ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE POTRON

Quelques propriétés des substitutions linéaires à coefficients ≥ 0 et leur application aux problèmes de la production et des salaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 30 (1913), p. 53-76

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1913_3_30__53_0>

QUELQUES PROPRIÉTÉS
DES
SUBSTITUTIONS LINÉAIRES A COEFFICIENTS $\geqq 0$
ET LEUR
APPLICATION AUX PROBLÈMES DE LA PRODUCTION ET DES SALAIRES,

PAR M. MAURICE POTRON.

1. Ce travail développe d'abord et complète, en les étendant aux substitutions linéaires à coefficients $\geqq 0$, divers résultats dus à MM. Perron et Frobenius et démontrés par eux pour les substitutions linéaires à coefficients > 0 (¹). Les résultats ainsi obtenus fournissent la solution complète du problème suivant : Étant donnée une substitution linéaire à coefficients $\geqq 0$, trouver une fonction linéaire, à coefficients > 0, que cette substitution multiplie par un facteur constant. Comme on le verra ensuite, c'est précisément à ce problème mathématique que se ramène le problème économique des Salaires, problème consistant à trouver un régime des prix des divers objets et des salaires des diverses catégories de travailleurs, tel que, pour chaque objet, le prix de vente soit au moins égal au prix coûtant et que, pour chaque travailleur supposé menant une existence convenant à sa catégorie, le salaire soit au moins égal au coût de la vie, lequel dépend précisément des prix de divers objets.

I. — Quelques propriétés des substitutions linéaires à coefficients $\geqq 0$.

2. Voici les résultats acquis pour les substitutions à coefficients > 0.

(¹) Ce travail a fait l'objet de deux communications à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. 153, p. 1129, séance du 4 décembre 1911 ; p. 1458, séance du 26 décembre 1911). M. Frobenius a publié, postérieurement à ces communications, une étude complète des matrices à éléments $\geqq 0$ (*S. A. B.*, 1912, p. 456-477).

Si les éléments $a_{ik}(i, k = 1, \ldots, n)$ d'une matrice $A = |a_{ik}|$ sont tous > 0, la racine caractéristique r de module maximum de A est réelle, positive et simple (Perron, *M. A.*, t. LXIV, p. 261; Frobenius, *S. A. B.*, 1908, p. 471-476; 1909, p. 514-518).

Soient $u_{ik}(i, k = 1, \ldots, n; u_{ik} = 0, i \neq k; u_{ii} = 1)$ les éléments de la matrice-unité d'ordre n, et s un paramètre; si s est $\geqq r$, les éléments de l'adjoint de $|su_{ik} - a_{ik}|$ sont tous > 0; par suite, *la racine de module maximum, réelle, positive et simple, d'un élément principal de l'adjoint est $< r$.* Il en résulte que *les équations*

$$(1) \qquad r\alpha_i - \Sigma_k a_{ki}\alpha_k = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

sont vérifiées par des valeurs toutes > 0 de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (Frobenius, *ibid.*).

Si les équations

$$s\alpha_i - \Sigma_k a_{ki}\alpha_k = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

sont vérifiées par des valeurs toutes > 0 de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, on a $s = r$ (Frobenius, *ibid.*).

Si l'on considère la substitution $(a) = |x_i, \Sigma_k a_{ik} x_k|$, les deux derniers théorèmes ont la signification suivante : *il existe une fonction $\Sigma_i \alpha_i x_i$, à coefficients > 0, et une seule à un facteur constant près, que (a) multiplie par un facteur constant, lequel ne peut être que r.*

Si les éléments de A sont seulement $\geqq 0$, on a les résultats suivants (*Cf.* Frobenius, *loc. cit.*). *La racine caractéristique r de module maximum est réelle et $\geqq 0$. Les éléments de l'adjoint de $|ru_{ik} - a_{ik}|$ sont $\geqq 0$. La racine r peut être multiple; si p est son ordre de multiplicité, les mineurs principaux de $|ru_{ik} - a_{ik}|$ d'ordre $> n - p$ sont tous nuls; un mineur principal est > 0. La racine r peut être nulle; alors toutes les autres sont nulles en même temps.*

3. On peut aisément démontrer ces résultats au moyen de la remarque suivante : *Soit $f(x, t)$ un polynome en x, dont les coefficients sont fonctions holomorphes d'une variable t finie et $\geqq 0$, et non tous nuls pour $t = 0$; dont la racine α de module maximum est, pour toute valeur > 0 de t, réelle, positive et simple; qui est toujours > 0 pour $t > 0$ et $x > \alpha$.* La racine α est, pour $t \geqq 0$, fonction continue de t. *Soit a sa*

limite pour $t = 0$. On sait que a est racine de $f(x, 0)$. Je dis que $f(x, 0)$ *est* > 0 *pour* $x > a$, *et que les modules de ses racines sont* $\leqq a$.

Soit en effet $b > a$. Pour t infiniment petit > 0, α est infiniment voisin de a, en sorte que b est $> \alpha$ et $f(b, t) > 0$, donc $f(b, 0) \geqq 0$. Mais si b était le module d'une racine b' de $f(x, 0)$, b' serait limite d'une racine β' de $f(x, t)$, racine dont le module β, ayant pour limite b, serait, pour t infiniment petit positif, $> \alpha$.

4. Désignant donc par t une variable $\geqq 0$, je pose $a_{ik} + t = \alpha_{ik}$, et je considère la substitution (α) dont les coefficients α_{ik} sont tous > 0 en même temps que t, et dont la racine de module maximum ρ sera par suite, pour $t > 0$, réelle, positive et simple. D'après la remarque du n° 3, *la limite* r *vers laquelle tend* ρ *lorsque* t *devient nul est racine caractéristique de module maximum de* A ; *elle est réelle et* $\geqq 0$. Il est bien clair que, les éléments de l'adjoint de $|su_{ik} - \alpha_{ik}|$ étant tous > 0 pour $t > 0$ et $s \geqq \rho$, *les éléments de l'adjoint de* $|su_{ik} - a_{ik}|$ *seront tous* $\geqq 0$ *pour* $s \geqq r$. Un élément principal de l'adjoint de $|su_{ik} - \alpha_{ik}|$ ayant, pour $t > 0$, une racine de module maximum, réelle, $\lambda > \rho$, *l'élément principal correspondant de l'adjoint de* $|su_{ik} - a_{ik}|$ *a, pour racine de module maximum,* la limite l de λ, *qui est réelle et* $\leqq r$; *cet élément principal sera donc* > 0 *pour* $s > r$, *et* $\geqq 0$ *pour* $s = r$.

Pour $t > 0$, il existe une fonction $\Sigma_i \mu_i x_i$ dont les coefficients sont > 0 et que (α) multiplie par ρ ; on peut même toujours, comme on le voit directement, assujettir les coefficients μ à vérifier la relation $\Sigma_i \mu_i = b$, b étant un nombre > 0 arbitraire, et, par suite, à vérifier aussi $0 < \mu_i < b \, (i = 1, \ldots, n)$. Soit m_i la limite de μ_i pour $t = 0$; on a évidemment $\Sigma_i m_i = b$, $0 \leqq m_i \leqq b \, (i = 1, \ldots, n)$; et *la substitution* (a) *multiplie par* r *la fonction* $\Sigma_i m_i x_i$, *dont les coefficients sont* $\geqq 0$ *et non tous nuls*.

