Émile Picard

Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 30 (1913), p. 483-487
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1913_3_30__483_0>

SUR LA

REPRÉSENTATION CONFORME DES AIRES

MULTIPLEMENT CONNEXES;

PAR M. ÉMILE PICARD.

On sait que que M. Schottky a publié, il y a déjà longtemps, un Mémoire fondamental sur la représentation conforme des aires multiplement connexes (*Journal de Crelle*, t. 83). J'ai présenté cette question d'une autre façon dans mon *Traité d'Analyse* ([1]) (t. II, seconde édition, p. 545), en la regardant comme un cas limite de l'étude des fonctions sur une surface de Riemann fermée dans l'espace avec p trous. Ayant traité cette année le problème dans mon cours, j'ai repris le point de vue de M. Schottky, mais en le rapprochant de la méthode que j'avais antérieurement suivie ([2]). Je ne crois pas inutile de résumer ici la leçon que j'ai faite au printemps dernier sur la représentation conforme des aires multiplement connexes.

1. Nous envisageons une aire A multiplement connexe, limitée par une courbe C et n courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Pour éviter toute difficulté secondaire, nous supposerons que ces courbes fermées sont régulièrement analytiques. Prenons une fonction rationnelle de $z = x + iy$, soit

$$R(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y),$$

([1]) La même méthode avait déjà été suivie dans la première édition de mon Traité, en 1893.

([2]) On sait que dans ces derniers temps M. Kœbe et M. Osgood se sont occupés, après Poincaré, de la représentation conforme des surfaces de Riemann ayant un nombre infini de feuillets.

n'ayant pas de pôles sur les courbes C. On peut former une fonction harmonique uniforme prenant sur les C les mêmes valeurs que Q et continue dans l'aire A; soit $V(x, y)$ cette fonction. A l'aide de V on forme une fonction U telle que

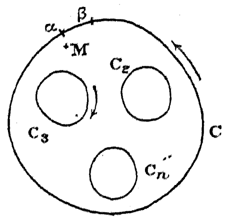
$$U + iV$$

soit analytique et continue dans l'aire. Mais, en général, U n'est pas uniforme et a n périodes (relatives à $C_1, C_2, \ldots, C_n$). La différence

$$S(z) = U + iV - R(z)$$

est une fonction holomorphe en chaque point de l'aire, en dehors des pôles de $R(z)$ qui sont des pôles pour elle. Elle a n périodes, corres-

Fig. 1.



pondant aux circulations autour des C_i, et elle prend des valeurs réelles sur $C, C_1, \ldots, C_n$.

En partant de diverses fonctions rationnelles $R(z)$, on a diverses fonctions S. En formant des combinaisons linéaires d'un nombre suffisant de fonctions S, on peut obtenir une fonction du type S *sans période*.

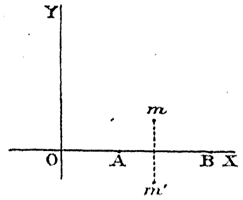
Ainsi donc on peut former des fonctions, que nous appellerons maintenant $F(z)$, *uniformes dans* A, *ayant des pôles dans cette aire, et prenant des valeurs réelles sur les bords.*

2. Les résultats précédents dus à M. Schottky étant rappelés, nous allons maintenant envisager l'aire A comme un disque percé de n trous. De plus, nous considérons le disque comme ayant deux faces, une face supérieure (sur laquelle nous sommes jnsqu'ici resté) et une face inférieure. On va de celle-là à celle-ci, en traversant une des courbes C.

Nous allons faire le prolongement analytique d'une fonction $F(z)$ définie sur la face supérieure, en définissant les valeurs de $F(z)$ sur la face inférieure, par la condition qu'en deux points géométriquement confondus des deux faces, les valeurs de la fonction soient imaginaires conjuguées. Ceci est bien compatible avec le fait que $F(z)$ a des valeurs *réelles* sur les C.

Supposons qu'on fasse une transformation conforme $Z = \varphi(z)$, faisant correspondre à l'arc $\alpha\beta$ de C un segment AB de l'axe réel OX.

Fig. 2.



