi\varepsilon})^3} r e^{-\frac{r^2}{\varepsilon}}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{dq'}{(\sqrt{\pi\varepsilon})^3} r e^{-\frac{r^2}{\varepsilon}}.$$

Nous obtenons ainsi, d'après une formule bien connue,

$$\psi = \frac{dq}{2(\sqrt{\pi\varepsilon})^3}\left[(r - at) e^{-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon}} + (r + at) e^{-\frac{(r+at)^2}{\varepsilon}}\right] + \frac{dq'}{2a(\sqrt{\pi\varepsilon})^3}\int_{r-at}^{r+at} \xi e^{-\frac{\xi^2}{\varepsilon}} d\xi ;$$

d'où, en effectuant la dernière quadrature et en revenant à la fonction φ,

$$(18) \quad \varphi(x, y, z, t, 0)$$
$$= \frac{1}{2(\sqrt{\pi\varepsilon})^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left[(r - at) e^{-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon}} + (r + at) e^{-\frac{(r+at)^2}{\varepsilon}}\right] \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi \, d\eta \, d\zeta$$
$$+ \frac{1}{4a\sqrt{\pi^3 \varepsilon}} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon}} - e^{-\frac{(r+at)^2}{\varepsilon}}\right] \frac{g(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$

Dès lors, la comparaison des égalités (17) et (18) nous montre immédiatement qu'on a

$$\lim_{\Lambda = 0} \varphi(x, y, z, t, \Lambda) = \varphi(x, y, z, t, 0),$$

ce qui établit la continuité annoncée.

L'intégrale (18) de l'équation du son aurait également pu s'obtenir, mais d'une manière moins simple, par le procédé de Poisson [1].

Il résulte de cette continuité que le phénomène diffère très peu, lorsque la viscosité est très petite, de ce qu'il serait si la viscosité était nulle, tant, du moins, que la variable t conserve une valeur modérée; il y a donc *quasi-propagation* et l'égalité (17) représente, par exemple, une *quasi-onde* de dilatation.

Nous allons chercher à nous rendre compte de la forme de son profil dans deux cas particuliers très simples.

---

[1] En effet, nous avons $\varphi = \int\int\int \varphi_1$, φ_1 étant l'intégrale des équations

$$a^2 \Delta\varphi_1 - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = 0;$$

pour $t = 0$,

$$\varphi_1 = \frac{dq}{(\sqrt{\pi\varepsilon})^3} e^{-\frac{r^2}{\varepsilon}}, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{dq'}{(\sqrt{\pi\varepsilon})^3} e^{-\frac{r^2}{\varepsilon}}.$$

La formule connue de Poisson nous donne alors comme expression de φ_1

$$(\alpha) \qquad 4\pi a^2 \varphi_1 = \frac{dq}{(\sqrt{\pi\varepsilon})^3} \frac{d}{dt} \frac{1}{t} \int_\sigma e^{-\frac{r_1^2}{\varepsilon}} d\sigma + \frac{dq'}{(\sqrt{\pi\varepsilon})^3} \frac{1}{t} \int_\sigma e^{-\frac{r_1^2}{\varepsilon}} d\sigma,$$

avec

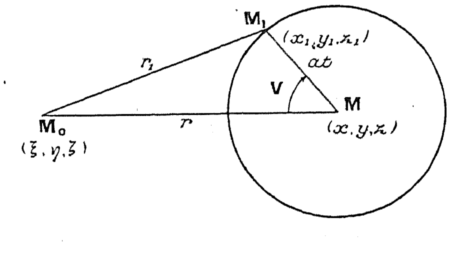
$$r_1 = \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2 + (z_1 - \zeta)^2}$$

et σ désignant la sphère de rayon at décrite du point M (x, y, z) comme centre; x_1, y_1, z_1 désignant les variables d'intégration.

Pour calculer l'intégrale $\int_\sigma e^{-\frac{r_1^2}{\varepsilon}} d\sigma$, on peut prendre comme élément d'aire la zone

$$d\sigma = 2\pi\, a^2 t^2 \sin V\, dV$$

ayant pour axe la droite M_0M et V désignant l'angle M_0MM_1 (*voir* la figure). Comme



on a d'autre part

$$r_1^2 = r^2 + a^2 t^2 - 2 r a t \cos V,$$

III. — Cas particulier.

I. Supposons qu'on ait $f(x, y, z) = 0$ et que la fonction $g(x, y, z)$ soit nulle en dehors d'une région infiniment petite comprenant l'origine des coordonnées. Si nous posons

$$A = \int\int\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

la formule (17) se réduira à

$$\varphi(r, t, A) \sim \frac{A}{4a\sqrt{\pi^3(\varepsilon + 2\Lambda t)}} \frac{e^{-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon+2\Lambda t}} - e^{-\frac{(r+at)^2}{\varepsilon+2\Lambda t}}}{r},$$

r désignant maintenant la distance du point (x, y, z) à l'origine.

