ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

NIELS NIELSEN

Recherches sur le développement d'une fonction analytique en série de fonctions hypergéometriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 30 (1913), p. 121-171

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1913_3_30__121_0>

RECHERCHES

SUR LE

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION ANALYTIQUE

EN SÉRIE DE FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES;

PAR NIELS NIELSEN,

à Copenhague.

CHAPITRE I.

REMARQUES HISTORIQUES. MÉTHODES GÉNÉRALES.

I. — Sur les séries de fonctions hypergéométriques.

Soient $P^n(x)$ et $Q^n(x)$ les fonctions sphériques ordinaires de première et de seconde espèce, Ch. Neumann (1) a démontré que toute fonction analytique $f(x)$, régulière à l'intérieur d'une ellipse ayant les foyers $(1, 0)$ et $(-1, 0)$, est, dans ce domaine, développable en série de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n P^n(x), \tag{1}$$

où les coefficients A_n sont indépendants de x.

(1) *Ueber die Entwicklung einer Function mit imaginärerem Argument nach den Kugelfunctionen ester und zweiter Art*, Halle, 1862.

Soit, au contraire, la fonction $f(x)$ régulière à l'extérieur de l'ellipse susdite; nous aurons le développement

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} B_n Q^n(x), \tag{2}$$

où les coefficients B_n sont indépendants de x, et où le domaine de convergence de la série est la partie susdite du plan des x.

Ces deux théorèmes de Ch. Neumann sont très intéressants, parce qu'ils donnent, pour la première fois que je sache, des séries aux termes analytiques dont les domaines de convergence ne sont pas des cercles, et cela de sorte que les séries en question ne soient pas des transformations directes d'une série de puissances, ce qui a lieu pour les séries dites séries de Burmann

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n[\varphi(x)]^n, \tag{3}$$

où la fonction analytique $\varphi(x)$ est régulière dans un domaine où elle a un seul zéro simple $x=\alpha$.

Remarquons encore que le domaine de convergence des deux séries (1) et (2) de Ch. Neumann dépend seulement de la fonction donnée $f(x)$, qu'il s'agit de développer, ce qui n'a pas généralement lieu pour les séries de la forme (3).

Quant aux séries (3) qui portent le nom de Burmann, remarquons que le seul mérite du géomètre de Mannheim est la découverte de la formule [1]

$$n!\,A_n = D_x^{n-1}\left\{\left[\frac{x-\alpha}{\varphi(x)}\right]^n f'(x)\right\}_{x=\alpha}, \tag{4}$$

où α est le zéro susdit de $\varphi(x)$.

Dans une lettre [2], adressée à Ch. Neumann, j'ai montré que les

---

(1) *Voir* le Rapport de Lagrange et Legendre, inséré dans les *Mémoires de l'Institut*, t. I, 1795, p. 15.

(2) *Sitzungsberichte der Kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, t. LXI, 1909, p. 33-61.

deux séries (1) et (2) et les autres séries, trouvées par l'illustre Maître [1], de fonctions cylindriques de première espèce, peuvent être déduites à l'aide d'un seul principe général.

Dans mon Traité des fonctions métasphériques [2], j'ai généralisé la série (1) de Ch. Neumann en démontrant que toute fonction analytique $f(x)$, régulière à l'intérieur d'une ellipse ayant les foyers $(0, 0)$ et $(1, 0)$ est dans ce domaine développable en série de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n F(\alpha + n, -n, \gamma, x), \tag{5}$$

où les coefficients A_n sont indépentants de x, tandis que α et γ sont des paramètres quelconques, les valeurs zéro et négatives entières étant exclues pour γ.

Quant à la série (2), introduisons les $2p + 1$ paramètres

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{p+1}; \qquad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_p,$$

pour lesquels les valeurs entières et non positives sont exclues, mais qui sont du reste complètement arbitraires, puis posons

$$F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + n + s)\Gamma(\alpha_2 + n + s)\ldots\Gamma(\alpha_{p+1} + n + s)}{s!\,\Gamma(\beta_1 + n + s)\ldots\Gamma(\beta_{p-1} + n + s)\,\Gamma(\beta_p + 2n + s)} x^{n+s}; \tag{6}$$

j'ai démontré que toute fonction analytique $f(x)$ de la variable complexe $x = \alpha + i\beta$, régulière à l'intérieur de la courbe fermée $K(a)$ définie par l'équation

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)\alpha}{a(a+1)} - \frac{\alpha^2}{a(a+1)} - \frac{(2a+1)^2\beta^2}{4a^2(a+1)^2} = 0 \qquad a > 0, \tag{7}$$

---

[1] *Theorie der Besselschen Functionen*, Leipzig, 1867. — *Mathematische Annalen*, t. III, 1871, p. 581-610.

[2] *Théorie des fonctions métasphériques* (Cours professé à l'Université de Copenhague), p. 175-177, Paris, 1911.

est dans ce domaine développable en série de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n F_n(x), \tag{8}$$

où les coefficients A_n sont indépendants de x [1].

Il est évident du reste que le champ de convergence des deux séries (5) et (8) dépend seulement de la fonction $f(x)$ qu'il s'agit de développer.

Dans ce qui suit, nous avons à étudier d'autres séries de fonctions hypergéométriques.

A cet effet, introduisons les $p+q$ paramètres

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p; \qquad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_q, \tag{9}$$

choisis de sorte que les valeurs entières non positives soient exclues, mais étant du reste complètement arbitraires, puis posons pour tous les n

$$A_n = \frac{\Gamma(\alpha_1+n)\Gamma(\alpha_2+n)\ldots\Gamma(\alpha_p+n)}{\Gamma(\beta_1+n)\Gamma(\beta_2+n)\ldots\Gamma(\beta_q+n)}; \tag{10}$$

nous avons à étudier les problèmes suivants :

Premier problème. — Développer une fonction analytique $f(x)$, régulière aux environs du point $x=0$ en série de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n F_n(x), \tag{11}$$

où les coefficients a_n sont indépendants de x, et où nous avons posé pour abréger

$$F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_{n+s}}{s!\,A_n} x^{n+s}; \tag{12}$$

c'est-à-dire qu'il faut admettre $p \leq q+1$. Les fonctions $F_n(x)$ sont

---

[1] *Théorie des fonctions métasphériques*, p. 169-172, Paris, 1911.

par conséquent, pour $q > 1$, des fonctions hypergéométriques généralisées.

Second problème. — Développer une fonction analytique $f(x)$, régulière aux environs du point $x = 0$, en série de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n G_n(x), \tag{13}$$

où les coefficients b_n sont indépendants de x, et où nous avons posé pour abréger

$$G_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \frac{A_{n+s}}{A_n} x^{n+s}, \tag{14}$$

de sorte qu'il faut admettre ici $p \leqq q$. Dans ce cas, la fonction $G_n(x)$ est un polynome entier du degré $2n$.

Quant aux deux problèmes que nous venons d'énoncer, le cas $p \leqq q$ ou $p \leqq q-1$ respectivement ne présente qu'un intérêt secondaire, parce que le domaine de convergence de telles séries coïncide avec le cercle de convergence de la série de puissances qui représente, pour $|x|$ suffisamment petit, la fonction $f(x)$ [1].

Les séries *neumanniennes* de fonctions cylindriques de première espèce sont des cas particuliers de telles séries.

Dans mon Traité des fonctions métasphériques j'ai étudié assez amplement la série (11) [2]; cependant, il est possible de généraliser la classe des fonctions développables dans une série de ce genre.

On pourrait essayer de généraliser la série (11) en étudiant le problème ci-dessous :

Problème général. — Développer une fonction analytique $f(x)$, régulière aux environs du point $x = 0$ dans une série obtenue de (11) en y remplaçant

$$\alpha_r + n, \quad \beta_r + n$$

respectivement par

$$\alpha_r + a_n^{(r)}, \quad \beta_r + b_n^{(r)},$$

---

(1) *Théorie des fonctions métasphériques*, p. 165-168, Paris, 1911.

(2) *Loc. cit.*, p. 168-169.

où les éléments des $p+q$ suites infinies,

$$\begin{array}{llllllll} a_0^{(r)}, & a_1^{(r)}, & a_2^{(r)}, & \ldots, & a_n^{(r)}, & \ldots, & & 1 \leqq r \leqq p, \\ b_0^{(r)}, & b_1^{(r)}, & b_2^{(r)}, & \ldots, & b_n^{(r)}, & \ldots, & & 1 \leqq r \leqq q, \end{array}$$

sont des entiers non négatifs, tels que nous aurons pour tous les r

$$a_{n+1}^{(r)} \geqq a_n^{(r)}, \qquad b_{n+1}^{(r)} \geqq b_n^{(r)},$$
$$\lim_{n=\infty} a_n^{(r)} = \infty, \qquad \lim_{n=\infty} b_n^{(r)} = \infty.$$

Remarquons que la fonction (6) nous donne un cas particulier des séries de ce genre, savoir le cas qui correspond à

$$p = q+1, \quad a_n^{(r)} = n, \quad 1 \leqq r \leqq p; \quad b_n^{(r)} = n, \quad 1 \leqq r \leqq q-1, \quad b_n^{(q)} = 2n.$$

Dans ce qui suit, nous avons à étudier un autre cas particulier des séries de ce genre. Cependant, ces deux exemples montrent que notre problème, pris dans cette généralité, est très difficile.

II. — Sur une transformation générale.

Dans mon Traité des fonctions métasphériques, j'ai indiqué une méthode qui m'a permis d'étudier les séries (5), (8) et (11) du paragraphe I. Or, pour étudier les autres séries mentionnées, il faut légèrement modifier cette méthode.

A cet effet, nous désignons comme domaine simple une partie du plan de la variable complexe x qui satisfait aux deux conditions suivantes :

1° La frontière du domaine est continue et le plus petit des rayons vecteurs partant du point $x = 0$ aux points de la frontière n'est pas égal à zéro ;

2° Soit M un point quelconque du domaine susdit, il est possible de tracer une courbe continue entre M et le point $x = 0$, sans franchir la frontière.

Pour donner une application immédiate de la condition (2) nous désignons par x le nombre complexe dont l'image est le point M susdit, puis nous désignons par t une variable, telle que le nombre tx parcourt une courbe continue tracée entre les points M et $x = 0$, il est évident que la variable t parcourt une courbe continue tracée entre les deux points $t = 0$ et $t = 1$, et inversement.

Cela posé, il est facile de démontrer le théorème suivant :

1. *Soient*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p; \qquad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_p \tag{1}$$

$2p$ paramètres finis quelconques, pour lesquels les valeurs entières et non positives sont exclues, les deux séries de puissances

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{2}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + n)\Gamma(\alpha_2 + n)\ldots\Gamma(\alpha_p + n)}{\Gamma(\beta_1 + n)\Gamma(\beta_2 + n)\ldots\Gamma(\beta_p + n)} a_n x^n \tag{3}$$

ont le même rayon de convergence, et les deux fonctions analytiques $f(x)$ et $\varphi(x)$, définies par ces deux séries, sont régulières dans le même domaine simple, pourvu que ce domaine soit limité par une seule frontière sans nœuds.

