ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES-J. RÉMOUNDOS

Sur les fonctions entières et algébroïdes ; généralisation du théorème de M. Picard dans la direction de M. Landau

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 30 (1913), p. 377-393

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1913_3_30__377_0>

SUR LES

FONCTIONS ENTIÈRES ET ALGÉBROÏDES;

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE M. PICARD DANS LA DIRECTION DE M. LANDAU;

PAR M. GEORGES-J. RÉMOUNDOS.

Introduction.

Ce travail est divisé en trois Parties :

Dans la première Partie j'établis un théorème de module minimum spécial pour les fonctions entières qui admettent le cas d'exception unique de M. Picard (au sens primitif), la valeur exceptionnelle étant différente de zéro. Ce théorème est plus avantageux, parce qu'il s'agit d'une limite inférieure beaucoup plus grande que celle du théorème général du module minimum. Je démontre plus loin qu'il en est de même des fonctions algébroïdes multiformes, finies à distance finie, qui admettent le cas doublement exceptionnel (aussi unique).

Dans la deuxième Partie j'établis, pour toute algébroïde finie à distance finie, que le logarithme du maximum de la partie réelle, le logarithme de la valeur absolue du minimum de la partie réelle et le logarithme du module maximum sont du même degré de croissance. C'est une généralisation du résultat bien connu obtenu par MM. Borel (1) et

(1) *Leçons sur les fonctions entières*, p. 63-69. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Blumenthal (¹) pour les algébroïdes uniformes (fonctions entières). *Voir* aussi E. LANDAU, *Vierteljahrsschrift Naturf. Ges. Zurich*, t. LI, 1906, p. 277 (l'auteur emploie une méthode due à M. Carathéodory) et SCHOTTKY, *Sitzber. Ak. Berlin*, t. XLV, p. 825-826, et t. XLII, 1904, p. 1244-1246.

Dans la troisième Partie nous donnons une généralisation du célèbre théorème de M. Picard appartenant au nouvel ordre d'idées introduit dans la Science par M. Landau et concernant les fonctions qui ne sont pas régulières en $z = 0$. Il s'agit surtout du cas où ce point est un point critique de la fonction. Dans mon procédé je fais usage du théorème bien connu de M. Landau.

Un résumé de la première Partie de ce travail a été publié dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CLII, p. 1223, séance du 8 mai 1911.

I. — Sur le module minimum des fonctions entières.

1. La forme d'extrême précision donnée par M. Blumenthal (²) au théorème du module minimum d'une fonction entière $f(z)$ est la suivante :

Si nous désignons par $M(r)$ *un ordre de* $f(z)$ *et par* $K(r)$ *une fonction-type plus grande ou égale à* $\mu(r)^{1+\delta}$, *l'inégalité*

$$|f(z)| > e^{-r^{K(r)^{1+\delta}}}$$

est satisfaite dans tout le plan, à l'exception de couronnes circulaires, dont la largeur totale à l'extérieur du cercle r est inférieure à $e^{-r^{K(r)}}$.

Nous allons établir, pour les fonctions entières admettant le cas d'exception unique de M. Picard un complément intéressant; à cet effet, nous avons besoin du lemme suivant :

(¹) *Principes sur la théorie des fonctions entières d'ordre infini.* Collection de monographies sous la direction de M. Émile Borel. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

(²) *Principes sur la théorie des fonctions entières d'ordre infini*, p. 62-66 et 97. Collection de monographies sous la direction de M. Borel. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

Si nous désignons par (E) *un ensemble de points du plan* z, *dans lequel la fonction* $\mathrm{H}(z)$ *ne tend que vers zéro avec* $\frac{1}{r}$ $(r = |z|)$, *les modules des fonctions entières* $\mathrm{H}(z)$ *et* $f(z) = e^{\mathrm{H}(z)} - 1$ *sont des infiniment petits équivalents pour les points de l'ensemble du rayon* r *suffisamment grand.*

La démonstration de ce lemme est presque immédiate, parce que nous avons

$$\frac{f(z)}{\mathrm{H}(z)} = 1 + \frac{\mathrm{H}(z)}{1.2} + \frac{[\mathrm{H}(z)]^2}{1.2.3} + \ldots$$

et, par conséquent, le rapport $|f(z)| : |\mathrm{H}(z)|$ tend vers l'unité, lorsque le module r du point z de l'ensemble (E) tend à l'infini.

