ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BOUSSINESQ

Complément à un récent mémoire intitulé : sur les principes de la mécanique et sur leur applicabilité à des phénomènes qui semblent mettre en défaut certains d'entre eux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 29 (1912), p. 537-587

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1912_3_29__537_0>

COMPLÉMENT A UN RÉCENT MÉMOIRE

INTITULÉ :

SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE

ET

SUR LEUR APPLICABILITÉ A DES PHÉNOMÈNES

QUI SEMBLENT METTRE EN DÉFAUT CERTAINS D'ENTRE EUX [1];

PAR J. BOUSSINESQ.

SOMMAIRE. — I. Comment peut s'expliquer l'exercice instantané, ou sans propagation successive, de la pesanteur et des actions moléculaires, à toutes les distances où se produisent ces forces autour des points matériels d'où elles émanent. — II. Pourquoi les équations différentielles de la Mécanique sont du second ordre plutôt que du premier ou, en d'autres termes, déterminent les accélérations des points matériels et non leurs vitesses? — III. Des erreurs, parfois importantes au point de vue théorique, qu'entrainent les notions particulières d'expérience, simplificatrices, adjointes aux lois générales de la Mécanique pour pouvoir arriver à des résultats saisissables. — Sur le principe des vitesses virtuelles, dans le cas de liaisons mobiles sans frottements (note). — IV. Paradoxes résultant, dans le problème de la résistance des fluides, des deux hypothèses approchées de conservation des volumes matériels et de frottements intérieurs proportionnels aux vitesses de déformation. — V. Résistance qu'éprouve un ellipsoïde dans ses lentes translations uniformes à travers un liquide visqueux, calculée en y étendant la méthode qui a réussi pour les lentes translations, même variées, de la sphère.

I. — Comment peut s'expliquer l'exercice instantané, ou sans propagation successive, de la pesanteur et des actions moléculaires, à toutes les distances où se produisent ces forces autour des points matériels d'où elles émanent.

1. Les principes de la Mécanique admis comme le plus universellement applicables, savoir ceux de la conservation des quantités de

[1] Inséré en novembre 1910 aux *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* (t. XXVII, 3e série, p. 491 à 528).

mouvement, des moments ou des aires, de la force vive, exigent que l'action et la réaction entre deux points matériels quelconques soient, à chaque instant, exactement égales, dirigées en sens inverses suivant la droite actuelle r de jonction des deux points, enfin, fonction déterminée F de cette droite r. Ils supposent donc que l'action subie par chacun des deux points en présence émane, en droite ligne, de la situation même qu'occupe l'autre à l'époque actuelle, et non pas de celle qu'il occupait à une époque plus ou moins antérieure. Or, c'est admettre que l'influence de chacun s'exerce, à toute distance r où elle est susceptible d'exister, dès que le point matériel d'où elle émane est venu occuper sa situation effective, sans qu'il faille attendre aucun laps de temps supplémentaire, qui dépendrait de la distance même r. Et, en effet, les forces de pesanteur, auxquelles se réduit l'action dont il s'agit dès que la droite r de jonction nous est perceptible, se sont toujours manifestées aux astronomes comme instantanées, jusqu'aux plus grandes distances où elles ont été jugées de grandeur appréciable.

Il y a donc lieu de chercher un point de vue qui rende, pour ainsi dire, naturelle cette instantanéité, tout en laissant subsister, bien entendu, le mystère profond que présente à nos esprits tout fait d'actions réciproques entre deux êtres différents, mystère aussi impénétrable aux intelligences de notre temps qu'il l'a été aux plus anciens philosophes et tenant, sans doute, dès lors, aux bornes mêmes, essentielles, de la nature humaine.

2. Car, pour nous arrêter d'abord un instant à cette difficulté, chaque être ne nous semble pouvoir agir sur d'autres, que s'il existe à la fois en lui-même et dans ces autres êtres, double mode simultané d'existence dont le comment nous échappe.

S'il est question, en particulier, comme ici, des corps, des êtres localisés dans l'espace et s'influençant mutuellement, le mystère de ces influences ne serait pas ou guère moindre, dans l'hypothèse cartésienne, d'un contact à la fois géométrique et physique entre eux, s'exerçant à travers la surface *sans épaisseur* qui les séparerait, que dans l'hypothèse newtonienne d'influences produites à travers des régions plus ou moins profondes, dont aucune considération rationnelle à notre portée ne permet alors de fixer l'épaisseur à une limite plutôt qu'à une autre (1). Comme le degré effectif de divisibilité des choses réelles nous échappe, et que la quantité abstraite, ou mieux idéale, seule bien précise à nos esprits, est divisible à l'infini, il nous suffit alors d'admettre un décroissement indéfini, assez rapide, de l'action mutuelle de deux points ou atomes, aux distances r croissantes, pour tenir compte du principe de bon sens en vertu duquel toute influence mutuelle doit s'évanouir et disparaître, tout au moins asymptotiquement, aux très grandes distances.

Au contraire, dans l'hypothèse du contact absolu ou géométrique entre atomes, qu'admettent les cartésiens dès que ces atomes exercent entre eux une action, chacun des deux atomes contigus n'a de commun avec l'autre qu'une surface sans épaisseur, semblant incapable de réaliser *en elle* d'une manière concrète cette existence, commune aux deux corps, qui nous paraît nécessaire à l'exercice d'une action mutuelle entre eux. La même existence commune doit, en outre, comporter une infinité de degrés distincts *d'intimité*, pour expliquer les diverses intensités de cette action, extrêmement variable suivant les cas, tandis que le contact absolu, surtout entre atomes ou rigides, ou d'étendue infiniment restreinte, ne comporte pas de degrés.

3. Mais, renonçant à expliquer en son fond inaccessible le fait de l'action mutuelle, pour nous contenter d'une représentation géométrique du phénomène aussi exacte que possible, abordons la question par la circonstance de *voisinage plus ou moins grand*, qu'offrent toujours deux points matériels influençant mutuellement leurs mouvements. On peut dire que cette circonstance, évidemment importante, rend les deux points *présents* l'un à l'autre, et présents à tous ceux qui occupent la même région (de l'espace) où ils se trouvent contenus. Or, nous sentons que le fait de la *présence* d'un point matériel, dans une région de l'espace, a une certaine analogie avec celui de l'*existence* de ce point dans sa situation propre : analogie sans doute

---

(1) On peut voir, à ce sujet des deux modes comparés d'explication cartésien et newtonien, et des inextricables difficultés qu'entraîne le premier, le n° 11 (p. 13 et 14) de mes *Leçons synthétiques de Mécanique générale* (Paris, Gauthier-Villars, 1889).

bien lointaine, car la différence des deux faits en question, qui serait simplement quantitative si elle restait finie, est rendue vraiment *qualitative* par le profond abîme ou hiatus de l'infini, jeté entre eux; mais analogie pourtant réelle, qui, pour la raison, fait de tout fini, dans la *perennis Philosophia*, une pâle image de l'infini correspondant [1].

La présence incessante de chaque atome tout autour de la situation qu'il occupe, et qui est la seule où il *existe* à proprement parler, constitue donc une sorte d'existence *infiniment atténuée*, et atténuée d'autant plus (du moins généralement) en un point quelconque de l'espace, quand on compare entre elles ses diverses valeurs, que ce point est situé à une distance r plus grande de la situation propre dont il s'agit. Par suite, la simple présence différera, quant à l'action mutuelle entre l'atome considéré et tout autre, de l'existence *pleine* caractérisée par la valeur $r = 0$, en ce que l'attraction mutuelle $F(r)$ y recevra des valeurs *finies*, positives ou négatives. Au contraire, l'*existence pleine* du premier point, dans la situation occupée par le second, entraînerait une répulsion *infinie*, c'est-à-dire une valeur $F(0)$ *infinie négative*, de l'action mutuelle, valeur traduisant le fait de l'*impénétrabilité* du domaine irréductible, infiniment petit en tous sens, dans lequel l'atome doit rester *seul* pour assurer à la matière ses deux propriétés fondamentales, *conservation* et *étendue*.

4. L'action exercée par un point matériel en mouvement, aux diverses distances, sur d'autres points matériels (en mouvement ou en repos) n'a pas, dès lors, à se propager successivement jusqu'à eux et ne demande, par suite, aucun intervalle de temps, aucun délai pour se produire. Car, de même que le point existe *pleinement*, dans sa situation, dès qu'il l'occupe, de même aussi il possède à toutes les distances de sa situation, et sans délai ou, pour mieux dire, depuis un temps indéfini, l'existence partielle, infiniment atténuée, que nous y appelons sa *présence*. Cette présence le suit partout où il va, à la manière de sphères idéales concentriques qui lui seraient liées et constitueraient, en quelque sorte, son domaine ou comme son propre

(1) Le type en fut, dans le *Timée* de Platon, le temps, cette *image mobile de l'Éternité*.

espace. Il l'emporte donc sans cesse avec lui et en est perpétuellement entouré, jusqu'aux limites de la plus grande sphère où s'exerce son activité.

Et voilà pourquoi les forces de pesanteur se sont toujours manifestées aux astronomes comme instantanées, jusqu'aux plus grandes distances, pourquoi aussi le principe de l'égalité constante de la réaction et de l'action, exercées en sens inverses suivant la droite de jonction des deux points, s'est toujours montré vérifié, entraînant comme conséquences les équations usuelles des quantités de mouvement, des moments, enfin, de la conservation des forces vives ou de l'énergie.

5. Nous avons raisonné ci-dessus, il est vrai, dans l'hypothèse du P. Boscovich, acceptée par Ampère, Cauchy, B. de Saint-Venant, etc., où les atomes, éléments de la matière et points matériels des géomètres mécaniciens ou physiciens, seraient, en toute rigueur, des *points sans étendue*, de simples centres d'actions attractives ou répulsives, maintenus à distance par ces actions mêmes et ainsi susceptibles, quoique individuellement inétendus, de former les agrégats étendus que sont les corps. Plus la Physique progresse et plus elle semble, effectivement, disposée à voir pénétrables en tous sens les corps les plus denses, ou à rapetisser, pour ainsi dire, indéfiniment le volume effectif des éléments de la matière, comparativement aux espaces vides qu'ils laissent entre eux. Or, cette hypothèse de l'inétendue des atomes, à la condition d'être complétée par celle de répulsions suffisantes entre deux atomes quelconques, à l'approche de la limite $r = 0$, pour empêcher les plus grandes vitesses relatives finies de rapprochement de la réaliser jamais ou de produire entre eux un contact absolu, offre l'avantage d'introduire une parfaite continuité dans toute la dynamique. Car on n'a jamais, de la sorte, ni accélérations infinies, ni, par conséquent, vitesses instantanément créées ou détruites.

A quoi il faut ajouter la précision absolue qu'admettent alors la représentation géométrique et l'expression analytique des phénomènes, chaque point ayant sa *situation* à l'époque t, *parfaitement définie* au moyen de trois quantités simples, de trois longueurs, qui sont ses trois coordonnées actuelles x, y, z par rapport à un système d'axes fixes. Au contraire, nulle autre situation que celles de points mathématiques ne pourrait même s'exprimer quantitativement, vu que la *distance*, qui est, par excellence, l'élément mesurable des phénomènes, n'a de sens net qu'entre de tels points.

6. Cette conception de points matériels inétendus, si étrange qu'elle paraisse au premier abord, nous est donc imposée par la forme même de nos esprits; et, au fond, il n'a jamais dû en exister d'autres, dans la Science, qui fussent formulables ([1]). Aussi les éminents géomètres mécaniciens et physiciens nommés ci-dessus l'ont-ils acceptée comme réelle, comme parfaitement conforme à la véritable structure de la matière.

N'allons peut-être pas jusque-là ; car ce serait supposer, au moins dans le domaine de la localisation et des figures, un accord *absolu*, auquel nous ne sommes pas habitués ailleurs, entre nous et le dehors ou, du moins, entre le monde *idéal*, *nécessaire*, de la géométrie pure et le monde physique, *contingent*, vaguement perçu par nos sens, quoique avec une grande vivacité. Mais ne manquons pas d'observer que les procédés d'observation, aux moments de leurs plus grands progrès, n'ont jamais reconnu d'erreur dans les conséquences résultant de l'application de nos idées géométriques aux choses ; « preuve, disais-je déjà en 1889, dans mes *Leçons synthétiques de Mécanique générale* (p. 6), que ces idées n'ont pas cessé d'être supérieures, pour l'exactitude pratique, aux moyens de mesure les plus précis, et que les désaccords possibles ou même probables entre elles et les objets, ou, notamment, entre les points matériels hypothétiques, atomes sans étendue, et les véritables éléments de la matière, se trouvent relégués dans une sphère, celle des infiniment petits de la nature, inaccessible à nos intelligences et probablement destinée à nous échapper toujours ».

C'est, en effet, quand on arrive par voie de division aux plus petites quantités réelles existantes, comme, par exemple, dans l'interprétation physique de l'*asymptotisme* de deux courbes ou de deux fonctions,

---

([1]) L'hypothèse d'une matière continue n'est abordable que comme *cas limite* d'un système de points, dont on accroît indéfiniment le nombre en réduisant leurs distances.

que doit se produire le désaccord entre les quantités réelles de la nature et les quantités idéales du géomètre, divisibles à l'infini. Celles-ci, épuisant la catégorie du *possible*, expriment, en quelque sorte, la *Toute-puissance* dans l'ordre d'idées qui les concerne, tandis que les quantités réelles se réfèrent uniquement à la création présente, ou à un ordre de choses effectif, nullement tenu d'épuiser son idée et d'égaler sa cause [1].

II. — Pourquoi les équations différentielles de la Mécanique sont du second ordre plutôt que du premier ou, en d'autres termes, déterminent les accélérations des points matériels et non leurs vitesses?

7. Les géomètres et les astronomes auraient pu, ce semble, avoir de bonne heure, dans l'appréciation de l'influence que deux corps exercent mutuellement sur leurs mouvements, l'idée d'attribuer une *valeur dynamique* au fait de leur voisinage, ou de considérer ce que j'ai appelé ci-dessus la *présence* plus ou moins intime de chacun d'eux dans une sphère d'assez grand rayon décrite autour de leur centre respectif, en entendant par là une existence du corps *infiniment atténuée* dans toute cette étendue, avec une très légère extension, à cet espace, de son action propre, d'ailleurs localisée presque en entier là où il existe. S'ils avaient eu cette idée, ils auraient probablement évité l'erreur capitale qui a, jusqu'à Galilée, c'est-à-dire pendant vingt siècles à partir d'Aristote, empêché tout progrès de la Dynamique.