Au bout d'un certain temps et à une distance r suffisamment grande de l'origine, la deuxième exponentielle deviendra négligeable devant la première et il viendra très sensiblement

$$\varphi(r, t, A) \sim \frac{A}{4ar\sqrt{\pi^3(\varepsilon + 2\Lambda t)}} e^{-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon+2\Lambda t}}.$$

---

il viendra

$$\int_\sigma e^{-\frac{r_1^2}{\varepsilon}} d\sigma = 2\pi a^2 t^2 e^{-\frac{r^2+a^2t^2}{\varepsilon}} \int_0^\pi e^{\frac{2rat\cos V}{\varepsilon}} \sin V\, dV.$$

Cette dernière intégrale se calcule immédiatement et l'on obtient

$$\frac{1}{t}\int_\sigma e^{-\frac{r_1^2}{\varepsilon}} d\sigma = \pi a \varepsilon \frac{e^{-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon}} - e^{-\frac{(r+at)^2}{\varepsilon}}}{r},$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{t}\int_\sigma e^{-\frac{r_1^2}{\varepsilon}} d\sigma = 2\pi a^2 \frac{(r-at)e^{-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon}} + (r+at)e^{-\frac{(r+at)^2}{\varepsilon}}}{r}.$$

L'égalité (α) devient donc

$$\varphi_1 = \frac{dq}{2(\sqrt{\pi\varepsilon})^3} \frac{(r-at)e^{-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon}} + (r+at)e^{-\frac{(r+at)^2}{\varepsilon}}}{r} + \frac{dq'}{4a\sqrt{\pi^3\varepsilon}} \frac{e^{-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon}} - e^{-\frac{(r+at)^2}{\varepsilon}}}{r}$$

et, par une dernière intégration à tout l'espace, on retrouve la formule (18).

Si l'on suppose le paramètre ε assez petit pour que la quantité $2\frac{\varepsilon + 2\Lambda t}{a^2 t^2}$ soit inférieure à l'unité, la formule précédente montre que le maximum de la fonction φ a lieu à une distance de l'origine égale à

$$at - \frac{\varepsilon + 2\Lambda t}{2at} - \frac{(\varepsilon + 2\Lambda t)^2}{4a^2 t^2} - \ldots;$$

donc la viscosité a pour effet, non seulement d'éteindre graduellement la quasi-onde et de l'étaler suivant les rayons vecteurs, mais aussi d'augmenter légèrement le décalage de son sommet vers l'intérieur de la sphère de rayon $r = at$ décrite de l'origine comme centre.

II. Supposons qu'on ait $g(x, y, z) = 0$ et que la fonction $f(x, y, z)$ soit nulle en dehors d'une région infiniment petite comprenant l'origine des coordonnées. Si l'on pose

$$B = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

et qu'on se borne encore à ne considérer que ce qui se passe au bout d'un certain temps et à une distance suffisante de l'origine, on aura de même très sensiblement, d'après la formule (17),

$$\varphi(r, t, \Lambda) \sim \frac{B}{2r\left[\sqrt{\pi(\varepsilon + 2\Lambda t)}\right]^3}\left\{r - at + \frac{\Lambda}{a}\left[\frac{1}{2} - \frac{(r-at)^2}{\varepsilon + 2\Lambda t}\right]\right\} e^{-\frac{(r-at)^2}{\varepsilon + 2\Lambda t}}.$$

Tout d'abord, si la viscosité est nulle, cette formule montre que le profil de la quasi-onde est représenté par deux intumescences de signes contraires qui se raccordent sur la sphère $r = at$, où la fonction φ s'annule. Si maintenant la viscosité n'est pas nulle, on voit qu'un des effets de celle-ci est encore de déterminer un décalage en arrière des sommets de chaque intumescence ainsi que du point pour lequel $\varphi = 0$.

IV. — Équation aux rotations dans le cas des fluides.

Nous avons vu que l'équation aux rotations dans le mouvement des fluides correspondait au cas où $a = 0$; l'équation (4) se réduit alors à la suivante

$$(19) \qquad \Lambda \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

à laquelle nous adjoignons les conditions initiales :

Pour $t = 0$,

$$\varphi = f(x, y, z), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = g(x, y, z),$$

f et g désignant deux fonctions arbitraires. L'équation (19) se ramène à l'équation de la chaleur en posant

$$(20) \qquad \psi = \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

il vient, en effet,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Lambda \Delta \psi;$$

pour $t = 0$,

$$\psi = g(x, y, z).$$

Nous retombons ainsi sur les équations du refroidissement d'un milieu athermane, qui admettent l'intégrale bien connue

$$\psi = \frac{1}{(2\sqrt{\pi \Lambda t})^3} \overline{\underline{\iiint}}_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{r^2}{4\Lambda t}} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

La formule (20) nous donne ensuite, en tenant compte de la première des conditions initiales données,

$$\varphi(x, y, z, t) = f(x, y, z) + \int_0^t \frac{dt}{(2\sqrt{\pi \Lambda t})^3} \overline{\underline{\iiint}}_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{r^2}{4\Lambda t}} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

et finalement, en faisant le changement de variable $\frac{r}{2\sqrt{\Lambda t}} = \alpha$,

$$(21) \qquad \varphi(x, y, z, t) = f(x, y, z) + \frac{1}{2\Lambda\sqrt{\pi^3}} \overline{\underline{\iiint}}_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi\, d\eta\, d\zeta \int_{\frac{r}{2\sqrt{\Lambda t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Supposons, en particulier, que la fonction $g(x, y, z)$ soit nulle en dehors d'une région infiniment petite comprenant l'origine des coordonnées; en posant encore

$$A = \iiint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

la formule (21) deviendra

$$\varphi(x, y, z, t) = f(x, y, z) + \frac{A}{2\Lambda r\sqrt{\pi^3}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{\Lambda t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

r désignant maintenant la distance du point (x, y, z) à l'origine.

Si, de plus, la viscosité est très petite, la limite inférieure de la dernière intégrale sera très grande et, d'après l'égalité asymptotique bien connue

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \sim \frac{e^{-\alpha^2}}{2\alpha}$$

valable pour α très grand, on aura

$$\varphi(x, y, z, t) \sim f(x, y, z) + \frac{A}{2r^2}\sqrt{\frac{t}{\Lambda\pi^3}}\, e^{-\frac{r^2}{4\Lambda t}}.$$