Les coefficients m sont solutions de

$$r m_i - \Sigma_k a_{ki} m_k = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n);$$

cherchons dans quel cas quelques-uns d'entre eux pourront être nuls. Supposons par exemple qu'on ait

$$m_1 > 0, \qquad \ldots, \qquad m_p > 0, \qquad m_{p+1} = \ldots = m_n = 0,$$

les $n-p$ dernières équations donnent

$$\Sigma_j a_{jh} m_j = 0, \qquad m_j > 0, \qquad a_{jh} \geqq 0 \qquad (j = 1, \ldots, p;\ h = p+1, \ldots, n);$$

il faut donc

$$a_{jh} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, p;\ h = p+1, \ldots, n);$$

et la substitution (a) prend la forme

$$x_j, \Sigma_l a_{jl} x_l;\ x_h, \Sigma_k a_{hk} x_k \,| \qquad (j, l = 1, \ldots, p;\ h = p+1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, n).$$

Si donc (a) *multiplie par un facteur constant une fonction linéaire* u *à coefficients* $\geqq 0$ *ne contenant pas toutes les variables* x, (a) *transforme chacune des variables de* u *en une fonction linéaire de ces seules variables.* J'exprimerai ce fait en disant que la matrice $|a_{ik}|$ est *partiellement réduite.*

5. *Supposons inversement que* (a) *multiplie par un facteur constant* s *une fonction à coefficients* > 0 $\Sigma_i m_i x_i (i, 1, \ldots, n)$. D'après le n° 4, (a') transposée de (a) multiplie par r une fonction $\Sigma_i m'_i y_i$, dont les coefficients sont $\geqq 0$. On a donc les deux systèmes

$$s m_i - \Sigma_k a_{ki} m_k = 0, \qquad r m'_i - \Sigma_k a_{ik} m'_k = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n);$$

d'où l'on tire

$$r \Sigma_i m_i m'_i = \Sigma_i m_i \Sigma_k a_{ik} m'_k = \Sigma_k m'_k \Sigma_i a_{ik} m_i = s \Sigma_k m_k m'_k;$$

d'où

$$(s - r) \Sigma_k m_k m'_k = 0.$$

Comme, d'après les hypothèses, $\Sigma_k m_k m'_k$ est > 0, *on a* $s = r$.

On voit donc que, *si* (a) *multiplie par un facteur constant* s *une fonction linéaire* u, *à coefficients* > 0, *de quelques-unes des variables seulement, ce facteur* s *est racine de module maximum de la substitution* (a_1) *opérée par* (a) *sur les variables de* u.

6. Cherchons à former toutes les fonctions distinctes, à coefficients $\geqq 0$, que (a) multiplie par r.

On sait que, si $n-q$ est le rang de $|r u_{ik} - a_{ik}|$, il existe q et seulement q fonctions distinctes, à coefficients quelconques, que (a)

multiplie par r. Il s'agit, en effet, de trouver les solutions distinctes du système

$$(1) \qquad r\alpha_i - \Sigma_k a_{ki}\alpha_k = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n),$$

tous les mineurs de $|ru_{ik} - a_{ik}|$ d'ordre $> n - q$ étant nuls, un mineur d'ordre $n - q$ étant $\neq 0$. Choisissons les indices de manière que les éléments de ce dernier mineur soient les coefficients de $\alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_n$ dans $n - q$ équations distinctes; nous pouvons alors donner à $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, q systèmes distincts de valeurs $\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jq}$ $(j = 1, \ldots, q)$, faire par exemple $\beta_{jl} = 0$ $(j, l = 1, \ldots, q)$, pour $j \neq l$, et $\beta_{jj} = 1$. A chaque système $\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jq}$ les équations (1) font correspondre, pour $\alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_n$, un système unique $\beta_{j,q+1}, \ldots, \beta_{jn}$. On a ainsi q systèmes distincts de solutions, et l'on sait que la solution la plus générale de (1) est donnée par

$$(2) \qquad \alpha_i = \Sigma_j \lambda_j \beta_{ji} \qquad (j = 1, \ldots, q;\ i = 1, \ldots, n).$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ étant des coefficients arbitraires.

Ainsi pour avoir l'expression la plus générale des fonctions, à coefficients $\geqq 0$, que (a) multiplie par r, il suffit de chercher, en prenant pour inconnues les λ, la solution la plus générale des inégalités

$$(3) \qquad \alpha_i = \Sigma_j \lambda_j \beta_{ji} \geqq 0 \qquad (j = 1, \ldots, q;\ i = 1, \ldots, n).$$

Une solution existe nécessairement (n° 4). Par conséquent (*Cf.* MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen*, p. 39-45), *il existe au moins une solution, dite* solution extrême, *donnée par* $\lambda_j = \mu_{j1}$ $(j = 1, \ldots, q)$, *annulant* $q - 1$ *formes* α *distinctes, et rendant les autres* $\geqq 0$ *et non toutes nulles.* Alors, s'il existe $q' \leqq q$ solutions extrêmes distinctes données par $\lambda_j = \mu_{jl}$ $(j = 1, \ldots, q;\ l = 1, \ldots, q')$, on sait que la solution la plus générale de (3) est $\lambda_j = \Sigma_l \theta_l \mu_{jl}$ $(j = 1, \ldots, q;\ l = 1, \ldots, q')$, les θ étant des coefficients $\geqq 0$ arbitraires.

Ainsi, *l'expression la plus générale des coefficients des fonctions* $\Sigma_i \alpha_i x_i$, *à coefficients* $\geqq 0$, *que* (a) *multiplie par* r, *autrement dit la solution la plus générale, en nombres* $\geqq 0$, *des équations* (1), est

$$(4) \quad \alpha_i = \Sigma_j \beta_{ji} \Sigma_l \theta_l \mu_{jl} = \Sigma_l \theta_l \Sigma_j \mu_{jl} \beta_{ji} \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, q;\ l = 1, \ldots, q').$$

Si l'on pose

$$(5)\qquad \Sigma_l \mu_{jl}\beta_{ji} = \gamma_{il} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, q;\ l = 1, \ldots, q'),$$

on aura, pour expression de la solution la plus générale,

$$(6)\qquad \alpha_i = \Sigma_l \theta_l \gamma_{il} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, q'),$$

les θ étant des coefficients $\geqq 0$ arbitraires, et chaque système $\gamma_{1l}, \ldots, \gamma_{nl}$ de nombres $\geqq 0$, non tous nuls, et dont $q - 1$ au moins sont nuls, étant ce qu'on peut appeler une solution extrême, en nombres $\geqq 0$, des équations (1).

Puisque les équations (1), *lorsque le rang de* $|ru_{ik} - a_{ik}|$ *est* $n - q$, admettent certainement une solution extrême dans laquelle p des inconnues ($n - 1 \geqq p \geqq q - 1$) sont nulles, il s'ensuit que (a) *multiplie par r une fonction, à coefficients* > 0, *de $n - p$ variables seulement*, et, par suite, transforme chacune de ces $n - p$ variables *en une fonction linéaire de ces seules variables.*

7. Considérons maintenant, surtout en vue de l'application que nous voulons faire, la substitution

$$(a, b) = |x_i, \Sigma_k a_{ik} x_k;\ y_l, \Sigma_i b_{li} x_i + s y_l| \qquad (i, k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, p),$$

les b étant, comme les a, tous $\geqq 0$, et, de plus, quel que soit i, $b_{1i}, \ldots, b_{pi}$ n'étant pas tous nuls. La matrice de (a, b) est $s^p |a_{ik}|$. Voici ses principales propriétés.

Supposons s au moins égal à la racine caractéristique r de module maximum de $|a_{ik}|$; s est alors la racine caractéristique de module maximum de (a, b); par suite (n° 4) *il existe une fonction*

$$\Sigma_i \alpha_i x_i + \Sigma_l \beta_l y_l,$$

à coefficients $\geqq 0$ *et non tous nuls, que* (a, b) *multiplie* par s; autrement dit, *les équations*

$$(7)\qquad s\alpha_i - \Sigma_k a_{ki} \alpha_k = \Sigma_l b_{li} \beta_l \qquad (i, k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, p)$$

admettent une solution en nombres $\geqq 0$ *et non tous nuls.* Désignons par φ_{ik} les éléments de l'adjoint de $\varphi = |su_{ik} - a_{ik}|$; *si s est supérieur à la* *racine caractéristique de module maximum de* $|a_{ik}|$, on a (n° 4) $\mathcal{D} > 0$, $\mathcal{D}_{ik} \geqq 0$ pour $i \neq k$, $\mathcal{D}_{ii} > 0$; on voit alors directement qu'*en donnant à* $\beta_1, \ldots, \beta_p$ *des valeurs* > 0 *arbitraires, on obtient pour* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *des valeurs* > 0.