Cette erreur, on ne peut plus naturelle d'ailleurs (car elle semblait imposée par le principe de simplicité), consistait à admettre que les lois du mouvement, en vertu desquelles les états successifs du monde physique sont reliés chacun au précédent, déterminent à chaque instant les vitesses des points matériels en fonction de leurs situations

---

[1] J'ai quelque peu développé cette pensée, à la suite de ma *Théorie approchée de l'écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale*, dans des *Réflexions sur la continuité physique et l'asymptotisme* (p. 122, 123, 134), qui complètent une longue note finale du Mémoire intitulée « *Considérations sur les lois d'économie et de simplicité; importance de ces lois en tant que principes directeurs de l'esprit* » (Gauthier-Villars, 1907; et *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. L).

actuelles. C'était bien, on le voit, l'hypothèse la plus simple possible, celle qui, une fois constaté le fait que l'avenir se rattache de proche en proche au présent et au passé, s'offrait d'elle-même à l'esprit. Et l'on conçoit, en sentant combien il était dur d'y renoncer, qu'il ait fallu un bien persistant effort pour la redresser, après de multiples démentis que lui infligeait l'expérience.

Or voici comment, tout en acceptant en partie cette hypothèse dans son esprit, dans ce qu'elle a d'essentiel et, au fond, de très admissible, on aurait été conduit à la corriger, à en modifier la forme et l'application de manière à la rendre irréprochable, par la notion d'une certaine *présence*, dont jouirait la matière tout autour de sa situation proprement dite et qui suffirait pour y entraîner de sa part des actions *infiniment atténuées*.

8. Le phénomène vulgaire du choc mettait en évidence la propriété d'*impénétrabilité* de chaque corps, de chaque *point matériel*, par les autres et, à raison même de cette impénétrabilité, les actions effectives exercées *au contact*, en apparence *géométrique*, entre deux corps ou deux points matériels dont la distance mutuelle r semble décroître jusqu'à zéro *avec une vitesse finie*. La nécessité d'éviter la pénétration mutuelle de ces points ne pouvait, en effet, manquer d'éveiller dans un tel cas, chez eux, des forces modifiant *notablement* leurs vitesses durant un instant d'*une insaisissable brièveté*.

Ce fait suffisait donc pour obliger d'admettre qu'à la distance $r = 0$ l'action d'un point matériel sur un autre peut créer dans celui-ci, *durant un temps infiniment court*, des vitesses (positives ou négatives) *de grandeur sensible*. De là, d'abord, une première rectification, ainsi imposée par l'expérience, au principe trop simple instinctivement suggéré à l'esprit par le fait de l'enchaînement des phénomènes. Elle consiste à voir que ce ne sont pas précisément les vitesses des points matériels en présence qui semblent devoir être, à chaque instant, fonction des situations de ces points, mais seulement les *changements de vitesse durant des instants très courts*.

9. De plus, une telle action déployée *à distance nulle* aurait constitué, dans l'ordre d'idées où nous sommes, l'action directe, *intégrale*,

du point, celle que met en œuvre, pour ainsi dire, sa substance même, sollicitée par une attaque l'atteignant *en plein* et qui intéresse sans délai possible son *existence*. Dès lors, si l'on avait admis aussi, aux distances finies r, des actions incomparablement moindres de *simple présence*, ou d'existence infiniment atténuée, celles-ci auraient paru aptes à produire, durant le même élément de temps, des vitesses non plus finies, mais proportionnées à leurs causes, ou infiniment petites aussi; et il était naturel de supposer ces vitesses du même ordre de petitesse que les temps durant lesquels elles se trouvaient engendrées. Rapportées à l'unité de temps, elles constituaient donc des *accélérations finies*, mesurant justement les effets, des petites actions ainsi introduites, à l'échelle de grandeur qui leur convenait le mieux.

9 *bis*. De même que la *présence*, existence *infiniment* atténuée, n'est pas l'existence propre, mais est, en quelque sorte, une *tendance* à l'existence, chose d'autre nature qui équivaut, *quantitativement*, à un vrai néant d'existence, tout en ayant, *qualitativement*, de l'analogie avec l'existence dont elle constitue comme un *soupçon* ou un *indice de proximité*, de même aussi les forces productrices d'accélérations sont d'autre nature que celles suscitées à distance nulle par l'existence même et qui produiraient directement des vitesses. En comparaison de celles-ci, elles équivalent, *quantitativement*, à de vrais néants d'action.

Il ne faudrait donc pas se figurer, comme notre sensibilité nous y porterait, que leur admission revient à faire agir la matière, *là où elle n'existe pas*, *comme là où elle existe*. Elle revient, en réalité, à l'y faire agir de la manière précise qui convient à cette *différentielle*, à ce soupçon *quantitativement nul*, d'existence, qu'est la présence simple; et l'on ne pourrait, pour ainsi dire, pas attribuer au fait *physique* du voisinage une valeur dynamique moindre, pour peu que l'on consente à lui en attribuer une.

Il y a forcément, là-dessous, le mystère, ou, en quelque sorte, le *clair-obscur*, de l'infiniment petit, du *zéro* considéré comme point de départ de la quantité *naissante*, mystère inévitable dans toutes les branches de la Philosophie naturelle, et qui a bien un côté clair, perçu immédiatement par l'intuition du vrai géomètre, mais aussi un côté impénétrable à nos esprits, celui par où l'infiniment petit exprime la continuité et implique l'infini.

10. Mais, dès lors, grâce à ces forces, infinitésimales et relativement *douces*, *productrices d'accélérations, non de vitesses*, il y avait, pour les deux points en train de se rapprocher, et bien avant qu'ils arrivassent au contact géométrique, un véritable *contact physique* possible, ne mettant en jeu que des variations *continues* de vitesses et capables cependant, pourvu que les très petites distances r suscitassent des répulsions suffisantes, d'empêcher tout à fait le contact géométrique. A cette condition, d'une simplicité et d'une fécondité qui en imposaient l'admission tout au moins provisoire, l'on se trouvait donc dispensé de faire jamais, dans l'étude des phénomènes, l'hypothèse extrême $r = 0$, ou d'introduire dans les calculs les forces, incomparablement plus intenses, productrices directement de vitesses et qu'il faudrait évaluer à une échelle infiniment supérieure.

Ces forces *instantanées* énormes, quoique suggérées les premières à l'esprit par les faits, devenaient donc, en réalité, *purement virtuelles*. N'ayant jamais à intervenir d'une manière effective, elles se trouvaient désormais reléguées dans le mystère de la *possibilité pure, comme l'infini dont elles portent la marque* et qui n'est jamais applicable aux êtres finis que dans un sens idéal, évoquant leur attache et leurs rapports à la *Cause première*. Elles y restaient masquées par les forces productrices d'accélérations, seules agissantes. Celles-ci, en quelque sorte émanées d'elles, les représentaient pleinement dans les phénomènes et les couvraient, tout comme la simple *présence* de chaque *point matériel*, disséminée autour de son indivisible situation, couvre et masque à distance sa substance propre, inaccessible dans son siège derrière cette poussière d'actions élémentaires partout répandues.

Ainsi s'introduisait dans la Dynamique, avec la continuité des mouvements et l'homogénéité de leurs causes, une simplicité vraiment idéale, unissant la douceur des moyens à la puissance des résultats, conformément à cette maxime de la Sagesse qu'il ne faut pas cesser de répéter (car elle doit être la règle de nos pensées dans les sciences) : « *Attingit a fine usque ad finem fortiter et disponit omnia suaviter* (*Liber Sapientiæ*, VIII, 1) ».

11. La substitution des accélérations aux vitesses dans la loi, la plus simple possible, qui s'était offerte la première à l'esprit pour régir le mouvement, n'oblige pas d'ailleurs à compliquer autrement cette loi, en y supposant, par exemple, les accélérations de deux points *donnés*, arrivés *en présence* l'un de l'autre, fonctions d'autres variables que leurs situations. Or, le principe directeur qui nous régit dans l'élaboration de nos connaissances, est qu'il faut s'en tenir toujours aux hypothèses les plus simples non contredites positivement par l'observation, en ne les compliquant, lorsque celle-ci vient les démentir, que dans la stricte mesure où les faits bien constatés rendent indispensable une telle rectification. Pas une de nos sciences n'existerait, ni même, une fois créée, ne pourrait subsister, sans ce principe esthétique de simplicité ou d'ordre; et même disparaîtraient alors la plupart des données du sens commun universellement admises (¹).

La nature humaine n'atteint l'espèce de certitude à laquelle elle peut raisonnablement prétendre entre certaines limites, qu'à la condition d'être modeste, de ne dédaigner aucune de ses sources de lumière, expérimentales ou rationnelles : toutes lui restent sans cesse indispensables. Il faut donc nous résigner à voir nos constructions *théoriques* toujours partielles, toujours imparfaites, toujours environnées d'immenses espaces mystérieux au milieu desquels elles sont comme perdues. Et il doit nous suffire que l'ordonnance en soit simple, harmonique, explicative des faits dans les régions, de plus en plus grandes, qui nous deviennent assez familières pour que nos esprits s'y représentent clairement les principaux détails.

On aurait donc pu supposer, tout au moins provisoirement, que, dans un système quelconque de points matériels, les accélérations de ces points variaient seulement *avec leurs situations respectives*. Et un examen ultérieur, appuyé sur les faits les mieux observés, aurait ensuite confirmé pleinement ce principe, en le précisant ou l'explicitant de la manière la plus satisfaisante (²).

(¹) J'ai donné la preuve de ces assertions dans la grande Note finale de mon étude de 1907 citée plus haut, Note intitulée « *Considérations sur les lois d'économie et de simplicité; importance de ces lois en tant que principes directeurs de l'esprit* ».

(²) *Voir*, à ce sujet, la seconde et la troisième de mes *Leçons synthétiques de Mécanique générale* (Paris, Gauthier-Villars, 1889), nos 10 à 24, p. 12 à 29.

12. Toutefois, les changements élémentaires de situation effectués d'un instant à l'autre s'exprimant par les *vitesses* des points, la connaissance de celles-ci à l'époque actuelle aurait été nécessaire, en même temps que la connaissance des situations actuelles des points, pour rattacher chaque état physique à l'état *immédiatement* antérieur, si l'on peut ainsi dire ; et l'on aurait dû, par conséquent, se donner, pour l'instant des phénomènes choisi comme *initial*, non seulement l'*état statique*, que définissent les coordonnées primitives ou les situations de début des divers points du système, mais aussi l'*état dynamique*, défini par leurs vitesses. Celles-ci ne se trouvaient, dès lors, pas moins *arbitraires* que les situations dans cet état primitif, bien loin d'en être fonction comme l'avait supposé l'ancienne physique péripatéticienne.

Du reste, cette indépendance effective où sont les vitesses, à l'instant initial, des situations, aurait pu, dès l'origine, être directement prouvée par l'observation fréquente et facile d'un grand nombre de systèmes matériels, paraissant constitués à très peu près de même et où, pour mêmes situations des points à des moments donnés (c'est-à-dire pour mêmes situations relatives ou même configuration actuelle de ces systèmes), les vitesses offraient la plus grande diversité. Telles étaient, par exemple, les chutes successives d'un même corps, remonté chaque fois à une altitude différente de celles de ses départs antérieurs, et ainsi animé de vitesses très inégales aux moments de ses passages près d'un même point relié invariablement à la Terre.

III. — Des erreurs, parfois importantes au point de vue théorique, qu'entraînent les notions particulières d'expérience, simplificatrices, adjointes aux lois générales de la Mécanique pour pouvoir arriver à des résultats saisissables.

13. En se reportant au Mémoire dont la présente étude est un complément, on voit qu'en raison de la prodigieuse complication des systèmes matériels, où le nombre, la variété et l'agitation des éléments composants dépassent tout ce que peut se représenter notre imagination, les principes généraux de la Mécanique ne conduiraient, malgré leur simplicité extrême, qu'à des résultats inextricables, si nous ne

pouvions pas joindre à ces principes, dans les grandes catégories de phénomènes qui nous sont accessibles, des principes spéciaux ou accessoires, non plus rigoureux, mais seulement très approchés, traduisant des faits simples que l'observation révèle comme propres à ces catégories de phénomènes.

La conservation presque exacte du volume des particules, malgré leurs déformations notables, est, par exemple, l'un de ces principes approchés, tout à fait usuel pour de nombreux phénomènes d'écoulement et d'ondes concernant les liquides, souvent même les gaz ou d'autres corps. Le fait de l'établissement rapide, presque instantané, d'états intermoléculaires stables chez les particules en train de se déformer, ou d'un véritable *régime interne* entraînant alors la réalisation incessante, très approchée, de ce qu'on appelle l'*état élastique* et, par suite, l'application des formules de cet état à l'équilibre et au mouvement des solides ou des fluides, est un autre de ces principes, qui, bien que dit *accessoire*, domine toute la Mécanique terrestre (n^{os} 5 et 6 du Mémoire). Et il s'y adjoint (n° 7), quand les mouvements de déformation sont très rapides, la considération des écarts existant à chaque instant entre la configuration interne *stable* des particules, ou configuration *élastique idéale*, et la configuration effective ou *réelle*; ce qui introduit les pressions correctives dites de *frottement intérieur* ou de *viscosité*, fonctions *approchées* des *vitesses* apparentes ou générales de *déformation*.

13 *bis*. — Tous ces moyens de simplification, tous les principes accessoires rappelés ici, semblent pouvoir se rattacher à la grande loi fondamentale, devenue presque instinctive si elle ne l'a pas toujours été, d'*économie* ou d'*épargne*, ou encore de *moindre effort*, en vertu de laquelle nous jugeons que les actions en jeu dans la matière se règlent à chaque instant de manière à y produire, à fort peu près, les plus grands effets possibles, ou, pour des effets perceptibles assignés, de manière à être le plus réduites possible, bref, à faire suivre aux phénomènes les voies les plus faciles, les plus voisines des équilibres stables.

En effet, dans les circonstances où nous admettons la conservation des volumes matériels, c'est-à-dire de la *densité*, c'est que, par exemple, une augmentation sensible de celle-ci exigerait la présence dans la matière, qui se trouverait ainsi notablement condensée, de pressions considérables, tout à fait disproportionnées à ce que demande le genre d'effets produits qu'il s'agit d'étudier. De même, pendant les déformations, supposées assez lentes, d'un corps, c'est la conservation tout au moins approchée de l'état élastique à l'intérieur de chaque particule, état le plus simple, le plus uniforme et le plus stable possible pour le groupement moléculaire actuel de sa matière, qui doit constamment requérir les moindres efforts intérieurs.