Pour démontrer, par la conclusion de p à $p+1$ ce théorème, nous pourrons nous borner à l'étude du cas $p = 1$, ce qui donnera

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\beta + n)} a_n x^n. \tag{4}$$

Désignons ensuite par $C_{0,1}$ une courbe continue sans nœuds, tirée entre les deux points $t = 0$ et $t = 1$; nous aurons pour

$$\Re(\alpha) > 0, \qquad \Re(\beta - \alpha) > 0, \tag{5}$$

et, pourvu que $C_{0,1}$ n'enveloppe aucun des points $t = 0$ et $t = 1$,

$$\int_{C_{0,1}} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha-1}\,dt = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha-1}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)}. \tag{6}$$

Considérons maintenant une valeur fixe de x, telle que $|x| < r$, où r désigne le rayon de convergence de la série de puissances (2), il est possible de choisir la courbe continue $C_{0,1}$, telle que la série

$$f(xt) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (xt)^n$$

est uniformément convergente par rapport à t, quand cette variable parcourt la courbe $C_{0,1}$. En effet, il suffit de supposer que la courbe correspondante suivie par tx soit située à l'intérieur d'un cercle, dont le centre est l'origine tandis que le rayon est plus grand que $|x|$ mais plus petit que r.

Soit $C_{0,1}$ une telle courbe, la série

$$f(tx) t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-\alpha-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n t^{\alpha+n-1} (1-t)^{\beta-\alpha-1}$$

peut être intégrée terme à terme par rapport à t et sur la courbe $C_{0,1}$, pourvu que les conditions (5) soient remplies, et nous aurons par conséquent pour $|x| < r$

$$(7) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_{C_{0,1}} f(tx) t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-\alpha-1} \, dt;$$

de plus, il est évident que le rayon de convergence de la série de puissances (3) ne peut jamais être plus petit que r.

Supposons ensuite que x soit une valeur quelconque appartenant au domaine simple K, dans lequel $f(x)$ est supposée régulière, il est possible de déterminer la courbe $C_{0,1}$, de sorte que l'intégrale qui figure au second membre de (7) existe, ce qui montrera que cette intégrale représente, dans le domaine K, une fonction régulière de x.

Dans le cas où les conditions (5) ne sont pas remplies, il est possible de déterminer deux nombres entiers, non négatifs, p et q, tels que

$$(8) \qquad \mathrm{R}(\alpha) > -p, \qquad \mathrm{R}(\beta-\alpha) > -q;$$

posons ensuite

$$f_p(x) = \sum^{n=\infty} a_n x^n,$$

la même méthode montrera que l'intégrale

$$(9)\qquad \varphi_{p,q}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha+q)}\int_{C_{0,1}} f_p(tx)\, t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha+q-1}\, dt$$

représente, dans le domaine K, une fonction régulière de x, et nous aurons pour $|x| < r$

$$(10)\qquad \varphi_{p,q}(x) = \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n+q)}\, a_n x^n.$$

Cela posé, nous aurons évidemment, en vertu de (10),

$$x\,\mathrm{D}_x \varphi_{p,q}(x) + (\beta+q-1)\,\varphi_{p,q}(x) = \varphi_{p,q-1}(x),$$

ce qui montrera que la fonction $\varphi_{p,0}(x)$, et par conséquent la fonction

$$\varphi(x) = \varphi_{p,0}(x) + \sum_{n=0}^{n=p-1} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n)}\, a_n x^n, \quad p \geqq 1, \quad \varphi(x) = \varphi_{0,0}(x)$$

est régulière dans le domaine K, et que le rayon de convergence de la série de puissances (4) ne peut pas être plus petit que r.

Inversement, prenons pour point de départ la fonction $\varphi(x)$, puis permutons les deux paramètres α et β; le même procédé nous conduira de $\varphi(x)$ à $f(x)$, et notre théorème est démontré.

Quant aux deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ qui figurent dans les formules (2) et (3), nous disons que $\varphi(x)$ est déduite de $f(x)$ par l'opération $\delta_p(\alpha, \beta)$, savoir

$$(11)\qquad \varphi(x) = \delta_p(\alpha, \beta)\, f(x),$$

ce qui donnera inversement

$$(12)\qquad f(x) = \delta_p(\beta, \alpha)\, \varphi(x).$$

Supposons par exemple $f(x) = (1-x)^{-1}$, $p = 1$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = 1$; nous aurons $\varphi(x) = (1-x)^{-\alpha}$; la fonction $f(x)$ est régulière dans la couronne limitée par les deux cercles $|x-1| = r$ et $|x-1| = \mathrm{R}$, $\mathrm{R} > r$, ce qui n'a pas lieu pour $\varphi(x)$ qui a généralement un point de ramification dans $x = 1$. Le domaine en question est, dans ce cas, limité par deux courbes différentes.

Considérons maintenant une suite infinie de fonctions analytiques

$$\text{(13)} \qquad F_0(x), \quad F_1(x), \quad F_2(x), \quad \ldots, \quad F_n(x), \quad \ldots$$

régulières dans le même domaine simple K, limité par une seule frontière sans nœuds, et telles que $F_n(x)$ a, pour tous les n, dans le point $x = 0$ un zéro précisément de l'ordre n, nous aurons pour tous les n des séries de puissances de la forme

$$\text{(14)} \qquad F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_{n,s} x^{n+s}, \qquad a_{n,0} \neq 0.$$

Posons ensuite, pour tous les n, et en appliquant les paramètres (1)

$$\text{(15)} \qquad G_n(x) = \partial_p(\alpha, \beta) F_n(x),$$

tous les éléments de la suite infinie

$$\text{(16)} \qquad G_0(x), \quad G_1(x), \quad G_2(x), \quad \ldots, \quad G_n(x), \quad \ldots$$

sont réguliers dans le domaine K, et il n'existe pas un domaine simple plus étendu que K, où toutes les fonctions $G_n(x)$ sont régulières.

Ces remarques faites, nous démontrerons sans peine le théorème suivant :

2. *Supposons que la série infinie*

$$\text{(17)} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n F_n(x),$$

dont les coefficients sont indépendants de x, soit uniformément convergente dans un domaine simple K_1, la frontière y comptée, cette autre série

$$\text{(18)} \qquad \varphi(x) = \partial_p(\alpha, \beta) f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n G_n(x)$$

a la même propriété, et la série (18) *ne peut être uniformément convergente dans un domaine simple plus étendu que K_1.*

En effet, désignons par m un positif entier quelconque, puis posons pour abréger

$$\Phi_n(x) = \sum_{s=m}^{s=\infty} a_{n,s} x^{n+s}, \qquad 0 \leqq n \leqq m-1,$$

tandis que nous aurons, pour $n \geqq m$, constamment

$$\Phi_n(x) = F_n(x),$$

tous les éléments de la suite infinie

$$x^{-m}\Phi_0(x), \quad x^{-m}\Phi_1(x), \quad \ldots, \quad x^{-m}\Phi_n(x), \quad \ldots$$

sont réguliers, pourvu que tous les éléments de la suite (13) possèdent cette propriété, et la série infinie

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n \Phi_n(x)}{x^m}$$

est uniformément convergente dans le domaine simple, où la série donnée (17) a cette propriété.

Cela posé, on voit que la démonstration du théorème 2 est identique à celle que nous venons d'établir pour le théorème précédent [1].

Les applications de ces deux théorèmes dans le cas où $f(x)$ est une fonction hypergéométrique et dans le cas où les fonctions $F_n(x)$ sont de la forme (12) et (14) du paragraphe I, sautent aux yeux.

Dans ce qui suit nous avons à profiter de telles applications particulières.

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DU PREMIER PROBLÈME.

III. — Sur une série d'Euler.

Pour résoudre le premier des problèmes énoncés dans le paragraphe I, nous remarquons que

$$x^n(1-x)^{-\nu-n}$$

---

(1) Comparer le paragraphe XV de ma *Théorie des fonctions métasphériques*.

est une des fonctions les plus simples définies par la formule (12) du paragraphe I, nous aurons, conformément aux remarques qui terminent le paragraphe précédent, avant tout à étudier le domaine de convergence de la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \left(\frac{x}{1-x}\right)^n, \tag{1}$$

où les coefficients a_n sont indépendants de x.

A cet effet, supposons que la série (1) soit convergente pour une certaine valeur ω de x, la série en question sera absolument convergente, pourvu que

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| < \left|\frac{\omega}{1-\omega}\right| \tag{2}$$

et uniformément convergente pourvu que

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| \leqq \left|\frac{\omega}{1-\omega}\right| - \delta, \tag{3}$$

où δ désigne une quantité positive arbitrairement petite.

Posons ensuite $x = \alpha + i\beta$; nous verrons, en vertu de (2), que le domaine de convergence de la série (1) est généralement déterminé par la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 < r^2[(\alpha-1)^2 + \beta^2],$$

où r est le rayon de convergence de la série de puissances

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots; \tag{4}$$

c'est-à-dire que nous avons à étudier séparément les trois cas suivants :

1° $r < 1$; le domaine de convergence de la série (1) est l'intérieur du cercle $C(r)$ avec l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \frac{2r^2}{1-r^2}\alpha - \frac{r^2}{1-r^2} = 0; \tag{5}$$

on voit que les points d'intersection de $C(r)$ et de l'axe réel ont les abscisses

$$-\frac{r}{1-r}, \quad \frac{r}{1+r} < \frac{1}{2};$$

2° $r = 1$; la série est convergente pour une valeur finie quelconque de x qui satisfait à la condition

$$\mathrm{R}(x) = \alpha < \frac{1}{2}; \tag{6}$$

3° $r > 1$; notre série est convergente dans la partie du plan des x située à l'extérieur du cercle $C(r)$

$$\alpha^2 + \beta^2 - \frac{2r^2}{r^2 - 1}\alpha + \frac{r}{r^2 - 1} = 0; \tag{7}$$

on voit que les points d'intersection de $C(r)$ et de l'axe réel ont les abscisses

$$\frac{r}{r-1}, \quad \frac{r}{r+1} > \frac{1}{2}.$$

Dans ce qui suit, nous désignons par $\Omega(r)$ respectivement $\Omega'(r)$ l'ensemble des valeurs de la variable complexe $x = \alpha + i\beta$ qui satisfont à la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 < r^2[(\alpha - 1)^2 + \beta^2]$$

respectivement

$$\alpha^2 + \beta^2 \leqq r^2[(\alpha - 1)^2 + \beta^2].$$

Cela posé, l'identité évidente

$$\frac{1}{y - x} = \frac{1}{(1 - x)(1 - y)} \frac{1}{\dfrac{y}{1 - y} - \dfrac{x}{1 - x}}$$

nous conduira à la série géométrique

$$\frac{1}{y - x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(1 - y)^n}{y^{n+1}} \frac{x^n}{(1 - x)^{n+1}} \tag{8}$$

qui est absolument convergente, pourvu que y parcourt la circonférence d'un cercle $C(r)$ quelconque, tandis que x appartient à l'ensemble $\Omega(r)$; de plus, la série en question deviendra uniformément convergente, et par rapport à x et par rapport à y, pourvu que x appartienne à l'ensemble $\Omega'(r - \delta)$, où δ est une quantité positive arbitrairement petite.