2. Cela acquis, désignons par $\mathrm{A}(r)$ le maximum de la partie réelle de la fonction $\mathrm{H}(z)$ et par $\mu(r)$ une fonction-type adjointe à $\frac{\log \mathrm{A}(r)}{\log r}$ de sorte que

$$\mathrm{A}(r) < r^{\mu(r)}, \qquad \mathrm{M}(r) < r^{\mu(r)^{1+\delta}}$$

où $\mathrm{M}(r)$ représente le module maximum de la fonction $\mathrm{H}(z)$.

Alors, la fonction $f(z)$ sera d'ordre $\mu(r)$ et l'ordre brut de $\mathrm{H}(z)$ sera plus petit que $(1+0)\frac{\log \mu(r)}{\log r}$; l'ordre de $\mathrm{H}(z)$ sera donc inférieur à $m(r) \geqq [\log \mu(r)]^{1+\alpha}$, α étant un nombre positif quelconque fixe aussi petit que l'on voudra. Par conséquent, d'après le théorème de M. Blumenthal sur le module minimum, nous aurons l'inégalité [1]

$$|\mathrm{H}(z)| > e^{-r^{m(r)^{1+\delta}}},$$

le nombre positif δ étant arbitrairement petit, à l'exception de couronnes circulaires dont la largeur totale en dehors du cercle r est inférieure à $e^{-r^{m(r)}}$, ou bien à l'exception de cercles ayant les zéros comme centres et dont le rayon est inférieur à $e^{-r^{m(r)}}$, r étant le module du centre de chaque cercle.

Comme le nombre des zéros situés sur la circonférence de rayon r est plus petit que $r^{m(r)^{1+\varepsilon}}$ (ε étant un nombre positif arbitrairement petit), nous pouvons énoncer le théorème suivant :

---

(1) La fonction $\mathrm{H}(z)$ est supposée de genre infini.

Si l'on exclut sur la circonférence de rayon r, assez grand, certains arcs de longueur totale inférieure à $e^{-(1-\delta)r^{m(r)}}$, tous les autres points de la circonférence satisfont à l'inégalité

$$|H(z)| > e^{-r^{m(r)^{1+\delta}}}.$$

Nous voyons que la longueur totale des arcs exclus est encore de l'ordre de grandeur du minimum.

Il en est de même de toutes les fonctions entières

$$H(z) - 2\pi i,\quad H(z) - 4\pi i,\quad H(z) - 6\pi i,\quad \ldots,\quad H(z) - 2\lambda\pi i,\quad \ldots$$

qui sont du même ordre que $H(z)$; l'ensemble des zéros de ces fonctions

$$H_\lambda(z) = H(z) - 2\lambda\pi i \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

coïncide évidemment avec l'ensemble des zéros de la fonction $f(z)$.

Si nous désignons par (E_1) l'ensemble des points de la circonférence de rayon r qui sont exceptionnels pour les fonctions $H(z) - 2\lambda\pi i$ au point de vue du théorème du module minimum et par (S) un arc de la circonférence n'ayant aucun point commun avec l'ensemble exceptionnel (E_1) et sur lequel la fonction $f(z)$ ne tende que vers zéro avec $\frac{1}{r}$, nous avons, d'après le lemme ci-dessus exposé, le fait que sur cet arc les infiniment petits $|f(z)|$ et $|H_\lambda(z)|$ sont équivalents et, par conséquent, il y a

$$|f(z)| > (1-b)\,|H_\lambda(z)| \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

b étant un nombre positif fixe aussi petit que l'on voudra.

Dès lors, les inégalités

$$|H_\lambda(z)| > e^{-r^{m(r)^{1+\delta}}} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

qui sont satisfaites sur l'arc (S) entraînent l'inégalité

$$|f(z)| > e^{-r^{m(r)^{1+\delta_1}}} \qquad (\delta_1 > \delta),$$

δ_1 étant aussi arbitrairement petit, satisfaite par tous les points du même arc.

D'autre part, le nombre des fonctions $H_\lambda(z)$ qui peuvent avoir des zéros sur la circonférence de rayon r est plus petit que

$$r^{\mu(r)^{1+\delta}} = e^{(\log r)\mu(r)^{1+\delta}}$$

et, par conséquent, la longueur totale des arcs exclus est inférieure à

$$e^{(\log r)\mu(r)^{1+\delta}-(1-\delta)r^{m(r)}} = e^{r^{m_1(r)}-(1-\delta)r^{m(r)}}$$

en posant

$$m_1(r) = \frac{\log\log r + (1+\delta)\log\mu(r)}{\log r} < (1+\theta)\frac{\log\mu(r)}{\log r},$$