Il est, malheureusement, bien difficile de formuler d'une manière à la fois précise et générale cette grande loi naturelle de l'économie. Car elle affecte, tantôt, la *quantité d'action* $\left(\int \Sigma mv\,ds\right)$, comme dans les problèmes de Mécanique rationnelle; tantôt, le *temps de parcours* des trajectoires suivies par un ébranlement qui se propage, comme dans l'Optique de Fermat; tantôt, la *quantité* même de *matière* à disposer en vue d'un certain rôle, comme dans la figure polyédrique que les abeilles donnent à la cire de leurs alvéoles ou dans la forme creuse, plus résistante à la flexion que la forme pleine, des os longs de nos membres, des tiges de graminées, etc.; tantôt, l'*altitude* de masses fluides à mouvoir, comme dans le régime permanent d'un cours d'eau de débit donné, à l'amont d'un déversoir ou d'une cataracte, etc.; tantôt, la surface du corps, comme dans la forme d'équilibre d'une goutte liquide sans pesanteur, et d'un volume constant donné; tantôt enfin, les *efforts* développés eu égard à des déplacements produits. Cela arrive, par exemple, dans le mode de résistance d'une barre chargée *debout* de plus en plus fortement et qui, au lieu de s'écraser, *fléchit*, quand sa flexion devient possible avec moins de charge que son écrasement; ou dans une plaque mince (plane ou courbe), se déformant aussi, *de préférence* et, par suite, presque immanquablement, par *simple flexion*, c'est-à-dire sans que varient sensiblement de longueur les fibres de son feuillet moyen; ou, encore, dans une plaque métallique plane et épaisse, posée sur un large anneau rigide horizontal à contour intérieur taillé *carrément* (en arête vive), et pressée *en porte-à-faux* contre le centre de cet anneau par un poinçon à tête plate superposé, qui, après l'avoir d'abord plus ou moins aplatie, la *cisaille* et la rompt tout à coup, le long du contour en question, dès que ce cisaillement exige moins de pression que la continuation même de l'écrasement; etc.

Dégager ainsi dans son unité cachée, de la multitude de ses applications, le principe général de l'épargne, serait, incontestablement, réaliser un des plus grands progrès que pût faire la Mécanique physique; car ce qui n'a été jusqu'ici qu'un sentiment obscur, inspirateur ou source de lueurs partielles isolées, passerait à l'état d'idée claire, dès lors utilisable, vraisemblablement, sur des champs bien plus vastes. Mais y a-t-il lieu de l'espérer, après tant de siècles d'efforts infructueux? Ou est-il justement en notre pouvoir de porter ainsi la lumière dans les profondes et inconscientes bases de nos notions naturelles? Et pourrait-on citer, depuis l'origine de la Philosophie, quelque exemple d'une telle transformation de l'inconscient en conscient, dans les fondements de nos connaissances? Même l'invention de l'Analyse infinitésimale, de cette merveilleuse organisation, il y aura bientôt trois cents ans, de l'*emploi mathématique* de la notion d'infini (d'ailleurs innée à l'esprit humain), me semblerait moins surprenante que la mise au jour, le clair dégagement, de la loi générale d'épargne dans la nature.

Un tel progrès ne sortirait-il pas, en effet, des limites imposées à notre espèce, à la nature humaine, par sa constitution essentielle, qui, aux yeux du bon sens et même de l'histoire, paraît bien s'être maintenue identique depuis le premier éveil connu de la pensée réfléchie? Car il existe, sans doute, des bornes que nos intelligences ne franchiront jamais, surtout ici-bas, et des notions (celles d'*origine* notamment) destinées à nous rester toujours obscures.

14. Outre les faits propres qui constituent la *définition* de chaque sorte de phénomènes, il y a plusieurs autres de ces principes accessoires, devenus tellement familiers aux géomètres qu'on ne les remarque même pas.

Tel est notamment, dans l'étude de la matière ordinaire, solide, liquide ou même gazeuse, le fait du nombre prodigieux des molécules existant dans les plus petits espaces sensibles, conjointement avec celui de l'inimaginable petitesse du rayon d'activité des actions moléculaires. Il en résulte la possibilité de remplacer les actions individuelles, exercées entre molécules des couches superficielles de deux particules contiguës, par des forces fictives totalisantes, par des *pressions*, fonctions de variables qui expriment des *états moyens* concernant en bloc des myriades de molécules, et, dès lors, fonctions *graduellement variables* des coordonnées x, y, z du centre de chaque petite région où s'observent ces états moyens.

C'est de la sorte, grâce à de telles fonctions continues de x, y, z, que les véritables équations différentielles de la Mécanique, où le temps t serait la *seule* variable indépendante, mais où le nombre des fonctions inconnues se trouverait comme infini ou en rapport avec celui des points matériels du système, peuvent être remplacées par les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique, à *quatre* variables indépendantes x, y, z, t, mais où les fonctions inconnues ne sont plus qu'en nombre restreint. Il y a là une prodigieuse simplification, incompatible, comme on voit, avec une rigueur absolue, et n'impliquant même une approximation suffisante qu'en raison des deux extrêmes petitesses effectives du rayon d'activité et des distances intermoléculaires dans les corps terrestres.

15. La tendance assez générale des géomètres, même mécaniciens et physiciens, plus portés par leur esprit ordinaire de déduction à voir rapidement les conséquences qu'à peser les principes, est peut-être de trop oublier que l'emploi de tant d'hypothèses seulement approchées les expose à obtenir des résultats légèrement inexacts, surtout quand il s'agit non pas du gros des phénomènes, ou de ce qui se passe vers le centre de leurs sièges principaux, mais de détails accessoires, de très petites quantités physiquement imperceptibles ou sensibles à peine, égarées, en quelque sorte, loin de ces sièges.

De telles quantités, correspondant à des circonstances exceptionnelles, peuvent bien se trouver altérées dans des rapports ou notables, ou parfois même infinis (de manière à ne plus garder alors leur ordre de petitesse), par ce qu'auront d'imparfait les hypothèses introduites.

Si, par exemple, celles-ci nous font substituer, comme il vient d'être dit, et comme il arrive pour les *pressions*, la *densité*, la *température*, etc., des *moyennes* de nombres à ces nombres mêmes, des courbes régulières, intercalées, à des lignes sinueuses affectées de brèves ondulations accentuées fortement, etc., ces hypothèses effaceront ou atténueront les singularités, les angles, les irrégularités locales, et pourront même déplacer légèrement les limites des corps, en *uniformisant* la répartition de leur matière.

Plus la Physique se développe, et plus s'y multiplient les lois (dites *statistiques*) qui ne se vérifient, et qu'on ne regarde ainsi comme vraies, qu'à la faveur des très grands nombres d'éléments y intervenant, éléments peu ou point perceptibles individuellement et entre lesquels les écarts se neutralisent de manière à ne laisser se dégager que des moyennes, exprimées justement par les lois en question. Il n'y a même guère, à part les principes généraux de la Dynamique (qui comprennent celui de conservation de la *masse* ou de la matière), que de telles lois, comportant, dans les détails des phénomènes, d'innombrables écarts locaux, d'ailleurs soustraits à l'observation par la multitude des autres éléments incomparablement plus nombreux encore, au milieu desquels ils sont comme noyés.

Sous ce rapport, la mentalité des hommes de science semble, depuis déjà un certain nombre d'années, se modifier peu à peu, dans le sens d'une application moins étroite et moins complète de la loi d'enchaînement des phénomènes, ou d'une sorte d'atténuation du *déterminisme mécanique* par quelque chose comme la *déclinaison* (le *clinamen*) d'Épicure, tendance qu'auraient les atomes, selon ce philosophe, à varier leurs trajectoires d'une manière imprévisible [1].

---

[1] Ceci n'est peut-être pas sans quelques rapports lointains avec la manière, cependant bien autre au fond, dont j'ai expliqué, il y a déjà plus de trente-cinq ans, la *vie et la volonté* comme *pouvoirs directeurs distincts*, dans les systèmes matériels vraiment *singuliers* que sont les organismes. Ceux-ci se trouveraient constitués de la manière toute spéciale qu'il faut, pour maintenir sans cesse à leur intérieur une instabilité physico-chimique rendant les forces ordinaires insuffisantes pour y déterminer complètement la suite des phénomènes, et provoquant ou suscitant ainsi l'action de ces *principes* (ou pouvoirs) *directeurs*, de tout autre nature, qui orienteraient, *aiguilleraient* les systèmes organisés dans leurs voies effectives, *sans produire aucune accélération ou figurer dans les équations du mouvement.* On peut voir, à ce sujet, dans la grande Note finale *Sur les lois d'économie et de simplicité*, citée plus haut, de mon *Étude d'Hydraulique* de 1907, les nos 10 (p. 111 à 114) et 15 (p. 117), avec leur complément (p. 121, 122).

Quant au mode d'action des pouvoirs directeurs, pas n'est besoin de dire qu'il nous reste aussi inconnu que celui des forces physico-chimiques elles-mêmes, productrices

16. Dans d'autres cas, les altérations n'auront pas pour but d'uniformiser *l'expression* du phénomène et pourront être moins bien compensées.

Ainsi, l'hypothèse de la conservation du volume des particules revient à supposer nulle leur compressibilité, ou infinie la vitesse de propagation des ébranlements intérieurs tendant à y produire des changements de densité. D'où il résulte que, dans les ondes liquides ordinaires, ou de *pesanteur*, dont l'étude n'est abordable que grâce à cette hypothèse, un ébranlement initial d'une petite partie de la surface libre du liquide semble transmettre instantanément à toute la masse fluide, jusqu'aux distances infinies, des fractions presque infinitésimales du mouvement. Mais on voit que cette transmission théorique instantanée constitue un simple jeu de formules, dû à l'implicite supposition d'une incompressibilité totale.

Elle n'amène d'ailleurs que des erreurs absolues très faibles; car les déplacements théoriques de fluide, censés ainsi produits plus loin que les distances où la propagation des ébranlements peut réellement se faire d'après l'élasticité effective du liquide, sont extrêmement petits et doivent rester à peu près toujours inappréciables à l'observation.

Mais, au point de vue théorique, le côté paradoxal de telles erreurs leur donne une réelle importance et oblige à les signaler.

Dans l'intéressante question, traitée aux paragraphes suivants, de la résistance des liquides ou parfaits, ou visqueux, à la translation des solides qui s'y trouvent immergés, la même hypothèse de conservation des volumes matériels, à laquelle s'adjoint celle, très approchée aussi, de frottements intérieurs ou de viscosité dépendant uniquement des vitesses apparentes de déformation, donne également lieu à des conséquences paradoxales, encore en exagérant la solidarité des diverses parties de la masse fluide et la transmission au loin des perturbations qui, du dehors, y surviennent quelque part.

17. J'ai implicitement compris ci-dessus (nº 14), parmi les faits d'expérience qui définissent, en quelque sorte, les phénomènes à

---

d'accélérations. Car l'élément géométrique des phénomènes y est, comme presque partout, le seul vraiment clair, pour nos intelligences essentiellement localisantes et figuratrices.

étudier et qu'on adjoint aux principes de la Mécanique pour arriver à des résultats saisissables, les diverses *liaisons* caractéristiques de nos *machines*, et qu'expriment le plus souvent des équations finies entre les coordonnées des points de ces systèmes matériels. Elles résultent des relations de contiguïté qu'offrent, entre eux, les divers organes solides, tant fixes que mobiles, d'un mécanisme et, entre elles, les diverses parties de chaque organe, relations dont les effets sur le mouvement paraissent avoir été jusqu'ici le principal objet de la Mécanique rationnelle.

Il convient de s'y défier de l'hypothèse, peu ou point approchée bien souvent, de l'absence des *frottements* ou de *forces de liaison à travail total constamment nul* (¹), hypothèse que sa simplicité, et l'élégance

---

(¹) *Sur le principe des vitesses virtuelles, dans le cas de liaisons mobiles sans frottements.* — Quand les liaisons sont exprimées par des équations finies, comme

$$f(x, y, z, \ldots, t) = 0,$$

où entre explicitement le temps t en outre des coordonnées $(x, y, z), \ldots$ des *points principaux* (à masse sensible) que l'on a spécialement en vue, rien n'empêche de considérer des déplacements ∂x, ∂y, $\partial z, \ldots$ *virtuels* sans doute, mais *réalisables* ou corrélatifs à une variation effective ∂t du temps, pourvu que l'on comprenne dans le système, comme il est naturel de le faire, sinon les points de la *matière guidante* (à mouvements censés connus) qui constitue les liaisons, *actuellement coïncidants*, avec ceux, (x, y, z), $\ldots$, du système proprement dit, du moins, *le travail des réactions* exercées sur ces *points guidants* par les points (x, y, z), $\ldots$ *guidés*, égales et contraires aux *forces de liaison* (F_x, F_y, F_z). $\ldots$ qui agissent sur ceux-ci par le fait de la liaison même $f = 0$.

Si nous appelons $\partial' x$, $\partial' y$, $\partial' z, \ldots$ les déplacements virtuels de ces points guidants, le travail virtuel des réactions sera $-F_x \partial' x$, $-F_y \partial' y$, $\ldots$ et l'on aura, *pour la somme totale, nulle par hypothèse, des travaux virtuels de toutes les forces produites par les liaisons*,

$$(a) \qquad F_x(\partial x - \partial' x) + F_y(\partial y - \partial' y) + F_z(\partial z - \partial' z) + \ldots = 0.$$

Or *les points guidants* actuels sont autant astreints que les points guidés à vérifier, durant l'élément virtuel ∂t du temps, l'équation de liaison $f = 0$, *tout en étant censés, ici, essentiellement distincts et séparables des points guidés;* de sorte que l'on a, tout à la fois,

$$\frac{df}{dx}\partial x + \frac{df}{dy}\partial y + \ldots + \frac{df}{dt}\partial t = 0, \qquad \frac{df}{dx}\partial' x + \frac{df}{dy}\partial' y + \ldots + \frac{df}{dt}\partial t = 0,$$

ou bien, par soustraction, *avec élimination du terme commun en* ∂t,

$$(b) \qquad \frac{df}{dx}(\partial x - \partial' x) + \frac{df}{dy}(\partial y - \partial' y) + \frac{df}{dz}(\partial z - \partial' z) + \ldots = 0.$$

Les seuls déplacements virtuels à introduire dans les équations (a) et (b) sont donc des procédés généraux de calcul qu'elle rend possibles dans la résolution des problèmes, font trop aisément accepter. Car elle s'offre d'elle-même pour faire, par exemple, connaître des particularités

---

les déplacements *relatifs* $\delta x - \delta' x$, ... des points principaux (x, y, z), ..., par rapport aux points des liaisons coïncidant actuellement avec eux, *déplacements relatifs dont les rapports mutuels sont les mêmes que si le temps t n'avait pas varié. Telle est*, ce me semble, *la vraie raison de la règle classique, qui est de ne pas attribuer de variation virtuelle δt au temps*.

