Annales scientifiques de l'É.N.S.

J. Le Roux

Recherches sur la géométrie des déformations finies

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 30 (1913), p. 193-245
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1913_3_30__193_0>

RECHERCHES

SUR LA

GÉOMÉTRIE DES DÉFORMATIONS FINIES;

PAR M. J. LE ROUX.

Introduction.

Ce Mémoire a pour objet d'étendre, aux déformations finies, la théorie géométrique de la torsion et de la flexion des milieux continus, que j'ai étudiée dans un précédent travail pour le cas des déformations infinitésimales (¹). Les résultats définitifs sont exactement de la même forme, et les calculs, sur plusieurs points, ne présentent que des différences insignifiantes. Aussi, après avoir établi les formules fondamentales relatives à la flexion des fibres et des feuillets, j'ai jugé inutile de reprendre l'étude des propriétés géométriques qu'on peut en déduire : je renvoie pour cette question à mon premier Mémoire.

Bien que j'aie eu en vue principalement les applications ultérieures à la Mécanique, il est évident que cette théorie présente un caractère exclusivement géométrique. On peut la considérer, à certains égards, comme une branche de la Géométrie, ayant une grande analogie avec la théorie de la courbure des lignes et des surfaces.

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. XXVIII, 1911, p. 523-579.

CHAPITRE I.

LA DILATATION.

1. Nous considérons un milieu continu dans deux états différents, que nous appelons l'*état initial* et l'*état final ou déformé*. Les points seront supposés définis par leurs coordonnées, rapportées à des axes rectangulaires. Mais, pour les questions dont nous aurons à nous occuper, il n'est nullement nécessaire que les deux états du milieu soient rapportés aux mêmes axes. Pour simplifier l'exposition et éviter les redites, nous conviendrons une fois pour toutes de désigner par les mêmes lettres les éléments correspondants des deux milieux, mais en les affectant de l'indice zéro pour les quantités relatives à l'état initial. Par exemple, $M(x, y, z)$ étant un point du milieu déformé, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sera le point homologue du milieu initial.

Nous supposerons que les coordonnées de chaque système sont des fonctions des coordonnées de l'autre système, ces fonctions étant continues et dérivables, au moins jusqu'au second ordre.

2. Regardons d'abord les coordonnées x, y, z d'un point M du milieu déformé comme des fonctions des coordonnées x_0, y_0, z_0 du point correspondant du milieu initial.

Nous avons alors, entre les différentielles, les relations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0}dy_0 + \frac{\partial x}{\partial z_0}dz_0,\\ dy &= \frac{\partial y}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial y}{\partial y_0}dy_0 + \frac{\partial y}{\partial z_0}dz_0,\\ dz &= \frac{\partial z}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial z}{\partial y_0}dy_0 + \frac{\partial z}{\partial z_0}dz_0.\end{aligned}\right.$$

Nous désignerons par Δ le déterminant fonctionnel

$$(2)\qquad \frac{d(x, y, z)}{d(x_0, y_0, z_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0}\\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0}\\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0}\end{vmatrix} = \Delta.$$

Ce déterminant doit être expressément supposé différent de zéro dans le domaine considéré; et même, si les deux milieux sont rapportés au même trièdre de coordonnées ou à des trièdres superposables, il est nécessaire que Δ reste positif pour que notre transformation ait une signification mécanique réelle. Sinon il serait impossible de passer du premier état au second par une déformation continue sans annuler les volumes. Pour une raison semblable, le déterminant Δ doit rester négatif quand les deux trièdres de coordonnées ne sont pas superposables.

En considérant les coordonnées initiales comme fonctions des coordonnées finales, nous aurions

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} dx_0 &= \frac{\partial x_0}{\partial x}dx + \frac{\partial x_0}{\partial y}dy + \frac{\partial x_0}{\partial z}dz,\\ dy_0 &= \frac{\partial y_0}{\partial x}dx + \frac{\partial y_0}{\partial y}dy + \frac{\partial y_0}{\partial z}dz,\\ dz_0 &= \frac{\partial z_0}{\partial x}dx + \frac{\partial z_0}{\partial y}dy + \frac{\partial z_0}{\partial z}dz.\end{aligned}\right.$$

Or, les valeurs des différentielles dx_0, dy_0, dz_0 exprimées par les équations (3) sont évidemment identiques à celles qu'on obtiendrait en résolvant les équations (1). On a donc les identités suivantes, ainsi que les autres identités analogues qu'on en déduirait par la permutation des coordonnées

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial x} = \dfrac{1}{\Delta}\,\dfrac{d(y,z)}{d(y_0,z_0)}, \\[2ex] \dfrac{\partial x_0}{\partial y} = \dfrac{1}{\Delta}\,\dfrac{d(z,x)}{d(y_0,z_0)}, \\[2ex] \dfrac{\partial x_0}{\partial z} = \dfrac{1}{\Delta}\,\dfrac{d(z,y)}{d(y_0,z_0)}. \end{cases}$$

La notation $\dfrac{d(y,z)}{d(y_0,z_0)}$ désigne le déterminant fonctionnel binaire

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial y_0} & \dfrac{\partial z}{\partial y_0} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial z_0} & \dfrac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} = \frac{\partial \Delta}{\partial\left(\dfrac{\partial x}{\partial x_0}\right)}.$$

3. A la considération des équations (1), entre les deux systèmes de différentielles, se rattache la notion de déformation homogène tangente en un point M du milieu. On sait qu'on appelle ainsi la déformation homogène (T), définie par les équations suivantes, où les lettres X, Y, Z, X_0, Y_0, Z_0 désignent les coordonnées courantes :

$$(\mathrm{T})\qquad \begin{cases} X - x = \dfrac{\partial x}{\partial x_0}(X_0 - x_0) + \dfrac{\partial x}{\partial y_0}(Y_0 - y_0) + \dfrac{\partial x}{\partial z_0}(Z_0 - z_0), \\[2ex] Y - y = \dfrac{\partial y}{\partial x_0}(X_0 - x_0) + \dfrac{\partial y}{\partial y_0}(Y_0 - y_0) + \dfrac{\partial y}{\partial z_0}(Z_0 - z_0), \\[2ex] Z - z = \dfrac{\partial z}{\partial x_0}(X_0 - x_0) + \dfrac{\partial z}{\partial y_0}(Y_0 - y_0) + \dfrac{\partial z_0}{\partial z}(Z_0 - z_0). \end{cases}$$

Cette expression de *déformation homogène tangente en* M est commode et suffisamment explicite. Il convient d'observer cependant qu'on n'a pas en vue un simple point M, mais un couple de points correspondants (M_0, M) ou, plus exactement, l'élément matériel transféré de M_0 en M.

4. *Relations entre les coefficients de la déformation homogène.* — Les coefficients de la déformation homogène (T) et ceux de la déformation inverse, vérifient neuf identités fondamentales. Écrivons que les valeurs de dx_0, dy_0, dz_0 tirées des équations (3), satisfont identique-

ment aux équations (1); nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial x}=1,\\
&\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial y}=0,\\
&\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial z}+\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial z}+\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial z}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On peut résumer ces relations dans une formule unique, en désignant les coordonnées par x_1, x_2, x_3, au lieu de x, y, z :

$$(5)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial x_k}+\frac{\partial x_i}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial x_k}+\frac{\partial x_i}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial x_k}=\begin{cases}1 & \text{pour}\quad i=k,\\ 0 & \text{pour}\quad i\neq k.\end{cases}$$

En procédant de la même façon pour la déformation inverse, nous obtiendrions un second système de neuf identités analogues, qui sont d'ailleurs des conséquences des premières; nous les résumons encore dans la formule suivante, où x_{10}, x_{20}, x_{30} désignent les coordonnées initiales :

$$(6)\qquad \frac{\partial x_{i0}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_{k0}}+\frac{\partial x_{i0}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_{k0}}+\frac{\partial x_{i0}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_{k0}}=\begin{cases}1 & \text{pour}\quad i=k,\\ 0 & \text{pour}\quad i\neq k.\end{cases}$$

Les formules (5) et (6) comprennent évidemment comme cas particuliers les relations qui existent entre les neuf cosinus d'une transformation orthogonale.

5. *Dilatation linéaire.* — Une fibre, ou ligne matérielle passant par le point M_0 du milieu initial, se transforme en une fibre passant par le point M du milieu déformé. Soient ds la longueur d'une fibre infiniment petite issue du point M; α, β, γ ses cosinus directeurs, et dx, dy, dz ses projections sur les axes; on a

$$\begin{aligned}
dx &= \alpha\, ds,\\
dy &= \beta\, ds,\\
dz &= \gamma\, ds.
\end{aligned}$$

Nous désignerons par e la dilatation linéaire de la fibre

$$\frac{ds}{ds_0} = 1 + e.$$

Les relations entre la position de la fibre initiale et celle de la fibre déformée peuvent se déduire des équations (1) ou (3). Le premier système donne, en divisant par ds_0,

$$(7)\qquad \begin{cases} (1+e)\,\alpha = \dfrac{\partial x}{\partial x_0}\alpha_0 + \dfrac{\partial x}{\partial y_0}\beta_0 + \dfrac{\partial x}{\partial z_0}\gamma_0, \\ (1+e)\,\beta = \dfrac{\partial y}{\partial x_0}\alpha_0 + \dfrac{\partial y}{\partial y_0}\beta_0 + \dfrac{\partial y}{\partial z_0}\gamma_0, \\ (1+e)\,\gamma = \dfrac{\partial z}{\partial x_0}\alpha_0 + \dfrac{\partial z}{\partial y_0}\beta_0 + \dfrac{\partial z}{\partial z_0}\gamma_0. \end{cases}$$

Du second on déduit de la même manière, en divisant par ds,

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha_0}{1+e} = \dfrac{\partial x_0}{\partial x}\alpha + \dfrac{\partial x_0}{\partial y}\beta + \dfrac{\partial x_0}{\partial z}\gamma, \\ \dfrac{\beta_0}{1+e} = \dfrac{\partial y_0}{\partial x}\alpha + \dfrac{\partial y_0}{\partial y}\beta + \dfrac{\partial y_0}{\partial z}\gamma, \\ \dfrac{\gamma_0}{1+e} = \dfrac{\partial z_0}{\partial x}\alpha + \dfrac{\partial z_0}{\partial y}\beta + \dfrac{\partial z_0}{\partial z}\gamma. \end{cases}$$

De ces deux systèmes nous déduisons les équations suivantes pour définir la dilatation :

$$(9)\qquad (1+e)^2 = e^0_{11}\alpha_0^2 + e^0_{22}\beta_0^2 + e^0_{33}\gamma_0^2 + 2e^0_{23}\beta_0\gamma_0 + e^0_{31}\gamma_0\alpha_0 + 2e^0_{12}\alpha_0\beta_0,$$

$$(10)\qquad \frac{1}{(1+e)^2} = e_{11}\,\alpha^2 + e_{22}\,\beta^2 + e_{33}\,\gamma^2 + 2e_{23}\beta\gamma + 2e_{31}\,\gamma\alpha + 2e_{12}\,\alpha\beta.$$

Nous avons posé, dans la première formule,

$$e^0_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$e^0_{23} = \frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0},$$

et, dans la seconde,

$$e_{11} = \left(\frac{\partial x_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$e_{23} = \frac{\partial x_0}{\partial y}\frac{\partial x_0}{\partial z} + \frac{\partial y_0}{\partial x}\frac{\partial y_0}{\partial z} + \frac{\partial z_0}{\partial x}\frac{\partial z_0}{\partial z},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les formes quadratiques de cosinus (9) et (10), peuvent être évidemment remplacées par les formes de différentielles qui expriment les éléments linéaires de chacun des milieux en fonction des coordonnées relatives à l'autre

$$ds^2 = \Sigma e_{ik}^0\, dx_{i0}\, dx_{k0}, \tag{9'}$$

$$ds_0^2 = \Sigma e_{ik}\, dx_i\, dx_k. \tag{10'}$$

On sait comment la considération des formules (9) ou (10) conduit à figurer la dilatation par une indicatrice du second ordre, l'ellipsoïde des dilatations, qu'on peut considérer dans l'un ou l'autre des deux milieux [1].

6. *Dilatation superficielle.* — J'appelle *feuillet* une portion de matière, étendue en surface, mais d'épaisseur négligeable. Un feuillet élémentaire peut être assimilé à un élément infiniment petit de surface matérielle.

Considérons deux fibres élémentaires issues de la même origine M, et désignons leurs composantes, dans l'état déformé, respectivement par

$$d_1x,\quad d_1y,\quad d_1z$$

et

$$d_2x,\quad d_2y,\quad d_2z.$$

Posons

$$d(y,z) = \begin{vmatrix} d_1y & d_1z \\ d_2y & d_2z \end{vmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[1] E. et F. Cosserat, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X.

Le déterminant

$$d(y,z)=\begin{vmatrix} d_1 y & d_1 z \\ d_2 y & d_2 z \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial x_0} d_1 x_0+\dfrac{\partial y}{\partial y_0} d_1 y_0+\dfrac{\partial y}{\partial z_0} d_1 z_0 & \dfrac{\partial z}{\partial x_0} d_1 x_0+\dfrac{\partial z}{\partial y_0} d_1 y_0+\dfrac{\partial z}{\partial z_0} d_1 z_0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_0} d_2 x_0+\dfrac{\partial y}{\partial y_0} d_2 y_0+\dfrac{\partial y}{\partial z_0} d_2 z_0 & \dfrac{\partial z}{\partial x_0} d_2 x_0+\dfrac{\partial z}{\partial y_0} d_2 y_0+\dfrac{\partial z}{\partial z_0} d_2 z_0 \end{vmatrix},$$

et les autres déterminants analogues $d(z,x)$, $d(z,y)$ peuvent se développer en une somme de produits de déterminants binaires :

$$(11)\quad \begin{cases} d(y,z)=\dfrac{d(y,z)}{d(y_0,z_0)}d(y_0,z_0)+\dfrac{d(y,z)}{d(z_0,x_0)}d(z_0,x_0)+\dfrac{d(y,z)}{d(x_0,y_0)}d(x_0,y_0), \\ d(z,x)=\dfrac{d(z,x)}{d(y_0,z_0)}d(y_0,z_0)+\dfrac{d(z,x)}{d(z_0,x_0)}d(z_0,x_0)+\dfrac{d(z,x)}{d(x_0,y_0)}d(x_0,y_0), \\ d(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{d(y_0,z_0)}d(y_0,z_0)+\dfrac{d(x,y)}{d(z_0,x_0)}d(z_0,x_0)+\dfrac{d(x,y)}{d(x_0,y_0)}d(x_0,y_0). \end{cases}$$

Le déterminant $d(y,z)$ représente, en grandeur et en signe, l'aire de la projection sur le plan YOZ du parallélogramme infiniment petit $d\sigma$, défini par les deux fibres élémentaires considérées. Soient donc ξ, η, ζ les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\sigma$, cette normale étant supposée menée dans le sens de l'axe de la rotation positive de la première fibre vers la seconde; on a

$$\xi\, d\sigma=d(y,z),$$
$$\eta\, d\sigma=d(z,x),$$
$$\zeta\, d\sigma=d(x,y).$$

Nous appellerons E la dilatation du feuillet élémentaire correspondant

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0}=1+\mathrm{E},$$

et nous désignerons par ξ_0, η_0, ζ_0 les cosinus directeurs de la normale au feuillet initial $d\sigma_0$. Il y a donc lieu d'observer que les deux systèmes de cosinus (ξ,η,ζ) et (ξ_0,η_0,ζ_0) ne se rapportent pas aux deux états d'une même fibre. Les cosinus directeurs de fibres et les cosinus directeurs de normales aux feuillets forment deux systèmes contragrédients, suivant l'expression employée par Sylvestre dans la théorie des formes algébriques.