Inversement, *si* (a, b) *multiplie par* s *une fonction* $\Sigma_i \alpha_i x_i + \Sigma_l \beta_l y_l$, *dans laquelle on a* $\alpha_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\beta_l \geqq 0$ $(l = 1, \ldots, p)$, *s est* $\geqq r$, *et certainement* $> r$, *si* $\beta_l > 0$ $(l = 1, \ldots, p)$. Posons en effet

$$B_i = \Sigma_l b_{li} \beta_l \qquad (i = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, p)$$

et combinons les équations (7) avec les équations déjà considérées au n° 5, $rm'_i - \Sigma_k a_{ik} m'_k$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, que vérifient des valeurs $\geqq 0$ et non toutes nulles des m', il vient

$$r \Sigma_i \alpha_i m'_i = \Sigma_i \alpha_i \Sigma_k a_{ik} m'_k = \Sigma_k m'_k \Sigma_i a_{ik} \alpha_i = \Sigma_k m'_k (s \alpha_k - B_k),$$

d'où

$$(s - r) \Sigma_k m'_k \alpha_k = \Sigma_k m'_k B_k.$$

D'après les hypothèses, $\Sigma_k m'_k \alpha_k$ est > 0, on a donc $s - r \geqq 0$, et, si les β et par suite les B sont tous > 0, on a $s > r$.

On voit directement, comme au n° 4, que *si, dans une solution en nombres* $\geqq 0$ *et non tous nuls des équations* (7), *quelques-uns des* α *sont nuls, la matrice* a_{ik} *est partiellement réduite*.

8. Cherchons encore, en vue de l'application que nous voulons faire, à résoudre en nombres > 0 le système

$$\left.\begin{aligned} &(7) \qquad s\alpha_i - \Sigma_k a_{ki} \alpha_k - \Sigma_l b_{li} \beta_l = 0 \\ &(8) \qquad t\beta_l - \Sigma_i c_{li} \alpha_i = 0 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, p),$$

où $c_{l1}, \ldots, c_{ln}$ sont des nombres $\geqq 0$, et, quel que soit l, non tous nuls.

Le système considéré admet des solutions > 0 toujours et seulement si t est > 0 et si les équations

$$(9) \qquad s\alpha_i - \Sigma_k \left(a_{ki} + \frac{1}{t} \Sigma_l b_{li} c_{lk} \right) = 0,$$

c'est-à-dire *seulement si t est* > 0 *et s racine caractéristique de module* *maximum de la matrice* $\left|a_{ik}+\frac{1}{t}\Sigma_l b_{li}c_{lk}\right|$, *et, si ces conditions sont vérifiées, toujours, sauf peut-être si la matrice considérée est partiellement réduite, auquel cas on peut seulement assurer que le système admet des solutions* $\geqq 0$ *et non toutes nulles.*

On peut donner à cette condition une autre forme plus commode pour l'application que nous voulons faire. Supposons, en effet, que $\omega = |su_{ik}-a_{ik}|$ ne soit pas nul, on peut, en désignant par ω_{ik} les éléments de l'adjoint de ω, remplacer le système (7) par le système équivalent

$$(10)\qquad \omega\alpha_i = \Sigma_k \omega_{ik}\Sigma_l b_{lk}\beta_l;$$

d'où l'on tire, par combinaison avec (8),

$$\omega t\beta_j = \Sigma_i c_{ji}\Sigma_k \omega_{ik}\Sigma_l b_{lk}\beta_l = \Sigma_l \beta_l \Sigma_k b_{lk}\Sigma_i c_{ji}\omega_{ik}.$$

Posons

$$(11)\qquad \Sigma_i c_{ji}\omega_{ik} = \omega d_{jk},$$

$$(12)\qquad \Sigma_k b_{lk}d_{jk} = B_{lj} \qquad (i, k = 1, \ldots, n;\ j, l = 1, \ldots, p),$$

les B sont $\geqq 0$, et il vient

$$(13)\qquad t\beta_j - \Sigma_l B_{lj}\beta_l = 0 \qquad (j, l = 1, \ldots, p).$$

Le système [(10), (13)] est donc une conséquence de [(8), (9)]. Un calcul inverse montre que [(8), (9)] est une conséquence de [(10), (13)]. Les deux systèmes sont donc équivalents, pourvu que $t\omega$ soit > 0, et, par suite, leurs déterminants, qui sont respectivement $t^p\left|su_{ik}-a_{ik}-\frac{1}{t}\Sigma_l b_{li}c_{lk}\right|$ et $\omega^n|tu_{jl}-B_{jl}|$, s'annulent pour les mêmes couples (s, t) n'annulant pas $t\omega$. En conséquence, les deux équations

$$(14)\qquad \left|su_{ik}-a_{ik}-\frac{1}{t}\Sigma_l b_{lk}c_{li}\right| = 0,$$

et

$$(15)\qquad |tu_{jl}-B_{jl}| = 0,$$

représentent une même courbe.

Soit $\sigma(t)$ la racine de module maximum de $\left|su_{ik}-a_{ik}-\frac{1}{t}\Sigma_l b_{li}c_{lk}\right|$

considéré comme un polynome en s, de degré n, et $\tau(s)$ la racine de module maximum de $|tu_{jl} - B_{jl}|$ considéré comme un polynome en t, de degré p. La fonction $\sigma(t)$ est finie et continue pour toute valeur > 0 de t. Lorsque t est infiniment petit, une racine au moins de l'équation (14) étant infiniment grande, $\sigma(t)$ est infiniment grand. Lorsque t est infiniment petit, les n racines de l'équation (14) sont respectivement infiniment voisines des n racines de l'équation $|su_{ik} - a_{ik}| = 0$, donc $\sigma(0) = r$. De même, les B étant des fractions ayant pour numérateurs des polynomes en s de degré $\leqq n - 1$ et pour dénominateur ϖ, la fonction $\tau(s)$ est finie et continue pour toute valeur de $s > r$. Lorsque s est infiniment voisin de r, une racine au moins de l'équation (15) étant infiniment grande, $\tau(r)$ est infiniment grand. Lorsque s est infiniment grand, les B sont infiniment petits, donc les p racines de l'équation (15) sont infiniment petites, donc $\tau(s)$ est infiniment grand.

Je dis que *les deux fonctions σ et τ sont inverses l'une de l'autre*. Soit en effet, pour $s_1 > r$, $t_1 = \tau(s_1)$, je dis que $\sigma(t_1) = s_1$. D'abord, le couple (s_1, t_1), vérifiant (15), vérifie aussi (14); donc, par définition, $\sigma(t_1) \geqq s_1$. Si $\sigma(t_1)$ était $> s_1$, comme, en faisant croître indéfiniment et d'une façon continue t à partir de t_1, $\sigma(t)$ varie d'une façon continue de $\sigma(t_1) > s_1$ à $r < s_1$, il existerait une valeur $t_2 > t_1$ pour laquelle on aurait $\sigma(t_2) = s_1$; le couple (s_1, t_2) vérifiant (14) vérifierait aussi (15), et t_1 ne serait pas la racine de module maximum de (15) correspondant à s_1. De même soit, pour $t_1 > 0$, $s_1 = \sigma(t_1)$, je dis que $\tau(s_1) = t_1$. D'abord, le couple (s_1, t_1), vérifiant (14), vérifie aussi (15), donc, par définition, $\tau(s_1) \geqq t_1$. Si $\tau(s_1)$ était $> t_1$, comme en faisant croître indéfiniment et d'une façon continue s à partir de s_1, t varie d'une façon continue de $\tau(s_1) > t_1$ à $0 < t_1$, il existerait une valeur $s_2 > s_1$ pour laquelle on aurait $\tau(s_2) = t_1$; le couple (s_2, t_1), vérifiant (15), vérifierait aussi (14) et s_1 ne serait pas la racine de module maximum de (14) correspondant à t_1.