Ajoutons à (a) les équations comme (b), multipliées préalablement par tout autant de coefficients indéterminés $-\lambda$, $-\mu$, ... Comme l'équation (a) contient, pour chaque point (x, y, z), ... autant de termes triples qu'il y a de liaisons distinctes, il ne s'adjoindra aux trois termes de (a) relatifs, par exemple, à (x, y, z) et à la liaison $f = 0$, que les termes analogues de la relation (b) *seule*. L'équation obtenue aura donc la forme simple

$$(c)\quad \left(\mathrm{F}_x - \lambda \frac{df}{dx}\right)(\delta x - \delta' x) + \left(\mathrm{F}_y - \lambda \frac{df}{dy}\right)(\delta y - \delta' y) + \left(\mathrm{F}_z - \lambda \frac{df}{dz}\right)(\delta z - \delta' z) + \ldots = 0.$$

Or les déplacements relatifs $\delta x - \delta' x$, $\delta y - \delta' y$, ... ne sont astreints qu'à vérifier les équations comme (b), en même nombre que les indéterminées λ, μ, ... ; et il ne subsistera, dans (c), que des déplacements virtuels *arbitraires*, après qu'on aura déterminé λ, μ, ... de manière à annuler, dans cette équation (c), les coefficients des déplacements que les équations comme (b) empêcheront de l'être. Alors la vérification de (c), dans sa partie encore subsistante, sera tenue de se faire identiquement ; et l'on aura, en définitive,

$$(d)\qquad \mathrm{F}_x = \lambda \frac{df}{dx}, \qquad \mathrm{F}_y = \lambda \frac{df}{dy}, \qquad \mathrm{F}_z = \lambda \frac{df}{dz}, \qquad \ldots,$$

formules donnant l'expression analytique, bien connue, des forces de liaison et permettant, par suite, de former les équations du mouvement des points (x, y, z), ..., que l'on a en vue.

Il est à peine utile d'ajouter que, si l'équation $f = 0$ ne contient pas explicitement le temps t, la matière produisant la liaison pourra être censée fixe : ce qui permettra d'annuler les déplacements virtuels $\delta' x$, $\delta' y$, ..., ou les travaux des réactions $-\mathrm{F}_x$, $-\mathrm{F}_y$, ..., et dispensera les points *guidants* de figurer dans les formules.

Le cas, spécial aux solides, *d'invariabilité* de la distance r de deux points (x, y, z) et (x', y', z') du système, offre cette particularité, qu'on peut y prendre chacun des deux points, quoique éloigné de l'autre, pour le *point guidant* celui-ci. Malgré leur non-contiguïté, l'équation (b) est alors satisfaite, en raison de ce que la fonction f, savoir $(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - r^2$, ne dépend que des trois différences $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, où x', y', z' ont à varier de $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$. Les réactions $-\mathrm{F}_x$, $-\mathrm{F}_y$, $-\mathrm{F}_z$ s'y confondent avec les trois forces de liaison relatives au point (x', y', z'), ou émanées du premier point (x, y, z); et, comme il y a proportionnalité de F_x, F_y, F_z aux trois projections $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ de la droite r sur les axes, ou aux trois dérivées partielles de f en x, y, z, l'annulation du travail total $\mathrm{F}_x(\delta x - \delta' x) + \mathrm{F}_y(\delta y - \delta' y) + \mathrm{F}_z(\delta z - \delta' z)$, des forces dues à la liaison, résulte alors de (b), sans aucune hypothèse d'absence de frottement.

importantes de la solution, dans les cas, actuellement fréquents en Physique moléculaire et en Chimie atomique, où l'on a seulement quelques données sur la nature et le nombre de liaisons internes cachées, dont certaines analogies portent à admettre l'existence, quoiqu'on ne se représente pas la matière les exerçant ou en assurant la réalisation. Cela permet d'aborder, un peu à l'aventure (pour ainsi dire), des questions non débrouillées encore, où nous échappe totalement, ou presque totalement, le mécanisme des phénomènes : précieux avantage sans doute, mais compensé par des chances d'erreur qu'on risque fort de ne pas évaluer assez haut.

IV. — Paradoxes résultant, dans le problème de la résistance des fluides, des deux hypothèses approchées de conservation des volumes matériels et de frottements intérieurs proportionnels aux vitesses de déformation.

18. Voici un autre exemple d'erreurs, très importantes *au point de vue théorique*, dues inévitablement à l'emploi de la même hypothèse, fort approchée cependant, de la conservation des volumes liquides.

Dans la partie analytique du Mémoire dont celui-ci est un complément, j'ai étudié, entre autres questions, la translation rectiligne et uniforme, avec une vitesse donnée U, d'un solide, au sein d'une masse liquide indéfinie de fluidité parfaite et sans pesanteur, d'abord en repos, quand le mouvement du liquide autour du solide est devenu permanent jusqu'aux plus grandes distances. J'y ai, en particulier, évalué la composante totale, suivant une direction quelconque prise pour celle des x, de la pression exercée sur le solide, en appliquant suivant les x le principe des quantités de mouvement, entre les époques t et $t+dt$, au liquide compris, à l'époque t, à l'intérieur d'une sphère σ' de rayon r, décrite tout entière dans le fluide autour du centre du corps, choisi justement à cette époque t comme origine d'axes rectangulaires fixes des x, y, z.

J'ai écrit, à cet effet, que la somme algébrique, multipliée par dt, des actions exercées, suivant les x, sur le volume fluide ϖ intérieur à la sphère σ' (considérée à l'instant t), tant par le fluide extérieur contigu que par le solide dont la surface σ sert de limite intérieure actuelle à ce volume fluide ϖ, égale l'accroissement, durant le temps dt, de la quantité de mouvement possédée suivant les x *par cette même masse fluide*. Or, j'ai observé que cet accroissement comprend, d'une part, la différentielle, durant dt, de la quantité de mouvement existant, suivant les x, dans le fluide *sans cesse variable* intérieur à la sphère σ', plus la quantité de mouvement, à l'époque $t+dt$, du fluide sorti durant dt de cette sphère fixe, fluide faisant partie de celui que l'on considère, enfin, moins la quantité de mouvement, à la même époque $t+dt$, du fluide entré durant dt dans cette sphère fixe, et qui est étranger à la masse liquide dont il est question.

Si u, v, w sont les trois composantes de la vitesse effective du fluide à l'endroit qu'occupe un élément $d\sigma'$ de la sphère, et α', β', γ' les trois cosinus directeurs d'une petite normale dn' à $d\sigma'$, tirée vers le dehors, la composante suivant cette normale de la vitesse de sortie du liquide à travers $d\sigma'$ est le trinome $u\alpha'+v\beta'+w\gamma'$; et la masse liquide, de densité ρ, *sortie* ou *entrée* par $d\sigma'$ suivant que ce trinome est positif ou négatif, égale $\rho(u\alpha'+v\beta'+w\gamma')\,d\sigma'\,dt$, masse possédant, suivant les x, la quantité de mouvement $\rho u(u\alpha'+v\beta'+w\gamma')\,d\sigma'\,dt$. Par conséquent, la quantité de mouvement à évaluer, *pour le fluide sorti ou entré*, est

$$\rho\,dt\int_{\sigma'} u(u\alpha'+v\beta'+w\gamma')\,d\sigma'. \tag{1}$$

19. J'ai pu réduire comme il suit, à une intégrale de surface prise également sur σ', la différentielle, en dt, de la quantité de mouvement du fluide contenue dans la sphère *fixe* σ'.

La permanence du mouvement du fluide autour du solide montre que la quantité de mouvement ainsi possédée par le fluide à l'intérieur de la sphère σ' serait constante, si cette sphère σ' se déplaçait avec la vitesse U de translation du corps, vitesse dont nous appellerons a, b, c les trois cosinus directeurs. Or, dans ce cas, la quantité de mouvement, à l'époque t, du fluide contenu dans la sphère fixe σ' à la même époque, est l'équivalent de celle, à l'époque $t+dt$, du fluide que contient la sphère mobile à cette époque $t+dt$, fluide comprenant celui qui est dans la sphère fixe à cette même époque $t+dt$, plus le fluide de l'espace envahi par la sphère mobile durant dt, moins le fluide de l'espace délaissé par la même sphère mobile. Donc la différentielle durant dt qui est à évaluer, savoir celle de la quantité de mouvement du fluide contenu dans la sphère fixe, égalera, *au signe près*, la quantité de mouvement possédée à l'époque $t+dt$ par le fluide qu'a envahi la sphère mobile, moins celle du fluide délaissé.

Or l'espace envahi par l'élément $d\sigma'$ de la sphère mobile constitue un petit prisme de base $d\sigma'$ et d'arête oblique $U\,dt$, faisant avec la normale dn' à $d\sigma'$ un angle qui a pour cosinus $a\alpha'+b\beta'+c\gamma'$. La masse fluide qui occupe cet espace, comptée positivement ou négativement suivant qu'il se trouve envahi ou délaissé, est donc $\rho U(a\alpha'+b\beta'+c\gamma')d\sigma' dt$; et elle a pour quantité de mouvement possédée suivant les x, $\rho u U(a\alpha'+b\beta'+c\gamma')d\sigma' dt$. Il n'y a donc qu'à sommer cette expression sur toute l'aire σ' et à changer son signe, pour avoir la différentielle cherchée,

$$(2)\qquad -\rho U\,dt\int_{\sigma'} u(a\alpha'+b\beta'+c\gamma')\,d\sigma'.$$

Telle est l'expression qui, jointe à (1), donnera la variation totale de quantité de mouvement dont le quotient par dt sera la somme algébrique des actions extérieures exercées suivant les x sur le fluide de la sphère σ', actions comprenant la pression, suivant les x, du fluide extérieur, plus celle du solide. Soit, d'une part, $\mathfrak{P}'_x$ la pression, suivant les x, du fluide extérieur à la sphère σ' et, d'autre part, $-\mathfrak{P}_x$ celle du solide, ou $\mathfrak{P}_x$ la composante totale, suivant les x, de la résistance opposée par le fluide à la vitesse U de translation uniforme du solide. Nous aurons

$$(3)\qquad \mathfrak{P}'_x-\mathfrak{P}_x=\rho\int_{\sigma'} u[(u-Ua)\alpha'+(v-Ub)\beta'+(w-Uc)\gamma']\,d\sigma'.$$

20. Je n'avais appliqué jusqu'ici cette formule, numérotée (28) dans le Mémoire (p. 519) avec des notations un peu différentes pour $\mathfrak{P}_x$ et $\mathfrak{P}'_x$, qu'au cas d'un fluide *parfait*, où j'avais reconnu (même p. 519) que le second membre et $\mathfrak{P}'_x$ s'annulent à la limite r infini; de sorte qu'il en résulte alors $\mathfrak{P}_x=0$, ou l'absence de toute impulsion translatoire du fluide sur le solide.

Mais le raisonnement qui précède s'étend, sans y rien changer, au cas d'un liquide quelconque, même imparfait, c'est-à-dire pourvu de frottements intérieurs ou de viscosité. Et l'on peut en faire, par exemple, l'application à une sphère solide d'un rayon donné R, mue depuis un temps indéfini, avec une petite vitesse constante U dirigée suivant les x positifs, au sein d'une telle masse liquide, visqueuse et illimitée, d'abord en repos : intéressant problème d'Hydrodynamique, traité par Stokes depuis environ 1850, mais que j'ai repris vers le commencement de 1885 dans le cas plus général d'une lente translation variée quelconque de la sphère [1]. Les vitesses u, v, w du fluide, quand, pour fixer les idées, on suppose rectiligne et dirigé suivant les x le mouvement de la sphère (de vitesse actuelle U), ont, même pour une translation variée, des expressions de la forme

$$(4) \qquad u = \mathrm{U} + \Delta_2\varphi - \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \qquad v = -\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}, \qquad w = -\frac{d^2\varphi}{dx\,dz},$$

où φ désigne une certaine fonction du temps t et de la distance actuelle $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ au centre de la sphère. Or, comme les trois dérivées partielles $\frac{dr}{d(x,y,z)}$ de r en x, y, z sont $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$, c'est-à-dire les trois cosinus directeurs α', β', γ' de la normale dn' à la sphère de rayon r décrite autour de l'origine, on reconnaît facilement que le second membre de l'équation (3) est alors nul.

En effet, d'abord, il vient

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dr}\alpha' = \left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)x \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \alpha'^2 r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right),$$
$$\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} = \alpha'\beta' r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right), \qquad \frac{d^2\varphi}{dx\,dz} = \alpha'\gamma' r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right).$$

Par suite, les formules (4) donnent, en observant que $\Delta_2\varphi = \frac{1}{r}\frac{d^2.r\varphi}{dr^2}$,

$$(5) \qquad \begin{cases} u = \mathrm{U} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d\varphi}{dr}\right) - \alpha'^2 r\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d\varphi}{dr}\right), \\ (v, w) = -\alpha'(\beta', \gamma')\, r\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d\varphi}{dr}\right). \end{cases}$$

---

[1] *Voir* les pages 224 à 242 du Tome II de mon *Cours de Physique mathématique de la Faculté des Sciences de Paris* (Gauthier-Villars, 1903).

Dès lors, le facteur entre crochets du second membre de (3), où Ua, Ub, Uc se réduisent ici, respectivement, à U, o, o, devient immédiatement, vu la valeur 1 de la somme $\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2$,

$$\frac{\alpha'}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)-\alpha' r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right) \qquad \text{ou} \qquad \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}\alpha'.$$

Or r est constant sur toute la surface σ' de la sphère ; d'où il suit que tout facteur fonction seulement de r et t pourra sortir du signe $\int$. Le second membre de (3) sera donc simplement $\int_{\sigma'} u\alpha' d\sigma'$, en y faisant abstraction du facteur $\frac{2\rho}{r}\frac{d\varphi}{dr}$. Mais l'expression (5) de u a la forme $M+N\alpha'^2$, avec M, N fonctions seulement de r et de t. On aura donc

$$\int_{\sigma'} u\alpha' d\sigma' = M\int_{\sigma'}\alpha' d\sigma' + N\int_{\sigma'}\alpha'^3 d\sigma'.$$

Or un cosinus directeur, comme α', de la normale dn' à la sphère, et son cube α'^3, sont aussi souvent et autant négatifs que positifs, ou ont leurs valeurs moyennes sur σ' nulles. Donc l'intégrale qui figure au second membre de (3) est zéro; et cette formule, une fois rendue applicable par la régularisation des vitesses u, v, w, donne simplement

$$\mathfrak{P}'_x = \mathfrak{P}_x. \tag{6}$$

La valeur de $\mathfrak{P}_x$ est d'ailleurs, ici où l'on suppose la permanence du mouvement établie autour du corps, $-6\pi\varepsilon RU$, où ε désigne le coefficient de frottement intérieur du fluide [1].

21. Ainsi, *dès que le mouvement relatif du fluide, par rapport à la sphère solide de rayon* R, *est devenu permanent jusqu'à des distances quelconques r du centre de celle-ci, toutes les sphères fluides qui lui sont concentriques éprouvent, de la part du fluide contigu extérieur, la même résistance totale à leur mouvement que la sphère solide elle-même.*

Par suite, quoique les vitesses u, v, w prises par le fluide, et les pressions corrélatives à ces mouvements, s'évanouissent alors, en chaque

(1) *Voir*, pour la démonstration de cette valeur remarquable et usuelle de $\mathfrak{P}_x$ due à Stokes, le même Tome II, p. 237, où $V=-U$ est ici une constante.

endroit, aux distances infinies de l'origine, la résultante de ces pressions sur toute une sphère de rayon infini reste égale à la pression même qu'éprouve le solide central. Elle s'annule, il est vrai, pour un fluide parfait ; mais c'est parce que la pression sur le solide s'annule alors elle-même, dans le mouvement, censé devenu depuis très longtemps uniforme, de ce corps.