Ces remarques faites, il est très facile de démontrer le théorème suivant :

I. *Toute fonction analytique $f(x)$, régulière dans un ensemble $\Omega(r)$, est, dans ce domaine, développable en série de la forme*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}} \tag{9}$$

qui est uniformément convergente dans un ensemble $\Omega'(r-\delta)$ quelconque. Le domaine de convergence de la série (9) dépend seulement de la fonction donnée $f(x)$.

En effet, soit x une valeur fixe quelconque appartenant à l'ensemble $\Omega(r)$, il est possible de décrire un cercle $C(r-\delta)$, $\delta > 0$, qui enveloppe le point x. Multiplions ensuite par $f(y)$ les deux membres de (9), puis intégrons dans le sens direct sur la circonférence de $C(r-\delta)$; le théorème de Cauchy nous conduira au but.

Quant au coefficient général A_n, nous aurons

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(r-\delta)} \frac{(1-y)^n}{y^{n+1}} f(y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{(1-y)^n}{y^{n+1}} f(y)\,dy, \tag{10}$$

où c est la circonférence d'un cercle ayant son centre dans l'origine et étant arbitrairement petit.

Soit maintenant pour $|x|$ suffisamment petit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots; \tag{11}$$

nous aurons, en vertu de (10),

$$A_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} a_{n-s} = \frac{1}{n!} D_x^n [(1-x)^n f(x)]_{x=0}. \tag{12}$$

Inversement, prenons pour point de départ la série (9), un théorème très connu de Weierstrass donnera immédiatement, pour les coefficients de la série de puissances (11), cette expression générale

$$(13) \qquad a_n = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} A_{n-s},$$

qui représente l'inversion de la première des formules (12).

IV. — Études des séries particulières.

Exemple 1. — Pour donner une application classique du théorème que nous venons de démontrer, nous posons

$$(1) \qquad e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_n(\alpha) \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}},$$

série dont le domaine de convergence est l'ensemble $\Omega(1)$, savoir déterminé par la condition

$$(2) \qquad R(x) < \frac{1}{2}.$$

Quant aux fonctions $\varphi_n(\alpha)$, nous aurons, en vertu de la formule (12) du paragraphe III,

$$(3) \qquad \varphi_n(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \frac{\alpha^{n-s}}{(n-s)!},$$

ce qui donnera inversement

$$(4) \qquad \frac{\alpha^n}{n!} = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} \varphi_{n-s}(\alpha).$$

Posons, dans la série générale (9) du paragraphe III,

$$\frac{x}{x-1}$$

au lieu de x, il résulte la série de puissances

$$(5) \qquad \frac{1}{1-x} f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n A_n x^n,$$

dont le rayon de convergence est égal au nombre r qui détermine le domaine de convergence $\Omega(r)$.

Appliquons sur la formule (1) la transformation susdite, nous aurons

$$(6)\qquad \frac{e^{-\frac{\alpha x}{1-x}}}{1-x}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\varphi_n(\alpha)x^n \qquad |x|<1;$$

les formules (4) et (6) sont dues à Abel [1], tandis que Halphen [2] a étudié les séries de fonctions $\varphi_n(\alpha)$.

Exemple 2. — Remarquons que la formule (1) donnera immédiatement cette autre

$$(7)\qquad \cos\alpha x=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varphi_n(i\alpha)+\varphi_n(-i\alpha)}{2}\,\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}},$$

puis appliquons, pour la fonction cylindrique de première espèce

$$(8)\qquad J^\nu(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n},$$

la formule intégrale due à Bessel [3]

$$\left(\frac{2}{\alpha x}\right)^\nu J^\nu(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\alpha x\sin\varphi)(\cos\varphi)^{2\nu}\,d\varphi,\qquad \mathrm{R}(\nu)>-\frac{1}{2};$$

nous aurons, en vertu de (7), dans l'ensemble $\Omega(1)$,

$$(9)\qquad \left(\frac{2}{\alpha x}\right)^\nu J^\nu(\alpha x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\varphi_{\nu,n}(\alpha)\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}},$$

où nous avons posé pour abréger

$$(10)\qquad \varphi_{\nu,n}(\alpha)=\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}\frac{(-1)^s\binom{n}{2s}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2s}.$$

---

(1) *Œuvres*, t. II, p. 284.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXVI, 1882, p. 629-631.

(3) *Abhandlungen der Berliner Akademie*, 1824, p. 36. — *Voir* aussi mon Traité : *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen*, p. 51, Leipzig, 1904.

Exemple 3. — La série

$$\frac{1}{2-x}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\,\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}} \tag{11}$$

a le domaine de convergence $\Omega(4)$; c'est-à-dire la partie du plan des x située à l'extérieur du cercle $\left(\alpha-\frac{4}{3}\right)^2+\beta^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Posons, dans la formule générale (9) du paragraphe III,

$$\frac{f(x)}{1-x}$$

au lieu de $f(x)$, ce qui est permis; nous aurons la série de Burmann

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}B_n\left(\frac{x}{1-x}\right)^n, \tag{12}$$

dont le domaine de convergence est l'ensemble $\Omega(r)$, tandis que nous aurons généralement

$$B_n=\frac{1}{n!}D_x^n[(1-x)^{n-1}f(x)]_{x=0}=\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{n-1}{s}a_{n-s}. \tag{13}$$

Exemple 4. — Les deux séries

$$(1-x)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{\nu}{n}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n, \tag{14}$$

$$-\log(1-x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n, \tag{15}$$

tirées directement de (12) et étant évidentes du reste, ont toutes les deux le domaine de convergence $\Omega(1)$.

Remarquons que la série obtenue de (14)

$$(1-x)^{-\nu-\alpha}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{\nu}{n}\frac{x^n}{(1-x)^{\alpha+n}} \tag{16}$$

est convergente dans le domaine $\Omega(1)$ aussi.

V. — Séries de fonctions hypergéométriques.

Considérons maintenant la série de puissances

(1) $$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

développée en série de la forme

(2) $$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}},$$

nous aurons pour tous les n

(3) $$A_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} b_{n-s};$$

de plus, nous désignons par $\Omega(r)$ le domaine de convergence de la série (2).

Pour pouvoir appliquer la transformation $\delta_p(\alpha, \beta)$ définie par les formules (2), (3) et (12) du paragraphe II, nous posons

(4) $$a_n = \frac{\Gamma(\alpha_1 + n)\Gamma(\alpha_2 + n)\ldots\Gamma(\alpha_p + n)}{\Gamma(\beta_1 + n)\Gamma(\beta_2 + n)\ldots\Gamma(\beta_p + n)} b_n,$$

ce qui donnera pour la fonction

(5) $$f(x) = \delta_p(\alpha, \beta)\varphi(x)$$

la série de puissances

(6) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

qui a le même rayon de convergence que la série donnée (1).

Quant à la fonction

(7) $$F_n(x) = \delta_p(\alpha, \beta) \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}},$$

nous aurons pour tous les n

(8) $$F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{n+s}{s} \frac{\Gamma(\alpha_1 + n + s)\Gamma(\alpha_2 + n + s)\ldots\Gamma(\alpha_p + n + s)}{\Gamma(\beta_1 + n + s)\Gamma(\beta_2 + n + s)\ldots\Gamma(\beta_p + n + s)} x^{n+s},$$

ce qui donnera, en vertu du théorème 2 du paragraphe II, ce développement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n F_n(x) \tag{9}$$

qui a le même domaine de convergence que la série (2); c'est-à-dire l'ensemble $\Omega(r)$.

Quant au coefficient général A_n qui figure au second membre de (9), nous aurons, en vertu de (3) et (4), cette expression à l'aide des coefficients de la série de puissances (6)

$$A_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \frac{\Gamma(\beta_1+n-s)\Gamma(\beta_2+n-s)\ldots\Gamma(\beta_p+n-s)}{\Gamma(\alpha_1+n-s)\Gamma(\alpha_2+n-s)\ldots\Gamma(\alpha_p+n-s)} a_{n+s}. \tag{10}$$

Posons ensuite dans (7) $p+1$ au lieu de p, puis posons $\alpha_{p+1} = \alpha$, $\beta_{p+1} = 1$, nous aurons

$$F_n(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!} \Phi_n(x),$$

où il faut admettre

$$\Phi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{\alpha+n+s-1}{s} \frac{\Gamma(\alpha_1+n+s)\ldots\Gamma(\alpha_p+n+s)}{\Gamma(\beta_1+n+s)\ldots\Gamma(\beta_p+n+s)} x^{n+s}, \tag{11}$$

ce qui donnera, en vertu de (9), cette autre série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \Phi_n(x), \tag{12}$$

qui a encore le même domaine de convergence $\Omega(r)$ que la série (2), tandis que nous aurons, en vertu de (10),

$$A_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{\alpha+n-1}{s} \frac{\Gamma(\beta_1+n-s)\ldots\Gamma(\beta_p+n-s)}{\Gamma(\alpha_1+n-s)\ldots\Gamma(\alpha_p+n-s)} a_{n-s}. \tag{13}$$

Posons particulièrement $p = 1$ et $\alpha_1 = \beta$, $\beta_1 = \gamma$; nous aurons la série de fonctions hypergéométriques ordinaires

$$(14) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{s=n} A_n x^n F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + n, x)$$

qui a le domaine de convergence $\Omega(r)$ aussi, et le coefficient général A_n se détermine comme suit :

$$(15) \qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s \binom{\alpha + n - 1}{s} \binom{\beta + n - 1}{s}}{\binom{\gamma + n - 1}{s}} a_{n-s}.$$

Cela posé, nous avons démontré le théorème suivant :

1. *Toute fonction analytique $f(x)$, régulière aux environs du point $x = 0$, est développable en série de la forme* (12), *dont le domaine de convergence est un ensemble $\Omega(r)$, où nous aurons généralement $r \leqq 1$.*

Exemple 1. — La formule (16) du paragraphe IV donnera ce développement curieux

$$(16) \quad F(\alpha + \nu, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\binom{\nu}{n} \binom{\beta + n - 1}{n}}{\binom{\gamma + n - 1}{n}} x^n F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + n, x),$$

valable, pourvu que

$$R(x) < \frac{1}{2}.$$

Exemple 2. — La formule (11) du paragraphe IV nous conduira à une série de la forme susdite, convergente dans l'ensemble $\Omega(4)$, quoique la fonction correspondante $f(x)$ a des points de ramification dans l'intérieur du cercle $C(4)$, de sorte que $f(x)$ n'est pas analytique dans le complet ensemble $\Omega(4)$, étant la partie du plan des x situés à l'extérieur du cercle susdit [1].

---

[1] Dans ma *Théorie des fonctions métaphysiques*, je ne considère que les séries qui correspondent à un domaine de convergence $\Omega(r)$, où $r \leqq 1$.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DU SECOND PROBLÈME.