θ désignant aussi un nombre positif arbitrairement petit ; il est clair que le rapport $\frac{m_1(r)}{m(r)}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ et, par conséquent, la quantité

$$e^{r^{m_1(r)}-(1-\delta)r^{m(r)}} < e^{-(1-\delta_1)r^{m(r)}},$$

δ_1 étant aussi positif et arbitrairement petit. C'est une limite supérieure de la longueur totale des arcs, dont les points ne satisfont pas à l'inégalité

$$|f(z)| > e^{-r^{m(r)^{1+\delta_1}}}.$$

3. La fonction $f(x)$, qui jouit de la propriété ci-dessus établie, admet l'unité négative comme valeur exceptionnelle au sens de M. Picard, mais il est facile d'étendre cette précision du théorème du module minimum à toutes les fonctions entières admettant une valeur exceptionnelle différente de zéro. Soit, en effet, une fonction entière $F(z)$ admettant la valeur exceptionnelle $-A$; nous avons alors

$$F(z) + A = e^{H(z)}, \qquad F(z) = e^{H(z)} - A,$$
$$F(z) = A\, e^{H(z)-\log A} - A = A\,(e^{H_1(z)} - 1),$$

les fonctions $H(z)$ et $H_1(z) = H(z) - \log A$ étant entières.

Comme la fonction $e^{H_1(z)} - 1$ jouit, d'après nos considérations précédentes, de la précision établie du théorème du module minimum, nous en concluons qu'il en est de même de $F(z)$. Nous obtenons donc le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnée une fonction entière quelconque* $F(z)$ *d'ordre* $\mu(r)$ *et admettant une valeur exceptionnelle différente de zéro au* *sens de M. Picard, si l'on exclut sur la circonférence de rayon r, assez grand, certains arcs de longueur totale inférieure à*

$$e^{-(1-\delta)r^{m(r)}}, \quad m(r) \geqq [\log \mu(r)]^{1+\alpha},$$

tous les autres points de la circonférence satisfont à l'inégalité

$$|F(z)| > e^{-r^{m(r)^{1+\delta}}},$$

les nombres positifs δ *et* α *étant arbitrairement petits.*

Ce résultat fournit visiblement un complément remarquable apporté au théorème de M. Blumenthal, parce que la quantité $m(r)$ peut être choisie *notablement plus petite que l'ordre* $\mu(r)$ *de la fonction*. Il y a là une nouvelle précision du théorème sur le module minimum concernant toutes les fonctions entières qui présentent le cas d'exception unique de M. Picard, la valeur exceptionnelle étant différente de zéro : nous avons acquis pour ces fonctions une limite inférieure du module minimum beaucoup plus grande que celle du théorème de M. Blumenthal.

L'extension du théorème de M. Blumenthal à ces nouveaux minimums est telle que la longueur totale des arcs exclus est encore de l'ordre de grandeur du minimum.

4. Dans nos considérations des paragraphes précédents, la fonction

$$f(z) = e^{H(z)} - 1$$

est supposée telle que la fonction $H(z)$ soit aussi de genre infini; dans le cas contraire, nous pouvons aussi obtenir un théorème analogue, en employant le résultat que nous avons établi autrefois pour les fonctions entières de genre fini dans notre Note : *Sur les fonctions entières de genre fini* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXII, 1904, p. 314).

Ce résultat, qui est analogue au théorème de M. Blumenthal pour le module minimum des fonctions de genre infini, est énoncé de la façon suivante : *Si l'on exclut sur la circonférence de rayon r, assez grand, certains arcs de longueur inférieure à* $e^{-r^{\alpha}}$, α *étant un nombre positif* *quelconque inférieur à* ε, *tous les autres points de la circonférence satisfont à l'inégalité*

$$|\mathrm{H}(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}},$$

$\mathrm{H}(z)$ *désignant une fonction entière d'ordre* ρ.

Nous en concluons immédiatement que la fonction entière

$$f(z) = e^{\mathrm{H}(z)} - 1$$

qui est de *genre infini*, satisfera à l'inégalité

$$|f(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon_1}} \qquad (\varepsilon_1 > \varepsilon),$$

exception faite de certains arcs de la circonférence de rayon r, dont la longueur totale est inférieure à $e^{-r^{\alpha}}$, α étant un nombre positif quelconque inférieur à ε_1. Il y a là des fonctions de genre infini, dont le module minimum jouit d'une propriété analogue à celle des fonctions de genre fini, au point de vue de la grandeur du module minimum et de la longueur des arcs exceptionnels.