Cette circonstance d'une action totale finie exercée, à une distance infinie, par le corps d'où émane le mouvement, paraît, à première vue, en contradiction avec le principe de bon sens qui nous porte à annuler l'influence de tout être fini sur ceux qui en sont infiniment éloignés. Toutefois, le paradoxe pourrait n'être qu'apparent, quand on donne à l'influence en question un temps *infini* pour se produire, comme on le fait ici en admettant que la permanence du mouvement autour du solide s'est établie ou réglée jusqu'aux distances r les plus grandes. Avant d'affirmer le caractère paradoxal du résultat, il y a donc lieu de voir ce qu'est la pression totale du fluide extérieur sur les surfaces σ', avant que le mouvement se soit réglé, ou même lorsqu'il ne se règle pas. Et il y a lieu de commencer cette étude par le cas simple d'un fluide parfait, où, comme on a vu au n° 34 du Mémoire dont le présent travail est un complément, la résistance du fluide au mouvement translatoire du solide a une résultante proportionnelle à l'accélération actuelle $\frac{dU}{dt}$ du solide.

22. Alors un premier fait suffirait pour porter à croire que le paradoxe est bien réellement impliqué dans nos formules. C'est le fait qu'exprime dans ce Mémoire (p. 510), pour un corps immergé de forme quelconque, la formule (13) du potentiel des vitesses, appelé φ à cet endroit (et qui n'a rien de commun avec notre fonction φ ci-dessus, propre au cas de la sphère mue dans un liquide *visqueux*) : $\frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt}$ y désignent les composantes actuelles de la vitesse translatoire du corps, ici réduites à U, o, o. Or l'on voit que ce potentiel donne, par ses dérivées u, v, w en x, y, z, des vitesses uniquement dépendantes, dans tout le fluide, de la vitesse translatoire actuelle U du solide. C'est donc instantanément, sans aucun délai de propagation, que nos formules font, pour ainsi dire, retentir dans tout le fluide,

jusqu'à l'infini, le mouvement actuel du solide, ou régler les vitesses u, v, w. Et cela n'a rien de surprenant, puisque l'hypothèse admise de conservation des volumes matériels revient à supposer infinie la vitesse de propagation des ébranlements.

La formule (13) citée donnant ainsi $\varphi = \mathrm{UP}_x$, où P_x exprime une fonction déterminée des trois coordonnées x, y, z comptées à partir du centre du corps à l'époque t, la première partie de l'expression (15) de la pression p (p. 511), partie qu'on sait, du moins dans le cas d'un corps sphérique ([1]), être la seule ayant une résultante autre que zéro sur les sphères σ', se trouve réduite à $-\rho \frac{d\mathrm{U}}{dt}\mathrm{P}_x$. La pression du fluide *extérieur* sur l'élément $d\sigma'$ de ces sphères est, par suite, $-\rho \frac{d\mathrm{U}}{dt}\mathrm{P}_x d\sigma'$, et, sa composante suivant les x, $\rho \frac{d\mathrm{U}}{dt}\mathrm{P}_x \alpha' d\sigma'$.

Il en résulte, comme impulsion totale du fluide extérieur sur la sphère σ',

$$\mathfrak{P}'_x = \rho \frac{d\mathrm{U}}{dt} \int_{\sigma'} \mathrm{P}_x \alpha' \, d\sigma'. \tag{7}$$

Or, on a vu aux n^{os} 29 et 29 *bis* du même Mémoire (p. 516 à 518) que la fonction P_x devient, suivant chaque direction $(\alpha', \beta', \gamma')$ du rayon r, de l'ordre de petitesse de $\frac{1}{r^2}$ aux grandes distances r, alors que σ' est de l'ordre de r^2. Donc $\mathfrak{P}'_x$ ne tend pas vers zéro quand r croît sans limite.

Dans le cas simple d'un corps sphérique de rayon R, où P_x a l'expression $\frac{\mathrm{R}^3}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{r}$ d'après la Note du n° 29, cette fonction P_x est homogène du degré -2 en x, y, z, r, ou devient, suivant chaque direction, inversement proportionnelle à r^2, tandis qu'on peut prendre en raison directe de r^2 les valeurs correspondantes de $d\sigma'$. Le second membre de (7) est donc indépendant de r; et l'on a ainsi $\mathfrak{P}'_x = \mathfrak{P}_x$, ou la relation (6), *pour un fluide parfait,* sans que le mouvement du fluide autour du solide ait aucunement besoin de devenir permanent et sans que la résistance éprouvée par le solide soit nulle.

([1]) En effet, le reste de l'expression (15) de p ne contient comme variables que des vitesses actuelles et est le même que dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme de la sphère avec permanence autour d'elle, où nous avons trouvé $\mathfrak{P}'_x = \mathfrak{P}_x = 0$.

Le résultat paradoxal et pratiquement inadmissible d'une action totale finie exercée sur un liquide, aux distances infinies, par un solide immergé qui s'y meut, *est* donc *attribuable*, non pas aux formules approchées des frottements intérieurs, dont l'annulation n'entraîne pas la sienne, mais, inévitablement, comme l'apparente régularisation instantanée des mouvements de toute la masse par les vitesses actuelles du solide, *à l'hypothèse de la conservation des volumes fluides, ou aux petites erreurs qu'entraîne sa très légère inexactitude.*

23. Cherchons enfin ce qu'est la différence $\mathfrak{P}'_x - \mathfrak{P}_x$, quand la sphère, encore animée, suivant les x, d'une petite vitesse variée quelconque U, se meut au sein d'un liquide visqueux.

Il faut demander la formule de $\mathfrak{P}'_x$ qui convient alors aux pages 230 à 237, déjà citées plus haut, du Tome II de mon *Cours de Physique mathématique*. $\mathfrak{P}'_x$ y a (p. 237) l'expression (102) que je reproduis ici

$$(8)\qquad 4\pi\rho R\left[\psi'(t) - \frac{R^2 F''(t)}{4} - \frac{R^2 F''(t)}{3}\frac{r^3}{R^3} + \frac{2r^2}{3R}\frac{d^2\varphi}{dr\,dt}\right],$$

dans laquelle $F(t)$, $F'(t)$, $F''(t)$ désignent respectivement, *au signe près*, le trajet jusqu'à l'époque t, la vitesse U et l'accélération $\frac{dU}{dt}$ de la sphère; $\psi(t)$ [p. 233, formule (97)] la fonction

$$\psi(t) = \frac{3}{4}R^2 F'(t) + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\rho}F(t) + \frac{3}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}\,R\int_0^\infty F'(t-\beta^2)\,d\beta.$$

Enfin, le terme $\frac{2r^2}{3R}\frac{d^2\varphi}{dr\,dt}$, ou $\frac{2}{3R}\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\,r\varphi}{dr} - r\varphi\right)$, devient, d'après la formule (95) (p. 233) de $r\varphi$, et en y éliminant finalement $\psi(t)$,

$$(9)\quad F''(t)\frac{r^3 - R^3}{3R} + \frac{\varepsilon}{\rho}\left\{-F'(t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F'\left[t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(r-R)^2}{2\alpha^2}\right]e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha\right\}$$
$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}\,R\int_0^\infty F''(t-\beta^2)\left[1 - \frac{r}{R}e^{-\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(r-R)^2}{4\beta^2}}\right]d\beta.$$

Or, l'expression (8) de $\mathfrak{P}'_x$ se dédouble en deux parties, savoir :

$$(10)\quad 4\pi\rho R\left[\psi'(t) - \frac{7}{12}R^2 F''(t)\right] \quad \text{et} \quad 4\pi\rho R\left[-F''(t)\frac{r^3 - R^3}{3R} + \frac{2r^2}{3R}\frac{d^2\varphi}{dr\,dt}\right].$$

La première partie n'est autre chose (p. 237 du Tome cité) que la résistance $\mathfrak{P}_x$ opposée par le fluide à la sphère solide de rayon R et estimée suivant les x positifs : elle est donnée explicitement par la formule (104) de la même page, où V désigne la vitesse relative, $-$U, de l'ensemble du fluide par rapport à la sphère, m la masse liquide $\frac{4}{3}\pi R^3\rho$ déplacée statiquement par le solide et, enfin, $F'(\tau)$ l'expression, à l'époque quelconque τ, de la vitesse relative V, qu'on peut écrire ici, plus explicitement, $-U(\tau)$.

On a donc

$$(11)\qquad \mathfrak{P}_x = -\frac{m}{2}\frac{dU}{dt} - 6\pi\varepsilon RU - 12\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\,R^2\int_0^\infty U'(t-\beta^2)\,d\beta$$
$$= -\frac{m}{2}\frac{dU}{dt} - 6\pi\varepsilon RU - 6\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\,R^2\int_{-\infty}^t \frac{U'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

24. Il reste la seconde expression (10) comme valeur de $\mathfrak{P}'_x - \mathfrak{P}_x$. Or, en y remplaçant le dernier terme entre crochets par (9), il vient immédiatement

$$(12)\qquad \mathfrak{P}'_x - \mathfrak{P}_x = 4\pi\varepsilon R\left\{-F'(t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F'\left[t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(r-R)^2}{2\alpha^2}\right]e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\alpha\right\}$$
$$- 8\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\,R^2\int_0^\infty F''(t-\beta^2)\left(1 - \frac{r}{R}e^{-\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(r-R)^2}{4\beta^2}}\right)d\beta$$
$$= 4\pi\varepsilon R\left\{U - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U\left[t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(r-R)^2}{2\alpha^2}\right]e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\alpha\right\}$$
$$+ 4\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\,R^2\int_{-\infty}^t \frac{U'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left(1 - \frac{r}{R}e^{-\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(r-R)^2}{4(t-\tau)}}\right).$$

Aux très grandes distances r, cette dernière expression se réduit à

$$(13)\qquad \mathfrak{P}'_x - \mathfrak{P}_x = 4\pi\varepsilon RU + 4\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\,R^2\int_{-\infty}^t \frac{U'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

vu l'hypothèse faite $U(-\infty) = 0$ et en raison de ce que, dans la dernière quantité entre parenthèses, l'exponentielle évanouissante en $-(r-R)^2$ l'emporte alors infiniment sur le facteur r qui la multiplie.

Par suite, *la pression $\mathfrak{P}'_x$ exercée sur une sphère σ' de rayon infini, par le fluide extérieur, est égale à celle $\mathfrak{P}_x$ que subit la sphère solide centrale, quant à sa partie,* $-\frac{m}{2}\frac{dU}{dt}$, *indépendante du coefficient ε du frottement intérieur; mais elle est seulement le tiers de la pression subie par cette sphère solide, quant à la partie due au frottement intérieur.*

25. Supposons maintenant que la vitesse $U(\tau)$ de la sphère, après avoir été nulle jusqu'à une époque déjà ancienne τ, ait pris *rapidement*, à cette époque, une certaine valeur, désormais constante, U.

Alors, dans le troisième membre de (12), la fonction

$$U\left[t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(r-R)^2}{2\alpha^2}\right]$$

s'annule pour les valeurs de $t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(r-R)^2}{2\alpha^2}$ plus petites que τ, ou pour celles de α inférieures à $\sqrt{\frac{\rho}{2\varepsilon}}\frac{r-R}{\sqrt{t-\tau}}$, et elle égale sensiblement la constante $U(t)$ ou U pour les valeurs de α plus grandes. La première partie du troisième membre de (12), en y faisant d'ailleurs $\alpha = \beta\sqrt{2}$, peut donc s'écrire

$$8\varepsilon RU\sqrt{\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\frac{r-R}{2\sqrt{t-\tau}}} e^{-\beta^2}\,d\beta.$$

D'autre part, dans la dernière partie de (12), le facteur $U'(\tau)$ ne diffère de zéro qu'au voisinage de la valeur spéciale τ pour laquelle la vitesse $U(\tau)$ a cessé d'être nulle. Et il vient, à très peu près,

$$(14)\quad \mathfrak{P}'_x - \mathfrak{P}_x = 8\varepsilon RU\sqrt{\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\frac{r-R}{2\sqrt{t-\tau}}} e^{-\beta^2}\,d\beta + 4\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\frac{R^2U}{\sqrt{t-\tau}}\left[1 - \frac{r}{R}e^{-\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(r-R)^2}{4(t-\tau)}}\right].$$

La dernière valeur (11) de $\mathfrak{P}_x$ est devenue, en même temps,

$$(15)\quad \mathfrak{P}_x = -6\pi\varepsilon RU - 6\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\frac{R^2U}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Aux distances r infinies, le second membre de (14), où l'intégrale définie vaut alors $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, redonne bien l'expression (13) déjà obtenue ci-dessus, mais réduite ici à $4\pi\varepsilon \mathrm{RU} + 4\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\frac{\mathrm{R}^2\mathrm{U}}{\sqrt{t-\tau}}$. Et, en l'ajoutant à (15), on a

$$\mathfrak{P}'_x = -2\pi\varepsilon\mathrm{RU} - 2\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\frac{\mathrm{R}^2\mathrm{U}}{\sqrt{t-\tau}}, \tag{16}$$

c'est-à-dire le tiers de $\mathfrak{P}_x$.

On voit que la permanence des vitesses et des pressions, autour de la sphère solide animée désormais d'un mouvement uniforme, s'établit avec une assez grande lenteur, les derniers termes de (15) et de (16) ne s'évanouissant que comme l'inverse de la racine carrée du temps écoulé $t - \tau$.

26. Il n'est pas indifférent de remarquer que les pressions totales *finies*, exercées sur les très grandes sphères liquides σ' par le fluide extérieur, ne produisent en tout que des travaux infiniment petits. Car leurs composantes sur chaque élément $d\sigma'$ se trouvent multipliées, dans l'expression de leurs travaux rapportés à l'unité de temps, par les vitesses analogues très petites u, v, w : ce qui donne, sur σ', un travail total de l'ordre du produit évanouissant de la pression résultante finie par un facteur comparable aux valeurs moyennes de ces vitesses u, v, w.

Si donc, au lieu d'appliquer à la masse liquide contenue dans ces sphères σ', le principe des quantités de mouvement, on avait employé celui des forces vives, comme j'ai fait, dans le cas d'un *liquide parfait*, aux n[os] 26, 27, 28, 29 et 29 *bis* du Mémoire de 1910 dont celui-ci est un complément (p. 514 à 518), il n'aurait pas été nécessaire de considérer le travail extérieur produit aux distances r infinies. Mais alors, il aurait fallu tenir compte du travail des forces intérieures, sauf dans le cas d'un liquide parfait où il est nul.