VI. — Sur une série de Puiseux.

Pour résoudre le second problème indiqué dans le paragraphe I, nous prenons pour point de départ la série de Burmann

$$(1)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n (x - x^2)^n,$$

étudiée d'une façon incomplète par Puiseux (¹), Schlömilch (²) et feu M. Julius Petersen (³).

Quant au domaine de convergence de la série, désignons par r le rayon de convergence de la série de puissances

$$(2)\qquad A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

nous verrons que ce domaine est la partie du plan des x située à l'intérieur de l'ellipse de Cassini $C(r)$ (⁴) définie par l'équation

$$(3)\qquad (\alpha^2 + \beta^2)[(\alpha - 1)^2 + \beta^2] = r^2 \qquad x = \alpha + i\beta;$$

c'est-à-dire que la courbe $C(r)$ a les deux foyers (o, o) et (1, o).

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XV, 1850, p. 280-284.

(²) *Compendium der höheren Analysis*, t. II, p. 100-103, Brunswick, 1879.

(³) *Forelæsninger over Funktionsteori*, p. 173-178, Copenhague, 1895. — *Vorlesungen über Funktionstheorie*, p. 157-161, Copenhague, 1898.

(⁴) Dans ma *Théorie des fonctions métasphériques*, je désigne (p. 13), par erreur, comme ellipse de Cassini la courbe $C(a)$ définie par l'équation

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \frac{\alpha^2}{a+1} - \frac{\beta^2}{a} = 0, \qquad a > 0, \qquad x = \alpha + i\beta,$$

mais il saute aux yeux que ce nom illégitime n'a aucune influence sur les applications analytiques de la courbe en question.

De plus, la série en question est absolument convergente à l'intérieur de $C(r)$ et uniformément convergente sur la circonférence et à l'intérieur de la courbe $C(r-\delta)$, où δ désigne une quantité positive, arbitrairement petite.

Quant à la courbe $C(r)$, nous avons à considérer trois cas :

1° $r < \frac{1}{4}$; $C(r)$ se décompose en deux ovales isolés $O_1(r)$ et $O_2(r)$ qui enveloppent un seul de deux foyers de $C(r)$, savoir respectivement $(0, 0)$ et $(1, 0)$;

2° $r = \frac{1}{4}$; la courbe est une lemniscate, de sorte que les frontières des deux ovales $O_1\left(\frac{1}{4}\right)$ et $O_2\left(\frac{1}{4}\right)$ n'ont qu'un seul point commun, savoir le point $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, le point double de la lemniscate $C\left(\frac{1}{4}\right)$.

3° $r > \frac{1}{4}$; $C(r)$ est un seul ovale qui enveloppe les deux foyers de la courbe.

Dans ce qui suit, nous désignons par $O(r)$ un des deux ovales de la courbe $C(r)$ pris volontairement; c'est-à-dire que nous aurons, pour $r > \frac{1}{4}$,

$$O(r) = C(r). \tag{3}$$

Revenons maintenant à la série (1), il saute aux yeux que cette série et la courbe $C(r)$ ne s'altèrent pas, si nous remplaçons x par $1-x$, ce qui donnera le théorème suivant :

I. *Supposons que la série (1) représente la même fonction dans tout son domaine de convergence, la somme $f(x)$ de cette série satisfera à l'équation fonctionnelle*

$$f(x) = f(1-x). \tag{4}$$

Exemple I. — La série

$$[1 - 2(x - x^2)]^\nu = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \binom{\nu}{n} 2^n (x - x^2)^n$$

a la courbe de convergence $C\left(\frac{1}{2}\right)$, sa somme satisfera évidemment à la condition (4).

Exemple 2. — L'identité évidente

$$(1-2x)^{2\nu}=[1-4(x-x^2)]^\nu$$

donnera le développement

$$(5)\qquad (1-2x)^{2\nu}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\binom{\nu}{n}2^{2n}(x-x^2)^n,$$

applicable dans l'intérieur de l'ovale $O_1\left(\frac{1}{4}\right)$. Posons

$$\log(-1)=\pi i;$$

nous aurons, au contraire, dans l'ovale $O_2\left(\frac{1}{4}\right)$

$$(6)\qquad (1-2x)^{2\nu}=e^{2\nu\pi i}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\binom{\nu}{n}2^{2n}(x-x^2)^n.$$

Cela posé, prenons pour point de départ l'identité évidente

$$\frac{1}{y-x}=\frac{\left(\frac{1}{2}-y\right)+\left(\frac{1}{2}-x\right)}{(y-y^2)-(x-x^2)},$$

nous aurons

$$(7)\qquad \frac{1}{y-x}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\frac{1}{2}-y}{(y-y^2)^{n+1}}(x-x^2)^n+\left(\frac{1}{2}-x\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(y-y^2)^{n+1}}(x-x^2)^n.$$

Supposons que y parcourt la circonférence d'une ellipse de Cassini $C(r)$ quelconque, les deux séries qui figurent au second membre de la formule (7) sont absolument convergentes, pourvu que x soit situé à l'intérieur de $C(r)$. De plus, les séries en question sont uniformément convergentes, pourvu que x soit situé sur la circonférence ou à l'intérieur d'une courbe $C(r-\delta)$, où δ désigne une quantité positive, arbitrairement petite.

Cela posé, il est évident que la méthode qui nous a donné le théorème 1 du paragraphe III nous conduira ici au théorème suivant :

2. *Toute fonction analytique $f(x)$, régulière à l'intérieur d'un ovale $O(r)$ de Cassini, peut, dans ce domaine, être développée comme suit :*

$$(8)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}A_n(x-x^2)^n+\left(\frac{1}{2}-x\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}B_n(x-x^2)^n,$$

et le domaine de convergence dépend seulement de la fonction donnée $f(x)$.

Remarquons que l'expression $\frac{1}{2}-x$ se transforme dans $-\frac{1}{2}+x$, si nous remplaçons x par $1-x$, le théorème 2 nous donnera cet autre :

3. *Supposons que la fonction analytique $f(x)$, régulière dans un ovale $O(r)$ d'une ellipse de Cassini, satisfasse à l'équation fonctionnelle (4), la fonction $f(x)$ est régulière à l'intérieur de la courbe complète $C(r)$, et nous aurons dans ses deux ovales les développements*

$$(9)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}A_n(x-x^2)^n\pm\left(\frac{1}{2}-x\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}B_n(x-x^2)^n;$$

c'est-à-dire que l'hypothèse $r>\frac{1}{4}$ donnera pour tous les n

$$(10)\qquad B_n=0.$$

Appliquons ensuite, pour $\nu=\frac{1}{2}$, les formules (5) et (6), puis remarquons que le produit des deux séries de la forme (1), formé d'après la règle de Cauchy, nous conduira toujours à une série de la même forme, nous aurons le théorème suivant :

4. *Toute fonction analytique $f(x)$, régulière aux environs d'un des points $(0,0)$ et $(1,0)$, est développable en série de la forme*

$$(11)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}A_n(x-x^2)^n,$$

dont le domaine de convergence est l'intérieur de l'ovale $O(r)$ de Cassini correspondant, où nous aurons en général $r\leqq\frac{1}{4}$.

Remarquons en passant que la formule de Burmann (4) du paragraphe I donnera, pour les coefficients A_n de la série (11), ces expressions

$$(12) \qquad n!\,A_n = D_x^{n-1}\left[\left(\frac{x-\alpha}{x-x^2}\right)^n f'(x)\right]_{x=\alpha} \qquad (n \geqq 1),$$

où il faut poser $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ selon que l'ovale $O(r)$ en question est $O_1(r)$ ou $O_2(r)$.

Quant au théorème 4, supposons que la fonction $f(x)$ soit régulière à l'intérieur d'une ellipse $C(r)$ où $r > \frac{1}{4}$, il existe deux séries de la forme (11), dont le domaine de convergence est respectivement $O_1\left(\frac{1}{4}\right)$ et $O_2\left(\frac{1}{4}\right)$.

Dans le cas particulier où la fonction susdite satisfasse à l'équation fonctionnelle (4), les deux séries en question coïncident et le domaine de convergence deviendra l'intérieur de la courbe $C(r)$.

Ce cas particulier ne peut pas être traité par la méthode générale pour développer dans une série de Burmann une fonction donnée.

Désignons maintenant par ν une constante quelconque, puis posons

$$(13) \qquad \varphi(x) = \frac{f(x)}{(1-x)^\nu}, \qquad f(x) = (1-x)^\nu \varphi(x);$$

nous aurons, en vertu de (11),

$$(14) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{x^n}{(1-x)^{\nu-n}},$$

et la série ainsi obtenue est en général convergente dans un ovale $O_1(r)$, où $r = \frac{1}{4}$. C'est seulement dans le cas où la fonction $f(x)$ définie par les équations (13) est régulière à l'intérieur d'une courbe $C(r)$, où $r > \frac{1}{4}$, et satisfait à l'équation fonctionnelle (4) que la série (14) peut avoir un domaine de convergence plus étendu.

Quant aux coefficients A_n qui figurent dans la série (14), nous aurons, en vertu de (12) et (13), ces expressions assez compliquées

$$(15) \qquad n!\,A_n = D_x^{n+1}\left[(1-x)^{\nu-n}\varphi'(x) - \nu(1-x)^{\nu-n-1}\varphi(x)\right]_{x=0}.$$

VII. — Discussion des séries précédentes.

Dans une discussion détaillée des séries qui figurent dans le théorème 2 du paragraphe VI, nous avons à considérer séparément ces trois cas particuliers :

1° Soient $r \leq \frac{1}{4}$ et l'ovale en question $O_1(r)$, nous aurons pour les coefficients A_n et B_n des séries susdites ces expressions intégrales

$$(1)\qquad A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\left(\frac{1}{2} - y\right) f(y)\, dy}{(y - y^2)^{n+1}}, \qquad B_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(y)\, dy}{(y - y^2)^{n+1}},$$

où C est la circonférence d'un petit cercle ayant son centre dans le foyer (0,0).

Posons ensuite pour $|x|$ suffisamment petit

$$(2)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

puis appliquons les séries de puissances

$$(3)\qquad \frac{\left(\frac{1}{2} - y\right)}{(y - y^2)^{n+1}} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{n-p}{2n+2p}\binom{n+p}{p} y^{p-n-1},$$

$$(4)\qquad \frac{1}{(y - y^2)^{n+1}} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \binom{n+p}{p} y^{p-n-1},$$

valables, pourvu que $0 < |y| < 1$, nous aurons, en vertu de (1),

$$(5)\qquad A_0 = \frac{1}{2} a_0, \qquad A_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{n-p}{2n+2p}\binom{n+p}{p} a_{n-p}$$

$$(6)\qquad B_n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n+p}{p} a_{n-p},$$

ou, ce qui est évidemment la même chose,

(7) $$A_n = \frac{1}{n!\,2} D_x^{n-1}[(1-x)^{-n} f'(x)]_{x=0} \qquad (n \geqq 2),$$

(8) $$B_n = \frac{1}{n!} D_x^n [(1-x)^{-n-1} f(x)]_{x=0} \qquad (n \geqq 1);$$

2° Soit $r \leqq \frac{1}{4}$ et l'ovale en question $O_2(r)$, nous aurons, après une légère transformation

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\left(\frac{1}{2} - y\right) f(1-y)\,dy}{(y-y^2)^{n+1}}, \qquad B_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(1-y)\,dy}{(y-y^2)^{n+1}},$$

où C est le même cercle que dans les formules (1).