5. Le lemme qui sert de base pour cette étude du module minimum des fonctions entières nous permet d'aller beaucoup plus loin. Ainsi, si nous posons

$$\begin{aligned}
\log_2 \mu(r) &= \log\log \mu(r),\\
\log_3 \mu(r) &= \log\log_2 \mu(r),\\
\log_4 \mu(r) &= \log\log_3 \mu(r),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\log_{n+1} \mu(r) &= \log\log_n \mu(r),
\end{aligned}$$

toutes les fonctions de la forme

$$f_n(z) = \mathrm{A} + e^{\mathrm{A}_1 + e^{\mathrm{A}_2 + e^{\mathrm{A}_3 + \cdots^{+\mathrm{A}_n + e^{\mathrm{H}(z)}}}}}$$

où les $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ sont des nombres constants différents de zéro et $\mathrm{H}(z)$ une fonction entière d'ordre infini, admettent le théorème suivant du module minimum :

Si l'ordre de $f(z)$ *est* $\mu(r)$, *elle satisfait à l'inégalité*

$$|f_n(z)| > e^{-r^{m(r)^{1+\delta}}}, \qquad m(r) = [\log_{n+1}\mu(r)]^{1+\alpha}$$

à l'exception de certains arcs de la circonférence de rayon r, assez grand, dont la longueur totale est inférieure à $e^{-(1-\delta)r^{m(r)}}$.

La démonstration de ce théorème, qui se ramène immédiatement à celui du n° 3, se fait de proche en proche de la façon suivante : Nous voyons d'abord que la fonction entière $H(z)$ est d'ordre plus petit ou égal à $m(r) = [\log_{n+1}\mu(r)]^{1+\alpha}$ et ensuite le théorème du n° 3 nous permet d'établir immédiatement le théorème complémentaire successivement pour les fonctions $f(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_{n-1}(z)$, $f_n(z)$.

Il y a là des classes étendues de fonctions entières admettant un module minimum considérablement plus grand que le minimum fourni par le théorème de M. Blumenthal et avec des arcs exceptionnels d'étendue totale de l'ordre de grandeur du minimum.

II. — Sur la croissance des fonctions algébroïdes.

6. Dans un travail publié récemment (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXIX, 1911, p. 304-309) nous avons fait une étude très précise du module maximum des fonctions algébroïdes multiformes; d'autre part, dans mon Mémoire : *Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. II, fasc. 1, 1906, p. 92) j'expose une méthode par laquelle le théorème du module minimum s'étend aussi à toutes les branches des algébroïdes multiformes avec la même précision que pour les fonctions entières.

Je me propose d'exposer ici quelques résultats complémentaires concernant la croissance du maximum de la partie réelle et de la valeur absolue du minimum de la partie réelle en comparaison avec la croissance du module maximum des algébroïdes multiformes. Soit $u = \varphi(z)$ une fonction algébroïde définie par l'équation

$$(1)\quad f(z, u) = u^{\nu} + A_1(z)\,u^{\nu-1} + A_2(z)\,u^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu-1}(z)\,u + A_{\nu}(z) = 0,$$

les coefficients $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_{\nu}(z)$ étant des fonctions entières, et désignons par $m(r)$ le module maximum de la fonction $u = \varphi(z)$; désignons aussi par $\mu_1(r)$, $\mu_2(r)$, ..., $\mu_{\nu}(r)$ des ordres (d'après la définition de M. Blumenthal) des coefficients $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_\nu(z)$ et par $\mu(r)$ la fonction qui, pour chaque valeur de r, est égale au plus grand des nombres $\mu_1(r)$, $\mu_2(r)$, ..., $\mu_\nu(r)$ et qui peut être appelée *ordre* de l'algébroïde multiforme $u = \varphi(z)$.

D'après le théorème sur le module minimum, nous avons l'inégalité

$$\min|\varphi(z)| > e^{-r^{\mu(r)^{1+\varepsilon}}} \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{\min|\varphi(z)|} < e^{r^{\mu(r)^{1+\varepsilon}}}.$$

Nous en déduisons la formule

$$(2) \qquad \frac{\log\log\left(\dfrac{1}{\min|\varphi(z)|}\right)}{\log r} < \mu(r)^{1+\varepsilon}.$$

D'autre part, d'après le théorème du module maximum, nous avons

$$(3) \qquad e^{r^{\mu(r)^{1-\varepsilon}}} < m(r) < e^{r^{\mu(r)^{1+\varepsilon}}},$$

l'inégalité à droite étant satisfaite à partir d'une valeur de r et l'inégalité à gauche comportant des couronnes circulaires exceptionnelles dont la largeur totale est négligeable. Ces inégalités nous donnent

$$(4) \qquad \mu(r)^{1-\varepsilon} < \frac{\log\log m(r)}{\log r} < \mu(r)^{1+\varepsilon}.$$