Dans la partie, souvent citée ici, du Tome II de mon *Cours de Physique mathématique*, j'ai fait usage (p. 226 à 228), pour démontrer la détermination, par leurs équations aux dérivées partielles, des problèmes de mouvement d'un solide immergé dans une masse liquide visqueuse, de deux méthodes basées sur l'emploi de l'équation des forces vives, et dont la plus simple consiste à négliger le travail des pressions exercées ainsi, aux distances infinies, sur une très grande sphère σ' fictive enveloppant la masse fluide que j'y considère. Cette simplification, basée sur le principe de bon sens que nul corps n'exerce une action totale sensible à une distance infinie de sa situation, se serait donc trouvée en défaut, à raison de l'équation de conservation des volumes matériels qu'on y adopte et qui n'est qu'approchée, si l'on s'y était servi du principe des quantités de mouvement. Mais on voit qu'elle restait effectivement admissible, vu l'emploi exclusif qu'on y a fait de l'équation des forces vives.

Les nos 27 à 32, mentionnés en partie ci-dessus, de mon Mémoire de 1910 (p. 514 à 523) et relatifs uniquement au cas d'un solide mû dans un liquide parfait, indiquaient déjà la distinction qu'il y avait à faire, sous le rapport de ce que donne l'action du fluide extérieur sur les très grandes sphères liquides σ', entre les équations respectives des forces vives, des quantités de mouvement, et des moments. Car, tandis que le travail extérieur total se trouvait, pour une très grande sphère σ' de rayon r, de l'ordre de petitesse de $\frac{1}{r^3}$, la pression totale n'était plus que de l'ordre de $\frac{1}{r}$ et, ses moments, de l'ordre des quantités finies ou non évanouissantes.

27. En terminant, signalons encore, dans la même question de la résistance des liquides visqueux aux mouvements d'un solide immergé, un paradoxe tout au moins apparent, dû aux trois hypothèses simultanées de la permanence relative des mouvements autour du corps (jusqu'aux distances infinies), de la conservation des volumes fluides, enfin, de frottements intérieurs exprimés par les formules de Navier, ou fonctions linéaires *des simples vitesses relatives* de glissement des couches liquides. Il se présente dans le problème de la lente translation uniforme, suivant les x, d'un cylindre circulaire de longueur indéfinie, se mouvant perpendiculairement à ses génératrices, dirigées suivant les z, par exemple, et communiquant au fluide, par raison de symétrie, des vitesses parallèles au plan des xy, ou aux sections normales, et les mêmes à tous les *niveaux* z. Le paradoxe consiste en ce que les mouvements ne se règlent alors qu'en devenant

communs au solide et à toute la masse fluide ; de sorte que le cylindre central entraîne en bloc le fluide ambiant, jusqu'à des distances quelconques de l'axe (¹).

Le cylindre central semble donc produire là, par unité de sa longueur qui est de volume fini, et sur une masse infinie de fluide, un effet notable en chaque endroit, et non plus seulement notable dans l'ensemble : ce qui paraît, au plus haut degré, contraire au principe (de bon sens) de l'évanouissement asymptotique des phénomènes aux grandes distances des régions où siègent leurs causes.

Et, cependant, le paradoxe peut, pour deux motifs, n'être qu'apparent, ou se trouver foncièrement conforme tant à la raison qu'à l'expérience, dans la mesure où sont réalisables les conditions qu'il suppose.

Le premier de ces motifs est dans le *temps infini* que demande, pour se produire, la régularisation du mouvement à toutes les distances et, par suite, l'*effet infini* considéré. Il ne semble donc pas impossible qu'il y ait proportion entre cet effet et sa cause, dont la durée d'action est illimitée.

Mais de plus, et surtout, nul cylindre solide, dans la nature, ne sera de longueur infinie. Il y aura toujours, si la masse fluide est assez étendue, des points de cette masse assez distants de l'axe pour que la hauteur du cylindre, vue de ces points, paraisse bornée et même très petite. Les vitesses n'auront donc pas de raison d'y être pareilles à tous les niveaux z et dirigées dans les plans des sections normales du cylindre ; en sorte que le fluide déplacé par le cylindre se rendra, de l'avant de celui-ci à son arrière, par des chemins non pas perpendiculaires aux z, mais orientés dans tous les azimuts autour de l'axe des x. Il pourra utiliser les deux dimensions des y et des z pour se dégager, et non plus seulement celle des y.

Quoi qu'il en soit, et le paradoxe fût-il dû, au moins en partie, aux petites inexactitudes des deux principes de la conservation des volumes fluides et de frottements intérieurs *fonctions des seules*

(¹) *Voir* encore le Tome II de mon *Cours de Physique mathématique* (p. 252). Ce mouvement en bloc avait déjà été remarqué par Stokes, dans son Mémoire de 1851 relatif à l'*Effet du frottement intérieur des fluides dans le mouvement des pendules*.

vitesses, dont le premier y contribue certainement, ce résultat extraordinaire montre à quel point les frottements intérieurs accroissent *la solidarité* des diverses parties d'une masse fluide en train de se déformer. Et l'expérience le confirme en tant qu'approximatif; car MM. Favé et Charpentier (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 18 avril 1904, p. 967) ont constaté que l'entraînement effectif du fluide par le cylindre est encore très sensible à des distances de 100 diamètres du cylindre.

V. — Résistance qu'éprouve un ellipsoïde dans ses lentes translations uniformes à travers un liquide visqueux, calculée en y étendant la méthode qui a réussi pour les lentes translations, même variées, de la sphère.

28. La facilité relative avec laquelle les expressions (4) des vitesses u, v, w, où φ désigne une fonction auxiliaire dépendant uniquement de t et du paramètre $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, m'avait permis en 1885 de résoudre le problème des lentes translations variées d'une sphère solide à l'intérieur d'un liquide visqueux indéfini, m'a suggéré beaucoup plus récemment l'idée d'étendre, si c'était possible, la même méthode au cas de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{17}$$

en regardant φ comme fonction de t et du paramètre λ, variable de zéro à l'infini, qui caractérise les divers ellipsoïdes extérieurs, homofocaux du proposé,

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1. \tag{18}$$

Alors, en effet, ce paramètre λ remplace tout naturellement le rayon r des sphères, vu que les hypothèses $a=b=c=\mathrm{R}$ donnent

$$r=\sqrt{\mathrm{R}^2+\lambda},$$

où $\lambda = r^2 - \mathrm{R}^2$.

D'ailleurs, je supposerai ces formules (4) simplifiées par la suppression du premier terme, U, de u, ou réduites à

$$u = \Delta_2\varphi - \frac{d^2\varphi}{dx^2},\qquad v = -\frac{d^2\varphi}{dx\,dy},\qquad w = -\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}; \tag{19}$$

car cela revient, dans le cas de la sphère qui sert de point de départ, à accroître implicitement φ d'une partie, $U\frac{r^2}{4} = U\frac{x^2+y^2+z^2}{4}$, donnant $\left(\Delta_2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\left(U\frac{r^2}{4}\right) = U$, sans rien changer ni à v, ni à w.

La manière même dont j'ai été conduit aux formules (19) de u, v, w [1], montre que ces formules doivent convenir, au moins dans le cas d'un corps de révolution autour de l'axe des x où l'on a évidemment $\frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy}$, pour exprimer le plus simplement possible la conservation des volumes fluides. Mais c'était, il faut l'avouer, un bonheur inespéré, que φ se trouvât ne dépendre de x, y, z, pour la sphère, que par l'intermédiaire de la variable unique r. Et, dès lors, la chance pour que φ fût seulement fonction de t et de λ, même dans le cas d'un ellipsoïde de révolution où $b = c$, devait être bien moindre encore.

Quoi qu'il en soit, les trois équations indéfinies de Navier, pour le mouvement d'un liquide visqueux sans pesanteur, réduites par la suppression des termes non linéaires en u, v, w et par la substitution, à ces vitesses, des expressions (19), donnent pour régir la fonction φ, en éliminant finalement la pression moyenne p grâce à des différentiations évidentes en y et z, les deux équations indéfinies

$$\frac{d}{d(y,z)}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{d\Delta_2\varphi}{dt} - \Delta_2\Delta_2\varphi\right) = 0; \tag{20}$$

ρ y désigne la densité et ε le coefficient constant de frottement intérieur du fluide, ou *coefficient de viscosité*.

Il y avait donc à évaluer $\Delta_2\varphi$ et $\Delta_2\Delta_2\varphi$. Ne mettant d'abord en évidence que la variable λ, et appelant φ', φ'' les deux premières dérivées de φ par rapport à λ, j'ai été conduit à poser : d'une part,

$$(21)\quad \begin{cases} f(\lambda) = \varphi'' + \frac{\varphi'}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right), \\ \psi(\lambda) = f'(\lambda) + \frac{f(\lambda)}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right); \end{cases}$$

---

[1] *Voir* mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (Paris, Gauthier-Villars), t. II, fasc. 2, p. 372* et 373*.

d'autre part,

$$(22)\qquad\left\{\begin{aligned} \mathrm{H} &= \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2},\\ \mathrm{K} &= \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^3}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^3},\\ \mathrm{L} &= \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^4}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^4}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^4} \end{aligned}\right.$$ (1);

et j'ai trouvé, par un calcul assez laborieux,

$$(23)\qquad \Delta_2\varphi = \frac{4}{\mathrm{H}}f(\lambda),\qquad \Delta_2\Delta_2\varphi = \frac{16}{\mathrm{H}^2}\left[\psi'(\lambda)+\frac{2\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\psi(\lambda)\right].$$

29. Les deux équations (20) signifient donc que l'expression qui y figure entre parenthèses, devenue, après division par 8,

$$(24)\qquad \frac{1}{2\mathrm{H}}\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{df(\lambda)}{dt}-\frac{2}{\mathrm{H}^2}\psi'(\lambda)-\frac{4\mathrm{K}}{\mathrm{H}^3}\psi(\lambda),$$

ne dépend ni de y, ni de z et reste en particulier la même pour λ, t et x constants, c'est-à-dire quand on contourne, à l'époque t considérée et dans tout plan parallèle aux yz, l'ellipse d'intersection de ce plan par l'ellipsoïde (18) mené en (x, y, z). Or, les fonctions H, K de y et de z, définies par (22), varient évidemment, le long de cette ellipse, de manière que $\frac{z\,dz}{c^2+\lambda} = \frac{-y\,dy}{b^2+\lambda}$; d'où résultent les deux formules

$$d\mathrm{H} = \frac{2y\,dy}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{2z\,dz}{(c^2+\lambda)^2} = \left(\frac{1}{b^2+\lambda}-\frac{1}{c^2+\lambda}\right)\frac{2y\,dy}{b^2+\lambda},$$

$$d\mathrm{K} = \left[\frac{1}{(b^2+\lambda)^2}-\frac{1}{(c^2+\lambda)^2}\right]\frac{2y\,dy}{b^2+\lambda},$$

et, par suite, la proportionnalité de $d\mathrm{H}$ et $d\mathrm{K}$ aux deux différences $\frac{1}{b^2+\lambda}-\frac{1}{c^2+\lambda}$ et $\frac{1}{(b^2+\lambda)^2}-\frac{1}{(c^2+\lambda)^2}$.

Cela posé, en annulant la différentielle totale ainsi définie de (24) en y et z, ou en H et K, puis remplaçant $d\mathrm{H}$, $d\mathrm{K}$ par ces deux diffé-

(1) La troisième de ces quantités, L, bien qu'intervenant dans le courant du calcul de $\Delta_2\Delta_2\varphi$, ne figure pas dans les résultats.

rences et supprimant finalement le facteur commun, supposé différent de zéro, $\frac{4}{H^2}\left(\frac{1}{b^2+\lambda}-\frac{1}{c^2+\lambda}\right)$, il vient

$$(25) \qquad -\frac{\rho}{8\varepsilon}\frac{df(\lambda)}{dt}+\frac{1}{H}\left[\psi'(\lambda)+\left(\frac{3K}{H}-\frac{1}{b^2+\lambda}-\frac{1}{c^2+\lambda}\right)\psi(\lambda)\right]=0.$$

Aux trois sommets de l'ellipsoïde, H et $\frac{K}{H}$ prennent les trois valeurs $\frac{1}{a^2+\lambda}$, $\frac{1}{b^2+\lambda}$, $\frac{1}{c^2+\lambda}$; et cette équation (25) devient respectivement

$$\begin{aligned}
&-\frac{\rho}{8\varepsilon}\frac{df(\lambda)}{dt}+(a^2+\lambda)\psi'(\lambda)+\left(3-\frac{a^2+\lambda}{b^2+\lambda}-\frac{a^2+\lambda}{c^2+\lambda}\right)\psi(\lambda)=0,\\
&-\frac{\rho}{8\varepsilon}\frac{df(\lambda)}{dt}+(b^2+\lambda)\psi'(\lambda)+\left(2-\frac{b^2+\lambda}{c^2+\lambda}\right)\psi(\lambda)=0,\\
&-\frac{\rho}{8\varepsilon}\frac{df(\lambda)}{dt}+(c^2+\lambda)\psi'(\lambda)+\left(2-\frac{c^2+\lambda}{b^2+\lambda}\right)\psi(\lambda)=0.
\end{aligned}$$

Ce sont trois équations homogènes du premier degré par rapport aux trois quantités

$$(26) \qquad -\frac{\rho}{8\varepsilon}\frac{df(\lambda)}{dt}, \qquad \psi'(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \psi(\lambda);$$

mais la première n'est pas distincte, car elle résulte de l'addition des deux dernières, préalablement multipliées par $\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}$ et par $\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}$. Et ces deux dernières exigent, *ou que les quantités* (26) *s'annulent toutes les trois*, ou qu'elles soient proportionnelles aux trois déterminants mineurs correspondants, lesquels sont $-3(c^2-b^2)$, $\frac{c^2+\lambda}{b^2+\lambda}-\frac{b^2+\lambda}{c^2+\lambda}$, c^2-b^2, et, après division par c^2-b^2,

$$(27) \qquad -3, \quad \frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}, \quad 1.$$

Ainsi, *à moins que les trois quantités* (26) *ne soient nulles à la fois*, on pourra les remplacer par (27) dans (25); ce qui donne presque immédiatement $K=H^2$. Or, quoique $K=H^2$ aux extrémités des axes de l'ellipsoïde (18), il est évident que cette égalité ne subsiste pas sur toute la surface; car, le long de l'ellipse $x=0$, par exemple, où l'on a vu ci-dessus que $\frac{dH}{dK} = \text{const.}$, elle donnerait $dK = 2H\,dH$; d'où $H = \text{const.}$, égalité impossible à moins que $b = c$, vu que H y varie de $\frac{1}{b^2+\lambda}$ à $\frac{1}{c^2+\lambda}$. Et, si $b = c$, on aurait de même $\frac{dH}{dK} = \text{const.}$, $H = \text{const.}$, le long de l'ellipse analogue $y = 0$, où H varie de $\frac{1}{a^2+\lambda}$ à $\frac{1}{c^2+\lambda}$.