En divisant par $d\sigma_0$ les équations (11) et introduisant les désignations indiquées ci-dessus, nous obtenons les relations

$$(12)\quad \begin{cases} (1+\mathrm{E})\,\xi = \dfrac{d(y,z)}{d(y_0,z_0)}\xi_0 + \dfrac{d(y,z)}{d(z_0,x_0)}\eta_0 + \dfrac{d(y,z)}{d(x_0,y_0)}\zeta_0, \\ (1+\mathrm{E})\,\eta = \dfrac{d(z,x)}{d(y_0,z_0)}\xi_0 + \dfrac{d(z,x)}{d(z_0,x_0)}\eta_0 + \dfrac{d(z,x)}{d(x_0,y_0)}\zeta_0, \\ (1+\mathrm{E})\,\zeta = \dfrac{d(x,y)}{d(y_0,z_0)}\xi_0 + \dfrac{d(x,y)}{d(z_0,x_0)}\eta_0 + \dfrac{d(x,y)}{d(x_0,y_0)}\zeta_0. \end{cases}$$

La transformation inverse conduirait à des formules semblables, dont nous écrivons simplement la première

$$(13)\quad \frac{\xi_0}{1+\mathrm{E}} = \frac{d(y_0,z_0)}{d(y,z)}\xi + \frac{d(y_0,z_0)}{d(z,x)}\eta + \frac{d(y_0,z_0)}{d(x,y)}\zeta,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on tient compte des équations (4), les résultats précédents peuvent se mettre sous la forme

$$(12')\quad \begin{cases} \dfrac{1+\mathrm{E}}{\Delta}\xi = \dfrac{\partial x_0}{\partial x}\xi_0 + \dfrac{\partial y_0}{\partial x}\eta_0 + \dfrac{\partial z_0}{\partial x}\zeta_0, \\ \dfrac{1+\mathrm{E}}{\Delta}\eta = \dfrac{\partial x_0}{\partial y}\xi_0 + \dfrac{\partial y_0}{\partial y}\eta_0 + \dfrac{\partial z_0}{\partial y}\zeta_0, \\ \dfrac{1+\mathrm{E}}{\Delta}\zeta = \dfrac{\partial x_0}{\partial z}\xi_0 + \dfrac{\partial y_0}{\partial z}\zeta_0 + \dfrac{\partial z_0}{\partial z}\zeta_0; \end{cases}$$

$$(13')\quad \frac{\Delta\xi_0}{1+\mathrm{E}} = \frac{\partial x}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial y}{\partial x_0}\eta + \frac{\partial z}{\partial x_0}\zeta,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il y a une remarquable analogie entre les équations (7) et (8), relatives à la transformation des fibres, et les systèmes (12) et (13), relatifs à la transformation des feuillets. La dilatation superficielle sera définie également par des formules semblables à celles que nous avons trouvées pour la dilatation linéaire.

Posons

$$\mathrm{E}^0_{11} = \left[\frac{d(y, z)}{d(y_0, z_0)}\right]^2 + \left[\frac{d(z, x)}{d(y_0, z_0)}\right]^2 + \left[\frac{d(x, y)}{d(y_0, z_0)}\right]^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{E}^0_{23} = \frac{d(y, z)}{d(z_0, x_0)}\,\frac{d(y, z)}{d(x_0, y_0)} + \frac{d(z, x)}{d(z_0, x_0)}\,\frac{d(z, x)}{d(x_0, y_0)} + \frac{d(x, y)}{d(z_0, x_0)}\,\frac{d(x, y)}{d(x_0, y_0)};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et de même

$$\mathrm{E}_{11} = \left[\frac{d(y_0, z_0)}{d(y, z)}\right]^2 + \left[\frac{d(z_0, x_0)}{d(y, z)}\right]^2 + \left[\frac{d(x_0, y_0)}{d(y, z)}\right]^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{E}_{23} = \frac{d(y_0, z_0)}{d(z, x)}\,\frac{d(y_0, z_0)}{d(x, y)} + \frac{d(z_0, x_0)}{d(z, x)}\,\frac{d(z_0, x_0)}{d(x, y)} + \frac{d(x_0, y_0)}{d(z, x)}\,\frac{d(x_0, y_0)}{d(x, y)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous aurons alors, pour les dilatations superficielles, les formules

$$(14)\quad (1+\mathrm{E})^2 = \mathrm{E}^0_{11}\xi_0^2 + \mathrm{E}^0_{22}\eta_0^2 + \mathrm{E}^0_{33}\zeta_0^2 + 2\mathrm{E}^0_{23}\eta_0\zeta_0 + 2\mathrm{E}^0_{31}\zeta_0\xi_0 + 2\mathrm{E}^0_{12}\zeta_0\eta_0,$$

$$(15)\quad \frac{1}{(1+\mathrm{E})^2} = \mathrm{E}_{11}\,\xi^2 + \mathrm{E}_{22}\,\eta^2 + \mathrm{E}_{33}\,\zeta^2 + 2\mathrm{E}_{23}\,\eta\zeta + 2\mathrm{E}_{31}\,\zeta\xi + 2\mathrm{E}_{12}\,\xi\eta.$$

7. *Relation entre la dilatation linéaire et la dilatation superficielle.* — On vérifie facilement que chacune des formes quadratiques relatives à la dilatation superficielle est l'adjointe de la forme correspondante relative à la dilatation linéaire. Cette propriété résulte immédiate- du calcul des coefficients. On a, par exemple,

$$\mathrm{E}^0_{11} = e^0_{22}e^0_{33} - (e^0_{23})^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{E}^0_{23} = e_{12}\,e_{31} - e_{11}e_{23},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le discriminant de la forme (7) étant égal à Δ^2, celui de la forme (14) est égal Δ^4. Une relation semblable existe entre les formes (10) et (15), dont les discriminants sont respectivements égaux à $\frac{1}{\Delta^2}$ et $\frac{1}{\Delta^4}$.

Un raisonnement géométrique très simple montre d'ailleurs qu'il doit en être ainsi. Considérons l'ellipsoïde des dilatations, relatif au point M du milieu déformé. Si l'on désigne par $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ la forme quadratique qui figure au second membre de l'équation (10), l'ellipsoïde considéré sera représenté par

$$\varphi(X, Y, Z) = 1.$$

Chaque rayon de l'ellipsoïde s'obtient en portant, à partir de l'origine, une longueur mesurée par la valeur du rapport $1 + e$ qui correspond à la direction de ce rayon dans le milieu déformé.

Soient (D) un plan diamétral de l'ellipsoïde, E la dilation superficielle d'un feuillet élémentaire passant par M et parallèle au plan (D). Dans ce plan diamétral, l'aire du parallélogramme construit sur deux rayons conjugués de l'ellipsoïde est constante et égale à $1 + E$. Menons à l'ellipsoïde un plan tangent (P) parallèle à (D), et soit δ la distance de l'origine au plan (P). Le produit de l'aire $(1 + E)$ par la distance δ est égal au volume du parallélépipède construit sur trois rayons conjugués de l'ellipsoïde. On a donc

$$(1 + E)\delta = \Delta. \tag{16}$$

Si l'on désigne par $\Phi(u, v, w)$ la forme quadratique adjointe de $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$, l'équation tangentielle de l'ellipsoïde pourra se mettre sous la forme

$$\Phi(u, v, w) = \frac{h^2}{\Delta^2},$$

u, v, w, h étant les coordonnées homogènes du plan tangent.

Remplaçons maintenant les coordonnées u, v, w par les cosinus directeurs ξ, η, ζ de la normale, et h par $-\delta$; nous avons la relation

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\delta^2}{\Delta^2},$$

qui devient ensuite, en vertu de l'équation (16),

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{(1 + E)^2}.$$

On retrouve donc ainsi la formule (15).

8. *Variation de l'épaisseur des couches.* — La quantité $\delta = \frac{\Delta}{1+E}$ a une signification simple dans la déformation. Considérons un cylindre infiniment petit renfermant le point M. Soient dV son volume, $d\sigma$ l'aire de la base et dh la hauteur. On a

$$dV = d\sigma\, dh. \tag{17}$$

Dans le milieu initial on aurait de même, pour le cylindre correspondant,

$$dV_0 = d\sigma_0\, dh_0. \tag{17'}$$

Le rapport $\frac{dV}{dV_0}$ est égal à Δ; le rapport des aires $\frac{d\sigma}{d\sigma_0}$ est égal à $1 + E$, E désignant la dilatation superficielle de la base. En divisant membre à membre les équations (17) et (17′) on trouve donc

$$\Delta = (1+E)\frac{dh}{dh_0},$$

et ce résultat, comparé à l'équation (16), donne

$$\frac{dh}{dh_0} = \delta = \frac{\Delta}{1+E}. \tag{18}$$

D'après cela, si l'on découpe dans le milieu une couche matérielle infiniment mince passant par le point M et ayant en ce point l'épaisseur dh, le rapport de l'épaisseur de la couche déformée à celle de la couche initiale, $\frac{dh}{dh_0}$, est égal à δ. La variation de $\frac{1}{\delta}$ en fonction des cosinus directeurs de la normale est proportionnelle à celle du rapport superficiel $1+E$. On la déduirait directement des équations (12′) et (13′).

9. *Dilatations angulaires.* — Le calcul des angles pourrait s'effectuer analytiquement à l'aide des formes quadratiques qui entrent dans l'expression de la dilatation linéaire ou superficielle, et des formes polaires correspondantes [1]. Mais les résultats s'obtiennent plus rapidement par des considérations géométriques.

---

[1] On trouvera ce calcul effectué dans une Note *Sur les déformations angulaires* (Travaux scientifiques de l'Université de Rennes, 1911).

1° *Angle de deux fibres.* — Considérons deux fibres élémentaires issues du même point M. Soient ds, ds' leurs longueurs, θ leur angle, e et e' les dilatations linéaires correspondantes, et E la dilatation superficielle du feuillet qu'elles déterminent.

On a

$$\frac{ds\, ds' \sin\theta}{ds_0\, ds'_0 \sin\theta_0} = 1 + E,$$

d'où

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0} = \frac{1 + E}{(1 + e)(1 + e')}. \tag{19}$$

2° *Angle d'une fibre et d'un feuillet.* — Prenons, à partir du point M, sur la fibre une longueur infiniment petite ds et sur le feuillet un élément superficiel $d\sigma$.

Soit φ l'angle de la fibre avec le feuillet. Le volume du cylindre infinitésimal ayant pour base $d\sigma$ et pour arête ds est égal à

$$ds\, d\sigma \sin\varphi.$$

En désignant par Θ la dilatation cubique au point considéré, par e la dilatation linéaire de la fibre et par E la dilatation superficielle du feuillet, on a donc successivement

$$\frac{ds\, d\sigma \sin\varphi}{ds_0\, d\sigma_0 \sin\varphi_0} = 1 + \Theta,$$

$$(1 + e)(1 + E)\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} = 1 + \Theta,$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} = \frac{1 + \Theta}{(1 + e)(1 + E)}. \tag{19'}$$

Si, au lieu de l'angle φ de la fibre avec le feuillet, on considère l'angle φ' de la fibre avec la normale au feuillet, la relation précédente devient

$$\frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi'_0} = \frac{1 + \Theta}{(1 + e)(1 + E)}.$$

3° *Angle de deux feuillets.* — Le volume d'un parallélépipède quelconque est égal au produit des aires de deux faces contiguës, multiplié par le sinus de leur angle dièdre et divisé par la longueur de leur arête commune.

D'après cela, considérons deux feuillets élémentaires se coupant en M et formant entre eux l'angle dièdre ψ. Soient E et E' leurs dilatations superficielles, e la dilatation linéaire de la fibre dirigée suivant leur intersection, Θ la dilatation cubique au point M. On trouve immédiatement, par un raisonnement analogue à celui que nous avons employé pour les deux cas précédents,

$$\frac{(1+\mathrm{E})(1+\mathrm{E}')}{1+e}\,\frac{\sin\psi}{\sin\psi_0}=1+\Theta,$$

d'où

$$\frac{\sin\psi}{\sin\psi_0}=\frac{(1+\Theta)(1+e)}{(1+\mathrm{E})(1+\mathrm{E}')}. \tag{19''}$$

Les trois formules (19), (19'), (19'') sont remarquables par leur simplicité et leur similitude. Elles montrent qu'il existe, pour les sinus des angles, des *rapports de déformation* analogues à ceux des lignes, des surfaces et des volumes.

10. *Rapports de déformation.* — Le nom de *rapport de déformation* nous a paru commode et significatif pour représenter le rapport d'une quantité du milieu déformé à la quantité correspondante du milieu initial : le rapport de déformation linéaire est représenté par $1+e$, le *rapport de déformation superficiel* par $1+\mathrm{E}$, et le *rapport de déformation cubique* par $1+\Theta=\Delta$. Dans les calculs relatifs aux déformations finies, la dilatation n'intervient généralement que dans le le rapport de déformation correspondant ; par exemple nous n'aurons pas à considérer la dilatation linéaire e si ce n'est dans le rapport de déformation linéaire $1+e$.

CHAPITRE II.

ÉLÉMENTS DIFFÉRENTIELS DU SECOND ORDRE.

11. La déformation différentielle $d\mathrm{T}$. — 12. Les coefficients a_{ijk}. — 13. La dilatation linéaire dans la déformation différentielle. — 14. Rotation moyenne. — 15. Dilatation cubique. — 16. Dilatation superficielle. — 17. Expression des dérivées secondes des

coordonnées initiales en fonction des coefficients a_{ijk}. — 18. Équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont ces coefficients. — 19. Déformations qui correspondent à un système donné de coefficients a_{ijk}. — 20. Calcul des différentielles des coefficients de la dilatation linéaire. — 21. Expression des coefficients a_{ijk} en fonction des coefficients de la dilatation. — 22. Relation des coefficients a_{ijk} avec les accolades de Christoffel.