Un raisonnement tout semblable montre que si, pour $t_1 > 0$, *on a* $s_1 > \sigma(t_1)$, *on aura* $t_1 > \tau(s_1)$, *et que si, pour* $s_1 > r$, *on a* $t_1 > \tau(s_1)$, *on aura* $s_1 > \sigma(t_1)$.

Ainsi, *les conditions $t > 0$, s au moins égal — ou égal — à la racine caractéristique de module maximum de* $\left|a_{ik} + \frac{1}{t}\Sigma_l b_{lk} c_{li}\right|$, *équivalent* *aux conditions $s > r$, t au moins égal — ou égal — à la racine caractéristique de module maximum de* $|B_{jl}|$.

Si nous considérons la courbe représentée par l'une ou l'autre des équations (14) et (15), l'une ou l'autre des équations $s = \sigma(t)$ et $t = \tau(s)$ représente une branche de cette courbe, qui est asymptote aux droites $s = r$ et $t = 0$, et que toute parallèle à l'un des axes, d'abscisse $> r$ ou d'ordonnée > 0, rencontre en un point à distance finie et un seul. Cette branche de courbe partage le plan en deux régions. Sa considération nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Si, pour des valeurs toutes > 0 des α et β, les premiers membres de (7) *et* (8) *sont $\geqq 0$, le point (s, t) ne peut se trouver, par rapport à la branche de courbe considérée, dans la région des axes. S'il est dans la région opposée, il existe des valeurs toutes > 0 des α et β rendant $\geqq 0$ et non tous nuls les premiers membres de* (7) *et* (8). *S'il est sur la branche de courbe, il existe des valeurs toutes > 0 $\Big($exceptionnellement $\geqq 0$ et non toutes nulles, si les matrices $\left| a_{ik} + \frac{1}{t}\Sigma_l b_{ik} c_{li} \right|$ et $|B_{jl}|$ sont partiellement réduites$\Big)$ des α et β rendant $\geqq 0$ les premiers membres de* (7) *et* (8).

9. Pour reconnaître la position d'une quantité s par rapport à la racine de module maximum r de $\mathcal{E}(s) = |su_{ik} - e_{ik}|$, $e_{ik} \geqq 0 (i, k = 1, \ldots, n)$, on peut utiliser les remarques suivantes :

Pour $s > r$, $\mathcal{E}(s)$ est > 0, ainsi que ses mineurs de tous ordres ; l'inverse a lieu, car, la $p^{\text{ième}}$ dérivée de $\omega(s)$ étant la somme multipliée par $p!$ des mineurs principaux, si, pour une valeur s, le polynome $\mathcal{E}(s)$ est > 0 ainsi que ses mineurs principaux, toutes les dérivées de $\mathcal{E}(s)$ sont > 0, et l'on sait qu'alors s est supérieur à la racine maximum de $\mathcal{E}(s)$ [1]. Pour $s = r$, si ν est l'ordre de multiplicité de r, $\mathcal{E}(s)$ est nul

---

[1] Si en effet on désigne par $\mathcal{E}_q(s)$ la $q^{\text{ième}}$ dérivée, on a

$$\mathcal{E}(s) = \Sigma_q \frac{(s - s_0)^q}{q!} \mathcal{E}_q(s_0) \qquad (q = 0, 1, \ldots n).$$

Si $\mathcal{E}_q(s_0) > 0$ $(q = 0, 1, \ldots, n)$, $\mathcal{E}(s)$ est > 0 pour toute valeur de $s \geqq s_0$. Si l'on a $\mathcal{E}_q(s_0) = 0$ pour $q = 0, 1, \ldots, p - 1$, et $\mathcal{E}_q(s_0) > 0$ pour $q = p, p + 1, \ldots, n$, la formule $\mathcal{E}(s) = \Sigma_q \frac{(s - s_0)^q}{q!} \mathcal{E}_q(s_0)$ $(q = p, p + 1, \ldots, n)$, montre que $\mathcal{E}(s)$ est nul pour $s = s_0$, mais > 0 pour $s > s_0$.

ainsi que ses mineurs principaux d'ordre $> n - \nu$; les mineurs principaux d'ordre $\leqq n - \nu$ sont $\geqq 0$; un mineur principal d'ordre $n - \nu$ et les mineurs principaux d'ordre $< n - \nu$ qui en dérivent sont > 0; l'inverse a lieu, car alors le polynome $\mathcal{C}(s)$ est nul ainsi que ses $p - 1$ premières dérivées, ses $n - p + 1$ dérivées suivantes sont > 0, et l'on sait qu'alors s est racine maximum de $\mathcal{C}(s)$ et que son ordre de multiplicité est ν.

II. — Application des résultats précédents aux problèmes de la Production et des Salaires.

10. Il ne s'agit pas du tout, comme on le verra, d'étudier l'action des causes très diverses qui peuvent influer, soit sur la production, soit sur la détermination des prix et des salaires. Je chercherai simplement, en précisant au point de vue mathématique les conditions dans lesquelles se posent les problèmes de la Production et des Salaires, à reconnaître si ces problèmes sont susceptibles de solutions qui soient satisfaisantes au point de vue économique. Il faut d'abord, pour cela, représenter mathématiquement les relations données qui existent entre les divers *résultats de travail*.

Un *résultat de travail* sera, soit une transformation ou production proprement dite, soit un déplacement ou transport, soit, plus généralement, un *service* (de surveillance, de sécurité, comme ceux que rendent les administrations publiques, les compagnies d'assurances, etc.). Pour obtenir tel *résultat de travail*, il faut, d'une part, tel travail de telle ou telle nature (main-d'œuvre), et, d'autre part, l'usage ou la consommation de tels et tels résultats de travail (matières premières, machines, etc.). Ce sont des conditions qu'on peut appeler *techniques*. Aux divers genres de travail correspondent, en général, diverses catégories sociales de travailleurs (chefs d'industrie, chefs de service, contremaîtres, employés et ouvriers, manœuvres); ce sont des conditions qu'on peut appeler *administratives*. Aux différentes catégories sociales conviennent, en général, différents *types d'existence*, chacun comportant usage ou consommation de tels et tels résultats de travail (articles d'alimentation, d'habitation, d'habillement, etc.); ce sont des conditions qu'on peut appeler *économiques*.

11. On peut concevoir que, ces conditions étant fixées, les productions, les nombres de travailleurs affectés à tels genres de travail ou appartenant à telles catégories sociales, les prix, les salaires puissent varier par suite de causes quelconques. On est ainsi amené à considérer ces diverses quantités comme les inconnues de la question, les conditions techniques, administratives, économiques en étant comme les données [1].

J'aurai alors, en supposant donné un certain état industriel, économique et social, à examiner successivement trois problèmes :

1° Est-il possible de déterminer une répartition des travailleurs entre les diverses catégories professionnelles et sociales et une répartition des simples consommateurs entre les diverses catégories sociales, répartitions telles que la production puisse, pour chaque résultat de travail, être égale à la consommation, sans qu'aucun travailleur ait à travailler en dehors des jours ouvrables : j'appellerai *satisfaisant* tout régime de production et travail vérifiant cette double condition;

2° Est-il possible de déterminer l'ensemble des prix et taux de salaires de manière que, pour tout résultat de travail, le prix d'échange soit au moins égal au prix coûtant et que, pour tout travailleur, le salaire correspondant au maximum de travail fourni soit au moins égal au coût de la vie. J'appellerai *simplement satisfaisant* tout régime de prix et salaires vérifiant cette double condition.

3° Étant donné un régime satisfaisant de production et travail, est-il possible de déterminer l'ensemble des prix et des taux de salaires de manière que la première condition du 2° soit vérifiée, et que, pour tout travailleur, le salaire correspondant au travail qui, étant donnée la production à obtenir, lui est effectivement demandé, soit au moins

(1) Ayant seulement dessein d'exposer ici la mise en équations des problèmes, je laisse de côté toutes les difficultés que peut présenter la détermination des diverses données prises pour point de départ. Voir, à ce sujet, mon article : *Possibilité et Détermination du Juste Prix et du Juste Salaire* (*Mouvement Social*, t. LXXIII, avril 1912, p. 289-316).