30. Ainsi, la présente analyse ne peut s'appliquer qu'à des cas où les trois quantités (26) s'annulent, c'est-à-dire où, d'une part, *la fonction $f(\lambda)$ ne dépend pas du temps* et où, d'autre part, $\psi(\lambda) = 0$; ce qui donne, d'après (21),

$$\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right) = 0.$$

Multiplions celle-ci par $d\lambda$ et intégrons. Il vient, en appelant M une constante et observant ce qu'est, d'après (21), la fonction $f(\lambda)$,

$$(28)\quad \varphi''(\lambda) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right)\varphi'(\lambda) = \frac{M}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Une solution particulière de cette équation linéaire en $\varphi'(\lambda)$ est $\frac{M\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$; et l'on trouve ensuite comme solution générale, en appelant T la constante arbitraire, indépendante de λ, mais susceptible de varier avec t,

$$(29)\qquad \varphi'(\lambda) = \frac{M(\lambda + T)}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Celle-ci suffira pour évaluer toutes les dérivées de φ en x, y, z qui figurent dans les expressions (19) des vitesses.

On remarquera que les conditions qui nous ont conduit à la formule (29) de $\varphi'(\lambda)$ reviennent à annuler $\Delta_2\Delta_2\varphi$ et sont, à part la possibilité, pour T, de dépendre du temps, celles que nous aurions obtenues en supposant φ, dès le début, indépendant de t, et en admettant la permanence du mouvement *tout autour de l'ellipsoïde solide*. Celle-ci s'exprime, il est vrai, en écrivant que les dérivées premières complètes de u, v, w s'annulent quand on fait croître à la fois t de dt et l'abscisse x de $\mathrm{U}dt$. Mais les termes $\frac{d(u, v, w)}{dx}\mathrm{U}$, *non linéaires*, provenant de cet accroissement de x, sont de ceux que l'on convient de négliger : *les deux sortes de permanence, soit absolue dans l'espace, soit relative au solide, se confondent donc dans notre problème*. Il ne saurait, d'ailleurs, être question ici que de *permanence relative au solide*, quoique nos vitesses u, v, w soient bien des vitesses absolues; car c'est la situation actuelle du centre du corps qui est prise comme origine des x, y, z et, par conséquent, nos x, y, z sont des coordonnées relatives.

Aux distances très grandes r du centre, $\varphi'(\lambda)$ est de l'ordre de $\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^3}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, ou de $\frac{1}{r}$. Les dérivées partielles secondes de φ en x, y, z figurant dans u, v, w seront donc de l'ordre de $\frac{1}{r^2}$, comme dans le cas de la sphère solide; et il en sera de même des composantes de pression. Par suite, le mouvement s'évanouit bien à l'infini; mais, sur les sphères fluides σ', de l'ordre de r^2, sensiblement confondues, pour λ très grand, avec les ellipsoïdes homofocaux $\lambda = \text{const.}$, les pressions résultantes seront finies et non infiniment petites, comme on pouvait le prévoir par analogie avec le cas de la sphère.

31. Il importe de voir comment se comporteront les *petites* vitesses u, v, w sur un quelconque des ellipsoïdes $\lambda = \text{const.}$, mais surtout à la surface $\lambda = 0$ du corps qui y limite intérieurement le fluide et l'entraîne dans ses mouvements. Quelles que soient, pour $\lambda = 0$, ces vitesses de la couche fluide superficielle (adhérente au corps), les formules (19) et (29) conviendront évidemment, pourvu que le solide soit un peu flexible et possède précisément ces vitesses aux divers points de sa surface [ce qui ne l'éloignera pas *sensiblement*, durant un temps fini, de sa forme ellipsoïdale (17)]. Il n'y aura d'ailleurs, dans celles-ci u, v, w, que les deux paramètres distincts T et M pour permettre de les varier, c'est-à-dire pour obtenir les divers mouvements de la couche superficielle conformes à nos formules; en sorte qu'il est déjà peu probable de trouver, parmi ces mouvements, la simple translation suivant les x qu'on désire obtenir.

Il est clair, d'ailleurs, par les formules (29) en $\varphi'(\lambda)$ et (28) en $\varphi''(\lambda)$, que les deux dérivées première et seconde φ', φ'' de la fonction auxiliaire φ, pourront, grâce à un choix convenable de M et de T, devenir quelconques sur une des surfaces λ, par exemple, sur le corps $\lambda = 0$, où nous les appellerons φ'_0 et φ''_0. Ces deux équations (29) et (28) donnent, en effet,

$$\varphi'_0 = \frac{\mathrm{MT}}{abc}, \qquad \frac{\varphi''_0}{\varphi'_0} = \frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right),$$

relations dont la seconde déterminera T et la première, ensuite, M, quand φ'_0 et φ''_0 seront choisis à volonté. Par exemple, pour $\varphi'_0 = 0$, T s'annule et $\mathrm{M} = abc\varphi''_0$.

Évaluons donc, par (29), les dérivées premières et secondes de φ relatives à x, y, z, en observant que $\dfrac{d\lambda}{d(x, y, z)}$ ont les valeurs $\dfrac{2}{\mathrm{H}}\left(\dfrac{x}{a^2+\lambda}, \dfrac{y}{b^2+\lambda}, \dfrac{z}{c^2+\lambda}\right)$, ou bien $\dfrac{2(\alpha, \beta, \gamma)}{\sqrt{\mathrm{H}}}$ si l'on préfère introduire les cosinus directeurs α, β, γ de la normale dn à l'ellipsoïde λ, tirée vers le dehors. Et les dérivées partielles secondes de φ, portées dans les formules (19), donnent finalement

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{4\varphi'}{\mathrm{H}}\left[\frac{\varphi''}{\varphi'}(1-\alpha^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right) - 2\left(\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}} - \frac{1}{a^2+\lambda}\right)\alpha^2\right],\\ v &= -\frac{4\varphi'}{\mathrm{H}}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'} - \frac{1}{a^2+\lambda} - \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{2\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\right)\alpha\beta,\\ w &= -\frac{4\varphi'}{\mathrm{H}}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'} - \frac{1}{a^2+\lambda} - \frac{1}{c^2+\lambda} + \frac{2\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\right)\alpha\gamma. \end{aligned}\right.$$

Il est peut-être préférable d'extraire de u la partie principale suivante, que j'appellerai U_1,

$$(31)\qquad \mathrm{U}_1 = \frac{4\varphi'}{\mathrm{H}}\left[\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right) - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\right];$$

et alors les composantes restantes de vitesse, savoir

$$(32)\quad u - \mathrm{U}_1 = \frac{4\varphi'}{\mathrm{H}}\left[\frac{\varphi''}{\varphi'}(1-\alpha^2) + \left(\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}} - \frac{1}{a^2+\lambda}\right)(1-2\alpha^2)\right], \quad v = \ldots, \quad w = \ldots,$$

multipliées respectivement par α, β, γ et ajoutées, donnent une somme nulle (si l'on y tient compte des expressions de α, β, γ et K en

x, y, z). Autrement dit, elles constituent *une vitesse tangente à l'ellipsoïde*, qu'on superposera, par conséquent, à la vitesse U_1 suivant les x.

Celle-ci est nulle quand on prend $\varphi' = 0$ sur l'ellipsoïde considéré; mais les vitesses tangentielles exprimées par les termes en φ'' subsistent alors.

32. Pour avoir une simple translation du corps suivant les x, comme on le désire, il faudrait d'abord annuler, pour $\lambda = 0$, les vitesses purement tangentielles ($u - U_1$, v, w); et il suffirait évidemment, à cet effet, d'égaler à zéro les deux composantes v, w à la surface $\lambda = 0$, c'est-à-dire de poser

$$(33) \qquad \frac{\varphi''_0}{\varphi'_0} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{2K}{H} = 0, \qquad \frac{\varphi''_0}{\varphi'_0} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} + \frac{2K}{H} = 0,$$

équations incompatibles entre elles, sauf quand $b = c$, cas où le corps est de révolution autour de l'axe des x. De plus, chacune d'elles, prise à part, n'admet de solution que si le rapport $\frac{K}{H}$ est constant sur l'ellipsoïde (17), circonstance se produisant seulement pour la sphère.

Enfin, l'hypothèse d'une translation du corps exigerait encore la condition $U_1 = \text{const.}$ pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire, d'après (31),

$$(34) \qquad \frac{1}{H}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - \frac{K}{H}\right] = \text{const.},$$

ou l'invariabilité de H $\left(\text{après celle du rapport } \frac{K}{H}\right)$ sur tout l'ellipsoïde (17) et, par conséquent, la sphéricité du corps, laquelle, donnant $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{H} = \frac{H}{K} = R^2$, réduit les conditions (33) à $\varphi''_0 = 0$.

En résumé, quand on essaie de traiter la question par les formules (19), c'est-à-dire au moyen des dérivées partielles secondes en x, y, z d'une fonction auxiliaire unique φ de λ et de t, la couche superficielle du fluide, adhérente à l'ellipsoïde, ne peut le suivre que si celui-ci est flexible et éprouve certaines déformations dépendant de la vitesse de son centre.

Donc, notre analyse est insuffisante pour résoudre le problème de la translation, même uniforme, d'un corps rigide ellipsoïdal dans une masse fluide visqueuse indéfinie.

33. Les formules (19) ne réussissant pas, faisons une autre tentative, un peu analogue à celle qui aboutit pour un fluide parfait (même Tome II, p. 217 à 220), en observant que, dans le cas de la sphère, la dérivée $\frac{d\varphi}{dx}$, dont le rôle prédomine ici visiblement, est le produit de x par une certaine fonction, $\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}$, de r et de t. Supposons simplement que cette fonction de r et de t devienne, pour l'ellipsoïde, une fonction de λ et de t, que nous pourrons encore appeler φ (en posant alors, dans le cas de la sphère, $\varphi = \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}$, si Φ désigne désormais la fonction φ des pages précédentes). Et, d'ailleurs, comme le terme $\Delta_2\varphi$ de (19) était, pour la sphère, fonction seulement de r et de t, remplaçons, dans (19), $\Delta_2\varphi$ par une seconde fonction, ψ, de λ et de t, que l'équation dite *de continuité* (ou de conservation des volumes fluides) pourra justement permettre, dès le début des calculs, de relier à φ. Bref, posons, avec *deux* fonctions auxiliaires φ, ψ de λ et de *t au lieu d'une*, mais *avec moins de deux dérivations de ces fonctions en x, y, z*,

$$(35) \qquad u = \psi - \frac{d.x\varphi}{dx}, \qquad v = -\frac{d.x\varphi}{dy}, \qquad w = -\frac{d.x\varphi}{dz}.$$

L'équation de continuité, qui revient à annuler la somme des trois dérivées respectives de u, v, w en x, y, z, sera dès lors $\frac{d\psi}{dx} - \Delta_2(x\varphi) = 0$, ou bien, d'après les calculs de la page 218 du même Tome II de mon *Cours*, en appelant $\varphi', \psi', \varphi'', \ldots$ les dérivées premières, secondes, ... de φ, ψ en λ, et en supprimant finalement le facteur commun $\frac{2x}{\text{H}}$,

$$(36) \qquad \frac{\psi'}{a^2+\lambda} - 2\varphi'' - \left(\frac{3}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right)\varphi' = 0.$$

Cela posé, les conditions analogues à (20), et qui expriment l'intégrabilité de la différentielle totale de la pression moyenne p dans les équations de Navier, seront

$$(37)\qquad \frac{d}{d(y,z)}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{d\psi}{dt}-\Delta_2\psi\right)=0.$$

D'après les premières formules (23) et (21), $\Delta_2\psi$ y vaudra $\frac{2}{\mathrm{H}}\mathrm{F}(\lambda)$, si l'on écrit

$$(38)\qquad \mathrm{F}(\lambda)=2\psi''+\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right)\psi'.$$

L'expression $\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{d\psi}{dt}-\frac{2}{\mathrm{H}}\mathrm{F}(\lambda)$ devra donc, en particulier, rester invariable quand, laissant t, λ et x constants, on suivra le contour de l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde (18) par le plan $x=$ const., ce qui laisse invariables les deux fonctions $\frac{d\psi}{dt}$ et $2\mathrm{F}(\lambda)$ de t et de λ, mais, faisant varier H, réduit ces équations (37) à $\frac{2\mathrm{F}(\lambda)}{\mathrm{H}^2}d\mathrm{H}=0$.

Or, $d\mathrm{H}$ ne s'annule pas identiquement le long de l'ellipse en question, du moins sur l'ellipsoïde à axes inégaux; et l'on devra avoir $\mathrm{F}(\lambda)=0$, c'est-à-dire, vu (38),

$$(39)\qquad \Delta_2\psi=0\qquad\text{ou}\qquad \frac{\psi''}{\psi'}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right)=0.$$

Dès lors, les équations (37), où la dérivée $\frac{d\psi}{dt}$, fonction de x, y et z par l'intermédiaire de λ seul, ne peut pas plus dépendre de x que de y et de z, reviennent à dire que cette dérivée est uniquement fonction de t, ou que ψ est la somme d'une fonction de t seul et d'une fonction de λ seul.

L'équation (39), multipliée par $d\lambda$ et intégrée, donne à son tour, si $2\mathrm{N}$ désigne une constante arbitraire,

$$(40)\qquad \psi'=\frac{-2\mathrm{N}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Et alors l'équation (36) devient

$$(41)\qquad \varphi''+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right)\varphi'=\frac{-\mathrm{N}}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

D'où, appelant T une fonction arbitraire du temps t, on déduit, comme intégrale générale de cette équation linéaire en φ',

$$(42) \qquad \varphi' = \frac{-N(\lambda + T)}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

34. Enfin, les relations (40), (42), multipliées par $d\lambda$ et intégrées de manière à annuler, comme il le faut bien, les vitesses u, v, w aux distances infinies de l'origine, c'est-à-dire pour λ infini, donnent

$$(43) \qquad \begin{cases} \psi = 2N\displaystyle\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \\ \varphi = N\displaystyle\int_\lambda^\infty \frac{(\lambda+T)\,d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} \text{ [1]}. \end{cases}$$

Effectivement, ces expressions deviennent, pour λ très grand, de l'ordres de petitesse de $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

On aura, par suite, comme valeurs (35) des vitesses,

$$(44) \qquad u = (\psi - \varphi) - \frac{2\varphi' x^2}{(a^2+\lambda)H}, \qquad v = -\frac{2\varphi' xy}{(b^2+\lambda)H}, \qquad w = -\frac{2\varphi' xz}{(c^2+\lambda)H}.$$

Elles doivent, sur la couche superficielle intérieure $\lambda = 0$ du fluide qui adhère à l'ellipsoïde solide, se réduire à la translation U de celui-ci, suivant l'axe des x. Et c'est ce qui aura lieu, sauf à égaler plus tard à U la vitesse commune, à la condition, nécessaire et suffisante, que l'on pose

$$(45) \qquad (\text{pour } \lambda = 0) \qquad \varphi' = \varphi'_0 = \frac{-NT}{a^3bc} = 0 \qquad \text{ou} \qquad T = 0,$$

vu que la constante N ne peut s'annuler sans rendre illusoire la solution obtenue.