Posons ensuite, pour $|x|$ suffisamment petit,

(9) $$f(1-x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

nous aurons dans ce cas

(10) $$A_0 = \frac{1}{2} b_0, \qquad A_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{n-p}{2n+2p} \binom{n+p}{p} b_{n-p},$$

(11) $$B_n = -\sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{n+p}{p} b_{n-p}.$$

L'existence des expressions différentielles, analogues à celles qui figurent dans les formules (7) et (8), est évidente;

3° Pour $r > \frac{1}{4}$, nous aurons $O_1(r) = O_2(r) = C(r)$, de sorte que les coefficients correspondants A_n et B_n sont les sommes des coefficients aux mêmes indices, déterminés dans les deux cas précédents, ce qui donnera

(12) $$A_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0),$$

(13) $$A_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{n-p}{2n+2p} \binom{n+p}{p} (a_{n-p} + b_{n-p}) \qquad (n \geqq 1),$$

(14) $$B_n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n+p}{p} (a_{n-p} - b_{n-p}).$$

Quant à la série

$$(15)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\mathrm{A}_n(x-x^2)^n+\left(\frac{1}{2}-x\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\mathrm{B}_n(x-x^2)^n$$

que nous venons de discuter, nous démontrerons sans peine le théorème suivant :

1. *Supposons que la série* (15) *représente la même fonction dans tout l'intérieur d'une courbe* $\mathrm{C}(r)$, *les coefficients* A_n *et* B_n *sont parfaitement déterminés.*

Supposons que la formule (15) soit valable à l'intérieur de l'ovale $\mathrm{O}(r)$; il est, conformément à un théorème de Weierstrass, permis d'ordonner les deux séries en question selon des puissances ascendantes de x, ce qui nous conduira à la série de puissances (2); c'est-à-dire que nous trouverons les formules

$$(16)\quad a_n=\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}}(-1)^s\binom{n-s}{s}\mathrm{A}_{n-s}+\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n+1}{2}}(-1)^s\frac{n+1}{2n-2s+2}\binom{n-s+1}{s}\mathrm{B}_{n-s}.$$

Soit, au contraire, la formule (15) valable à l'intérieur de l'ovale $\mathrm{O}_2(r)$, nous posons $1-x$ au lieu de x, et le même procédé nous donnera, en vertu de (9), ces formules analogues aux précédentes

$$(17)\quad b_n=\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}}(-1)^s\binom{n-s}{s}\mathrm{A}_{n-s}-\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n+1}{2}}(-1)^s\frac{n+1}{2n-2s+2}\binom{n-s+1}{s}\mathrm{B}_{n-s}.$$

Dans le cas où la formule (15) représente la fonction $f(x)$ dans l'intérieur complet de la courbe $\mathrm{C}(r)$, les deux systèmes de formules (16) et (17) sont en même temps valables, et il est possible de déterminer successivement les coefficients A_n et B_n à l'aide des coefficients donnés a_n et b_n.

La discussion de la série (15) nous donne immédiatement cet autre théorème suivant :

2. *Toute fonction analytique* $f(x)$, *régulière dans l'intérieur d'une*

ellipse de Cassini $C(r)$ *où* $r > \frac{1}{4}$, *est dans chacun des ovales* $O_1\left(\frac{1}{4}\right)$ *et* $O_2\left(\frac{1}{4}\right)$ *développable en série de la forme* (15) *dont les coefficients se déterminent à l'aide du système des formules correspondantes* (5), (6) *et* (10), (11). *Additionnons ces développements, nous trouvons la série qui représente la fonction* $f(x)$ *dans l'intérieur complet de* $C(r)$.

Supposons ensuite que la fonction en question $f(x)$ satisfasse à l'équation fonctionnelle

$$f(x) = f(1-x); \tag{18}$$

nous aurons, pour les coefficients des séries de puissances (2) et (9),

$$a_n = b_n,$$

ce qui donnera, à l'intérieur complet d'une ellipse de Cassini correspondante $C(r)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n (x - x^2)^n, \tag{19}$$

où nous avons posé

$$A_0 = a_0, \qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{n-s}{n+s} \binom{n+s}{s} a_{n-s}, \tag{20}$$

ou bien, en vertu de la formule (12) du paragraphe VI,

$$n!\, A_n = D_x^{n-1} [(1-x)^{-n} f'(x)]_{x=0} \qquad (n \geqq 1). \tag{21}$$

Dans le cas, où $f(x)$ satisfait à l'autre équation fonctionnelle

$$f(x) = -f(1-x), \tag{22}$$

nous aurons, au contraire,

$$a_n = -b_n,$$

et nous trouvons le développement

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right) \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n (x - x^2)^n \tag{23}$$

valable dans l'intérieur complet de l'ellipse correspondante $C(r)$, et le coefficient B_n se détermine comme suit

$$B_n = 2\sum_{s=0}^{s=n} \binom{n+s}{s} a_{n-s}, \tag{24}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$B_n = \frac{2}{n!} D_x^n \left[(1-x)^{-n-1} f(x)\right]_{x=0}. \tag{25}$$

Cela posé, nous aurons immédiatement cet autre théorème curieux :

3. *La condition suffisante et nécessaire pour que la transcendante entière*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

satisfasse à une des équations fonctionnelles

$$f(1-x) = \pm f(x),$$

est que nous aurons respectivement

$$\limsup_{n=\infty} \left|\sqrt[n]{A_n}\right| < 4, \qquad \limsup_{n=\infty} \left|\sqrt[n]{B_n}\right| < 4, \tag{26}$$

où les A_n *et* B_n *sont à définir à l'aide des formules* (20) *et* (24).

Remarquons encore que la série (15) se transforme dans ces deux autres

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(A_n + \frac{1}{2} B_n\right)(x - x^2)^n - \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n x^{n+1} (1-x)^n, \tag{27}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(A_n - \frac{1}{2} B_n\right)(x - x^2)^n + \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n x^n (1-x)^{n+1}, \tag{28}$$

qui ont le même domaine de convergence. Soit $O_1(r)$ ce domaine de convergence, nous aurons

$$A_n + \frac{1}{2} B_n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n+p-1}{p} a_{n-p} = \frac{1}{n!} D_x^n \left[(1-x)^{-n} f(x)\right]_{x=0}, \tag{29}$$

$$-A_n + \frac{1}{2} B_n = \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n+p-1}{p-1} a_{n-p} = \frac{1}{(n-1)!} D_x^{n-1} \left[(1-x)^{-n-1} f(x)\right]_{x=0}. \tag{30}$$

L'application de la transformation (13) du paragraphe VI aux séries (27) et (28) est évidente.

Exemple 1. — Dans l'intérieur de l'ovale $O_1\left(\frac{1}{4}\right)$, nous aurons

$$(31)\quad (1-x)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\nu}{2\nu+4n}\binom{\nu+2n}{n}(x-x^2)^n+\left(\frac{1}{2}-x\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{\nu+2n}{n}(x-x^2)^n.$$

Exemple 2. — Dans le même domaine, nous aurons les développements

$$(32)\quad (1-x)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{\nu+2n-1}{n}(x-x^2)^n-\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{\nu+2n}{n}x^{n+1}(1-x)^n,$$

$$(33)\quad (1-x)^{-\nu}=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\binom{\nu+2n-1}{n-1}(x-x^2)^n+\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{\nu+2n}{n}x^n(1-x)^{n+1}.$$

VIII. — Autres formes des coefficients A_n et B_n.

Il est digne de remarque, ce me semble, que nous pouvons, dans des cas assez généraux, donner sous formes différentes les coefficients de la série

$$(1)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}A_n(x-x^2)^n+\left(\frac{1}{2}-x\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}B_n(x-x^2)^n,$$

étudiée dans les deux paragraphes précédents, ce qui a lieu à l'aide des deux théorèmes suivants :

1. *Supposons que $f(x)$ soit régulière à l'intérieur du cercle*

$$(2)\qquad \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\beta^2=r^2,\qquad r>\frac{1}{2},\qquad x=\alpha+i\beta,$$

nous aurons pour les coefficients A_n et B_n de la série (1)

$$(3)\qquad (-1)^n A_n=\sum_{s=0}^{s=\infty}\binom{n+s}{s}\frac{f^{(2n+2s)}\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2s}(2n+2s)!},$$

$$(4)\qquad (-1)^{n+1}B_n=\sum_{s=0}^{s=\infty}\binom{n+s}{s}\frac{f^{(2n+2s+1)}\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2s}(2n+2s+1)!}.$$

En effet, l'identité évidente

$$f(x)=f\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-x\right)\right]$$

donnera la série de Taylor

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{f^{(2n)}\left(\frac{1}{2}\right)}{(2n)!}\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2n}-\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{f^{(2n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2n+1};$$

appliquons ensuite cette autre identité évidente

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2n}=\frac{1}{2^{2n}}[1-4(x-x^2)]^n,$$

nous trouverons immédiatement les formules (3) et (4).

On transformera facilement les expressions (3) et (4) comme suit :

(5) $$A_n=\frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{n!\,2^{2n}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{f^{(2n+2s)}\left(\frac{1}{2}\right)}{s!\,\Gamma\left(n+s+\frac{1}{2}\right)2^{4s}},$$

(6) $$B_n=\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\pi}}{n!\,2^{2n+1}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{f^{(2n+2s+1)}\left(\frac{1}{2}\right)}{s!\,\Gamma\left(n+s+\frac{3}{2}\right)2^{4s}}.$$

2. *Supposons que $f(x)$ soit régulière à l'intérieur du cercle*

(7) $$\alpha^2+\beta^2=r^2,\qquad r>1,\qquad x=\alpha+i\beta;$$

nous aurons, pour les coefficients A_n et B_n de la série (1),

(8) $$(-1)^n A_n=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{2n+s}{2n+2s}\binom{n+s}{s}a_{2n+s},$$

(9) $$(-1)^{n+1}B_n=\sum_{s=0}^{s=\infty}\binom{n+s}{s}a_{2n+s+1},$$

où nous avons posé pour $|x|<r$

(10) $$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots.$$

En effet, posons

$$f(1-x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots;$$

nous aurons, pour tous les n,

$$(11) \qquad (-1)^n b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(1) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{n+s}{s} a_{n+s},$$

où la série qui figure au second membre est absolument convergente.

Introduisons maintenant, dans les formules (12), (13) et (14) du paragraphe VII, les expressions tirées de (11); nous aurons des séries absolument convergentes; ordonnons ensuite selon des a_n les séries en question; nous trouvons, après des réductions légères, les formules (8) et (9).