égal au coût de la vie. J'appellerai *effectivement satisfaisant* tout régime de prix et salaires vérifiant cette double condition.

12. Je désignerai par $\mathcal{A}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ un *résultat de travail* d'une certaine espèce; par P_i l'entreprise productrice de $\mathcal{A}_i$; par A_i l'unité quantitative de $\mathcal{A}_i$ (si $\mathcal{A}_i$ désigne les *services* rendus par une administration, A_i est l'ensemble de ces services rendus pendant une année). La production de A_i nécessite de $\mathcal{A}_k$ $(k = 1, \ldots, s)$ une consommation que je désignerai par $a_{ik}A_k$, et demande aux travailleurs de catégorie professionnelle et sociale C_h $(h = 1, \ldots, r)$ un nombre de journées normales de travail que je représenterai par t_{ih}. Les nombres positifs ou nuls a et t représentent les conditions industrielles de fabrication et d'organisation des divers établissements.

Un consommateur de catégorie C_h, pour vivre pendant une année d'une façon convenable, doit faire, de $\mathcal{A}_i$, une consommation que je représenterai par $b_{ih}A_i$. Les nombres positifs ou nuls b représentent les exigences des travailleurs.

Enfin N désigne le nombre des jours ouvrables de l'année.

13. Par suite de ces données, entre les productions annuelles $\Delta_i A_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, les excédents annuels $\rho_i A_i$ de la production sur la consommation de $\mathcal{A}_i$, les nombres Π_h de consommateurs de catégorie C_h $(h = 1, \ldots, n)$, les nombres π_{ih} des travailleurs de P_i appartenant à C_h, les nombres ϖ_h de simples consommateurs de catégorie C_h, on a les relations

$$(16)\qquad \begin{aligned} \Pi_h &= \varpi_h + \Sigma_i \pi_{ih} \qquad (i = 1, \ldots, s;\ h = 1, \ldots, n);\\ \Delta_i &= \Sigma_k a_{ki}\Delta_k + \Sigma_h b_{ih}\Pi_h + \rho_i \qquad (i, k = 1, \ldots, 0;\ h = 1, \ldots, r). \end{aligned}$$

Si δ_i désigne ce que devient Δ_i, lorsque, toutes les productions étant supposées égales aux consommations, on fait $\rho_1 = \ldots, \rho_s = 0$, on a

$$(17)\qquad \delta_i = \Sigma_k a_{ki}\delta_k + \Sigma_h b_{ih}\Pi_h \qquad (i, k = 1, \ldots, s;\ h = 1, \ldots, r).$$

J'introduis enfin un symbole ω_{ih}, toujours nul en même temps que t_{ih} et, au cas contraire, défini par

$$(18)\qquad N\pi_{ih} = \delta_i t_{ih} + \omega_{ih}.$$

Entre les prix α_i de A_i, les bénéfices β_i réalisés par P_i sur A_i, les salaires journaliers moyens σ_{ih} des travailleurs de P_i appartenant à C_h, on a les relations

$$(19) \qquad \alpha_i = \Sigma_k a_{ik}\alpha_k + \Sigma_h t_{ih}\sigma_{ih} + \beta_i \qquad (i = 1, \ldots, s;\ h = 1, \ldots, r).$$

Si $N\gamma_{ih}$ désigne le total annuel moyen des économies que peut réaliser, sur son salaire effectif, un des π_{ih} travailleurs de P_i appartenant à C_h, la production annuelle étant $\delta_i A_i$, et si NS_h désigne le coût annuel de la vie d'un consommateur de catégorie C_h, on a

$$\left.\begin{array}{ll}(20) & \delta_i t_{ih}\sigma_{ih} = N\pi_{ih}(S_h + \gamma_{ih}) \\ (21) & NS_h = \Sigma_k b_{kh}\alpha_k\end{array}\right\} \qquad (i, k = 1, \ldots, s;\ h = 1, \ldots, r).$$

14. Ceci posé, un régime satisfaisant de production et travail est possible, on le voit, toujours et seulement s'il existe des valeurs des δ, π, ϖ, Π, ω vérifiant (16), (17), (18) avec

$$(22) \qquad \delta_i > 0, \quad \Pi_h > 0, \quad \pi_{ih} \geqq 0, \quad \varpi_h \geqq 0, \quad \omega_{ih} \geqq 0, \quad \left\{\begin{array}{l}(i = 1, \ldots, s; \\ h = 1, \ldots, r).\end{array}\right.$$

J'appellerai (I) le système [(16)-(17)-(18)-(22)].

Un régime simplement satisfaisant de prix et salaires est possible toujours et seulement s'il existe des valeurs des α, β, S, σ, γ vérifiant (19) et (21) avec

$$(23) \qquad \sigma_{ih} = S_h + \gamma_{ih},$$

et

$$(24) \quad \alpha_i > 0, \quad S_h > 0, \quad \sigma_{ih} > 0, \quad \beta_i \geqq 0, \quad \gamma_{ih} \geqq 0 \quad (i = 1, \ldots, s;\ h = 1, \ldots, r).$$

J'appellerai (II) le système [(19)-(21)-(23)-(24)].

Un régime satisfaisant de production et travail étant supposé existant, un régime effectivement satisfaisant de prix et salaires est possible toujours et seulement s'il existe des valeurs des α, S, σ, γ vérifiant (19), (20), (21) et (24), les δ et π figurant dans (20) étant solutions de (I). J'appellerai (III) le système [(19)-(20)-(21)-(24)].

15. Si l'on tient compte de (18), (16) devient

$$(25) \qquad \Pi_h = \varpi_h + \frac{1}{N}\Sigma_k(\delta_k t_{kh} + \omega_{kh}).$$

Si donc un régime satisfaisant de production et travail est possible, les relations

$$
(\mathrm{IV})\quad\begin{cases}
(17) & \delta_i - \Sigma_k a_{ki}\delta_k = \Sigma_h b_{ih}\Pi_h,\\
(25) & \Pi_h = \varpi_h + \dfrac{1}{N}\Sigma_k(\delta_k t_{kh} + \omega_{kh}),\\
(26) & \delta_i > 0, \quad \Pi_h > 0, \quad \varpi_h \geqq 0, \quad \omega_{kh} \geqq 0, \quad \begin{cases}(i, k = 1, \ldots, s;\\ \;h = 1, \ldots, r)\end{cases}
\end{cases}
$$

sont compatibles. Inversement, si le système (IV) a des solutions, comme les formules (18) fourniront, pour les π, des valeurs $\geqq 0$, le système (I) a des solutions. Ainsi *un régime satisfaisant de production et travail est possible toujours et seulement si le système* (IV) *admet des solutions.*

De même, si un régime simplement satisfaisant de prix et salaires est possible, les relations

$$
(\mathrm{V})\quad\begin{cases}
(27) & \alpha_i - \Sigma_k a_{ik}\alpha_k = \Sigma_h t_{ih}(S_h + \gamma_{ih}) + \beta_i,\\
(21) & NS_h = \Sigma_k b_{kh}\alpha_k,\\
(28) & \alpha_i > 0, \quad S_h > 0, \quad \beta_i \geqq 0, \quad \gamma_{ih} \geqq 0, \quad \begin{cases}(i, k = 1, \ldots, s;\\ \;h = 1, \ldots, r)\end{cases}
\end{cases}
$$

sont compatibles. Inversement si le système (V) a des solutions, comme les formules (23) fourniront, pour les σ, des valeurs > 0, le système (II) a des solutions. Ainsi, *un régime simplement satisfaisant de prix et salaires est possible toujours et seulement si le système* (V) *admet des solutions.*

Les systèmes (II) et (V) sont précisément de la forme étudiée aux n^os^ 7 et 8. Si, comme il y est indiqué, on élimine les Π entre (17) et (25), et les S entre (21) et (27), on trouve les deux systèmes

$$
(29)\qquad \delta_i - \Sigma_k\delta_k\left(a_{ki} + \frac{1}{N}\Sigma_h b_{ih} t_{kh}\right) = \Sigma_h b_{ih}\left(\varpi_h + \frac{1}{N}\Sigma_k\omega_{kh}\right),
$$

$$
(30)\qquad \alpha_i - \Sigma_k\alpha_k\left(a_{ik} + \frac{1}{N}\Sigma_h b_{kh} t_{ih}\right) = \Sigma_h t_{ih}\gamma_{ih} + \beta_i,
$$

dans lesquels les matrices des premiers membres sont transposées l'une de l'autre.