11. *La déformation différentielle* (dT). — Soient (T) et (T′) les déformations homogènes tangentes en deux points infiniment voisins M et M′. On peut considérer la seconde (T′) comme la résultante de la première (T) et d'une déformation infinitésimale (dT) que nous appelons la *déformation différentielle* au point M.

La déformation (T) est définie par les équations (T) du n° 3, et la déformation (T′) par les équations analogues

$$\left\{\begin{aligned}
X' - x' &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} + d\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)(X_0 - x_0) + \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} + d\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)(Y_0 - y_0) + \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} + d\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)(Z_0 - \ldots\\
Y' - y' &= \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} + d\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)(X_0 - x_0) + \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} + d\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)(Y_0 - y_0) + \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} + d\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)(Z_0 - \ldots\\
Z' - z' &= \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} + d\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)(X_0 - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y_0} + d\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)(Y_0 - y_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial z_0} + d\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)(Z_0 - \ldots
\end{aligned}\right.$$

La déformation différentielle (dT) sera représentée par les équations qu'on obtient en remplaçant, dans le système (T′), les valeurs des coordonnées courantes initiales X_0, Y_0, Z_0 par leurs valeurs tirées du système (T).

Or, en résolvant le système (T) par rapport aux différences $X_0 - x_0$, $Y_0 - y_0$, $Z_0 - z_0$, on trouve

$$\begin{aligned}
X_0 - x_0 &= \frac{\partial x_0}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial x_0}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial x_0}{\partial z}(Z - z),\\
Y_0 - y_0 &= \frac{\partial y_0}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial y_0}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial y_0}{\partial z}(Z - z),\\
Z_0 - z_0 &= \frac{\partial z_0}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z_0}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial z_0}{\partial z}(Z - z).
\end{aligned}$$

Ces valeurs substituées dans les équations (T′), en tenant compte des identités (5), donnent les équations de définition de la transformation différentielle (dT) sous la forme suivante :

$$(dT)\begin{cases} X'-x'=(1+da_{11})(X-x)+da_{12}\,(Y-y)+da_{13}(Z-z),\\ Y'-y'=da_{21}\,(X-x)+(1+da_{22})(Y-y)+da_{23}(Z-z),\\ Z'-z'=da_{31}\,(X-x)+da_{32}\,(Y-y)+(1+da_{33})(Z-z).\end{cases}$$

Nous avons posé

$$da_{11}=\frac{\partial x_0}{\partial x}d\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)+\frac{\partial y_0}{\partial x}d\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)+\frac{\partial z_0}{\partial x}d\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)=-\left[\frac{\partial x}{\partial x_0}d\left(\frac{\partial x_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial x}{\partial y_0}d\left(\frac{\partial y_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial x}{\partial z_0}d\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)\right],$$
$$da_{12}=\frac{\partial x_0}{\partial y}d\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)+\frac{\partial y_0}{\partial y}d\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)+\frac{\partial z_0}{\partial y}d\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)=-\left[\frac{\partial x}{\partial x_0}d\left(\frac{\partial x_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial x}{\partial y_0}d\left(\frac{\partial y_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial x}{\partial z_0}d\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)\right],$$
$$da_{13}=\frac{\partial x_0}{\partial z}d\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)+\frac{\partial y_0}{\partial z}d\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)+\frac{\partial z_0}{\partial z}d\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)=-\left[\frac{\partial x}{\partial x_0}d\left(\frac{\partial x_0}{\partial z}\right)+\frac{\partial x}{\partial y_0}d\left(\frac{\partial y_0}{\partial z}\right)+\frac{\partial x}{\partial z_0}d\left(\frac{\partial z_0}{\partial z}\right)\right];$$

$$da_{21}=\frac{\partial x_0}{\partial x}d\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)+\frac{\partial y_0}{\partial x}d\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)+\frac{\partial z_0}{\partial x}d\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)=-\left[\frac{\partial y}{\partial x_0}d\left(\frac{\partial x_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial y}{\partial y_0}d\left(\frac{\partial y_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial y}{\partial z_0}d\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)\right],$$
$$da_{22}=\frac{\partial x_0}{\partial y}d\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)+\frac{\partial y_0}{\partial y}d\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)+\frac{\partial z_0}{\partial y}d\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)=-\left[\frac{\partial y}{\partial x_0}d\left(\frac{\partial x_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial y}{\partial y_0}d\left(\frac{\partial y_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial y}{\partial z_0}d\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)\right],$$
$$da_{23}=\frac{\partial x_0}{\partial z}d\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)+\frac{\partial y_0}{\partial z}d\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)+\frac{\partial z_0}{\partial z}d\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)=-\left[\frac{\partial y}{\partial x_0}d\left(\frac{\partial x_0}{\partial z}\right)+\frac{\partial y}{\partial y_0}d\left(\frac{\partial y_0}{\partial z}\right)+\frac{\partial y}{\partial z_0}d\left(\frac{\partial z_0}{\partial z}\right)\right];$$

$$da_{31}=\frac{\partial x_0}{\partial x}d\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)+\frac{\partial y_0}{\partial x}d\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)+\frac{\partial z_0}{\partial x}d\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)=-\left[\frac{\partial z}{\partial x_0}d\left(\frac{\partial x_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial z}{\partial y_0}d\left(\frac{\partial y_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial z}{\partial z_0}d\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)\right],$$
$$da_{32}=\frac{\partial x_0}{\partial y}d\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)+\frac{\partial y_0}{\partial y}d\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)+\frac{\partial z_0}{\partial y}d\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)=-\left[\frac{\partial z}{\partial x_0}d\left(\frac{\partial x_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial y_0}d\left(\frac{\partial y_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial z_0}d\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)\right],$$
$$da_{33}=\frac{\partial x_0}{\partial z}d\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)+\frac{\partial y_0}{\partial z}d\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)+\frac{\partial z_0}{\partial z}d\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)=-\left[\frac{\partial z}{\partial x_0}d\left(\frac{\partial x_0}{\partial z}\right)+\frac{\partial z}{\partial y_0}d\left(\frac{\partial y_0}{\partial z}\right)+\frac{\partial z}{\partial z_0}d\left(\frac{\partial z_0}{\partial z}\right)\right].$$

Ces formules se résument en la suivante :

$$(20)\quad da_{ij}=\frac{\partial x_0}{\partial x_j}d\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_0}\right)+\frac{\partial y_0}{\partial x_j}d\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_0}\right)+\frac{\partial z_0}{\partial x_j}d\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_0}\right)=-\left[\frac{\partial x_i}{\partial x_0}d\left(\frac{\partial x_0}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial x_i}{\partial y_0}d\left(\frac{\partial y_0}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial x_i}{\partial z_0}d\left(\frac{\partial z_0}{\partial x_j}\right)\right].$$

12. *Les coefficients a_{ijk}.* — On remarquera l'analogie que présentent les différentielles da_{ij} avec les rotations infiniment petites relatives au déplacement d'un trièdre trirectangle. Notre calcul est d'ailleurs applicable au cas de deux transformations infiniment voisines quelconques indépendamment des paramètres qui servent à les définir.

Nous supposerons, dans ce qui suit, qu'on prend comme variables indépendantes les coordonnées x, y, z du point M du milieu déformé, et nous poserons

$$da_{ij} = a_{ij1}\,dx + a_{ij2}\,dy + a_{ij3}\,dz. \tag{21}$$

On a, par conséquent, d'après la formule (20),

$$a_{ijk} = -\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_0}\frac{\partial^2 x_0}{\partial x_j\,\partial x_k} + \frac{\partial x_i}{\partial y_0}\frac{\partial^2 y_0}{\partial x_j\,\partial x_k} + \frac{\partial x_i}{\partial z_0}\frac{\partial^2 z_0}{\partial x_j\,\partial x_k}\right) \tag{22}$$
$$(x_1 = x, \qquad x_2 = y, \qquad x_3 = z).$$

De l'équation (22) il résulte immédiatement que, dans les coefficients à trois indices a_{ijk}, on peut intervertir l'ordre des deux derniers indices

$$a_{ijk} = a_{ikj}.$$

Dans les déformations infiniment petites que l'on considère habituellement en élasticité et qu'on suppose définies par des équations de la forme

$$x' = x + u, \qquad y' = y + v, \qquad z' = z + w,$$

les coefficients a_{ijk} se réduisent aux dérivées secondes des déplacements u, v, w.

Le nombre des coefficients indépendants a_{ijk} est égal au nombre des dérivées secondes des coordonnées de l'un des systèmes par rapport à celles de l'autre, c'est-à-dire à 18. Nous étudierons plus loin les relations qui existent entre ces coefficients et les différents éléments de la déformation. Mais nous allons d'abord nous occuper des dilatations dans la déformation différentielle (dT).

13. *Dilatation linéaire dans la déformation* (dT). — Si nous désignons par e la dilatation linéaire d'une fibre dans la déformation homogène (T), par e' la dilatation de la *même fibre* ou *d'une fibre parallèle* dans la déformation (T′), le rapport de déformation correspondant pour la déformation différentielle (dT) sera égal à $\frac{1+e'}{1+e}$. La transformation des cosinus directeurs s'obtiendra par des formules analogues aux équations (7); soient α', β', γ' les cosinus que la transformation (dT) fait correspondre à α, β, γ; nous aurons trois équations de la forme

$$\frac{1+e'}{1+e}\alpha' = (1+da_{11})\alpha + da_{12}\beta + da_{13}\gamma.$$

Mais comme la nouvelle direction est infiniment voisine de la première et que la différence des dilatations est infiniment petite, il est naturel de poser

$$e' = e + de, \qquad \alpha' = \alpha + d\alpha, \qquad \beta' = \beta + d\beta, \qquad \gamma' = \gamma + d\gamma.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, négligeant les infiniment petits du second ordre, nous trouvons

$$\left(1 + \frac{de}{1+e}\right)\alpha + d\alpha = (1+da_{11})\alpha + da_{12}\beta + da_{13}\gamma.$$

Ce qui nous donne enfin le système

$$(23) \qquad \left\{\begin{aligned} d\alpha + \alpha\frac{de}{1+e} &= \alpha\, da_{11} + \beta\, da_{12} + \gamma\, da_{13}, \\ d\beta + \beta\frac{de}{1+e} &= \alpha\, da_{21} + \beta\, da_{22} + \gamma\, da_{23}, \\ d\gamma + \gamma\frac{de}{1+e} &= \alpha\, da_{31} + \beta\, da_{32} + \gamma\, da_{33}. \end{aligned}\right.$$

On retrouve d'ailleurs les mêmes résultats en différentiant les formules (7) où l'on regarde α_0, β_0, γ_0 comme des constantes, et en remplaçant ensuite ces cosinus directeurs de la fibre initiale par leurs valeurs en fonction de α, β, γ données par les équations (8).

Ajoutons membre à membre les équations (23) après les avoir multipliées respectivement par α, β, γ; il vient

$$(24) \qquad \begin{aligned} \frac{de}{1+e} = {} & \alpha^2\, da_{11} + \beta^2\, da_{22} + \gamma^2\, da_{33} + \beta\gamma(da_{32} + da_{23}) \\ & + \gamma\alpha(da_{33} + da_{31}) + \alpha\beta(da_{21} + da_{12}). \end{aligned}$$

La différentielle logarithmique $\frac{de}{1+e}$, prise en considérant α_0, β_0, γ_0 comme des constantes, se calcule donc à l'aide des coefficients de la déformation différentielle (dT) comme la dilatation linéaire dans les déformations infinitésimales ordinaires.

14. *Rotation moyenne*. — La rotation moyenne de la déformation différentielle a pour composantes

$$(25)\qquad \begin{cases} dp_1 = \frac{1}{2}(da_{32} - da_{23}), \\ dp_2 = \frac{1}{2}(da_{13} - da_{31}), \\ \partial p_3 = \frac{1}{2}(da_{21} - da_{12}). \end{cases}$$

Dans le cas des déformations infiniment petites les quantités dp_i sont les différentielles des composantes de la rotation moyenne, mais dans les déformations finies ces quantités ne sont pas des différentielles exactes, du moins en général. Toutefois, nous pouvons, sans inconvénient, désigner par $\frac{\partial p_i}{\partial x}, \frac{\partial p_i}{\partial y}, \frac{\partial p_i}{\partial z}$, les coefficients de dx, dy, dz, respectivement, dans l'expression de dp_i.

On aura donc

$$(26)\quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{1}{2}(a_{321} - a_{231}), \qquad \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{1}{2}(a_{322} - a_{232}), \qquad \frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{1}{2}(a_{323} - a_{233}).$$

Les autres expressions analogues se déduisent de celles-là par une permutation d'indices.

Les identités $a_{ijk} = a_{ikj}$ donnent la relation

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\partial p_3}{\partial z} = 0.$$

Nous croyons utile de faire remarquer ici que si les déformations homogènes (T) et (T′) sont des déformations pures, la rotation de la déformation différentielle (dT) est néanmoins différente de zéro, à moins que les axes des dilatations principales de (T) et de (T′) ne soient parallèles. Ce résultat correspond au fait que les déformations pures finies ne constituent pas en général un groupe de transformations.

15. *Dilatation cubique*. — Soient dV_0 un élément de volume infiniment petit entourant le point M_0 du milieu initial; dV et dV' respectivement,

les transformés de ce même volume par les déformations homogènes (T) et (T′).

La dilatation cubique de la déformation différentielle (dT) est égale à $\frac{dV'}{dV} - 1$. Or, nous avons

$$dV = (1 + \Theta)\, dV_0$$

et

$$dV' = (1 + \Theta + d\Theta)\, dV_0;$$

par conséquent

$$\frac{dV'}{dV} - 1 = \frac{d\Theta}{1 + \Theta}.$$

On sait d'autre part que la dilatation cubique de la déformation (dT) est représentée par la somme

$$da_{11} + da_{22} + da_{33}.$$

D'où résulte l'identité

$$(27) \qquad da_{11} + da_{22} + da_{33} = \frac{d\Theta}{1 + \Theta}.$$

Il est facile de vérifier directement ce résultat par le calcul. En différentiant l'équation

$$1 + \Theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix},$$

on trouve en effet

$$d\Theta = \frac{d(y, z)}{d(y_0, z_0)} d\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) + \frac{d(y, z)}{d(z_0, x_0)} d\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right) + \frac{d(y, z)}{d(x_0, y_0)} d\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right) + \dots.$$

Remplaçons, dans le second membre, les déterminants fonctionnels binaires par leurs valeurs tirées des équations (4), nous avons

$$d\Theta = (1 + \Theta)\left[\frac{\partial x_0}{\partial x} d\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) + \frac{\partial y_0}{\partial x} d\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right) + \frac{\partial z_0}{\partial x} d\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right) + \dots\right];$$

d'où enfin, en vertu des formules (20),

$$d\Theta = (1 + \Theta)(da_{11} + da_{22} + da_{33}).$$

16. *Dilatation superficielle.* — Différentions les équations (23) en y regardant ξ_0, η_0, ζ_0 comme des constantes.