Nous nous bornerons à indiquer une seule des réductions susdites, en cherchant dans l'expression obtenue pour A_n le coefficient $\alpha_{n,q}$ de a_{n+q}. Nous aurons

$$\alpha_{n,q} = \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^p \binom{2n-p}{n} \binom{n+q}{p} \frac{p}{4n-2p};$$

d'où, après une légère modification,

$$\alpha_{n,q} = \frac{n+q}{2n} \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^p \binom{2n-p-1}{n-1} \binom{n+q-1}{p-1}.$$

Considérons ensuite l'identité

$$(1-x)^{n+q-1}(1-x)^{-n} = (1-x)^{q-1},$$

puis cherchons le coefficient de la puissance x^{n-1}; nous aurons

$$\alpha_{n,q} = \frac{(-1)^n (n+q)}{2n} \binom{q-1}{n-1} = \frac{(-1)^n (n+q)}{2q} \binom{q}{n}.$$

Curieusement, les formules que nous venons de développer pour les coefficients nous donnent, comme des cas particuliers, les formules fondamentales concernant les fonctions cylindriques de Poisson, savoir

$$(12)\qquad J^{n+\frac{1}{2}}(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{s!\,\Gamma\left(s+n+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}+2s},$$

où n est un nombre entier.

A cet effet, étudions la série toujours convergente, de la forme (1) obtenue pour la fonction

$$f(x)=e^{-2\alpha x i};$$

remarquons que nous aurons pour tous les n

$$f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)=(-2\alpha i)^n e^{-\alpha i},$$

les formules (3) et (4) donnent immédiatement

$$(13)\qquad A_n=\frac{2^{n-\frac{1}{2}}\alpha^{n+\frac{1}{2}}e^{-\alpha i}\sqrt{\pi}}{n!}J^{n-\frac{1}{2}}(\alpha),$$

$$(14)\qquad B_n=\frac{i(2\alpha)^{n+\frac{1}{2}}e^{-\alpha i}\sqrt{\pi}}{n!}J^{n+\frac{1}{2}}(\alpha).$$

Appliquons ensuite les formules (8) et (9), nous aurons

$$(15)\qquad A_n=\frac{(2\alpha)^{2n}}{2n!}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(n+s-1)!\,(2\alpha i)^s}{s!\,(2n+2s-1)!},$$

$$(16)\qquad B_n=\frac{(2\alpha)^{2n+1}i}{n!}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(n+s)!\,(2\alpha i)^s}{s!\,(2n+2s+1)!}.$$

Combinons, pour $n=0$, les formules (13) et (15), nous aurons

$$(17)\qquad e^{-\alpha i}J^{-\frac{1}{2}}(\alpha)=\sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(2\alpha i)^s}{s!},$$

tandis que les formules (14) et (16) donnent la formule la plus générale

$$(18)\qquad e^{-\alpha i}J^{n+\frac{1}{2}}(\alpha)=\frac{(2\alpha)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(n+s)!\,(2\alpha i)^s}{s!\,(2n+s+1)!}.$$

Enfin, appliquons les formules (12), (13), (14) du paragraphe VII; nous aurons dans ce cas particulier

$$a_n = \frac{(-2\alpha i)^n}{n!}, \qquad b_n = \frac{(2\alpha i)^n}{n!} e^{-2\alpha i},$$

ce qui donnera, en vertu de (13) et (14),

$$(19) \qquad J^{-\frac{1}{2}}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \cos\alpha, \qquad J^{\frac{1}{2}}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \sin\alpha,$$

et généralement pour $n \geqq 1$

$$(20) \qquad J^{n+\frac{1}{2}}(\alpha) = A_n(\alpha)\sin\alpha - B_n(\alpha)\cos\alpha,$$

où nous avons posé pour abréger

$$(21) \qquad A_n(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^s (2n-2s)!}{(2s)!(n-2s)!} \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{n+\frac{1}{2}-2s},$$

$$(22) \qquad B_n(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s (2n-2s-1)!}{(2s+1)!(n-2s-1)!} \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{n-\frac{1}{2}-2s}.$$

Les formules ainsi obtenues pour la fonction $J^{n+\frac{1}{2}}(\alpha)$ sont très connues [1].

Posons pour abréger

$$(23) \qquad \Phi(x, \alpha) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2^{n-\frac{1}{2}} \alpha^{n+\frac{1}{2}}}{n!} J^{n-\frac{1}{2}}(\alpha)(x - x^2)^n,$$

$$(24) \qquad \Psi(x, \alpha) = \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2} - x\right) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(2\alpha)^{n+\frac{1}{2}}}{n!} J^{n+\frac{1}{2}}(\alpha)(x - x^2)^n;$$

nous aurons

$$(25) \qquad e^{(1-2x)\alpha i} = \Phi(x, \alpha) + i\Psi(x, \alpha),$$

---

[1] *Voir* mon Traité : *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen*, pp. 20, 31, Leipzig, 1904.

d'où immédiatement

$$\cos(1-2x)\alpha = \Phi(x, \alpha), \qquad \sin(1-2x)\alpha = \Psi(x, \alpha),$$

ce qui donnera

$$(26) \qquad \cos 2\alpha x = \Phi(x, \alpha)\cos\alpha + \Psi(x, \alpha)\sin\alpha,$$

$$(27) \qquad \sin 2\alpha x = \Phi(x, \alpha)\sin\alpha - \Psi(x, \alpha)\cos\alpha.$$

Désignons par p un nombre entier, puis posons dans (26) et (27)

$$(28) \qquad \alpha = \frac{p\pi}{2},$$

un des termes qui figurent au second membre des formules susdites s'évanouira, de sorte que les fonctions $\cos 2\alpha x$ et $\sin 2\alpha x$ satisfont dans ce cas à une des conditions suivantes :

$$(29) \qquad f(1-x) = \pm f(x),$$

ce qui est évident, du reste.

IX. — Séries de fonctions hypergéométriques.

Posons, comme dans le paragraphe V,

$$(1) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n x^n, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n,$$

où

$$(2) \qquad a_n = \frac{\Gamma(\alpha_1+n)\Gamma(\alpha_2+n)\ldots\Gamma(\alpha_p+n)}{\Gamma(\beta_1+n)\Gamma(\beta_2+n)\ldots\Gamma(\beta_p+n)} b_n;$$

nous aurons évidemment

$$(3) \qquad f(x) = \delta_p(\alpha, \beta)\varphi(x).$$

Désignons ensuite par $\Omega(r)$ le domaine de convergence de la série

$$(4) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n (x - x^2)^n,$$

ce domaine $\Omega(r)$ est, en général, l'intérieur d'un ovale $O_1(r)$ de Cassini où $r \leqq \frac{1}{4}$. C'est seulement dans le cas particulier, où $\varphi(x)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\varphi(1-x)=\varphi(x), \tag{5}$$

et pourvu que $\varphi(x)$ soit en outre régulière à l'intérieur d'une ellipse de Cassini $C(r)$, où $r > \frac{1}{4}$, que le domaine $\Omega(r)$ peut être plus étendu. Dans ce cas particulier $\Omega(r)$ est l'intérieur de l'ellipse $C(r)$.

Remarquons ensuite que nous aurons évidemment

$$\partial_p(\alpha, \beta)(x-x^2)^n = F_n(x),$$

où

$$F_n(x)=\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\binom{n}{s}\frac{\Gamma(\alpha_1+n+s)\,\Gamma(\alpha_2+n+s)\ldots\Gamma(\alpha_p+n+s)}{\Gamma(\beta_1+n+s)\,\Gamma(\beta_2+n+s)\ldots\Gamma(\beta_p+n+s)}\,x^{n+s}, \tag{6}$$

ce qui donnera, en vertu du théorème 2 du paragraphe II, ce développement

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\,F_n(x), \tag{7}$$

qui a le même domaine de convergence que la série (4), savoir le même domaine $\Omega(r)$.

Posons particulièrement $p=1$, $\alpha_1=\beta$, $\beta_1=\gamma$; nous aurons la série de fonctions hypergéométriques ordinaires

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n\,F(-n, \beta+n, \gamma+n, x). \tag{8}$$

Quant au coefficient A_n, dans le cas général, nous aurons, en vertu de la formule (20) du paragraphe VII,

$$A_n=\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{n-s}{n+s}\binom{n+s}{s}\frac{\Gamma(\beta_1+n-s)\,\Gamma(\beta_2+n-s)\ldots\Gamma(\beta_p+n-s)}{\Gamma(\alpha_1+n-s)\,\Gamma(\alpha_2+n-s)\ldots\Gamma(\alpha_p+n-s)}\,a_{n-s}, \tag{9}$$

et dans le cas particulier (8)

$$(10) \qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{n-s}{n+s} \binom{n+s}{s} \frac{\binom{\beta+n-1}{n}}{\binom{\gamma+n-1}{n}} a_{n-s}.$$

Cela posé, nous venons de démontrer le théorème suivant :

1. *Toute fonction analytique $f(x)$, régulière aux environs du point $x = 0$, est développable en série de la forme* (7) *ou* (9), *dont le domaine de convergence est l'intérieur d'un ovale $O_1(r)$ de Cassini, où il faut, en général, admettre $r \leq \frac{1}{4}$.*

Exemple I. — La formule (31) du paragraphe VII donnera cette formule curieuse

$$(11) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n F(-n, \beta+n, \gamma+n, x),$$

où il faut admettre généralement

$$(12) \qquad A_n = \frac{\alpha}{\alpha+2n} \binom{\alpha+2n}{n} \binom{\beta+n-1}{n} : \binom{\alpha+n-1}{n},$$

et où le domaine de convergence est l'intérieur de l'ovale $O_1\left(\frac{1}{4}\right)$.

Quant à l'application des formules (27) et (28) du paragraphe VII, nous avons, outre les fonctions $F_n(x)$ définies dans (6), à étudier ces deux autres systèmes

$$(13) \quad \Phi_n(x) = \delta_p(\alpha, \beta) x^{n+1} (1-x)^n, \qquad \Psi_n(x) = \delta_p(\alpha, \beta) x^n (1-x)^{n+1};$$

nous aurons sans peine

$$(14) \quad \Phi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \frac{\Gamma(\alpha_1+n+s+1)\ldots\Gamma(\alpha_p+n+s+1)}{\Gamma(\beta_1+n+s+1)\ldots\Gamma(\beta_p+n+s+1)} x^{n+s+1},$$

$$(15) \quad \Psi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n+1} (-1)^s \binom{n+1}{s} \frac{\Gamma(\alpha_1+n+s)\ldots\Gamma(\alpha_p+n+s)}{\Gamma(\beta_1+n+s)\ldots\Gamma(\beta_p+n+s)} x^{n+s}.$$

Posons particulièrement $p = 1$, $\alpha_1 = \beta$, $\beta_1 = \gamma$, nous aurons respectivement

$$(16) \qquad \Phi_n(x) = \frac{\Gamma(\beta + n + 1)}{\Gamma(\gamma + n + 1)} x^n \, \mathrm{F}(-n, \beta + n + 1, \gamma + n + 1, x),$$

$$(17) \qquad \Psi_n(x) = \frac{\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\gamma + n)} x^n \, \mathrm{F}(-n - 1, \beta + n, \gamma + n, x).$$

Cela posé, nous allons démontrer cet autre théorème général :

2. *Toute fonction analytique $f(x)$, régulière à l'intérieur d'un ovale $\mathrm{O}_1(r)$ de Cassini, est, dans ce domaine, développable en séries de la forme*

$$(18) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{A}'_n \, \mathrm{F}_n(x) - \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{B}'_n \, \Phi_n(x),$$

$$(19) \qquad f(x) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathrm{A}''_n \, \mathrm{F}_n(x) + \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{B}''_n \, \Psi_n(x).$$

Il est digne d'intérêt, ce me semble, que, dans le théorème 2, le domaine de convergence des séries en question dépend seulement de la fonction donnée $f(x)$, ce qui n'a pas généralement lieu pour la série qui figure dans le théorème 1. Cependant, il faut remarquer que les coefficients qui figurent dans les séries (18) et (19) sont généralement très compliqués.