L'inégalité (2) montre que la fonction $\frac{\log\log n(r)}{\log r}$ ne saurait être de degré de croissance plus grand que celui de $\mu(r)$, $n(r)$ désignant l'inverse du module minimum de l'algébroïde multiforme $\varphi(z)$; d'autre part, les quantités $\mu(r)$ et $\frac{\log\log m(r)}{\log r}$ sont du même degré de croissance en vertu des inégalités (4); nous en concluons que la quantité $\frac{\log\log n(r)}{\log r}$ ne saurait être de degré de croissance supérieur à $\frac{\log\log m(r)}{\log r}$.

7. Posons maintenant $u = \varphi(z) = R(x, y) + ig(x, y)$, en désignant par $R(x, y)$ la partie réelle de $\varphi(z)$, par $P(r)$ et $-q(r)$ le

maximum et le minimum de $R(x, y)$ sur la circonférence de rayon r, et considérons d'une façon auxiliaire la fonction algébroïde $e^{\varphi(z)}$ dont le module maximum est égal à $e^{P(r)}$ et le module minimum est égal à $e^{-q(r)}$. D'après le résultat du paragraphe précédent, la quantité $\frac{\log q(r)}{\log r}$ n'est pas de degré de croissance supérieure à celui de $\frac{\log P(r)}{\log r}$; mais, en faisant les mêmes raisonnements sur la fonction $e^{-\varphi(z)}$, dont le module maximum est égal à $e^{q(r)}$ et le module minimum à $e^{-P(r)}$, nous obtenons la conclusion que la quantité $\frac{\log P(r)}{\log r}$ ne saurait être de degré de croissance supérieur à $\frac{\log q(r)}{\log r}$.

On en déduit que les deux quantités $\log P(r)$ et $\log q(r)$ sont du même degré de croissance ; nous avons donc le théorème suivant :

Théorème I. — *Le logarithme de la valeur maximum et le logarithme de la valeur absolue du minimum de la partie réelle de toute fonction algébroïde sont du même degré de croissance.*

Pour se rendre bien compte de ce théorème, je rappelle la définition de l'équivalence des degrés de croissance : Nous disons que deux fonctions croissantes $M_1(r)$ et $M_2(r)$ sont du même degré de croissance lorsqu'on a les inégalités

$$[M_1(r)]^{1-\varepsilon} < M_2(r) < [M_1(r)]^{1+\varepsilon},$$

satisfaites à partir d'une valeur de r, sauf, peut-être, quelques intervalles exceptionnels dont l'étendue totale est négligeable.

Nous pouvons compléter le résultat ci-dessus acquis en nous appuyant sur un autre théorème que j'ai établi dans un travail récemment publié dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (*Extension d'un théorème de M. Borel aux fonctions algébroïdes multiformes*, t. XXXII, 2e sem. 1911, Ad. del 12 febrajo 1911), d'après lequel *le maximum de la valeur absolue de la partie réelle d'une algébroïde multiforme est du même degré de croissance que son module maximum.*

Ce résultat était déjà établi pour les algébroïdes uniformes (c'est-à-dire pour les fonctions entières) par MM. Borel (¹) et Blumenthal (²).

En le combinant avec le théorème I, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Le logarithme du module maximum de toute fonction algébroïde est du même degré de croissance avec le logarithme de la valeur maximum de sa partie réelle ainsi qu'avec le logarithme de la valeur absolue du minimum de la partie réelle.*

La partie imaginaire jouit, évidemment, de la même propriété.

L'acquisition de ces résultats était nécessaire pour compléter nos recherches sur la théorie générale des fonctions algébroïdes multiformes, que nous avons commencées par l'extension du célèbre théorème de M. Picard.