La première donne

$$\left(\frac{1+E}{1+\Theta}\right) d\xi + \xi\, d\left(\frac{1+E}{1+\Theta}\right) = \xi_0\, d\left(\frac{\partial x_0}{\partial x}\right) + \eta_0\, d\left(\frac{\partial y_0}{\partial x}\right) + \zeta_0\, d\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right).$$

En remplaçant dans le second membre de cette équation les cosinus ξ_0, η_0, ζ_0 par leurs valeurs tirées des équations (13′) et procédant de la même manière à l'égard des deux autres équations du système (12′) on obtient le système

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} d\xi + \xi\, d\log\left(\frac{1+E}{1+\Theta}\right) &= -(\xi\, da_{11} + \eta\, da_{21} + \zeta\, da_{31}),\\ d\eta + \eta\, d\log\left(\frac{1+E}{1+\Theta}\right) &= -(\xi\, da_{12} + \eta\, da_{22} + \zeta\, da_{32}),\\ d\zeta + \zeta\, d\log\left(\frac{1+E}{1+\Theta}\right) &= -(\xi\, da_{13} + \eta\, da_{23} + \zeta\, da_{33}). \end{aligned}\right.$$

On déduit de là

$$(29)\qquad \begin{aligned} d\log\left(\frac{1+\Theta}{1+E}\right) = {} & \xi^2\, da_{11} + \eta^2\, da_{22} + \zeta^2\, da_{33} + \eta\zeta(da_{32} + da_{23})\\ & + \zeta\xi(da_{13} + da_{31}) + \xi\eta(da_{21} + da_{12}). \end{aligned}$$

La forme quadratique qui figure au second membre de l'équation (29) est exactement la même que celle qui représente la dilatation linéaire dans la formule (24). Ce résultat s'explique si l'on se reporte à la signification du rapport $\delta = \frac{1+\Theta}{1+E}$ dont nous nous sommes déjà occupés au n° 8. Dans une déformation finie, la dilatation de l'épaisseur d'une couche ne correspond pas en général à une dilatation linéaire, parce que la fibre normale à la couche initiale ne correspond pas à la fibre normale à la couche déformée. Au contraire, dans une déformation infiniment petite, les deux fibres normales se correspondent, ou plus exactement, chacune d'elles correspond à une fibre infiniment voisine de l'autre. Il en résulte que la dilatation de l'épaisseur d'une couche doit être alors représentée par la même forme quadratique que la dilatation linéaire de la fibre normale à cette couche.

17. *Expression des dérivées secondes des coordonnées initiales en fonctions des coefficients a_{ijk}.* — Considérons les trois équations

$$
\begin{aligned}
-da_{1j} &= \frac{\partial x}{\partial x_0} d\left(\frac{\partial x_0}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial x}{\partial y_0} d\left(\frac{\partial y_0}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial x}{\partial z_0} d\left(\frac{\partial z_0}{\partial x_j}\right),\\
-da_{2j} &= \frac{\partial y}{\partial x_0} d\left(\frac{\partial x_0}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial y}{\partial y_0} d\left(\frac{\partial y_0}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial y}{\partial z_0} d\left(\frac{\partial z_0}{\partial x_j}\right),\\
-da_{3j} &= \frac{\partial z}{\partial x_0} d\left(\frac{\partial x_0}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial z}{\partial y_0} d\left(\frac{\partial y_0}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial z}{\partial z_0} d\left(\frac{\partial z_0}{\partial x_j}\right).
\end{aligned}
$$

Ce système peut être résolu par rapport aux trois différentielles qui figurent dans les seconds membres et fournit pour ces quantités les valeurs suivantes :

$$
\begin{aligned}
-d\left(\frac{\partial x_0}{\partial x_j}\right) &= \frac{\partial x_0}{\partial x} da_{1j} + \frac{\partial x_0}{\partial y} da_{2j} + \frac{\partial x_0}{\partial z} da_{3j},\\
-d\left(\frac{\partial y_0}{\partial x_j}\right) &= \frac{\partial y_0}{\partial x} da_{1j} + \frac{\partial y_0}{\partial y} da_{2j} + \frac{\partial y_0}{\partial z} da_{3j},\\
-d\left(\frac{\partial z_0}{\partial x_j}\right) &= \frac{\partial z_0}{\partial x} da_{1j} + \frac{\partial z_0}{\partial y} da_{2j} + \frac{\partial z_0}{\partial z} da_{3j}.
\end{aligned}
$$

Si l'on désigne par u l'une quelconque des coordonnées initiales x_0, y_0, z_0, considérée comme fonction des coordonnées finales x, y, z, on a par conséquent

$$
(30) \qquad -d\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} da_{1j} + \frac{\partial u}{\partial y} da_{2j} + \frac{\partial u}{\partial z} da_{3j}.
$$

En égalant de part et d'autre les coefficients de dx, dy, dz, on obtient l'expression de chacune des dérivées secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$ en fonction linéaire et homogène des coefficients a_{ijk},

$$
(31) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial x} a_{1jk} + \frac{\partial u}{\partial y} a_{2jk} + \frac{\partial u}{\partial z} a_{3jk}\\
&[x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ u = (x_0, y_0, z_0)].
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on connaît en un point les valeurs numériques des dérivées premières $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ et celles des 18 coefficients a_{ijk}, on pourra calculer les 18 valeurs numériques des dérivées secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$. Les coefficients a_{ijk} ne se trouvent donc assujettis à aucune restriction en ce qui concerne leurs *valeurs numériques* en un point fixe. Mais il n'en est pas de même de leurs dérivées. Les 54 dérivées premières s'exprimeront en effet à l'aide des 30 dérivées troisièmes des fonctions x_0, y_0, z_0 et devront, par conséquent, vérifier au moins 24 équations de condition que nous allons déterminer.

18. *Équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les coefficients a_{ijk}.* — Cette question se ramène à la recherche des conditions de compatibilité d'un système d'équations aux dérivées partielles. Si l'on suppose connues les 18 fonctions a_{ijk}, les trois coordonnées initiales x_0, y_0, z_0, considérées comme fonctions des variables x, y, z, vérifient un même système de six équations aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}+\frac{\partial u}{\partial x}a_{1jk}+\frac{\partial u}{\partial y}a_{2jk}+\frac{\partial u}{\partial z}a_{3jk}=0 \qquad (j,\ k=1,2,3). \tag{32}$$

Nous avons donc à exprimer que le système (32) admet trois solutions distinctes dont le déterminant fonctionnel, par rapport aux variables x, y, z, est différent de zéro.

Les conditions relatives aux dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_j}$$

sont des conséquences des identités

$$a_{ijk}=a_{ikj}.$$

Il restera donc à écrire simplement que les dérivées troisièmes satisfont en vertu du système (32) aux conditions

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_l}. \tag{33}$$

Écrivons les équations (32) sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}+\sum_r a_{rjk}\frac{\partial u}{\partial x_r}=0.$$

Différentions par rapport à x_l et remplaçons, dans le résultat, les dérivées secondes par leurs valeurs tirées du même système (32); permutons enfin les indices k et l et écrivons que la condition (32) est vérifiée : nous obtenons l'équation

$$\sum_i \left[\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{ijl}}{\partial x_k} + \sum_r (a_{irk}a_{rjl} - a_{irl}a_{rjk})\right]\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Les coefficients des trois dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ doivent être nuls séparément. En effet, s'il n'en était pas ainsi, les fonctions u vérifieraient une même équation linéaire et homogène du premier ordre, de la forme

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Il serait donc impossible d'en trouver trois solutions, dont le déterminant fonctionnel fût différent de zéro.

Les conditions de compatibilité du système (32) se ramènent donc finalement à la forme

$$(34)\quad \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{ijl}}{\partial x_k} + a_{i1k}a_{1jl} + a_{i2k}a_{2jl} + a_{i3k}a_{3jl} - a_{i1l}a_{1jk} - a_{i2l}a_{2jk} - a_{i3l}a_{3jk} = 0$$

On sait d'ailleurs, par la théorie des équations aux dérivées partielles, que les équations (34) sont suffisantes. Si elles sont vérifiées, les conditions de compatibilité relatives aux dérivées d'ordre supérieur de la fonction inconnue u seront elles-mêmes satisfaites en vertu des équations (34) et de celles qui en résultent par différentiation.

Le nombre des équations (34) est égal à 27; mais si l'on tient compte des trois identités

$$\frac{\partial a_{i12}}{\partial z} - \frac{\partial a_{i13}}{\partial y} + \frac{\partial a_{i23}}{\partial x} - \frac{\partial a_{i21}}{\partial z} + \frac{\partial a_{i31}}{\partial y} - \frac{\partial a_{i32}}{\partial x} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

on reconnaît qu'elles se réduisent à vingt-quatre conditions distinctes.

19. *Déformations qui correspondent à un système donné de coefficients a_{ijk}.* — Supposons les conditions de compatibilité satisfaites.

Pour résoudre le système des six équations (32) on pourra se donner arbitrairement les valeurs de la fonction u et de ses dérivées premières en un point quelconque. Les dérivées d'ordre supérieur sont alors déterminées et s'expriment en fonction linéaire et homogène des dérivées initiales. Le système admet une première solution évidente $U_0 = 1$. Si l'on en connaît trois autres U_1, U_2, U_3, dont le déterminant fonctionnel soit différent de zéro, la solution la plus générale sera de la forme

$$u = a_0 + a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3,$$

a_0, a_1, a_2, a_3 désignant des constantes arbitraires.

Les coordonnées initiales x_0, y_0, z_0 seront donc définies en fonction de x, y, z, par trois expressions de la forme

$$\begin{aligned}
x_0 &= a_0 + a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3,\\
y_0 &= b_0 + b_1 U_1 + b_2 U_2 + b_3 U_3,\\
z_0 &= c_0 + c_1 U_1 + c_2 U_2 + c_3 U_3.
\end{aligned}$$

Les constantes a_i, b_i, c_i étant arbitraires, nous avons cette proposition :

Quand on connaît une déformation quelconque correspondant à un système donné de fonctions a_{ijk} on obtient la déformation la plus générale du système en combinant la déformation considérée avec une déformation homogène arbitraire effectuée sur le milieu initial.

20. *Calcul des différentielles des coefficients de la dilatation linéaire.* — Pour l'étude de diverses questions relatives aux déformations il est utile d'exprimer les différentielles des coefficients de la dilatation en fonction des différentielles da_{ij}. Nous n'entrons pas dans le détail du calcul qui est extrêmement simple. On trouve :

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned}
-de_{11} &= 2(e_{11}\,da_{11} + e_{12}\,da_{21} + e_{13}\,da_{31}),\\
-de_{22} &= 2(e_{21}\,da_{12} + e_{22}\,da_{22} + e_{23}\,da_{32}),\\
-de_{33} &= 2(e_{31}\,da_{13} + e_{32}\,da_{23} + e_{33}\,da_{33}),\\
-de_{23} &= (e_{21}\,da_{13} + e_{22}\,da_{23} + e_{23}\,da_{33}) + (e_{31}\,da_{12} + e_{32}\,da_{22} + e_{33}\,da_{32}),\\
-de_{31} &= (e_{31}\,da_{11} + e_{32}\,da_{21} + e_{33}\,da_{31}) + (e_{11}\,da_{13} + e_{12}\,da_{23} + e_{13}\,da_{33}),\\
-de_{12} &= (e_{11}\,da_{12} + e_{12}\,da_{22} + e_{13}\,da_{32}) + (e_{21}\,da_{11} + e_{22}\,da_{21} + e_{23}\,da_{31}).
\end{aligned}\right.$$

Pour les coefficients de la dilatation superficielle on trouve les résultats suivants :

$$
(36)\quad \left\{
\begin{aligned}
dE_{11} &= 2[E_{11}\,da_{11} + E_{12}\,da_{12} + E_{13}\,da_{13} - E_{11}(da_{11} + da_{22} + da_{33})],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
dE_{23} &= \quad E_{31}\,da_{21} + E_{32}\,da_{22} + E_{33}\,da_{23}\\
&\quad + E_{21}\,da_{31} + E_{22}\,da_{32} + E_{23}\,da_{33} - 2E_{23}(da_{11} + da_{22} + da_{23}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

Une propriété remarquable, commune à toutes ces expressions, c'est que les coefficients des différentielles da_{ij} sont les coefficients mêmes des formes quadratiques qui interviennent dans les formules de la dilatation.