L'application des résultats des nos 7 et 8 permet alors d'énoncer immédiatement les théorèmes suivants :

Un régime satisfaisant de production et travail — ou un régime simplement satisfaisant de prix et salaires — n'est possible que si $\sigma(\mathrm{N})$, *racine caractéristique de module maximum de la matrice*

$$\left| a_{ik} + \frac{1}{\mathrm{N}} \Sigma_h b_{kh} t_{ih} \right|,$$

est $\leqq 1$.

Si $\sigma(\mathrm{N}) < 1$, *il existe toujours un régime satisfaisant de production et travail, dans lequel, la production demeurant égale à la consommation, on peut se donner arbitrairement les nombres de simples consommateurs de chaque catégorie sociale, et le chômage collectif de chaque catégorie de travailleurs.* En même temps, *il existe toujours un système simplement satisfaisant de prix et salaires, dans lequel on peut se donner arbitrairement les bénéfices des entreprises et les économies des travailleurs.*

Supposons $\sigma(\mathrm{N}) = 1$. *Si la matrice considérée n'est pas partiellement réduite, il existe encore un régime satisfaisant de production et travail; mais, en général, il ne peut y avoir de simples consommateurs dans aucune catégorie sociale, ni de chômage dans aucune catégorie de travailleurs.* En même temps *il existe aussi un régime simplement satisfaisant de prix et salaires; mais, en général, il ne peut y avoir ni bénéfices pour les entreprises, ni économies pour les travailleurs. Si la matrice considérée est partiellement réduite, on peut seulement affirmer, en général, que* (IV) *a des solutions vérifiant, au lieu de* (26),

$$(31) \qquad \delta_i \geqq 0, \qquad \Sigma_i \delta_i > 0, \qquad \Pi_h \geqq 0, \qquad \Sigma_h \Pi_h > 0, \qquad \varpi_h = \omega_{kh} = 0,$$

et que (V) *a des solutions vérifiant, au lieu de* (28),

$$(32) \qquad \alpha_i \geqq 0, \qquad \Sigma_i \alpha_i > 0, \qquad \mathrm{S}_h \geqq 0, \qquad \Sigma_h \mathrm{S}_h > 0, \qquad \beta_i = \gamma_{ih} = 0.$$

Je dirai que les régimes correspondants sont *semi-satisfaisants* (1).

---

(1) L'étude de ces régimes peut présenter quelque intérêt, soit au point de vue théo-

16. Pour transformer ces résultats comme au n° 8, je poserai [1]

$$u_{ik} = \begin{cases} 0, \text{ si } i \neq k \\ 1, \text{ si } i = k \end{cases}, \quad |S u_{ik} - a_{ik}| = \mathcal{D}(S), \quad \mathcal{D}(1) = \mathcal{D}, \quad \frac{\partial \mathcal{D}(S)}{\partial (S u_{ik} - a_{ik})} = \mathcal{D}_{ik}(S),$$

$$(33) \quad \begin{cases} \Sigma_k b_{kh} \mathcal{D}_{ki}(S) = \mathcal{D}(S)\, d_{ih}(S), & d_{ih}(1) = d_{ih}, \\ \Sigma_i t_{ig} d_{ih}(S) \;= \mathrm{T}_{gh}(S), & \mathrm{T}_{gh}(1) = \mathrm{T}_{gh}, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i, k = 1, \ldots, s \\ g, h = 1, \ldots, r \end{pmatrix}.$$

---

rique, soit à titre de cas limite, c'est-à-dire parce qu'il peut exister des régimes satisfaisants qui diffèrent peu d'un régime semi-satisfaisant.

Supposons donc que la matrice $\left| a_{ik} + \frac{1}{N} \Sigma_h b_{kh} t_{ih} \right|$ est partiellement réduite, c'est-à-dire que l'on a, en changeant au besoin les notations

$$a_{jl} = b_{lh} t_{jh} = 0, \text{ pour } j = 1, \ldots, p;\ l = p+1, \ldots, s;\ h = 1, \ldots, r.$$

Dans l'hypothèse $\sigma(N) = 1$ (ou $N = \nu$), on peut seulement affirmer, en général, que le système (IV) admet des solutions vérifiant, au lieu de (26), les relations

$$\delta_j \geqq 0,\ \Sigma_j \delta_j > 0,\ \delta_l = 0,\ \varpi_h = \omega_{kh} = 0, \qquad \begin{cases} (j = 1, \ldots, p;\ l = p+1, \ldots, s; \\ k = 1, \ldots, s;\ h = 1, \ldots, r); \end{cases}$$

et que le système (V) admet des solutions vérifiant, au lieu de (28), les relations

$$\alpha_j = 0,\ \alpha_l \geqq 0,\ \Sigma_l \alpha_l > 0,\ \beta_i = \gamma_{ih} = 0 \qquad \begin{cases} (j = 1, \ldots, p;\ l = p+1, \ldots, s; \\ i = 1, \ldots, s;\ h = 1, \ldots, r). \end{cases}$$

$\mathcal{A}_j$ désigne donc un résultat de travail dont la production peut n'être pas nulle tandis que son prix est nul, et $\mathcal{A}_l$ un résultat de travail dont la production est nulle.

De l'hypothèse que la matrice est partiellement réduite, il résulte qu'un $\mathcal{A}_l$ n'est jamais utilisé pour obtenir un $\mathcal{A}_i$; qu'un C_h comportant la consommation d'un $\mathcal{A}_l$ ne convient à aucun travailleur d'un P_j; qu'un C_h convenant à un travailleur d'un P_j ne comporte la consommation d'aucun $\mathcal{A}_l$. Ainsi ni les entreprises P_j ni leurs travailleurs n'utilisent aucun $\mathcal{A}_l$.

La réalisation pratique d'un régime semi-satisfaisant de production et travail demande simplement la suppression de certains types d'existence et des résultats de travail dont ces types d'existence comportent consommation. En vertu de l'hypothèse faite sur la réduction partielle de la matrice, il est clair que cette suppression ne trouble en rien le reste de la production.

Dans un régime semi-satisfaisant de prix et salaires il existe un ensemble de types d'existence pour chacun desquels le coût de la vie est nul. Les travailleurs de ces catégories ne reçoivent aucun salaire. Tous les résultats de travail dont ces types d'existence comportent consommation directe ou indirecte ont un prix d'échange nul; leur production n'exige d'ailleurs la consommation que de résultats de travail dont le prix est nul, et ne demande le concours que des travailleurs pour lesquels le coût de la vie est nul et qui ne touchent aucun salaire.

(1) Il est intéressant de se rendre compte de la signification concrète des symboles d_{ih} et T_{gh} et de la racine ν.