8. Nous devons ici remarquer que la précision établie dans la première Partie de ce travail pour la grandeur du module minimum des fonctions entières admettant une valeur exceptionnelle différente de zéro, peut s'étendre aussi aux algébroïdes multiformes qui admettent une valeur *doublement exceptionnelle différente de zéro* [*voir* mon Mémoire : *Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches* (*Journal de Mathématiques*, fasc. 1, 1906)] : Si le nombre a est exceptionnel, au sens primitif de M. Picard, pour une algébroïde multiforme $\varphi(z)$ finie à distance finie, nous avons l'égalité

$$\varphi(z) - a = e^{\mathrm{H}(z)},$$

$\mathrm{H}(z)$ étant une fonction aussi finie à distance finie; cette fonction $\mathrm{H}(z)$ n'est pas, en général, algébroïde (c'est-à-dire elle a une infinité de branches) : le cas où l'exposant $\mathrm{H}(z)$ serait une fonction algébroïde (à un nombre fini de branches) est un nouveau cas d'exception et il est *unique*, comme je l'ai démontré dans mon Mémoire ci-dessus

(¹) *Leçons sur les fonctions entières*, p. 63-69. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

(²) Dans son Livre déjà cité. Des procédés différents ont été employés aussi par MM. Landau, Schottky et Carathéodory.

indiqué; dans ce cas spécial d'exception, la valeur a est appelée dans mon Mémoire : *valeur doublement exceptionnelle*. Les algébroïdes multiformes ayant toutes les propriétés qui ont été nécessaires pour ma démonstration de la première Partie de ce travail, nous en concluons qu'un procédé tout à fait identique nous fournit, pour les algébroïdes multiformes présentant le cas doublement exceptionnel *unique*, une limite du module minimum beaucoup plus grande que la limite générale et analogue à celle que nous avons établie pour les fonctions entières admettant une valeur exceptionnelle différente de zéro.

III. — Le théorème de M. Picard (direction de M. Landau).

9. En 1904 M. Landau (¹) a démontré le théorème suivant :

Soit une fonction analytique

$$H(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots$$

régulière en $z = 0$ *pour laquelle* $\alpha_1 \neq 0$; *il existe un cercle*

$$|z| < R = R(\alpha_0, \alpha_1)$$

dont le rayon dépend seulement de α_0 *et* α_1 (et non des autres coefficients $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$) *à l'intérieur duquel la fonction* $H(z)$ *possède un point singulier ou prend au moins une fois l'une des valeurs* zéro *et* un.

C'est une généralisation très importante du célèbre théorème de M. Picard. J'ai cherché à étendre ce nouvel ordre d'idées, introduit dans la science par M. Landau, aux fonctions qui sont *multiformes* dans le voisinage du point $z = 0$ et j'ai obtenu des résultats satisfaisants que je me propose de développer ici.

10. Étant donné un couple de nombres (α_0, α_1) tel que $\alpha_1 \neq 0$, nous

(¹) *Ueber eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes* (*Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin, 1904, p. 1118-1133).

poserons

$$(1) \qquad L(\alpha_0, \alpha_1) = \frac{2}{|e^{c_0'} c_1 \alpha_1|}$$

en désignant par $L(\alpha_0, \alpha_1)$ le nombre (1) donné par M. Landau dans son travail : [1] *Ueber den Picardschen Satz* (*Vierteljahrsschrift Naturforschenden Gesellschaft*, Jahrgang 51, 1906).

Soit une fonction $u = \varphi(z)$ admettant le point $z = 0$ comme *point critique*, autour duquel un nombre quelconque fini n de branches se permutent; en d'autres termes, la fonction $u = \varphi(z)$ est supposée *algébroïde* dans le voisinage du point $z = 0$ et, par conséquent, elle sera définie par une équation de la forme

$$(2) \quad F(z, u) = u^n + A_1(z)\, u^{n-1} + A_2(z)\, u^{n-2} + \ldots + A_{n-1}(z)\, u + A_n(z) = 0,$$

les coefficients $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_n(z)$ étant des fonctions uniformes et *régulières* dans le voisinage du point $z = 0$.

Supposons que, dans un cercle (C) défini par l'inégalité $|z| < r$, la fonction $u = \varphi(z)$ ne prenne ni la valeur *zéro* ni la valeur *un*; alors, les deux fonctions

$$F(z, 0) = A_n(z) \quad \text{et} \quad F(z, 1) = 1 + A_1(z) + A_2(z) + \ldots + A_{n-1}(z) + A_n(z)$$

ne s'annulent pas à l'intérieur du cercle (c) et il en sera de même de la fonction

$$(3) \quad \frac{F(z, 1)}{1 + A_1(z) + A_2(z) + \ldots + A_{n-1}(z)} = 1 + \frac{A_n(z)}{1 + A_1(z) + A_2(z) + \ldots + A_{n-1}(z)}$$

dans le cas où la fonction $A_1(z) + A_2(z) + \ldots + A_{n-1}(z)$ est finie dans le cercle C. Si donc nous nous plaçons dans ce cas et si nous posons

$$(4) \qquad B(z) = \frac{-A_n(z)}{1 + A_1(z) + A_2(z) + \ldots + A_{n-1}(z)},$$

[1] Nous pouvons aussi utiliser les limites élémentaires données par MM. Hurwitz et Schottky, ou bien la fonction $\varphi(\alpha_0, \alpha_1)$ indiquée par M. Landau et déterminée par M. Carathéodory; pour tout cela, *voir* le travail de M. Landau, *Ueber den Picardschen Satz*, que nous citons dans le texte.