21. *Problème inverse. Expression des coefficients a_{ijk} en fonction des coefficients de la dilatation.* — Nous traiterons le problème inverse seulement pour la dilatation linéaire. Introduisons trois différentielles auxiliaires $d\omega_1$, $d\omega_2$, $d\omega_3$ définies par les formules :

$$
(37)\quad \left\{
\begin{aligned}
e_{31}\,da_{12} + e_{32}\,da_{22} + e_{33}\,da_{32} - (e_{21}\,da_{13} + e_{22}\,da_{23} + e_{23}\,da_{33}) &= d\omega_1,\\
e_{11}\,da_{13} + e_{12}\,da_{23} + e_{13}\,da_{33} - (e_{31}\,da_{11} + e_{32}\,da_{21} + e_{33}\,da_{31}) &= d\omega_2,\\
e_{21}\,da_{11} + e_{22}\,da_{21} + e_{23}\,da_{31} - (e_{11}\,da_{12} + e_{12}\,da_{22} + e_{13}\,da_{32}) &= d\omega_3.
\end{aligned}
\right.
$$

A l'aide des systèmes (35) et (37) nous formons les combinaisons de la forme suivante qui contiennent seulement trois inconnues :

$$
(38)\quad \left\{
\begin{aligned}
e_{11}\,da_{11} + e_{12}\,da_{21} + e_{13}\,da_{31} &= \qquad\qquad\quad -\frac{1}{2}\,de_{11},\\
e_{21}\,da_{11} + e_{22}\,da_{21} + e_{23}\,da_{31} &= \quad \frac{1}{2}\,d\omega_3 - \frac{1}{2}\,de_{12},\\
e_{31}\,da_{11} + e_{32}\,da_{21} + e_{33}\,da_{31} &= -\frac{1}{2}\,d\omega_2 - \frac{1}{2}\,de_{31}.
\end{aligned}
\right.
$$

Le déterminant des équations (38) est égal $\frac{1}{\Delta^2} = \frac{1}{(1+\Theta)^2}$; les mineurs sont les coefficients E_{ik} de la forme adjointe. On a donc

$$
(39)\quad \left\{
\begin{aligned}
-\frac{2\,da_{11}}{(1+\Theta)^2} &= E_{11}\,de_{11} + E_{12}\,de_{12} + E_{13}\,de_{13} + E_{13}\,d\omega_2 - E_{12}\,d\omega_3,\\
-\frac{2\,da_{21}}{(1+\Theta)^2} &= E_{21}\,de_{11} + E_{22}\,de_{12} + E_{23}\,de_{13} + E_{23}\,d\omega_2 - E_{22}\,d\omega_3,\\
-\frac{2\,da_{31}}{(1+\Theta)^2} &= E_{21}\,de_{11} + E_{32}\,de_{12} + E_{33}\,de_{13} + E_{33}\,d\omega_2 - E_{23}\,d\omega_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Les autres quantités da_{ij} se calculeraient évidemment par un procédé semblable. Pour avoir ensuite les expressions des coefficients a_{ijk} il suffit de développer les deux membres de chacune des équations (39) en fonction linéaire de dx, dy, dz, et d'égaler de part et d'autre les coefficients des mêmes différentielles. Il faut donc que nous ayons d'abord le développement de chacune des quantités $d\omega_i$. Or, en se reportant aux équations (35) et (37) on vérifie facilement les identités suivantes :

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} d\omega_1 &= \left(\frac{\partial e_{21}}{\partial z} - \frac{\partial e_{31}}{\partial y}\right) dx + \left(\frac{\partial e_{22}}{\partial z} - \frac{\partial e_{32}}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial e_{23}}{\partial z} - \frac{\partial e_{33}}{\partial y}\right) dz,\\ d\omega_2 &= \left(\frac{\partial e_{31}}{\partial x} - \frac{\partial e_{11}}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial e_{32}}{\partial x} - \frac{\partial e_{12}}{\partial z}\right) dy + \left(\frac{\partial e_{33}}{\partial x} - \frac{\partial e_{13}}{\partial z}\right) dz,\\ d\omega_3 &= \left(\frac{\partial e_{11}}{\partial y} - \frac{\partial e_{21}}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial e_{12}}{\partial y} - \frac{\partial e_{22}}{\partial x}\right) dy + \left(\frac{\partial e_{13}}{\partial y} - \frac{\partial e_{23}}{\partial x}\right) dz. \end{aligned}\right.$$

Portant ces valeurs dans les équations (39) et dans les équations analogues, nous trouvons finalement :

$$(41)\quad \begin{aligned} -\frac{2a_{ijk}}{(1+\Theta)^2} &= \mathrm{E}_{i1}\left(\frac{\partial e_{1j}}{\partial x_k} + \frac{\partial e_{1k}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{jk}}{\partial x_1}\right)\\ &+ \mathrm{E}_{i2}\left(\frac{\partial e_{2j}}{\partial x_k} + \frac{\partial e_{2k}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{jk}}{\partial x_2}\right) + \mathrm{E}_{i3}\left(\frac{\partial e_{3j}}{\partial x_k} + \frac{\partial e_{3k}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{jk}}{\partial x_3}\right). \end{aligned}$$

22. *Relation des coefficients a_{ijk} avec les accolades de Christoffel.* — La forme du résultat offre un intérêt spécial par la manière dont elle se rattache à la théorie des formes quadratiques de différentielles [1].

Considérons une forme quadratique quelconque des différentielles dx_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$f = \sum e_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

dont nous désignerons par E le discriminant et par E_{ik} les coefficients de la forme adjointe.

---

(1) CHRISTOFFEL, *Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* (*Journal de Crelle*, t. 70, p. 46). — LIPSCHITZ, *Unteruchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differentialen* (*Ibid.*, p. 71). — DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Livre II, Chap. II.

En introduisant une notation due à Christoffel, nous poserons

$$\begin{bmatrix} k & l \\ & i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial e_{il}}{\partial x_k} - \frac{\partial e_{kl}}{\partial x_i}\right),$$

et ensuite

$$\begin{Bmatrix} j & k \\ & i \end{Bmatrix} = \sum \frac{E_{ir}}{E}\begin{bmatrix} j & k \\ & r \end{bmatrix}.$$

Appliquons ces formules à la forme quadratique (10′) qui représente l'élément linéaire du milieu initial en fonction des coordonnées du milieu déformé

$$\Sigma\, e_{ik}\, dx_i\, dx_k = ds_0^2;$$

et rappelons que le discriminant E de cette forme est égal à $\frac{1}{(1+\Theta)^2}$.

Nous trouvons immédiatement

$$a_{ijk} = -\begin{Bmatrix} j & k \\ & i \end{Bmatrix}.$$

Nos coefficients à trois indices coïncident donc, au signe près, avec les accolades de Christoffel relatives à la forme quadratique considérée. Cette rencontre est particulièrement intéressante, parce que les points de départ sont entièrement différents.

La détermination de la déformation quand la dilatation est donnée est un problème bien connu. Les résultats qui précèdent en donnent la solution immédiate. On calcule d'abord les coefficients a_{ijk} par les formules (41) ou à l'aide des accolades de Christoffel, et l'on forme les équations linéaires (32). La discussion du n° 19 s'applique. Toutefois les constantes a_0, a_1, ... ne sont plus entièrement arbitraires, mais sont assujetties à la condition de donner à l'élément linéaire une valeur déterminée. Il en résulte que, si l'on connaît une solution du problème, tous les autres s'en déduisent par un déplacement euclidien.

CHAPITRE III.

LES COVARIANTS FONDAMENTAUX DU SECOND ORDRE.

23. La considération des covariants fondamentaux, dont nous allons nous occuper, permet d'exprimer les dix-huit coefficients a_{ijk} en fonctions des coefficients des trois formes algébriques dont chacune a une signification géométrique et mécanique indépendante des axes de coordonnées. La première est une forme ternaire cubique qui représente ce que nous appelons la *dilatation seconde;* elle comporte dix coefficients; la seconde est une forme quadratique qui définit la distribution des torsions mécaniques; les six coefficients de cette forme sont liés par une relation linéaire, ce qui réduit à cinq le nombre de paramètres dont elle dépend. La troisième, enfin, est une forme linéaire dont la considération peut être remplacée par celle d'un vecteur; elle dépend de trois paramètres indépendants. Le nombre total des arbitraires qui figurent dans l'expression des trois formes considérées est donc égal à dix-huit, comme celui des coefficients a_{ijk}.

L'ensemble de ces trois formes présente une analogie évidente avec les quantités géométriques introduites par M. Woldemar Voigt dans l'étude des relations linéaires entre un vecteur et un tenseur.

24. *Dilatation seconde.* — Si l'on remplace, dans l'expression de la différentielle logarithmique $\frac{de}{1+e}$, définie par l'équation (24), les quantités da_{ik} par leurs valeurs (21), on obtient une expression qui est linéaire et homogène par rapport aux différentielles dx, dy, dz; supposons maintenant que la direction du déplacement infiniment petit défini par ces différentielles coïncide avec la direction α, β, γ;

on aura alors, en désignant par ds l'arc élémentaire correspondant à ce déplacement,

$$(42)\qquad \frac{1}{1+e}\frac{de}{ds} = \Sigma a_{ijk}\alpha_i\alpha_j\alpha_k \qquad (i, j, k = 1, 2, 3),$$
$$(\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = \beta,\ \alpha_3 = \gamma).$$

Nous donnons le nom de *dilatation seconde* à cette dérivée logarithmique $\frac{1}{1+e}\frac{de}{ds}$, prise comme nous l'avons déjà indiqué en regardant α_0, β_0, γ_0 comme des constantes, c'est-à-dire en se déplaçant dans le milieu déformé suivant les lignes qui correspondent aux droites du milieu initial. Nous désignerons par $D_2(\alpha, \beta, \gamma)$ la forme cubique des cosinus qui représente la dilatation seconde dans la formule (42) et nous posons

$$(43)\qquad D_2(\alpha, \beta, \gamma) = \Sigma c_{111}\alpha^3 + 3\Sigma c_{112}\alpha^2\beta + 6c_{123}\alpha\beta\gamma;$$

les coefficients c_{ijk} ne changent pas quand on permute leurs trois indices d'une manière quelconque.

Leurs valeurs sont exprimées en fonction des a_{ijk} par la formule

$$(44)\qquad 3c_{ijk} = a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij}.$$

Suivant un procédé couramment employé en Géométrie et en Mécanique on peut représenter la variation des dilatations secondes en un point M, en fonction de la direction α, β, γ, par une surface du troisième ordre que nous appelons l'*indicatrice* des dilatations secondes. Il suffit de porter à partir du point M (ou de toute autre origine) et dans la direction considérée, un vecteur MI dont la longueur est définie par l'égalité

$$\mathrm{MI} = \frac{1}{\sqrt[3]{D_2(\alpha, \beta, \gamma)}}.$$

Quand la direction varie, le point I décrit l'indicatrice. Le cône asymptote de l'indicatrice des dilatations secondes est formé par les tangentes aux fibres pour lesquelles la dilatation seconde est nulle.

Cette indicatrice est indépendante des axes de référence au même titre que l'ellipsoïde des dilatations.

La forme $D_2(\alpha, \beta, \gamma)$ est un covariant différentiel de la déformation par rapport au groupe des déplacements euclidiens, c'est-à-dire, en termes plus simples mais équivalents, par rapport aux transformations de coordonnées.

Les invariants propres de la formule D_2, ou les invariants simultanés de cette forme et de toute autre forme invariante sont donc des invariants différentiels de la déformation par rapport au groupe euclidien.

25. *Définition de la torsion.* — Dans la mécanique des corps minces *la torsion* d'une fibre rectiligne est la déformation qui se produit quand l'une des extrémités de la fibre restant fixe, la section droite de l'autre extrémité tourne d'un certain angle autour de l'axe de la fibre.

Telle serait, pour une fibre dirigée suivant l'axe Oz, la déformation définie par les équations suivantes :

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 \cos\frac{z_0}{a} + y_0 \sin\frac{z_0}{a}, \\ y &= x_0 \sin\frac{z_0}{a} + y_0 \cos\frac{z_0}{a}, \\ z &= z_0 ; \end{aligned} \right.$$

la section droite menée par l'origine reste fixe; les autres tournent d'un angle proportionnel à la cote z_0.

La considération de la déformation différentielle (dT) permet d'étendre facilement cette notion de torsion aux milieux continus à trois dimensions.

Remarquons d'abord que, dans le voisinage d'un point M du milieu, l'orientation des fibres ou des feuillets issus de ce point est déterminée par la déformation homogène (T) tangente en M. Cela posé, considérons une fibre infiniment petite MM′ issue de M. La déformation (T) étendue à tout le milieu amène le point M dans sa position définitive et oriente tous les éléments infinitésimaux issus de ce point. Si, laissant ensuite le point M fixe, ainsi que les directions issues de ce point, on applique aux éléments issus de M′ la déformation différentielle (dT), l'orientation finale de ces derniers éléments se trouvera également obtenue. La rotation moyenne de la déformation (dT) n'a pas en général son axe dirigé suivant MM′, mais on peut la décomposer en deux rotations dont les axes sont respectivement parallèle et perpendiculaire à MM'. C'est la première composante qui produit la torsion de la fibre.

D'après cela nous appellerons *torsion totale* de la fibre élémentaire MM' la projection de la rotation moyenne de la déformation infinitésimale correspondante (dT) sur la direction de la fibre, et *torsion moyenne*, le rapport de la torsion totale à la longueur de la fibre.

Pour les fibres élémentaires nous n'aurons guère à considérer que la torsion moyenne, que nous appellerons alors plus simplement la *torsion de la fibre* (¹).

26. *Expression analytique de la torsion.* — L'expression analytique de la torsion résulte immédiatement de ces considérations. Conservant les notations du Chapitre II, nous désignons par ds la longueur de la fibre élémentaire MM', par α, β, γ ses cosinus directeurs et par $\tau(\alpha, \beta, \gamma)$ la torsion moyenne correspondante. La torsion totale sera donc :

$$\tau\, ds = \alpha\, dp_1 + \beta\, dp_2 + \gamma\, dp_3,$$

et la torsion moyenne

$$\tau = \alpha \frac{dp_1}{ds} + \beta \frac{dp_2}{ds} + \gamma \frac{dp_3}{ds}.$$

Or, on a

$$\frac{dp_i}{ds} = \alpha \frac{\partial p_i}{\partial x} + \beta \frac{\partial p_i}{\partial y} + \gamma \frac{\partial p_i}{\partial z},$$

et, par conséquent, il vient

$$(46)\quad \begin{aligned} \tau(\alpha, \beta, \gamma) = {} & \alpha^2 \frac{\partial p_1}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial p_2}{\partial y} + \gamma^2 \frac{\partial p_3}{\partial z} \\ & + \beta\gamma\left(\frac{\partial p_3}{\partial y} + \frac{\partial p_2}{\partial z}\right) + \gamma\alpha\left(\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\partial p_3}{\partial x}\right) + \alpha\beta\left(\frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

L'expression de la torsion est donc une fonction du second degré des cosinus directeurs de la fibre; elle est formée avec les coefficients différentiels des rotations dp_i, comme la dilatation linéaire, dans une déformation infinitésimale, avec les dérivées partielles des déplace-

(¹) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 mai 1910 et 10 avril 1911.

ments. Nous poserons

$$\tau(\alpha, \beta, \gamma) = \tau_{11}\alpha^2 + \tau_{22}\beta^2 + \tau_{33}\gamma^2 + 2\tau_{23}\beta\gamma + 2\tau_{31}\gamma\alpha + 2\tau_{12}\alpha\beta. \tag{47}$$

Les coefficients τ_{ij} s'expriment immédiatement soit à l'aide des coefficients différentiels $\dfrac{dp_i}{dx_k}$, soit à l'aide des coefficients α_{ijk} :

$$\left\{\begin{aligned}
\tau_{11} &= \frac{\partial p_1}{\partial x} = a_{321} - a_{231},\\
\tau_{22} &= \frac{\partial p_2}{\partial y} = a_{132} - a_{312},\\
\tau_{33} &= \frac{\partial p_3}{\partial z} = a_{213} - a_{123},\\
2\tau_{23} &= \frac{\partial p_3}{\partial y} + \frac{\partial p_2}{\partial z} = a_{212} - a_{122} + a_{133} - a_{313},\\
2\tau_{31} &= \frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\partial p_3}{\partial x} = a_{323} - a_{233} + a_{211} - a_{121},\\
2\tau_{12} &= \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial y} = a_{131} - a_{311} + a_{321} - a_{321}.
\end{aligned}\right. \tag{48}$$

Ils satisfont identiquement, comme dans le cas des déformations infinitésimales, à la relation

$$\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 0. \tag{49}$$

27. *Indicatrice des torsions.* — La variation des torsions en un point, en fonction de la direction des fibres, est représentée par une indication quadratique dont l'équation, quand on prend le point M comme origine, est de la forme

$$\tau(x, y, z) = \pm 1.$$

Le cône asymptote de l'indicatrice est toujours réel et capable d'un trièdre trirectangle inscrit. Il est formé par les tangentes aux fibres pour lesquelles la torsion mécanique en M est nulle. C'est pourquoi nous lui avons donné le nom de *cône d'intorsion*.