Exemple 2. — Les formules (32) et (33) du paragraphe VII donnent les séries suivantes :

$$(20) \qquad \begin{aligned} \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = & \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{A}'_n x^n \, \mathrm{F}(-n, \beta + n, \gamma + n, x) \\ & - \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{B}'_n x^{n+1} \, \mathrm{F}(-n, \beta + n + 1, \gamma + n + 1, x), \end{aligned}$$

$$(21) \qquad \begin{aligned} \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = & -\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathrm{A}''_n x^n \, \mathrm{F}(-n, \beta + n, \gamma + n, x) \\ & + \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{B}''_n x^n \, \mathrm{F}(-n - 1, \beta + n, \gamma + n, x), \end{aligned}$$

où nous avons posé pour abréger

$$(22)\qquad A'_n = \frac{\binom{\alpha+2n-1}{n}\binom{\beta+n-1}{n}}{\binom{\gamma+n-1}{n}}, \qquad B'_n = \frac{\binom{\alpha+2n}{n}\binom{\beta+n}{n}}{\binom{\gamma+n}{n}},$$

$$(23)\qquad A''_n = \frac{\binom{\alpha+2n-1}{n-1}\binom{\beta+n-1}{n}}{\binom{\gamma+n-1}{n}}, \qquad B''_n = \frac{\binom{\alpha+2n}{n}\binom{\beta+n-1}{n}}{\binom{\gamma+n-1}{n}}.$$

CHAPITRE IV.

REMARQUES SUR LE PROBLÈME GÉNÉRAL.

X. — Discussion d'une série de Burmann.

Pour pouvoir étudier un nouveau cas du problème général, indiqué dans le paragraphe I, nous avons à discuter des séries de la forme

$$(1)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n.$$

Soit r le rayon de convergence de la série de puissances formée avec les coefficients de la série (1), savoir

$$(2)\qquad A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

notre série (1) est évidemment absolument, respectivement uniformément convergente, pourvu que

$$(3)\qquad \left|\frac{x^2}{1-x}\right| < r, \qquad \left|\frac{x^2}{1-x}\right| \leq r - \delta,$$

où δ est une quantité positive, arbitrairement petite.

Le domaine de convergence de la série (1) est par conséquent la partie du plan des x, située à l'intérieur de la courbe fermée $K(r)$, définie par l'équation

$$(\alpha^2+\beta^2)^2-r^2[(\alpha-1)^2+\beta^2]=0, \qquad x=\alpha+i\beta; \tag{4}$$

dans ce qui suit nous désignons par $\Omega(r)$ respectivement $\Omega'(r)$ les domaines définis par les conditions (3).

Quant à la courbe $K(r)$, qui peut être obtenue de l'ellipse de Cassini $C(r)$, considérée dans le paragraphe VI, en remplaçant x par $1 : x$, nous avons à étudier ces trois cas :

1° $r<4$; la courbe $K(r)$ est sans points singuliers;

2° $r=4$; dans ce cas $K(r)$ a un seul point singulier, savoir le point double $(2, 0)$, dont le lacet enveloppe le point $(1, 0)$;

3° $r>4$; la courbe $K(r)$ se décompose dans ce cas en deux ovales isolés, dont le plus grand $O(r)$ enveloppe la courbe $K(4)$, tandis que le plus petit $o(r)$ est situé à l'intérieur du lacet du point double de $K(4)$.

Cela posé, remarquons que, si nous remplaçons x par

$$\frac{x}{x-1}, \tag{5}$$

les expressions

$$1-x, \quad \frac{x^2}{1-x}, \quad \frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)x}{1-x} \tag{6}$$

se transforment respectivement dans

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{x^2}{1-x}, \quad -\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)x}{1-x}, \tag{7}$$

il saute aux yeux que le domaine $\Omega(r)$ et sa frontière $K(r)$ sont invariables pour la transformation (5), ce qui donnera le théorème suivant :

1. *Toute fonction $f(x)$, développable en série de la forme* (1), *satisfait à l'équation fonctionnelle*

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=f(x). \tag{8}$$

Pour généraliser ce théorème, nous prenons pour point de départ l'identité évidente

$$\frac{1}{y-x} = \frac{y+x-xy}{(1-x)(1-y)} \frac{1}{\frac{y^2}{1-y} - \frac{x^2}{1-x}};$$

posons ensuite

$$y+x-xy = y(1-x)+x,$$

nous aurons

$$(9) \qquad \frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(1-y)^n}{y^{2n+1}} \frac{x^{2n}}{(1-x)^n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(1-y)^n}{y^{2n+2}} \frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{n+1}}.$$

Supposons que la variable y parcourt la circonférence d'une courbe $K(r)$ quelconque, les deux séries qui figurent au second membre de (9) sont absolument respectivement uniformément convergentes dans les domaines $\Omega(r)$ et $\Omega'(r)$ correspondants.

Cela posé, la méthode ordinaire donnera ce théorème :

2. *Toute fonction analytique $f(x)$, régulière à l'intérieur d'une courbe* $K(r)$, *est dans ce domaine développable en série de la forme*

$$(10) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{x^{2n}}{(1-x)^n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{n+1}}.$$

Quant aux coefficients A_n et B_n, posons, pour $|x|$ suffisamment petit,

$$(11) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots;$$

nous aurons

$$(12) \qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} a_{2n-s} = \frac{1}{(2n)!} D_x^{2n}[(1-x)^n f(x)]_{x=0},$$

$$(13) \qquad B_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} a_{2n+1-s} = \frac{1}{(2n+1)!} D_x^{2n+1}[(1-x)^n f(x)]_{x=0}.$$

Il est évident que la formule (10) donnera immédiatement ces deux autres développements

$$(14)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}A'_n\frac{x^{2n}}{(1-x)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{n=\infty}B'_n\frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{n+1}},$$

$$(15)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}A''_n\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n+\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)x}{1-x}\sum_{n=0}^{n=\infty}B''_n\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n,$$

qui ont le même domaine de convergence que la série (10), tandis qu'il faut admettre

$$(16)\qquad A'_n=A_n,\qquad B'_n=B_n-A_n,$$

$$(17)\qquad A''_0=A_0,\qquad A''_n=A_n+\frac{1}{2}B_{n-1},\qquad B''_n=B_n,$$

ce qui donnera respectivement

$$(18)\quad B'_n=\sum_{s=0}^{s=n+1}(-1)^s\binom{n+1}{s}a_{2n+1-s}=\frac{1}{(2n+1)!}D_x^{2n+1}[(1-x)^{n+1}f(x)]_{x=0},$$

$$(19)\quad A''_n=\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\frac{2n-s}{2n}\binom{n}{s}a_{2n-s}=\frac{1}{(2n)!}D_x^{2n-1}[(1-x)^nf'(x)]_{x=0}.$$

Cela posé, les expressions (6) et (7) donneront, en vertu de (15),

$$(20)\qquad f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\sum_{n=0}^{n=\infty}A''_n\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n-\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)x}{1-x}\sum_{n=0}^{n=\infty}B''_n\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n,$$

d'où le théorème suivant :

3. *La condition suffisante et nécessaire pour que la fonction analytique $f(x)$, régulière aux environs du point $x=0$, satisfasse à une des équations fonctionnelles*

$$(21)\qquad f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\pm f(x)$$

est que nous aurons respectivement, avec les définitions (17),

$$(22)\qquad B_n=0,\qquad A''_n=0.$$

Exemple 1. — Soit ν une quantité finie quelconque; nous aurons les développements

$$(23)\quad (1-x)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{\nu+n-1}{2n} \frac{x^{2n}}{(1-x)^n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{\nu+n}{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{n+1}},$$

$$(24)\quad (1-x)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{\nu+n-1}{2n} \frac{x^{2n}}{(1-x)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{\nu+n-1}{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{n+1}},$$

dont le domaine de convergence est en général l'intérieur de la courbe K(4). Dans le cas où ν est un nombre entier, et seulement dans ce cas, le domaine susdit est l'intérieur d'une courbe $K(r)$, où r peut être pris arbitrairement grand. Dans ce cas les séries en question sont finies toutes deux.

Exemple 2. — Soit p un positif entier; la fonction

$$f_p(x) = [-\log(1-x)]^p,$$

satisfait, en vertu des expressions (6) et (7), à l'équation fonctionnelle

$$f_p\left(\frac{x}{x-1}\right) = (-1)^p f_p(x),$$

ce qui donnera des séries de la forme

$$(25)\quad [\log(1-x)]^{2p} = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_{n,p} \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n,$$

$$(26)\quad -[\log(1-x)]^{2p+1} = \frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)x}{1-x} \sum_{n=0}^{n=\infty} B_{n,p} \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n,$$

dont le domaine de convergence est toujours l'intérieur de la courbe K(4).

Posons dans (26) $p = 0$, nous aurons ce développement particulier, curieux, ce me semble :

$$(27)\quad -\log(1-x) = \frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)x}{1-x} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n n!\, n!}{(2n+1)!} \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n,$$

d'où respectivement pour

$$x = \begin{cases} \frac{1}{2}, \\ -1 \end{cases} \qquad x = e^{\pm\frac{\pi i}{3}}, \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

les séries numériques suivantes

$$\frac{4}{3}\log 2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n n!\, n!}{(2n+1)!}\, \frac{1}{2^n}, \tag{28}$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\, n!}{(2n+1)!}, \tag{29}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n n!\, n!}{(2n+1)!}. \tag{30}$$

Posons ensuite

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{(1-x)^\alpha}, \qquad f(x) = \varphi(x)(1-x)^\alpha, \tag{31}$$

nous aurons, en vertu des formules (10) et (14), ce théorème remarquable :

4. *Toute fonction analytique* $\varphi(x)$, *régulière à l'intérieur d'une courbe* $K(r)$, *est dans ce domaine développable en séries comme suit :*

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{x^{2n}}{(1-x)^{\alpha+n}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{\alpha+n+1}}, \tag{32}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A'_n \frac{x^{2n}}{(1-x)^{\alpha+n+1}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} B'_n \frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{\alpha+n+1}}. \tag{33}$$

Dans ce théorème il faut généralement admettre $r \leqq 4$; la seule exception est le cas particulier où la fonction $f(x)$, définie par la formule (31), est régulière dans l'intérieur d'une courbe $K(r)$ où $r > 4$.