Les quantités $d_{1g}, \ldots, d_{sg}$ étant l'un des nombres $1, \ldots, r$, sont, d'après leur définition, Comme au n° 8, je désignerai par $\nu(S)$ la racine caractéristique de module maximum de la matrice $|T_{gh}(S)|$, avec $\nu(1)=\nu$, et par R celle de la matrice $|a_{ik}|$; regardant S et N comme les coordonnées d'un point, je considérerai la branche de courbe $S=\sigma(N)$, asymptote aux droites $S=R$ et $N=0$; elle représente aussi $N=\nu(S)$, et partage le plan en deux régions, celle de l'origine et des axes, où l'on a $S-\sigma(N)<0$, et la région opposée, où l'on a $S-R\ S-\sigma(N)$ et $N-\nu(S)>0$. On peut alors résumer ainsi les résultats du n° 15 : *Pour qu'un régime satisfaisant de production et travail, — ou un régime simplement satisfaisant de prix et salaires — soit possible, il faut, et, en général, il suffit que le point* $(1, N)$ *ne soit pas, par rapport à la branche de courbe considérée, dans la région des axes. Si le point* $(1, N)$ *est sur*

---

solution de

$$d_{ig}-\Sigma_k\, a_{ki}\, d_{kg}=b_{ig}.$$

D'après (17), d_{ig} est donc ce que devient δ_i quand on fait $\Pi_g=1$, $\Pi_h=0$, pour $h=1,\ldots,r$; $h\neq g$.

Ainsi $d_{ig}A_i$ $(i=1,\ldots,s)$ *est la production de* $\mathcal{A}_i$ *nécessaire à l'entretien d'un consommateur du type* C_g; $t_{ih}\,d_{ih}$ *représente le travail que cet entretien demande à la catégorie des travailleurs de* P_i *appartenant au type* C_h; *et* $\Sigma_i t_{ih}\, d_{ig}=T_{hg}$ *représente le travail que cet entretien demande à toute la catégorie des travailleurs appartenant au type* C_h.

Or, on sait (Frobenius, *loc. cit.*) que la racine caractéristique ν de module maximum est toujours comprise entre la plus petite et la plus grande des sommes

$$T_g=\Sigma_h T_{hg}\quad (g,\ h=1,\ldots,r).$$

T_g représente la totalité du travail nécessaire à l'entretien annuel d'un consommateur du type C_g. *Pour que, la condition* $R<1$ *étant supposée remplie, il existe un régime satisfaisant de production et travail, ou de prix et salaires, il faut donc que* N *soit supérieur ou plus petit — et il suffit que* N *soit au moins égal au plus grand — des nombres* $T_1,\ldots T_r$.

Quant à *la racine caractéristique* ν *de module maximum*, elle *représente le nombre moyen de journées normales de travail que doit fournir un travailleur pour que la production annuelle obtenue représente exactement la seule consommation de tous les travailleurs.* Soit en effet θ ce nombre; on aura, par définition,

$$\theta\pi_{ih}=\delta_i\, t_{ih},\qquad \varpi_h=0,\qquad i=1,\ldots,s;\ h=1,\ldots,r.$$

Tenant compte alors des formules (16) et (33), on obtient le système

$$\theta\Pi_g-\Sigma_h T_{hg}\Pi_h=0\qquad (h, g=1,\ldots,r).$$

Les Π étant tous >0, θ est (n° 5) la racine caractéristique ν de module maximum de $|T_{hg}|$.

la courbe, en général les régimes possibles seront strictement satisfaisants ; exceptionnellement même ils pourront n'être que semi-satisfaisants.

Si l'on sait que R *est* < 1, il suffit, pour connaître la position du point $(1, N)$, par rapport à la branche de courbe, c'est-à-dire le signe de $1 - \sigma(N)$, de comparer N au nombre $\nu(1) = \nu$. *J'appellerai ce nombre* ν, *fonction des coefficients* a, b, t, *le nombre caractéristique du système économico-social* que ces coefficients représentent. On peut alors, *dans l'hypothèse* $R < 1$, énoncer le théorème suivant : *Pour qu'un régime satisfaisant de production et travail — ou un régime simplement satisfaisant de prix et salaires — soit compatible avec un état économico-social donné, il faut et, en général, il suffit que le nombre caractéristique de cet état économico-social soit au plus égal au nombre des jours ouvrables de l'année.*

17. *Supposons donc l'état économico-social donné de manière que* $\sigma(N)$ soit $\leqq 1$, autrement dit que, *la condition* $R < 1$ *étant vérifiée, le nombre caractéristique soit au plus égal au nombre* 313 *des jours ouvrables de l'année ;* donnons aux $\delta, \pi, \varpi, \Pi, \omega$ des valeurs vérifiant (I), supprimons, s'il y a lieu, les $\mathcal{A}_i$ pour lesquels δ_i serait nul, en changeant au besoin les indices restants pour que leur suite soit toujours la suite naturelle des nombres ; posons

$$\omega_{ih} = \delta_i T_{ih} \qquad (i = 1, \ldots, s;\ h = 1, \ldots, r); \tag{34}$$

les formules (18) deviennent

$$N\pi_{ih} = \delta_i(t_{ih} + \tau_{ih}); \tag{35}$$

les formules (29) deviennent

$$\delta_i - \Sigma_k \delta_k \left[a_{ki} + \frac{1}{N} \Sigma_h b_{ih}(t_{kh} + \tau_{kh}) \right] = \Sigma_h b_{ih} \varpi_h, \tag{36}$$

et montrent que *la racine caractéristique de module maximum de la matrice*

$$\left| a_{ki} + \frac{1}{N} \Sigma_h b_{ih}(t_{kh} + \tau_{kh}) \right|$$

est $\leqq 1$.

Cherchons alors s'il peut exister un régime effectivement satisfaisant de prix et salaires, c'est-à-dire des valeurs des α, β, γ, σ, S vérifiant le système

$$
(\mathrm{VI})\quad
\begin{cases}
(19) & \alpha_i - \Sigma_k a_{ik}\alpha_k = \Sigma_h t_{ih}\sigma_{ih} + \beta_i \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, \ldots, s \\ h \;\; = 1, \ldots, r \end{pmatrix}; \\
(20) & \partial_i t_{ih}\sigma_{ih} = \mathrm{N}\pi_{ih}(\mathrm{S}_h + \gamma_{ih}) \\
(21) & \mathrm{NS}_h = \Sigma_k b_{kh}\alpha_k, \\
(24) & \alpha_k > 0, \quad \beta_i \geqq 0, \quad \gamma_{ih} \geqq 0, \quad \sigma_{ih} > 0, \quad \mathrm{S}_h > 0,
\end{cases}
$$

ou le système équivalent obtenu en tenant compte de (35), remplaçant (20) par

$$
(37)\qquad t_{ih}\sigma_{ih} = (t_{ih} + \tau_{ih})\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\Sigma_k b_{kh}\alpha_k + \gamma_{ih}\right),
$$

et (19) par

$$
(38)\qquad \alpha_i - \Sigma_k \alpha_k \left[a_{ik} + \frac{1}{\mathrm{N}}\Sigma_h b_{kh}(t_{ih} + \tau_{ih})\right] = \Sigma_h \gamma_{ih}(t_{ih} + \tau_{ih}) + \beta_i.
$$

La matrice des premiers membres de (38) est transposée de celle des premiers membres de (36). Il existe donc des valeurs > 0 des α, β et γ vérifiant (38), puis des valeurs > 0 des S vérifiant (21), puis des valeurs > 0 des σ vérifiant (20); et ces diverses valeurs sont solutions de (VI). Donc, *dans l'hypothèse énoncée, un régime effectivement satisfaisant des prix et salaires est toujours possible, à moins que la matrice* $\left|a_{ki} + \frac{1}{\mathrm{N}}\Sigma_h b_{ih}(t_{kh} + \tau_{kh})\right|$ *ne soit partiellement réduite. En ce cas, si son module caractéristique maximum est* < 1, *autrement dit si le nombre caractéristique est* < 313, *un régime effectivement satisfaisant des prix et salaires est encore toujours possible; mais si le module caractéristique maximum est* 1, *autrement dit si le nombre caractéristique est* 313, *il n'y a de possible, en général, qu'un régime effectivement semi-satisfaisant, c'est-à-dire où les* α, σ *et* S *sont seulement* $\geqq 0$ *et non tous nuls. D'ailleurs, si le module caractéristique maximum est* 1, *que la matrice considérée soit ou non partiellement réduite, les* β *et* γ, *c'est-à-dire les bénéfices des entreprises et les économies des travailleurs ne peuvent avoir, en général, que des valeurs nulles.*