La considération de l'indicatrice des torsions met immédiatement en évidence les éléments qui jouissent de quelque propriété importante relativement à la torsion. Nous appelons *axes* et *plans principaux* de la torsion les axes et les plans principaux de l'indicatrice, et *torsions principales* les torsions des fibres dirigées suivant les axes.

28. *Caractère dissymétrique de la torsion.* — En vertu de la relation (49), la somme algébrique des torsions principales est nulle.

Le signe de la torsion d'une fibre dépend essentiellement du sens choisi pour définir les rotations positives. Il varie, par conséquent, avec l'orientation du trièdre des axes de coordonnées. Une transformation par symétrie, ayant pour effet de changer le sens des rotations, change aussi les signes des torsions. Si nous donnons, avec M. Voigt, le nom de *tenseurs* aux quantités géométriques définies par des formes quadratiques des cosinus, nous voyons donc que la torsion est représentée par un tenseur, mais c'est un tenseur axial.

Le caractère dissymétrique de la torsion est d'ailleurs mis en évidence par les formules (48), quand on considère les expressions des coefficients τ_{ij} en fonction des coefficients a_{ijk}.

29. *Expression des coefficients de la torsion en fonction de ceux de la dilatation.* — En remplaçant dans les formules (48) les coefficients a_{ijk} par leurs valeurs tirées des équations (41), on obtient les valeurs des coefficients τ_{ij} en fonction des coefficients de la dilatation linéaire. Nous aurons, suivant la notation de Christoffel,

$$\tau_{11} = \begin{Bmatrix} 3 & & 1 \\ & 2 & \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 & & 1 \\ & 3 & \end{Bmatrix},$$

$$\tau_{23} = \begin{Bmatrix} 1 & & 3 \\ & 2 & \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 3 & & 3 \\ & 1 & \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 & & 2 \\ & 1 & \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & & 2 \\ & 3 & \end{Bmatrix}.$$

Dans le cas des déformations infinitésimales, ces expressions se simplifient et l'on a simplement

$$\tau_{11} = \begin{bmatrix} 3 & & 1 \\ & 2 & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & & 1 \\ & 3 & \end{bmatrix},$$

$$\tau_{23} = \begin{bmatrix} 1 & & 3 \\ & 3 & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & & 3 \\ & 1 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & & 2 \\ & 1 & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & & 2 \\ & 3 & \end{bmatrix},$$

les crochets remplaçant alors les accolades.

Si l'on voulait appliquer ces formules aux coefficients de la dilatation, tels qu'on les considère habituellement dans la théorie de l'élasticité, il faudrait observer que tous nos calculs ont été effectués sur la forme quadratique de la formule (10), qui donne le rapport $\frac{1}{(1+e)^2}$. La valeur approchée de ce rapport, dans les déformations infinitésimales, est $1-2e$, tandis que la valeur approchée du rapport inverse, $(1+e)^2$, que l'on considère dans les calculs ordinaires, est $1+2e$. Il en résulte un changement de signe dont il y aurait lieu de tenir compte dans les calculs.

30. *Application à un exemple.* — L'application de notre théorie de la torsion à un exemple montrera que notre définition n'est pas arbitraire, mais qu'elle correspond bien au sens ordinaire du mot *torsion*. Considérons d'abord la déformation définie par les équations (45). La déformation inverse serait donnée par les équations

$$\begin{aligned} x_0 &= \quad x\cos\frac{z}{a} + y\sin\frac{z}{a}, \\ y_0 &= -x\sin\frac{z}{a} + y\cos\frac{z}{a}, \\ z_0 &= z. \end{aligned}$$

Le calcul de l'élément linéaire donne

$$dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{x^2+y^2+a^2}{a^2}dz^2 + \frac{2y}{a}dx\,dz - \frac{2x}{a}dy\,dz.$$

Pour l'expression des coefficients da_{ij} de la déformation différentielle $(d\mathrm{T})$, on trouve

$$\begin{gathered} da_{11} = da_{22} = da_{33} = 0, \\ da_{12} = -\frac{dz}{a}, \qquad da_{13} = -\frac{dy}{a} + x\frac{dz}{a^2}, \\ da_{21} = \frac{dz}{a}, \qquad da_{23} = \frac{dx}{a} + y\frac{dz}{a^2}, \\ da_{31} = da_{32} = 0. \end{gathered}$$

Les composantes de la rotation infiniment correspondante sont, par conséquent,

$$dp_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{a} + y\frac{dz}{a^2}\right),$$
$$dp_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{dy}{a} + x\frac{dz}{a^2}\right),$$
$$dp_3 = \frac{dz}{a};$$

d'où l'on tire l'expression de la torsion

$$\tau(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\gamma^2}{a} - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2+\beta^2}{a} + \frac{(\beta x - \alpha y)\gamma}{a^2}. \tag{50}$$

La formule (50) montre que la torsion des fibres parallèles à Oz est constante et égale à $\frac{1}{a}$. Cette quantité représente bien le rapport obtenu en divisant l'angle de rotation de chaque section droite par la distance de la section considérée à la section droite invariable $z = 0$. Les fibres perpendiculaires à Oz ont aussi une torsion constante; celle-ci est de signe contraire à la première et égale à $-\frac{1}{2a}$.

Il serait facile d'achever l'application à la déformation (45) des formules générales que nous avons établies et d'en vérifier l'exactitude sur cet exemple simple. J'ai considéré, dans mon précédent Mémoire, d'autres exemples relatifs au cas des déformations infinitésimales.

31. *Rotation dérivée.* — Appelons *rotation dérivée* suivant une direction donnée α, β, γ, la rotation ayant pour composantes les rapports $\frac{dp_1}{ds}, \frac{dp_2}{ds}, \frac{dp_3}{ds}$, où ds désigne un arc élémentaire porté dans la direction considérée. Les composantes de la rotation dérivée sont, par conséquent, les valeurs suivantes :

$$\frac{dp_1}{ds} = \alpha\frac{\partial p_1}{\partial x} + \beta\frac{\partial p_1}{\partial y} + \gamma\frac{\partial p_1}{\partial z},$$
$$\frac{dp_2}{ds} = \alpha\frac{\partial p_2}{\partial x} + \beta\frac{\partial p_2}{\partial y} + \gamma\frac{\partial p_2}{\partial z},$$
$$\frac{dp_3}{ds} = \alpha\frac{\partial p_3}{\partial x} + \beta\frac{\partial p_3}{\partial y} + \gamma\frac{\partial p_3}{\partial z}.$$

La considération de la torsion permet d'appliquer à la rotation dérivée le procédé de décomposition de Helmholtz en parties symétrique et dissymétrique.

Posons

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_3}{\partial y} - \frac{\partial p_2}{\partial z}\right),$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_3}{\partial x}\right),$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial p_1}{\partial y}\right).$$

Les expressions des rapports différentiels $\frac{dp_i}{ds}$ pourront alors s'écrire

$$\frac{dp_1}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} + \varphi_2\gamma - \varphi_3\beta,$$

$$\frac{dp_2}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial \tau}{\partial \beta} + \varphi_3\alpha - \varphi_1\gamma,$$

$$\frac{dp_3}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial \tau}{\partial \gamma} + \varphi_1\beta - \varphi_2\alpha.$$

Le vecteur Φ, qui a pour composantes φ_1, φ_2, φ_3, se présente comme la rotation de la rotation; il intervient dans l'étude de la flexion où nous le retrouverons. Avec la dilatation seconde et la torsion, il constitue le système de nos trois covariants fondamentaux du second ordre.

Lorsqu'on effectue une transformation de coordonnées, les coefficients de chacun de ces trois covariants changent de valeurs, mais les nouveaux coefficients de chaque forme transformée s'expriment uniquement à l'aide des coefficients de la forme analogue relative au premier système d'axes.

La considération du vecteur Φ peut évidemment être remplacée, au point de vue algébrique, par celle de la forme linéaire du cosinus

$$\varphi_1\alpha + \varphi_2\beta + \varphi_3\gamma.$$

32. *Calcul des composantes du vecteur* Φ. — Les expressions des composantes φ_1, φ_2, φ_3 du vecteur Φ s'obtiennent immédiatement en remplaçant les coefficients différentiels de la rotation par leurs valeurs

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_3}{\partial y} - \frac{\partial p_2}{\partial z}\right) = \frac{1}{4}(a_{212} - a_{122} - a_{133} + a_{313}),\\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_3}{\partial x}\right) = \frac{1}{4}(a_{323} - a_{233} - a_{211} + a_{121}),\\ \varphi_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial p_1}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}(a_{131} - a_{311} - a_{322} + a_{232}). \end{aligned}\right.$$

Si l'on ajoute et retranche la même quantité a_{111} dans l'expression de φ_1, on trouve, en tenant compte de la permutabilité des deux derniers indices des coefficients a_{ijk},

$$4\varphi_1 = a_{111} + a_{221} + a_{331} - (a_{111} + a_{122} + a_{133}).$$

Or, on tire de l'équation (27),

$$\frac{\partial \log(1+\Theta)}{\partial u} = a_{111} + a_{221} + a_{331}.$$

Il reste à transformer la somme $a_{111} + a_{122} + a_{133}$.

Désignons en général par $\Delta(u)$ le paramètre différentiel du second ordre de Lamé relatif à la fonction u :

$$\Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

En remplaçant les coefficients a_{ijk} par leurs valeurs, nous trouvons

$$a_{111} + a_{122} + a_{133} = \frac{\partial x}{\partial x_0}\Delta(x_0) + \frac{\partial x}{\partial y_0}\Delta(y_0) + \frac{\partial x}{\partial z_0}\Delta(z_0),$$

et les équations (51) deviennent

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} 4\varphi_1 &= \frac{1}{1+\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x_0}\Delta(x_0) + \frac{\partial x}{\partial y_0}\Delta(y_0) + \frac{\partial x}{\partial z_0}\Delta(z_0),\\ 4\varphi_2 &= \frac{1}{1+\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x_0}\Delta(x_0) + \frac{\partial y}{\partial y_0}\Delta(y_0) + \frac{\partial y}{\partial z_0}\Delta(z_0).\\ 4\varphi_3 &= \frac{1}{1+\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial x_0}\Delta(x_0) + \frac{\partial z}{\partial y_0}\Delta(y_0) + \frac{\partial z}{\partial z_0}\Delta(z_0). \end{aligned}\right.$$

Dans le cas des déformations infinitésimales, ces formules se réduisent à la forme suivante, que j'ai donnée dans mon premier Mémoire :

$$4\varphi_1 = \frac{\partial\Theta}{\partial x} - \Delta u,$$

$$4\varphi_2 = \frac{\partial\Theta}{\partial y} - \Delta v,$$

$$4\varphi_3 = \frac{\partial\Theta}{\partial z} - \Delta w.$$

Dans les équations (52), les dérivées $\frac{\partial x}{\partial x_0}$, ..., prises par rapport aux variables initiales, pourraient être remplacées par leurs valeurs tirées du système inverse des formules (4)

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = (1+\Theta)\frac{d(y_0, z_0)}{d(y, z)}, \qquad \ldots,$$

de manière que les expressions transformées ne contiennent plus que des dérivées prises par rapport au même système de variables x, y, z. On trouverait ainsi

$$4\varphi_1 = \frac{1}{1+\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial x} + (1+\Theta)\begin{vmatrix} \Delta(x_0) & \Delta(y_0) & \Delta(z_0) \\ \frac{\partial x_0}{\partial y} & \frac{\partial y_0}{\partial y} & \frac{\partial z_0}{\partial y} \\ \frac{\partial x_0}{\partial z} & \frac{\partial y_0}{\partial z} & \frac{\partial z_0}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

33. *Expression des coefficients a_{ijk} en fonction des coefficients des covariants.* — Les équations (44), (48) et (51) expriment les composantes des trois covariants en fonction des coefficients a_{ijk}; on peut inversement exprimer ces coefficients à l'aide des covariants. Le calcul

est très simple et donne les résultats suivants :

$$
(53)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&a_{111} = c_{111},\\
&a_{122} = c_{122} - \frac{4}{3}\tau_{23} - \frac{4}{3}\varphi_1,\\
&a_{133} = c_{133} + \frac{4}{3}\tau_{23} - \frac{4}{3}\varphi_1,\\
&a_{123} = a_{132} = c_{123} - \frac{2}{3}\tau_{33} + \frac{2}{3}\tau_{22},\\
&a_{113} = a_{131} = c_{113} + \frac{2}{3}\tau_{12} + \frac{2}{3}\varphi_3,\\
&a_{112} = a_{121} = c_{112} + 2\,\tau_{31} + \frac{2}{3}\varphi_2,\\
&a_{211} = c_{112} + \frac{4}{3}\tau_{31} - \frac{4}{3}\varphi_2,\\
&a_{222} = c_{222},\\
&a_{233} = c_{233} - \frac{4}{3}\tau_{31} - \frac{4}{3}\varphi_2,\\
&a_{223} = a_{232} = c_{223} - \frac{2}{3}\tau_{12} + \frac{2}{3}\varphi_3,\\
&a_{231} = a_{213} = c_{123} - \frac{2}{3}\tau_{11} + \frac{2}{3}\tau_{33},\\
&a_{212} = a_{221} = c_{122} + \frac{2}{3}\tau_{23} + \frac{2}{3}\varphi_1,\\
&a_{311} = c_{113} - \frac{4}{3}\tau_{12} - \frac{4}{3}\varphi_3,\\
&a_{322} = c_{223} + \frac{4}{3}\tau_{12} - \frac{4}{3}\varphi_3,\\
&a_{333} = c_{333},\\
&a_{323} = a_{332} = c_{233} + \frac{2}{3}\tau_{31} + \frac{2}{3}\varphi_2,\\
&a_{331} = a_{313} = c_{331} + \frac{2}{3}\tau_{23} + \frac{2}{3}\varphi_1,\\
&a_{312} = a_{321} = c_{123} - \frac{2}{3}\tau_{22} + \frac{2}{3}\tau_{11}.
\end{aligned}
\right.
$$

L'ensemble de ces dix-huit formules se résume en trois identités dont nous écrivons seulement la première :

$$
(54)\qquad
\begin{aligned}
&a_{111}\alpha^2 + a_{122}\beta^2 + a_{133}\gamma^2 + 2a_{123}\beta\gamma + 2a_{131}\gamma\alpha + 2a_{112}\alpha\beta\\
&\quad = \frac{1}{3}\frac{\partial D_2}{\partial\alpha} + \frac{2}{3}(\gamma\tau'_\beta - \beta\tau'_\gamma) - \frac{4}{3}\varphi_1 + \frac{4}{3}\alpha(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3).
\end{aligned}
$$

Les deux autres identités se déduisent de celle-là par permutation des indices et des cosinus α, β, γ.