Au point M de la face supérieure du disque, voisin de $\alpha\beta$, correspondra un point m; on peut regarder qu'au point M' de la face inférieure, confondu géométriquement avec M, correspond le point m' symétrique de m par rapport à OX. La fonction $F(z)$, devenue fonction de Z, a en m et m' des valeurs imaginaires conjuguées, et l'on a ici un véritable prolongement analytique, puisque cette fonction de Z prend des valeurs réelles sur OX. On peut donc étudier très aisément la fonction $F(z)$ sur l'une et l'autre face du disque, dans le voisinage d'un point situé sur un bord.

Ceci posé, considérons deux fonctions quelconques $F_1(z)$ et $F_2(z)$ du type F. On voit de suite *qu'il y a entre ces deux fonctions une relation algébrique*. En effet, l'équation

$$F_1(z) = a_1,$$

a_1 étant une constante quelconque, a un nombre limité de racines sur l'ensemble du disque, et *ce nombre est indépendant de* a_1; ceci résulte de ce qu'aucune racine ne peut se perdre et aucune racine nouvelle ne peut s'introduire sur la surface fermée, formée par les deux faces du disque. Donc à une valeur donnée de F_1 ne correspond qu'un nombre limité de valeurs de F_2; d'ailleurs, F_2 considérée comme fonction de F_1 n'a que des points critiques algébriques, puisqu'on peut toujours utiliser des développements en séries entières, même quand on est dans le voisinage d'un bord, comme il a été dit ci-dessus.

Nous avons donc la relation algébrique

$$f(F_1, F_2) = 0,$$

et il est clair que, si les F sont pris arbitrairement, à un point *arbitraire* de cette courbe algébrique correspond un seul point du disque entier (disque à deux faces). De plus, l'équation de cette courbe est à coefficients réels, car à des valeurs réelles de F_1 correspondent des valeurs de F_2 *réelles ou imaginaires conjuguées*.

La question de la représentation conforme se rattache immédiatement à la considération de la famille (au sens de Riemann) de courbes algébriques

$$f(F_1, F_2) = 0,$$

relative à une aire multiplement connexe A. Deux aires de cette nature peuvent être représentées d'une manière conforme, l'une sur l'autre, si deux courbes algébriques f correspondant respectivement aux deux aires peuvent être transformées l'une dans l'autre par une transformation birationnelle réelle.

2. La recherche de la fonction V, au début du paragraphe précédent, a été faite au moyen du principe de Dirichlet. Au lieu de chercher d'abord V, on pourrait commencer par chercher U au moyen de l'équation

$$\frac{dU}{dn} = \frac{dP}{dn} \qquad \text{(sur les bords)}; \tag{1}$$

cette équation est une conséquence immédiate des équations classiques

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dV}{dn}, \qquad \frac{dV}{ds} = -\frac{dU}{dn},$$

et des équations analogues pour P et Q. On a d'ailleurs ici, R étant rationnelle en z,

$$\int \frac{dP}{dn} ds = 0,$$

le long de chacune des courbes $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$.

La théorie des équations intégrales permet de trouver (à une constante additive près) une fonction harmonique U, uniforme et continue dans l'aire, et satisfaisant sur les bords à l'équation (1); U étant déterminé, on en déduit V avec une constante additive, et l'on voit de suite qu'on a

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dQ}{ds} \qquad (\text{sur } C \text{ et les } C_i),$$

d'après les équations

$$\frac{dV}{ds} = -\frac{dU}{dn}, \qquad \frac{dQ}{ds} = -\frac{dP}{dn}.$$

V ne diffère donc de Q que par des constantes, sur C et les C_i. Nous trouvons donc pour V une fonction harmonique, uniforme et continue dans A. Pour avoir la fonction V dont nous avons besoin, il faut que

$$V = Q \qquad (\text{sur } C \text{ et les } C_i). \tag{2}$$

Comme il y a dans V une constante, on peut la choisir de manière que (2) soit vérifiée sur C, mais il y a à remplir n conditions pour qu'il en soit de même sur les C_i. Ces conditions équivalent aux n périodes nulles que nous avons eu plus haut à envisager.