les deux équations

$$B(z) = 0 \qquad \text{et} \qquad B(z) - 1 = 0$$

n'admettront pas des racines à l'intérieur du cercle C. Par conséquent, en vertu du théorème ci-dessus cité de M. Landau, si la fonction $B(z)$ est régulière en $z = 0$

$$B(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_m z^m + \ldots$$

et si le nombre $\alpha_1 = B'(0)$ est différent de zéro, ou bien il existe à l'intérieur du cercle C un point singulier de la fonction $B(z)$ ou bien le rayon r de ce cercle est inférieur au nombre $L(\alpha_0, \alpha_1)$ de M. Landau ; si donc le rayon r est égal ou plus grand que le nombre $L(\alpha_0, \alpha_1)$, à l'intérieur du cercle C il existe ou bien au moins un point singulier de la fonction $B(z)$ ou bien au moins un infini de la fonction

$$A_1(z) + A_2(z) + \ldots + A_{n-1}(z)$$

(un point où elle prend une valeur infinie) ou bien au moins une racine d'au moins une des équations

$$\varphi(z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(z) = 1.$$

Nous remarquons que les raisonnements ci-dessus exposés n'exigent qu'une seule hypothèse : celle qui concerne la fonction $B(z)$ qui doit être régulière en $z = 0$; par conséquent, nous n'avons besoin de faire aucune autre hypothèse particulière sur les coefficients $A_1(z)$, $A_2(z), \ldots, A_n(z)$ qui peuvent être *singulières* en $z = 0$ et même non uniformes dans le voisinage de ce point ; rien n'empêche que ce point soit un pôle ou un point critique algébrique ou transcendant des coefficients $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_n(z)$, pourvu que la fonction $B(z)$ soit régulière en $z = 0$.

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

Théorème. — *Si une fonction $u = \varphi(z)$ est définie par une équation de la forme*

$$u^n + A_1(z)\, u^{n-1} + A_2(z)\, u^{n-2} + \ldots + A_{n-1}(z)\, u + A_n(z) = 0 \tag{5}$$

telle que la fonction

$$B(z) = \frac{-A_n(z)}{1 + A_1(z) + A_2(z) + \ldots + A_{n-1}(z)}$$

soit régulière en $z = 0$

$$B(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_m z^m + \ldots,$$

et si nous avons

$$\alpha_1 \neq 0,$$

le nombre $L(\alpha_0, \alpha_1)$ *de M. Landau a la propriété suivante : à l'intérieur du cercle*

$$(6) \qquad |z| < R = L(\alpha_0, \alpha_1)$$

ou bien la fonction $u = \varphi(z)$ *prend au moins une fois l'une au moins des valeurs* zéro *et* un *ou bien il existe un infini de la fonction* $A_1(z) + A_2(z) + \ldots + A_{n-1}(z)$ *ou un point singulier de la fonction* $B(z)$.

Il y a là une généralisation du théorème de M. Landau concernant une classe très étendue de fonctions qui ne sont pas régulières en $z = 0$ [1].

11. Les cas nouveaux sont évidemment ceux où le point $z = 0$ est un point singulier de la fonction considérée $u = \varphi(z)$ (autrement, on serait dans le cas de M. Landau). Cela explique pourquoi le cas où la fonction $u = \varphi(z)$ ne prend ni la valeur *zéro* ni la valeur *un* entraîne l'existence à l'intérieur de ce cercle de points singuliers d'autres fonctions données par les coefficients de l'équation (5) et non de la fonc-

---

(1) Nous avons donné ailleurs d'autres extensions aux cas où la fonction n'est pas régulière en $z = 0$, ou bien où le cercle considéré contient des points critiques algébriques quelconques :

Voir : *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CLV (2e semestre 1912), *Le théorème de M. Picard et les fonctions algébroïdes* (p. 1592-1595) ; t. CLVI (1er semestre 1913) : α. *Sur les familles de fonctions algébroïdes* (p. 862-865) ; β. *Sur les séries et les familles de fonctions algébroïdes dans un domaine* (p. 1141-1144).