CHAPITRE IV.

FLEXION DES FIBRES ET DES FEUILLETS.

34. Composition des incurvations. — 35. Autre représentation de la courbure. — 36. Courbure d'une fibre déformée. — 37. Calcul de la différentielle logarithmique $\frac{de}{1+e}$. — 38. Décomposition de la courbure. Définition de la flexion. — 39. Décomposition de la flexion totale en ses trois composantes. — 40. Autre forme des formules. — 41. Éléments géométriques de la flexion. — 42. Incurvation et flexion des feuillets. — 43. Remarque sur la transformée de la courbure initiale. — 44. Flexion géodésique.

34. *Composition des incurvations.* — On sait que l'étude du mouvement du trièdre de Serret, lié à une courbe gauche, conduit à représenter la courbure par une rotation [1], dont l'axe est perpendiculaire au plan osculateur et dont la vitesse angulaire est mesurée par l'inverse du rayon de courbure. Ce mode de représentation se prête à la composition par addition géométrique.

Soit R la rotation figurative de la courbure ω d'un arc infiniment petit ds. Si R est la résultante de deux autres rotations R$'$, R$''$ ayant leurs axes dans le plan normal de l'élément ds, la courbure correspondante ω pourra elle-même être considérée comme la résultante des courbures ω' et ω'', figurées respectivement par les rotations R$'$, R$''$.

Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point M de la courbe; par

$$\begin{array}{lll} \alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}$$

les systèmes de cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale, et par ρ le rayon de courbure. Les compo-

[1] DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, Livre I, Chap. I.

santes de la rotation figurative de la courbure, suivant les axes de coordonnées sont :

$$R_1 = \frac{\alpha''}{\rho}, \qquad R_2 = \frac{\beta''}{\rho}, \qquad R_3 = \frac{\gamma''}{\rho}.$$

On peut représenter, à l'aide de ces quantités, tous les éléments relatifs à la courbure.

L'axe de courbure est le lieu des points qui restent immobiles dans le mouvement résultant de la rotation R, et d'une translation dont la vitesse, égale à l'unité, est dirigée suivant la tangente. Si l'on appelle X, Y, Z les coordonnées courantes, les points de l'axe vérifieront par conséquent les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha + R_2(Z-z) - R_3(Y-y) &= 0, \\ \beta + R_3(X-x) - R_1(Z-z) &= 0, \\ \gamma + R_1(Y-y) - R_2(X-x) &= 0, \end{aligned}$$

qui sont compatibles et se réduisent à deux conditions distinctes en vertu de l'égalité

$$R_1\alpha + R_2\beta + R_3\gamma = 1.$$

Ces équations peuvent être remplacées par le système

$$\alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z) = 0, \tag{55}$$

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} + 1 = 0, \tag{56}$$

dont la signification géométrique est évidente.

A chaque courbure composante R′, R″, ..., on peut faire correspondre des éléments analogues à ceux de la courbure résultante : un plan de courbure, perpendiculaire à l'axe de la rotation figurative; un centre, un rayon, un cercle, un axe de courbure et même une normale principale de courbure.

Dans mon précédent Mémoire sur les déformations infinitésimales, j'ai indiqué une construction très simple de l'axe de la courbure résultante de deux courbures données, connaissant les axes des courbures composantes, et j'ai montré que cette construction est la transformée par polaires réciproques de l'addition géométrique des valeurs.

35. *Autre représentation de la courbure.* — Au point de vue de la composition des courbures, il existe une seconde représentation qui offre les mêmes avantages que la rotation figurative. Elle consiste à porter sur la normale principale de courbure une longueur mesurée par la valeur de cette courbure. Cette longueur peut, d'ailleurs, être prise soit dans le sens du rayon, soit dans le sens opposé, pourvu que l'on adopte la même convention pour toutes les courbures composantes. Nous la supposerons, en général, portée dans le sens opposé au rayon. En désignant par H_1, H_2, H_3 les composantes du vecteur ainsi obtenu, on aura donc

$$H_1 = -\frac{\alpha'}{\rho}, \qquad H_2 = -\frac{\beta'}{\rho}, \qquad H_3 = -\frac{\gamma'}{\rho}.$$

Les relations entre le nouveau vecteur figuratif H (H_1, H_2, H_3) et la rotation R (R_1, R_2, R_3) sont données par les formules

$$\begin{aligned} R_1 &= H_2\gamma - H_3\beta, & H_1 &= \beta R_3 - \gamma R_2, \\ R_2 &= H_3\alpha - H_1\gamma, & H_2 &= \gamma R_1 - \alpha R_3, \\ R_3 &= H_1\beta - H_2\alpha, & H_3 &= \alpha R_2 - \beta R_1. \end{aligned}$$

L'équation (56) devient, par l'emploi des nouvelles notations,

$$(56') \qquad H_1(X - x) + H_2(Y - y) + H_3(Z - z) + 1 = 0.$$

Elle représente le plan polaire de l'extrémité du vecteur H par rapport à la sphère imaginaire

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 + 1 = 0.$$

Il résulte de là que l'axe de courbure est la polaire de l'extrémité du vecteur H par rapport au cercle imaginaire obtenu en coupant la sphère précédente par le plan normal de la courbe. Si l'on représente la composition des courbures, d'une part par l'addition géométrique des vecteurs correspondants H', H'', ... et, d'autre part, par la construction des axes indiquée dans mon précédent Mémoire [1], la correspondance par polaires réciproques entre les deux figures est alors évidente.

36. *Courbure d'une fibre déformée.* — Les formules relatives à la transformation de la courbure des fibres s'obtiennent facilement en faisant usage des formules de Frenet. Nous conservons les notations indiquées au n° 35 pour la courbure et les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale dans le milieu déformé. Les mêmes lettres affectées de l'indice zéro désigneront les quantités analogues du milieu initial. Nous avons établi au n° 5 les équations de la forme

$$(1+e)\alpha = \frac{\partial x}{\partial x_0}\alpha_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0}\beta_0 + \frac{\partial x}{\partial z_0}\gamma_0.$$

Différentions, en regardant α_0, β_0, γ_0 comme variables et en tenant compte des formules de Frenet; nous trouvons

$$(57)\qquad (1+e)\frac{\alpha' \, ds}{\rho} + \alpha \, de = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\alpha'_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0}\beta'_0 + \frac{\partial x}{\partial z_0}\gamma'_0\right)\frac{ds_0}{\rho_0} + \alpha_0 \, d\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) + \beta_0 \, d\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right) + \gamma_0 \, d\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right).$$

Si l'on remplace α_0, β_0, γ_0 par leurs valeurs tirées des formules (8), il vient

$$\alpha_0 \, d\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) + \beta_0 \, d\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right) + \gamma_0 \, d\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right) = (1+e)(\alpha \, da_{11} + \beta \, da_{12} + \gamma \, da_{13}).$$

Il reste à transformer la parenthèse

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}\alpha'_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0}\beta'_0 + \frac{\partial x}{\partial z_0}\gamma'_0.$$

La déformation homogène (T), tangente en M, fait correspondre à la normale principale initiale une direction MN_1 qui diffère, en général, de la normale principale de la courbe déformée. Nous appellerons

(1) *Annales de l'École Normale*, 1911, p. 541.

α'_1, β'_1, γ'_1 les cosinus directeurs de cette transformée et e_1 la dilatation linéaire de la fibre élémentaire correspondante; nous aurons alors, en vertu des équations (7) du n° 5,

$$(1+e_1)\alpha'_1 = \frac{\partial x}{\partial x_0}\alpha'_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0}\beta'_0 + \frac{\partial x}{\partial z_0}\gamma'_0.$$

L'équation (57) et les deux autres équations analogues deviennent donc, quand on en divise les deux membres par $(1+e)ds = (1+e)^2 ds_0$

$$(58)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\alpha'}{\rho} + \frac{\alpha}{1+e}\frac{de}{ds} &= \frac{1+e_1}{(1+e)^2}\frac{\alpha'_1}{\rho_0} + \alpha\frac{da_{11}}{ds} + \beta\frac{da_{12}}{ds} + \gamma\frac{da_{13}}{ds}, \\ \frac{\beta'}{\rho} + \frac{\beta}{1+e}\frac{de}{ds} &= \frac{1+e_1}{(1+e)^2}\frac{\beta'_1}{\rho_0} + \alpha\frac{da_{21}}{ds} + \beta\frac{da_{22}}{ds} + \gamma\frac{da_{23}}{ds}, \\ \frac{\gamma'}{\rho} + \frac{\gamma}{1+e}\frac{de}{ds} &= \frac{1+e_1}{(1+e)^2}\frac{\gamma'_1}{\rho_0} + \alpha\frac{da_{31}}{ds} + \beta\frac{da_{32}}{ds} + \gamma\frac{da_{33}}{ds}. \end{aligned}\right.$$

37. *Calcul de la différentielle logarithmique* $\frac{de}{1+e}$. — La dérivée logarithmique $\frac{1}{1+e}\frac{de}{ds}$, qui figure dans les premiers membres des équations (58), est prise en considérant α_0, β_0, γ_0 comme variables; elle diffère par conséquent de la dilatation seconde, qui est une dérivée de la même quantité, mais prise en regardant α_0, β_0, γ_0 comme des constantes. La différence entre ces deux quantités se calcule facilement à l'aide des équations (58) qu'on ajoute membre à membre après les avoir multipliées respectivement par α, β, γ.

On trouve

$$\frac{1}{1+e}\frac{de}{ds} = \frac{(1+e_1)(\alpha\alpha'_1 + \beta\beta'_1 + \gamma\gamma'_1)}{(1+e)^2}\frac{1}{\rho_0} + D_2(\alpha, \beta, \gamma).$$

Ou encore

$$(59)\qquad \frac{1}{1+e}\frac{de}{ds} - D_2(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{(1+e_1)}{(1+e)^2}\frac{\cos\theta_1}{\rho_0},$$

en désignant par θ_1 l'angle que forme, dans le milieu déformé, la direction de la tangente MT avec la direction MN_1 transformée de la normale principale initiale.

38. *Décomposition de la courbure. Définition de la flexion.* — Nous effectuerons une première transformation des formules obtenues pour la courbure, en éliminant la dérivée logarithmique $\frac{de}{(1+e)\,ds}$ entre les équations (58). Pour écrire le résultat de l'élimination sous une forme simple nous remarquerons d'abord qu'on a

$$\beta\gamma' - \gamma\beta' = \alpha'', \qquad \ldots;$$

les expressions $\beta\gamma'_1 - \gamma\beta'_1, \ldots$ se tranforment de la même manière en introduisant les cosinus directeurs de la perpendiculaire commune à la tangente MT et à la direction MN_1, transformée de la normale principale initiale. Le plan (P) déterminé par ces deux directions est le transformé du plan osculateur initial par la déformation homogène (T) tangente en M. Nous désignerons par α''_1, β''_1, γ''_1 les cosinus directeurs de la normale du plan (P), et nous aurons par suite

$$\beta\gamma'_1 - \gamma\beta'_1 = \alpha''_1 \sin\theta_1,$$
$$\gamma\alpha'_1 - \alpha\gamma'_1 = \beta''_1 \sin\theta_1,$$
$$\alpha\beta'_1 - \beta\alpha''_1 = \gamma''_1 \sin\theta_1,$$

θ_1 désignant l'angle déjà défini plus haut. En introduisant ces notations, l'élimination de la dérivée $\frac{de}{(1+e)\,ds}$ entre les deux dernières équations (58) nous donne

$$(60) \qquad \frac{\alpha''}{\rho} = \frac{1+e_1}{(1+e)^2}\sin\theta_1\frac{\alpha''_1}{\rho_0} + \beta\left(\alpha\frac{da_{31}}{ds} + \beta\frac{da_{32}}{ds} + \gamma\frac{da_{33}}{ds}\right) - \gamma\left(\alpha\frac{da_{21}}{ds} + \beta\frac{da_{22}}{ds} + \gamma\frac{da_{23}}{ds}\right).$$

Remarquons maintenant que les deux directions MT et MN_1 sont les transformées de deux directions rectangulaires du milieu initial; par conséquent si nous désignons par E la dilatation superficielle du feuillet élémentaire appliquée en M_0 sur le plan osculateur initial, nous aurons

$$(1+e)(1+e_1)\sin\theta_1 = (1+E).$$

L'équation (60) devient donc

$$(61)\qquad \frac{\alpha''}{\rho} = \frac{1+E}{(1+e)^3}\,\frac{\alpha''_1}{\rho_0} + \beta\left(\alpha\frac{da_{31}}{ds} + \beta\frac{da_{32}}{ds} + \gamma\frac{da_{33}}{ds}\right) - \gamma\left(\alpha\frac{da_{21}}{ds} + \beta\frac{da_{22}}{ds} + \gamma\frac{da_{23}}{ds}\right).$$

On trouverait de la même manière

$$(61')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\beta''}{\rho} &= \frac{1+E}{(1+e)^3}\,\frac{\beta''_1}{\rho_0} + \gamma\left(\alpha\frac{da_{11}}{ds} + \beta\frac{da_{12}}{ds} + \gamma\frac{da_{13}}{ds}\right) \\ &\quad - \alpha\left(\alpha\frac{da_{31}}{ds} + \beta\frac{da_{32}}{ds} + \gamma\frac{da_{33}}{ds}\right), \\ \frac{\gamma''}{\rho} &= \frac{1+E}{(1+e)^3}\,\frac{\gamma''_1}{\rho_0} + \alpha\left(\alpha\frac{da_{21}}{ds} + \beta\frac{da_{22}}{ds} + \gamma\frac{da_{23}}{ds}\right) \\ &\quad - \beta\left(\alpha\frac{da_{11}}{ds} + \beta\frac{da_{12}}{ds} + \gamma\frac{da_{13}}{ds}\right). \end{aligned}\right.$$

Les formules (61) et (61′) représentent les projections de la rotation figurative de la courbure de la fibre dans le milieu déformé. L'examen des seconds membres montre que cette rotation se décompose en deux autres. L'une égale à $\frac{1+E}{(1+e)^3}\,\frac{1}{\rho_0}$ représente la transformée de la courbure de la fibre initiale par la déformation homogène (T) tangente en M; elle est nulle pour les fibres primitivement rectilignes; la seconde rotation est indépendante de la courbure initiale; elle est la même pour toutes les fibres droites ou courbes qui admettent la même tangente. C'est à cette seconde composante de la courbure que nous donnons le nom de *flexion de la fibre*.

On remarquera l'analogie que présente notre décomposition de la courbure avec le théorème de Meusnier : la flexion joue ici un rôle comparable à celui de la courbure des sections normales dans la théorie des surfaces.