Quant aux coefficients des séries (32) et (33), nous aurons, en vertu des formules (12), (13) et (18), les expressions suivantes :

(34) $$A_n = \frac{1}{(2n)!} D_x^{2n} [(1-x)^{\alpha+n} \varphi(x)]_{x=0},$$

(35) $$B_n = \frac{1}{(2n+1)!} D_x^{2n+1} [(1-x)^{\alpha+n} \varphi(x)]_{x=0},$$

(36) $$B'_n = \frac{1}{(2n+1)!} D_x^{2n+1} [(1-x)^{\alpha+n+1} \varphi(x)]_{x=0}.$$

Enfin, nous avons à appliquer l'identité évidente :

$$\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)x}{1-x} = \frac{x}{\sqrt{1-x}} \sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{x^2}{1-x}},$$

où les racines carrées sont à déterminer, de sorte qu'elles auront, pour $x=0$, la valeur commune $+1$, le procédé appliqué dans la démonstration du théorème 4 du paragraphe VI donnera ici le théorème analogue :

5. *Toute fonction analytique $f(x)$, régulière aux environs du point $x=0$, est développable en série de la forme*

(37) $$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)^n,$$

dont le domaine de convergence est l'intérieur d'une courbe $K(r)$, *où il faut en général admettre* $r \leqq 4$.

Le seul cas possible, où le domaine de convergence de la série (37) peut être plus étendu que l'intérieur de $K(4)$, est celui où $f(x)$ satisfait à la première des équations fonctionnelles (21) et où $f(x)$ est, de plus, régulière dans l'intérieur d'une courbe $K(r)$ pour $r > 4$.

Il est digne de remarque, du reste, que ce cas particulier ne peut pas être traité directement par la théorie générale des séries de Burmann.

Quant aux coefficients A_n, nous aurons, en vertu de la formule (4) du paragraphe I,

(38) $$A_n = \frac{1}{n!} D_x^{n-1} \left[(1-x)^{\frac{n}{2}} f'(x)\right]_{x=0}.$$

L'application sur la série (37) de la transformation (31) est évidente.

Exemple 3. — Nous aurons, en vertu de (38),

$$(1 - x)^{-\alpha-\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2\nu}{2\nu+n} \binom{\nu+\frac{n}{2}}{n} \frac{x^n}{(1-x)^{\alpha+\frac{n}{2}}}, \tag{39}$$

où le domaine de convergence est l'intérieur de la courbe K(4).

XI. — Séries de fonctions hypergéométriques.

Posons, comme dans les paragraphes V et IX,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n x^n, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n \tag{1}$$

où

$$a_n = \frac{\Gamma(\alpha_1+n)\Gamma(\alpha_2+n)\ldots\Gamma(\alpha_p+n)}{\Gamma(\beta_1+n)\Gamma(\beta_2+n)\ldots\Gamma(\beta_p+n)} b_n; \tag{2}$$

nous aurons

$$f(x) = \delta_p(\alpha, \beta)\,\varphi(x). \tag{3}$$

Les coefficients des deux développements

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{x^{2n}}{(1-x)^n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{n+1}}, \tag{4}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A'_n \frac{x^{2n}}{(1-x)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} B'_n \frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{n+1}}, \tag{5}$$

qui ont le même domaine de convergence $\Omega(r)$, se déterminent, en vertu des formules (34), (35) et (36) du paragraphe X, comme suit :

$$(6)\qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=2n} (-1)^s \binom{\alpha+n}{s} b_{2n-s},$$

$$(7)\qquad B_n = \sum_{s=0}^{s=2n+1} (-1)^s \binom{\alpha+n}{s} b_{2n+1-s}$$

$$(8)\qquad B'_n = \sum_{s=0}^{s=2n+1} (-1)^s \binom{\alpha+n+1}{s} b_{2n+1-s}.$$

Posons ensuite

$$(9)\qquad F_{2n}(x) = \delta_p(\alpha, \beta)\frac{x^{2n}}{(1-x)^n}, \qquad F_{2n+1}(x) = \delta_p(\alpha, \beta)\frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{n+1}},$$

puis définissons par les conditions

$$\frac{n}{2} \leqq n' \leqq \frac{n+1}{2}$$

le positif entier n'; nous aurons pour tous les n

$$(10)\qquad F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{\alpha+n'+s-1}{s} \times \\ \times \frac{\Gamma(\alpha_1+n+s)\Gamma(\alpha_2+n+s)\ldots\Gamma(\alpha_p+n+s)}{\Gamma(\beta_1+n+s)\Gamma(\beta_2+n+s)\ldots\Gamma(\beta_p+n+s)} x^{n+s},$$

d'où particulièrement, si nous posons $p=1$ et $\alpha_1 = \beta$, $\beta_1 = \gamma$,

$$(11)\qquad F_n(x) = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} x^n F(\alpha+n', \beta+n, \gamma+n, x).$$

Il nous reste à déterminer encore, sous forme commune, la fonction $\Phi_n(x)$, définie par les conditions

$$(12)\qquad \Phi_{2n}(x) = \delta_p(\alpha, \beta)\frac{x^{2n}}{(1-x)^{n+1}}, \qquad \Phi_{2n+1}(x) = F_{2n+1}(x).$$

A cet effet définissons, à l'aide des conditions

$$\frac{n+1}{2} \leqq n'' \leqq \frac{n+2}{2},$$

le nombre entier n'', nous aurons pour tous les n,

$$(13)\quad \Phi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{\alpha+n''+s-1}{s} \frac{\Gamma(\alpha_1+n+s)\,\Gamma(\alpha_2+n+s)\ldots\Gamma(\alpha_p+n+s)}{\Gamma(\beta_1+n+s)\,\Gamma(\beta_2+n+s)\ldots\Gamma(\beta_p+n+s)} x^{n+s},$$

de sorte que la fonction particulière correspondant à (11) devienne

$$(14)\qquad \Phi_n(x) = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} x^n\, \mathrm{F}(\alpha+n'', \beta+n, \gamma+n, x).$$

Cela posé, notre théorème général 2 du paragraphe II donnera, en vertu de (4) et (5), ces deux développements :

$$(15)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{A}_n \mathrm{F}_n(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{B}_n \Phi_n(x),$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$(16)\quad \mathrm{A}_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{\alpha+n''-1}{s} \frac{\Gamma(\alpha_1+n-s)\ldots\Gamma(\alpha_p+n-s)}{\Gamma(\beta_1+n-s)\ldots\Gamma(\beta_p+n-s)} a_{n-s},$$

$$(17)\quad \mathrm{B}_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{\alpha+n'}{s} \frac{\Gamma(\alpha_1+n-s)\ldots\Gamma(\alpha_p+n-s)}{\Gamma(\beta_1+n-s)\ldots\Gamma(\beta_p+n-s)} a_{n-s}.$$

Posons $p = 1$, nous trouvons les séries particulières

$$(18)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{A}_n x^n\, \mathrm{F}(\alpha+n', \beta+n, \gamma+n, x),$$

$$(19)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{B}_n x^n\, \mathrm{F}(\alpha+n'', \beta+n, \gamma+n, x),$$

où il faut poser

$$(20)\qquad \mathrm{A}_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{\alpha+n''-1}{s} \frac{\dbinom{\beta+n-1}{n}}{\dbinom{\gamma+n-1}{n}} a_{n-s},$$

$$(21)\qquad \mathrm{B}_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{\alpha+n'}{s} \frac{\dbinom{\beta+n-1}{n}}{\dbinom{\gamma+n-1}{n}} a_{n-s}.$$

De plus, nous savons que les nouvelles séries ainsi trouvées ont le même domaine de convergence $\Omega(r)$ que les séries données (4) et (5).

Ces remarques faites, nous venons de démontrer le théorème suivant :

1. *Toute fonction analytique $f(x)$, régulière aux environs du point $x = 0$, est développable en séries de la forme* (15), (18) *et* (19), *dont le domaine de convergence commun est l'intérieur d'une courbe* $K(r)$, *où il faut admettre, en général, pour* $\alpha \neq 0$, $r \leqq 4$. *Dans le cas particulier* $\alpha = 0$ *le domaine de convergence susdit dépend seulement de la fonction*

$$\varphi(x) = \delta_p(\beta, \alpha) f(x).$$

Exemple 1. — Les formules (23) et (24) du paragraphe X nous conduisent aux développements suivants :

$$F(\alpha + \nu, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n F(\alpha + n', \beta + n, \gamma + n, x), \tag{22}$$

$$F(\alpha + \nu, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n x^n F(\alpha + n'', \beta + n, \gamma + n, x), \tag{23}$$

convergents à l'intérieur de $K(4)$, et où nous avons posé

$$A_n = \binom{\nu + n' - 1}{n} \frac{\binom{\beta + n - 1}{n}}{\binom{\gamma + n - 1}{n}}, \qquad B_n = \binom{\nu + n'' - 2}{n} \frac{\binom{\beta + n - 1}{n}}{\binom{\gamma + n - 1}{n}}. \tag{24}$$

Il est évident que le théorème précédent nous présente un nouveau cas particulier du problème général énoncé dans le paragraphe X. Du reste, il saute aux yeux que ce cas particulier est plus compliqué que celui mentionné dans le paragraphe I, parce que la fonction qu'il s'agit de développer ne détermine pas ici généralement le domaine de convergence des séries obtenues.

Il nous reste encore à appliquer le théorème 5 du paragraphe X. A cet effet, posons

$$\Psi_n(x) = \delta_p(\alpha, \beta) \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x}}\right)^n,$$

nous aurons

$$(25)\qquad \Psi_n(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\binom{\alpha+\frac{n}{2}+s-1}{s}\frac{\Gamma(\alpha_1+n+s)\ldots\Gamma(\alpha_p+n+s)}{\Gamma(\beta_1+n+s)\ldots\Gamma(\beta_p+n+s)}x^{n+s};$$

d'où en posant $p=1$, $\alpha_1=\beta$, $\beta_1=\gamma$,

$$(26)\qquad \Psi_n(x)=\frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}x^n\,\mathrm{F}\left(\alpha+\frac{n}{2},\beta+n,\gamma+n,x\right);$$

d'où, en vertu de la formule (37) du paragraphe X, le théorème :

2. *Toute fonction analytique $f(x)$, régulière aux environs du point $x=0$, est développable en série de la forme*

$$(27)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\mathrm{A}_n\Psi_n(x),$$

dont le domaine de convergence est l'intérieur d'une courbe $\mathrm{K}(r)$, où il faut en général, même pour $\alpha=0$, admettre $r\leqq 4$.

On voit que les coefficients de la série (27) deviennent assez compliqués.

Exemple 2. — La formule (39) du paragraphe X donnera la série suivante :

$$(28)\qquad \mathrm{F}(\alpha+\nu,\beta,\gamma,x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\mathrm{A}_n x^n\,\mathrm{F}\left(\alpha+\frac{n}{2},\beta+n,\gamma+n,x\right),$$

qui est convergente à l'intérieur de $\mathrm{K}(4)$, et où il faut poser

$$(29)\qquad \mathrm{A}_n=\frac{2\nu}{2\nu+n}\binom{\nu+\frac{n}{2}}{n}\frac{\binom{\beta+n-1}{n}}{\binom{\gamma+n-1}{n}}.$$