18. La comparaison des formules (17) et (19) du n° 13 donne lieu

à une remarque intéressante. On peut en effet les écrire

$$
\begin{array}{ll}
(17) & f_i = \Sigma_k \delta_k (u_{ki} - a_{ki}) = \Sigma_h b_{ih} \Pi_h \\
(19) & \varphi_i = \Sigma_k \alpha_k (u_{ik} - a_{ik}) = \Sigma_h t_{ih} \sigma_{ih} + \beta_i
\end{array}
\quad
\left\{
\begin{array}{l}
(i, k = 1, \ldots, s; \\
u_{ik} = 0, \text{ pour } i \neq k; \\
u_{ii} = 1).
\end{array}
\right.
$$

Or les f et φ sont des formes linéaires dont les matrices sont transposées l'une de l'autre, on a donc

$$\Sigma_i \alpha_i f_i = \Sigma_i \delta_i \varphi_i ;$$

d'où, en tenant compte de (21), *résulte la formule*

$$\text{(39)} \qquad N \Sigma_h S_h \Pi_h = \Sigma_i \delta_i (\beta_i + \Sigma_h t_{ih} \sigma_{ih}).$$

Or $NS_h \Pi_h$ est le coût de vie total de la catégorie C_h, $\delta_i \beta_i$ est le bénéfice annuel de P_i, $\delta_i t_{ih} \sigma_{ih}$ est le salaire total annuel effectif des travailleurs de P_i appartenant à C_h. *La formule* (39) *exprime donc que, l'état économico-social étant supposé invariant* (ce qui équivaut à supposer les coefficients a, b, t constants), *la somme annuelle des salaires des travailleurs et des bénéfices des entreprises* (*ou revenus des capitalistes*) *est égale au coût de vie annuel de tous les consommateurs, travailleurs ou non.*

19. Examinons ce que deviennent ces résultats si l'on tient compte de l'accroissement continu de la population, lequel entraîne un accroissement continu de la consommation et par suite de la production. Nous ferons l'hypothèse que *l'accroissement de la population ne change pas la proportion suivant laquelle les travailleurs ainsi que les simples consommateurs se répartissent dans les diverses catégories.*

Soit alors t le nombre qui mesure, en jours, le temps écoulé depuis le commencement de l'année; soit $F(t)$ une fonction monodrome, finie, continue, positive et croissante pour $0 \leqq t \leqq \tau = 365$, et égale à 1 pour $t = 0$; nous désignerons par $\pi_{ih} F(t)$ la valeur, à l'époque t, du nombre de travailleurs de P_i — et, par $\varpi_h F(t)$, celle du nombre des consommateurs non travailleurs — appartenant à $C_h (h = 1, \ldots, r)$.

Pendant l'intervalle de temps $(t, t + dt)$, le nombre total des consommateurs de catégorie C_h s'accroît de $\Pi_h\, dF(t)$. Jusqu'à la fin de l'année, chacun de ces nouveaux consommateurs consomme pendant un nombre de jours égal à $\tau - t - \varepsilon$, $0 \leqq \varepsilon \leqq dt$. Du fait de cet accroissement dans toutes les catégories, il résulte, pour la consommation de $\mathcal{A}_i$, un accroissement qui, à une certaine quantité près de l'ordre de dt^2, est représenté par $\Sigma_h b_{ih} \Pi_h \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) dF(t)$. Et la quantité de $\mathcal{A}_i$ consommée pendant l'année par tous les consommateurs, ceux qui existaient au début et ceux qui se sont ajoutés au cours de l'année, sera

$$\Sigma_h b_{ih} \Pi_h \left[1 + \int_0^\tau \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) dF(t)\right].$$

Soit alors $\Delta_i A_i$ la production de $\mathcal{A}_i$, égale à la consommation totale de l'année; la consommation de $\mathcal{A}_i$ faite dans les établissements industriels sera $\Sigma_k a_{ik} \Delta_k$, et l'on aura

$$\Delta_i = \Sigma_k a_{ik} \Delta_k + \Sigma_h b_{ih} \Pi_h \left[1 + \int_0^\tau \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) dF(t)\right].$$

La $\int$ qui figure dans le $[\quad]$ est différence de deux $\int$ dont la première est $F(\tau) - 1$, et la seconde, comme on le voit en intégrant par parties, est $F(\tau) - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau F(t)\, dt$. Le $[\quad]$ est donc $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau F(t)\, dt$. Des hypothèses faites sur $F(t)$, il résulte que cette quantité est > 0. En prenant alors $\Delta_i = \frac{\delta_i}{\tau}\int_0^\tau F(t)\, dt$, et supprimant le facteur commun, on retrouve les formules (17).

Évaluons maintenant le travail maximum sur lequel on peut compter. Chacun des $\pi_{ih}\, dF(t)$ travailleurs de catégorie C_h qui s'ajoutent, dans P_i, pendant l'intervalle $(t, t + dt)$, fournira, pendant le reste de l'année, à une certaine quantité près de l'ordre de dt, au plus $N\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$ journées normales de travail. La totalité des travailleurs de P_i appartenant à C_h, ceux qui existaient au début et ceux qui s'ajoutent en cours d'année, peut donc fournir un nombre annuel de journées normales de travail au plus égal à

$$N\pi_{ih}\left[1+\int_0^\tau\left(1-\frac{t}{\tau}\right)dF(t)\right]=N\pi_{ih}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau F(t)\,dt.$$

Le nombre de journées à fournir étant $\Delta_i t_{ih}=\delta_i t_{ih}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau_0}F(t)\,dt$, si l'on pose

$$N\pi_{ih}\frac{1}{\tau}\int_0 F(t)\,dt=\Delta_i(t_{ih}+\omega_{ih}),$$

formule qui n'est autre que (18), la condition exprimant que le régime de production et travail est satisfaisant se traduit par $\omega_{ih}\geqq 0$.

D'ailleurs, pour obtenir la production annuelle $\Delta_i A_i$, il suffit que les $\pi_{ih}\,dF(t)$ travailleurs de catégorie C_h qui s'ajoutent, dans P_i, pendant l'intervalle $(t, t+dt)$, fournissent collectivement, pendant le reste de l'année, une production $A_i\delta_i\left(1-\frac{t}{\tau}\right)dF(t)$, et, par suite, un nombre de journées de travail égal à $\delta_i t_{ih}\left(1-\frac{t}{\tau}\right)dF(t)$. Alors, en effet, la production totale obtenue sera bien

$$\delta_i\left[1+\int_0^\tau\left(1-\frac{t}{\tau}\right)dF(t)\right]=\frac{\delta_i}{\tau}\int_0^\tau F(t)\,dt=\Delta_i.$$

Leur salaire effectif total sera donc $\delta_i t_{ih}\sigma_{ih}\left(1-\frac{t}{\tau}\right)dF(t)$; leur coût individuel de vie sera $\left(1-\frac{t}{\tau}\right)NS_h$.

Si donc on pose

$$\delta_i t_{ih}\sigma_{ih}\left(1-\frac{t}{\tau}\right)dF(t)=N\pi_{ih}\left(1-\frac{t}{\tau}\right)(S_h+\gamma_{ih})\,dF(t),$$

formule qui n'est autre que (20), la condition exprimant que le régime de prix et salaires est effectivement satisfaisant se traduit par $\gamma_{ih}\geqq 0$.

Ainsi, *pourvu que la répartition de la population ne change pas, les relations obtenues en tenant compte de son accroissement continu ne dif-*

fèrent pas de celles obtenues en la supposant constante. Les résultats des nos 15 *et* 16 *subsistent donc tous.*

On voit de même, en multipliant par $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau F(t)\,dt$ les deux membres de (39), que, *même en tenant compte de l'accroissement de la population, le résultat du* n° 18 *subsiste.*