Aussi : *Généralisation d'un théorème de M. Landau* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLI, 1913, p. 19-24) ; *Le théorème de M. Picard et les fonctions algébroïdes* [*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXV (1° sem. 1913), Adunanza del 22 dicembre 1912].

tion $u = \varphi(z)$ qui n'est pas régulière en $z = 0$; en effet, la fonction $B(z)$ est, par hypothèse, régulière en $z = 0$ et la fonction $H_1(z) + H_2(z) + \ldots + H_{n-1}(z)$ peut bien être finie en $z = 0$.

Dans le cas où la fonction donnée $u = \varphi(z)$ est régulière en $z = 0$ et définie par l'équation

$$u + A_n(z) = 0,$$

nous avons évidemment

$$A_1(z) = 0, \quad A_2(z) = 0, \quad \ldots, \quad A_{n-1}(z) = 0, \quad B(z) = -A_n(z) = \varphi(z)$$

et, par conséquent, notre fonction $B(z)$ coïncide avec la fonction $\varphi(z)$ qui doit prendre au moins une fois l'une des valeurs *zéro* et *un*, *et nous retombons ainsi à l'énoncé même de M. Landau, qui se présente comme un cas particulier du nôtre.*

Lorsque le point $z = 0$ est ou bien un point régulier ou bien un pôle des coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$, la fonction $u = \varphi(z)$ est algébroïde dans le voisinage de $z = 0$.

Dans le cas particulier où les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des fonctions entières ou finies à distance finie, la fonction

$$A_1(z) + A_2(z) + \ldots + A_{n-1}(z)$$

ne jouera aucun rôle dans l'énoncé de notre théorème, qui devient ainsi plus simple.

Dans ce cas, les points singuliers de $B(z)$ seront nécessairement des zéros de la fonction

$$1 + A_1(z) + A_2(z) + \ldots + A_{n-1}(z).$$

Si donc cette fonction n'admet pas des zéros, la fonction $u = \varphi(z)$ prendra assurément à l'intérieur du cercle

$$|z| = R = L(\alpha_0, \alpha_1)$$

au moins une fois l'une au moins des valeurs *zéro* et *un* [1].

---

[1] Dans le cas où, les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant méromorphes, la fonction $1 + A_1(z) + A_2(z) + \ldots + A_{n-1}(z)$ n'admet pas de zéros, tout point singulier de $B(z)$ est aussi singulier pour la fonction $u = \varphi(z)$ et, par conséquent, notre énoncé devient tout à fait identique avec celui de M. Landau [cas où $\varphi(z)$ est régulière en $z = 0$].

Le rayon $L(\alpha_0, \alpha_1)$ du cercle, qui ne dépend que des nombres α_0 et α_1 (et non des autres coefficients $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m, \ldots$), ne dépend aussi, *dans le cas général*, que des nombres $A_1(0), A_2(0), \ldots, A_n(0)$ et $A'_1(0), A'_2(0), \ldots, A'_n(0)$; ces nombres existent toujours dans le cas où les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des fonctions régulières en $z=0$; plaçons-nous dans ce cas. Le rayon $L(\alpha_0, \alpha_1)$ dépendrait aussi des nombres $A''_1(0), A''_2(0), \ldots$, lorsque le point $z=0$ est un zéro commun des fonctions

$$A_n(z) \qquad \text{et} \qquad 1 + A_1(z) + A_2(z) + \ldots + A_{n-1}(z)$$

ou bien des termes de la fraction, que nous obtenons en dérivant une fois l'expression

$$\frac{A_n(z)}{1 + A_1(z) + A_2(z) + \ldots + A_{n-1}(z)}.$$

12. Nous remarquons enfin que l'application de notre méthode nous conduit à un théorème analogue à celui du n° 10, valable pour toute fonction $u = \Phi(z)$ définie par une équation de la forme

$$\Sigma(z, u) = A_0(z) + A_1(z)\,u + A_2(z)\,u^2 + \ldots + A_n(z)\,u^n + \ldots = 0,$$

la fonction $\Sigma(z, u)$ étant holomorphe dans les cercles $|z| < r$ et $|u| < \rho$ où le rayon ρ est plus grand que l'unité. Le rôle de $B(z)$ sera ici joué par la fonction

$$\frac{\Sigma(z, 0)}{\Sigma(z, 0) - \Sigma(z, 1)} = \frac{-A_0(z)}{A_1(z) + A_2(z) + A_3(z) + \ldots + A_n(z) + \ldots}$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_m z^m + \ldots$$

qui doit être régulière en $z=0$ telle que $\alpha_1 \neq 0$.