39. *Décomposition de la flexion totale.* — En faisant usage de l'identité (54) et des deux autres identités analogues on peut transformer l'expression des composantes de la rotation figurative de la flexion; nous désignerons ces composantes respectivement par F_1, F_2, F_3 et

nous aurons

$$(62)\quad \begin{cases} F_1 = \beta\Sigma\alpha\, da_{31} - \gamma\Sigma\alpha\, da_{21} \\ \quad = \frac{1}{3}\left(\beta\frac{\partial D_2}{\partial\gamma} - \gamma\frac{\partial D_2}{\partial\beta}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\tau'_\alpha - \alpha\tau\right) + \frac{4}{3}(\varphi_2\gamma - \varphi_3\beta), \\ F_2 = \frac{1}{3}\left(\gamma\frac{\partial D_2}{\partial\alpha} - \alpha\frac{\partial D_2}{\partial\gamma}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\tau'_\beta - \beta\tau\right) + \frac{4}{3}(\varphi_3\alpha - \varphi_1\gamma), \\ F_3 = \frac{1}{3}\left(\alpha\frac{\partial D_2}{\partial\beta} - \beta\frac{\partial D_2}{\partial\alpha}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\tau'_\gamma - \gamma\tau\right) + \frac{4}{3}(\varphi_1\beta - \varphi_2\alpha). \end{cases}$$

Les équations (62) montrent que la flexion peut, à son tour, se décomposer en trois flexions partielles qui se rattachent aux trois covariants fondamentaux, et que nous distinguons respectivement par les noms de *flexion de dilatation seconde*, *flexion de torsion* et *flexion cyclique* ou polaire. Les projections sur Ox des rotations figuratives correspondantes sont : pour la flexion de dilatation seconde

$$F'_1 = \frac{1}{3}\left(\beta\frac{\partial D_2}{\partial\gamma} - \gamma\frac{\partial D_2}{\partial\beta}\right);$$

pour la flexion de torsion

$$F''_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\tau}{\partial\alpha} - \alpha\tau\right);$$

et pour la flexion cyclique

$$F'''_1 = \frac{4}{3}(\varphi_2\gamma - \varphi_3\beta).$$

40. *Autre forme des formules de l'incurvation.* — Désignons par $\alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2$ les cosinus directeurs de la normale principale relative à la première composante de la courbure, c'est-à-dire à la courbure de la transformée de la fibre initiale par la déformation homogène tangente en M. On a

$$\alpha'_2 = \beta''_1\gamma - \gamma''_1\beta, \qquad \beta'_2 = \gamma''_1\alpha - \alpha''_1\gamma, \qquad \gamma'_2 = \alpha''_1\beta - \beta''_1\alpha,$$

et de même, en considérant la normale principale proprement dite de la fibre déformée,

$$\alpha' = \beta''\gamma - \gamma''\beta, \qquad \beta' = \gamma''\alpha - \alpha''\gamma, \qquad \gamma' = \alpha''\beta - \beta''\alpha.$$

Tenant compte de ces relations et de l'identité

$$\mathrm{D}_2(\alpha, \beta, \gamma) = \sum \alpha \left(\alpha \frac{da_{11}}{ds} + \beta \frac{da_{12}}{ds} + \gamma \frac{da_{13}}{ds} \right),$$

on déduit des équations (61) et (61') le nouveau système

$$(63)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha'}{\rho} &= \frac{1+\mathrm{E}}{(1+e)^3} \frac{\alpha'_2}{\rho_0} - \alpha\, \mathrm{D}_2(\alpha, \beta, \gamma) + \alpha \frac{da_{11}}{ds} + \beta \frac{da_{12}}{ds} + \gamma \frac{da_{13}}{ds}, \\ \frac{\beta'}{\rho} &= \frac{1+\mathrm{E}}{(1+e)^3} \frac{\beta'_2}{\rho_0} - \beta\, \mathrm{D}_2(\alpha, \beta, \gamma) + \alpha \frac{da_{21}}{ds} + \beta \frac{da_{22}}{ds} + \gamma \frac{da_{23}}{ds}, \\ \frac{\gamma'}{\rho} &= \frac{1+\mathrm{E}}{(1+e)^3} \frac{\gamma'_2}{\rho_0} - \gamma\, \mathrm{D}_2(\alpha, \beta, \gamma) + \alpha \frac{da_{31}}{ds} + \beta \frac{da_{32}}{ds} + \gamma \frac{da_{33}}{ds}. \end{aligned} \right.$$

L'introduction des covariants fondamentaux donne aux seconds membres des équations (63) la forme équivalente

$$(63')\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha'}{\rho} = {} & \frac{(1+\mathrm{E})}{(1+e)^3} \frac{\alpha'_2}{\rho_0} + \frac{1}{3} \frac{\partial \mathrm{D}_2}{\partial \alpha} - \alpha\, \mathrm{D}_2 + \frac{2}{3}\left(\gamma \frac{\partial \tau}{\partial \beta} - \beta \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} \right) \\ & - \frac{4}{3} \varphi_1 + \frac{4}{3} \alpha (\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 + \gamma \varphi_3), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Les systèmes (63) ou (63') pourraient aussi se déduire facilement, par un calcul direct des formules (58), en tenant compte de l'équation (59) et des relations évidentes

$$\alpha'_1 = \alpha \cos\theta_1 + \alpha_2 \sin\theta_1, \qquad \ldots.$$

Au point de vue de la décomposition de la courbure et de la flexion, il est évident que les équations (63') ont exactement la même signification et la même portée que les équations (61), (61') et (62).

41. *Éléments géométriques relatifs à la flexion.* — La flexion étant l'une des composantes de la courbure il y a lieu de lui faire correspondre les mêmes éléments géométriques que pour la courbure. Nous aurons donc pour chaque direction de fibres, en un point donné, un axe de flexion, un plan de flexion analogue au plan osculateur, une normale principale de flexion, un rayon, un cercle, un centre de flexion.

Si l'on représente la flexion suivant la méthode indiquée au n° 35, par un vecteur H porté sur la normale principale de flexion dans la direction opposée au rayon de flexion, on aura, pour les composantes de ce vecteur, les expressions suivantes :

$$(64)\quad \begin{cases} H_1 = \alpha D_2 - \frac{1}{3}\frac{\partial D_2}{\partial\alpha} + \frac{2}{3}\left(\beta\frac{\partial\tau}{\partial\gamma} - \gamma\frac{\partial\tau}{\partial\beta}\right) + \frac{4}{3}[\varphi_1 - \alpha(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3)], \\ H_2 = \beta D_2 - \frac{1}{3}\frac{\partial D_2}{\partial\beta} + \frac{2}{3}\left(\gamma\frac{\partial\tau}{\partial\alpha} - \alpha\frac{\partial\tau}{\partial\gamma}\right) + \frac{4}{3}[\varphi_2 - \beta(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3)], \\ H_3 = \gamma D_2 - \frac{1}{3}\frac{\partial D_2}{\partial\gamma} + \frac{2}{3}\left(\alpha\frac{\partial\tau}{\partial\beta} - \beta\frac{\partial\tau}{\partial\alpha}\right) + \frac{4}{3}[\varphi_3 - \gamma(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3)]. \end{cases}$$

L'axe de flexion sera défini par les deux équations

$$(65)\quad \begin{cases} \alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z) = 0; \\ -\frac{1}{3}\left[(X-x)\frac{\partial D_2}{\partial\alpha} + (Y-y)\frac{\partial D_2}{\partial\beta} + (Z-z)\frac{\partial D_2}{\partial\gamma}\right] \\ +\frac{2}{3}\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial\tau}{\partial\alpha} & \frac{\partial\tau}{\partial\beta} & \frac{\partial\tau}{\partial\gamma} \end{vmatrix} \\ \qquad + \frac{4}{3}[\varphi_1(X-x) + \varphi_2(Y-y) + \varphi_3(Z-z)] + 1 = 0. \end{cases}$$

La première représente le plan normal; dans la seconde on a séparé les termes provenant des différentes flexions composantes.

Le plan de flexion, perpendiculaire à l'axe de la rotation figurative, est représenté par l'équation

$$F_1(X-x) + F_2(Y-y) + F_3(Z-z) = 0.$$

Il est inutile d'insister sur le calcul des autres éléments, qui se déduisent facilement de nos formules.

42. *Incurvation et flexion des feuillets. Flexion normale.* — Lorsqu'une fibre appartient à un feuillet donné S, la courbure de la fibre peut se décomposer, conformément à la théorie des surfaces, en

une courbure normale et une courbure tangentielle ou géodésique. La normale principale de la première est normale au feuillet, celle de la seconde lui est tangente. Nous allons d'abord nous occuper de la courbure normale.

Soient a, b, c les cosinus directeurs de la normale au feuillet S dans le milieu déformé, E la dilatation superficielle du feuillet au point considéré M, ω l'angle que forme le plan osculateur de la fibre avec la normale au feuillet, ω_1 l'angle du plan transformé du plan osculateur initial avec la même normale, ω_0 l'angle du plan osculateur initial avec la normale au feuillet initial.

Les angles ω_0 et ω_1 sont les compléments des angles que forment respectivement dans les deux milieux le feuillet élémentaire considéré avec le feuillet élémentaire situé dans le plan osculateur primitif. Par conséquent, si nous désignons par E′ la dilatation superficielle du plan osculateur primitif en M, nous aurons, en vertu de l'équation (19′) du n° 9,

$$\frac{\cos\omega_1}{\cos\omega_0} = \frac{(1+\Theta)(1+e)}{(1+\mathrm{E})(1+\mathrm{E}')}. \tag{66}$$

Cela posé partons des équations (63) que nous ajouterons membre à membre après les avoir multipliées respectivement par a, b, c et en y remplaçant E par E′ suivant la notation ci-dessus. Nous trouvons

$$\frac{\cos\omega}{\rho} = \frac{(1+\mathrm{E}')}{(1+e)^3}\,\frac{\cos\omega_1}{\rho_0} + \sum a\left(\alpha\frac{da_{11}}{ds} + \beta\frac{da_{12}}{ds} + \gamma\frac{da_{13}}{ds}\right);$$

ou bien en vertu de l'équation (66)

$$\frac{\cos\omega}{\rho} = \frac{1+\Theta}{(1+\mathrm{E})(1+e)^2}\,\frac{\cos\omega_0}{\rho_0} + \sum a\left(\alpha\frac{da_{11}}{ds} + \beta\frac{da_{12}}{ds} + \gamma\frac{da_{13}}{ds}\right). \tag{67}$$

Désignant par R le rayon de la courbure normale du feuillet suivant la fibre considérée et par R_0 le rayon analogue du milieu initial, nous avons donc

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{1+\Theta}{(1+\mathrm{E})(1+e)^2}\,\frac{1}{\mathrm{R}_0} + \sum a\left(\alpha\frac{da_{11}}{ds} + \beta\frac{da_{12}}{ds} + \gamma\frac{da_{13}}{ds}\right). \tag{68}$$

D'où nous tirons enfin par l'introduction des covariants fondamentaux

$$
(69) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1+\Theta}{(1+E)(1+e)^2}\frac{1}{R_0} + \frac{1}{3}\left(a\frac{\partial D_2}{\partial \alpha} + b\frac{\partial D_2}{\partial \beta} + c\frac{\partial D_2}{\partial \gamma}\right)
$$

$$
+\frac{2}{3}\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} & \frac{\partial \tau}{\partial \beta} & \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} \end{vmatrix} - \frac{4}{3}(a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3).
$$

Les équations (68) et (69) mettent encore en évidence la décomposition de la courbure normale en une somme de deux courbures : la première est la transformée de la courbure normale initiale par la déformation homogène tangente en M ; la seconde, indépendante de la courbure initiale, est la flexion normale du feuillet suivant la fibre considérée. L'équation (69) donne aussi la décomposition de la flexion normale en ses trois composantes relatives aux covariants fondamentaux.

43. *Remarque sur la transformée de la courbure initiale.* — La forme de la première composante de la courbure est remarquable par sa simplicité. Posons

$$
\frac{1}{R_1} = \frac{1+\Theta}{(1+E)(1+e)^2}\frac{1}{R_0}.
$$

Si nous désignons par ε la dilatation de l'épaisseur d'une couche appliquée sur la surface considérée en M, on a

$$
\frac{1+\Theta}{1+E} = 1+\varepsilon,
$$

et l'équation précédente devient

$$
\frac{1}{R_1} = \frac{1+\varepsilon}{(1+e)^2}\frac{1}{R_0}.
$$

Si l'on fait varier la direction de la fibre sur le feuillet autour du point M_0, dans le milieu initial, la courbure $\frac{1}{R_0}$ s'exprime par une fonction homogène du second degré des cosinus directeurs α_0, β_0, γ_0. En remplaçant ces cosinus par leurs valeurs en fonction de α, β, γ on obtient pour le rapport $\frac{1}{(1+e)^2}\frac{1}{R_0}$ une expression qui est aussi homogène et du second degré en α, β, γ, et dont la considération fournit l'indicatrice de Dupin relative à la courbure transformée $\frac{1}{R_1}$. Les axes de cette nouvelle indicatrice sont les directions transformées des diamètres conjugués communs à l'indicatrice initiale et à l'ellipse suivant laquelle le plan tangent au feuillet coupe l'ellipsoïde des dilatations linéaires du point M_0, dans le milieu initial.

44. *Flexion géodésique.* — Pour le calcul de la courbure géodésique il est plus simple de partir de la rotation figurative dont les composantes sont données par les équations (61) et (61'). L'axe de la rotation figurative de la courbure géodésique est normal à la surface; on obtiendra donc l'expression de cette rotation en ajoutant membre à membre les équations (61) et (61') après les avoir multipliées respectivement par a, b, c. Le résultat se décompose encore en deux parties, l'une qui dépend de la courbure initiale de la fibre et de la position du plan osculateur, l'autre qui dépend uniquement de la flexion et que nous appelons pour cette raison la *flexion géodésique.* Au point de vue de la première composante il y a toutefois une différence avec le résultat obtenu pour la courbure normale, en ce sens que la courbure géodésique de la fibre transformée par la déformation homogène (T) ne s'exprime plus uniquement à l'aide de la courbure géodésique initiale et de la dilatation linéaire de la fibre.

La rotation figurative de la flexion géodésique a pour expression

$$F_n = aF_1 + bF_2 + cF_3,$$

où F_1, F_2, F_3 ont les valeurs définies par les formules (62).

On voit que les formules relatives à la flexion des fibres et des feuillets prennent, par l'emploi des covariants fondamentaux, une forme exactement semblable à celle que nous avons obtenue précédemment pour les déformations infinitésimales. Les conséquences que nous en avons déduites, au point de vue des propriétés géométriques, subsistent donc entièrement, sans la moindre modification, et il est inutile de les reproduire ici.