On aura ensuite, comme valeur commune de u sur toute la couche superficielle,

$$(46) \quad (\text{pour } \lambda = 0) \qquad u = U = \psi_0 - \varphi_0 = N\int_0^\infty \frac{2a^2+\lambda}{a^2+\lambda}\,\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

[1] On pourrait ajouter aux seconds membres une fonction arbitraire du temps t, d'ailleurs commune aux deux pour ne pas empêcher la différence $\psi - \varphi$ et, par suite, u, de s'annuler à la limite $\lambda = \infty$. Mais cette fonction arbitraire de t s'éliminerait des expressions (35) de u, v, w et serait, dès lors, sans intérêt.

équation qui déterminera la constante N en fonction de la vitesse donnée U du solide. Comme on a vu que cette constante ne pouvait pas dépendre du temps t, la présente généralisation sera uniquement applicable à un mouvement uniforme de l'ellipsoïde, existant depuis assez longtemps pour avoir rendu permanentes les vitesses du fluide tout autour de ce corps.

35. Il est aisé de voir pourquoi, dans le cas particulier de la sphère, notre analyse réussit pour une translation *variée* et non plus seulement uniforme. C'est que, dans (37), où $\Delta_2\psi$ a la valeur $\frac{2}{H}F(\lambda)$, H lui-même, alors réduit à l'inverse de $R^2+\lambda$, se trouve fonction de x, y, z par l'intermédiaire unique de λ et ne peut pas plus dépendre de x que de y et de z. Donc l'équation (37), en y désignant par $\chi(t)$ une fonction arbitraire de t seul, prend la forme

$$\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{d\psi}{dt}-\Delta_2\psi=\frac{\rho}{\varepsilon}\chi'(t) \tag{47}$$

et n'exige plus l'annulation de $\Delta_2\psi$, comme l'équation (39) ci-dessus [1].

36. Occupons-nous enfin des pressions et, en premier lieu, de la pression moyenne p. Les formules de Navier donnent pour sa valeur, en tenant compte de ce que u, v, w sont ici indépendants de t, et à part une constante arbitraire sans importance, $p=-\varepsilon\Delta_2(x\varphi)$, c'est-à-dire, plus simplement, à raison de ce que $\Delta_2(x\varphi)$ vaut ici $\frac{d\psi}{dx}$,

$$p=-\varepsilon\frac{d\psi}{dx}. \tag{48}$$

Cela posé, la composante, suivant les x, de la *traction* exercée du dehors, par unité d'aire, sur un élément $d\sigma$ de surface de l'ellipsoïde λ,

---

[1] La simplicité de cette équation (47) en ψ, comparée à l'équation (85) du même Tome II (p. 230) qui régit la fonction auxiliaire unique Φ du cas de la sphère, et dont le premier membre contient à tous ses termes un symbole Δ_2 de plus, savoir, $\Delta_2\Phi$ au lieu de ψ, montre que l'introduction des deux fonctions auxiliaires φ, ψ, au lieu d'une seule Φ, serait avantageuse même pour la sphère et abrégerait vraisemblablement mes calculs de 1885 (même Tome II, p. 231 à 235).

ayant α, β, γ comme cosinus directeurs de sa normale dn, sera, d'après les formules de Navier,

$$(49) \qquad \left(-p + 2\varepsilon\frac{du}{dx}\right)\alpha + \varepsilon\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\beta + \varepsilon\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\gamma,$$

expression qu'il faudra évaluer, puis multiplier par $d\sigma$ et intégrer sur toute la surface σ de l'ellipsoïde, pour avoir la poussée totale du fluide extérieur sur l'ellipsoïde λ.

Les formules (35) de u, v, w et (48) de p donnent presque immédiatement à cette expression la forme

$$(50) \qquad -\varepsilon\left[2\frac{d.\varphi-\psi}{dx}\alpha + \left(\alpha\frac{d}{dx} + \beta\frac{d}{dy} + \gamma\frac{d}{dz}\right)(2\varphi-\psi)\right.$$
$$\left. + 2x\left(\alpha\frac{d}{dx} + \beta\frac{d}{dy} + \gamma\frac{d}{dz}\right)\frac{d\varphi}{dx}\right].$$

Or, les dérivées premières de λ en x, y, z valant $\frac{2(\alpha,\beta,\gamma)}{\sqrt{\Pi}}$, les deux premières parties du trinome complexe entre crochets de (50) se réduisent en tout à

$$(51) \qquad \frac{2}{\sqrt{\Pi}}[-(1+2\alpha^2)\psi' + 2(1+\alpha^2)\varphi'].$$

D'autre part, dans la troisième partie du trinome, où

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\varphi' x}{\Pi(a^2+\lambda)},$$

les trois dérivées complètes en x, y, z de $\frac{d\varphi}{dx}$ sont

$$\frac{2\varphi'}{\Pi(a^2+\lambda)} + \frac{4\varphi' x^2}{\Pi^2(a^2+\lambda)^2}\left(2\frac{K}{\Pi} - \frac{2}{a^2+\lambda}\right) + \frac{4\varphi'' x^2}{\Pi^2(a^2+\lambda)^2},$$
$$\frac{4\varphi' xy}{\Pi^2(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}\left(2\frac{K}{\Pi} - \frac{1}{a^2+\lambda} - \frac{1}{b^2+\lambda}\right) + \frac{4\varphi'' xy}{\Pi^2(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)},$$
$$\frac{4\varphi' xz}{\Pi^2(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\left(2\frac{K}{\Pi} - \frac{1}{a^2+\lambda} - \frac{1}{c^2+\lambda}\right) + \frac{4\varphi'' xz}{\Pi^2(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

c'est-à-dire, plus simplement,

$$\frac{2\varphi'}{\Pi(a^2+\lambda)}+\frac{4\varphi'\alpha^2}{\Pi}\left(2\frac{K}{\Pi}-\frac{2}{a^2+\lambda}\right)+\frac{4\varphi''\alpha^2}{\Pi},$$
$$\frac{4\varphi'\alpha\beta}{\Pi}\left(2\frac{K}{\Pi}-\frac{1}{a^2+\lambda}-\frac{1}{b^2+\lambda}\right)+\frac{4\varphi''\alpha\beta}{\Pi},$$
$$\frac{4\varphi'\alpha\gamma}{\Pi}\left(2\frac{K}{\Pi}-\frac{1}{a^2+\lambda}-\frac{1}{c^2+\lambda}\right)+\frac{4\varphi''\alpha\gamma}{\Pi};$$

et ces expressions, multipliées respectivement par α, β, γ, puis ajoutées en observant que

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\qquad \frac{\alpha^2}{a^2+\lambda}+\frac{\beta^2}{b^2+\lambda}+\frac{\gamma^2}{c^2+\lambda}=\frac{K}{\Pi},$$

donnent simplement, pour la somme $\left(\alpha\frac{d}{dx}+\beta\frac{d}{dy}+\gamma\frac{d}{dz}\right)\frac{d\varphi}{dx}$,

$$(52)\qquad \frac{2\varphi'\alpha}{\Pi}\left(2\frac{K}{\Pi}-\frac{1}{a^2+\lambda}\right)+\frac{4\varphi''\alpha}{\Pi}.$$

Multiplions celle-ci par $2x$, ou par $2\sqrt{\Pi}(a^2+\lambda)\alpha$, et ajoutons-la à (51). Enfin, le produit, par $-\varepsilon$, de la somme ainsi obtenue, égalera la composante, suivant les x, de la pression qu'exerce, en (x,y,z), le fluide extérieur, sur l'unité d'aire de l'ellipsoïde fluide λ : ce sera

$$-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\Pi}}\left[-(1+2\alpha^2)\psi'+2\left(1+2K\frac{a^2+\lambda}{\Pi}\alpha^2\right)\varphi'+4(a^2+\lambda)\alpha^2\varphi''\right].$$

En y remplaçant $2(a^2+\lambda)\varphi''$ par sa valeur tirée de (36), elle devient simplement

$$(53)\qquad -\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\Pi}}\left\{-\psi'+2\left[1+\left(2K\frac{a^2+\lambda}{\Pi}-3-\frac{a^2+\lambda}{b^2+\lambda}-\frac{a^2+\lambda}{c^2+\lambda}\right)\alpha^2\right]\varphi'\right\}.$$

Sur l'ellipsoïde solide $\lambda=0$, où φ' s'annule et où $-\psi'=\frac{2N}{abc}$ d'après (40), cette quantité se réduit à $-\frac{4\varepsilon N}{abc\sqrt{\Pi}}$. Multiplions-la par l'élément d'aire $d\sigma$ de cet ellipsoïde solide; et, en intégrant sur toute la surface σ du corps, nous aurons la résistance $\mathfrak{R}_x$ qu'oppose le fluide à son mouvement, estimée suivant les x positifs, savoir

$$-\frac{4\varepsilon N}{abc}\int_\sigma\frac{d\sigma}{\sqrt{\Pi}}.$$

Or, l'inverse de $\sqrt{\mathrm{H}}$ égale, comme on sait, la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde sur le plan de l'élément $d\sigma$, et $\frac{d\sigma}{\sqrt{\mathrm{H}}}$ exprime le triple du volume de la pyramide élémentaire qui aurait son sommet au centre avec $d\sigma$ comme base ; en sorte que l'intégrale définie vaut le triple, $4\pi abc$, du volume de l'ellipsoïde. Il vient donc simplement, pour la résistance cherchée qu'éprouve l'ellipsoïde, estimée suivant les x positifs,

$$\mathfrak{L}_x = -16\pi\varepsilon \mathrm{N}, \tag{54}$$

expression où il ne restera plus qu'à remplacer N par sa valeur tirée de (46), proportionnelle à la vitesse U du solide.

Il est à peine utile d'ajouter que, si la vitesse de translation de l'ellipsoïde, au lieu de se faire suivant un axe, était de direction quelconque, on la décomposerait suivant les trois axes; et qu'on obtiendrait la résistance totale, à raison de la forme linéaire des équations, par simple composition des trois résistances partielles correspondantes.

37. Considérons d'abord le cas simple de la sphère, où

$$a = b = c = \mathrm{R}.$$

L'intégrale définie figurant dans (46) devient, si l'on y adopte comme variable indépendante la distance r au centre, qui donne $\lambda = r^2 - \mathrm{R}^2$,

$$2\int_{\mathrm{R}}^{\infty} \frac{(\mathrm{R}^2 + r^2)\, r\, dr}{r^5} = \frac{8}{3\mathrm{R}};$$

d'où il résulte

$$\mathrm{N} = \frac{3}{8}\mathrm{RU} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{L}_x = -6\pi\varepsilon \mathrm{RU}, \tag{55}$$

ce qui est bien la formule connue.

Dans un beau Mémoire de M. Liénard, qui a remporté en 1911 le Prix Vaillant de l'Académie des Sciences [1], et où le problème du lent mouvement uniforme de l'ellipsoïde au sein d'un liquide visqueux

---

[1] *Voir* le Rapport dans le Tome 153 des *Comptes rendus*, 18 décembre 1911, p. 1286.

se trouve traité par l'emploi des coordonnées elliptiques, paramètres des trois familles de quadriques homofocales et orthogonales, l'auteur traite encore deux cas simples où l'ellipsoïde est de révolution. Ce sont ceux de la translation d'un disque plat circulaire, mû soit suivant son axe, soit dans le plan de son équateur.

Le premier cas donne $a = 0$, $b = c = R$; et la formule (46) s'y réduit à

$$U = N \int_0^\infty \frac{1}{R^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2N}{R} \left(\text{arc tang} \frac{\sqrt{\lambda}}{R} \right)_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} = \frac{\pi N}{R}.$$

Il en résulte

$$N = \frac{RU}{\pi} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{P}_x = -16 \varepsilon RU. \tag{56}$$

La résistance, comparée à celle qu'éprouve la sphère, où la section normale maxima (le *maître-couple*) a le même contour $2\pi R$, mais où la surface σ est le double, en vaut la fraction $\frac{8}{3\pi}$, assez peu inférieure à l'unité.

Dans le second cas, où, si l'on appelle R' le rayon du disque, $a = c = R'$ et où $b = 0$, la formule (46) devient, en y posant $\sqrt{\lambda} = \mu$,

$$U = 2N \int_0 \frac{(2R'^2 + \mu^2)\, d\mu}{(R'^2 + \mu^2)^2} = N \left(\frac{3}{R'} \text{arc tang} \frac{\mu}{R'} + \frac{\mu}{R'^2 + \mu^2} \right)_{\mu=0}^{\mu=\infty} = \frac{3\pi N}{2R'};$$

d'où

$$N = \frac{2R'U}{3\pi} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{P}_x = -\frac{32}{3} \varepsilon R'U. \tag{57}$$

Si, à cette résistance du disque mû dans son plan, on compare la précédente (56), *pour même contour de la section normale maxima* (ici $4R'$ au lieu de $2\pi R$), on trouve le rapport $\frac{3}{\pi}$, peu inférieur encore à l'unité, alors que le rapport des surfaces $2\pi R^2$, $2\pi R'^2$ est celui des carrés des rayons, $\frac{4}{\pi^2}$, ou n'atteint pas même la valeur $\frac{1}{2}$ ci-dessus, offerte par la comparaison, à la sphère, du disque mû normalement à son plan.

Ces exemples indiquent bien qu'à égalité du contour de la section normale maxima, la résistance paraît dépendre assez peu de la forme du corps, tout en croissant lentement avec son aire, ou avec sa longueur suivant le sens du mouvement. Ainsi se trouve confirmée une induction que j'avais formulée dans le même Tome II de mon *Cours*, à la page 261.

38. Terminons notre Étude en cherchant si la relation (6) (p. 561), démontrée pour le cas de la sphère animée d'une translation uniforme, s'étend à l'ellipsoïde, où $\mathfrak{P}'_x$ désignera naturellement la composante totale, suivant les x, de la résistance opposée par le liquide extérieur au mouvement de l'ellipsoïde fluide à paramètre λ ($\mathfrak{P}_x$ étant toujours celle qu'éprouve l'ellipsoïde central $\lambda = 0$).

Si $d\sigma'$ désigne un élément de son aire, et α, β, γ, comme ci-dessus, les cosinus directeurs de sa normale extérieure, les démonstrations des N^{os} 18 et 19 (p. 557 à 559) s'appliqueront sans aucun changement. L'on aura par suite, d'après (3) (p. 559), comme valeur de la différence $\mathfrak{P}'_x - \mathfrak{P}_x$, ici où a, b, c sont 1, 0, 0, et abstraction faite du coefficient constant ρ,

$$\int_{\sigma'} u(u\alpha + v\beta + w\gamma)\,d\sigma' - \mathrm{U}\int_{\sigma'} u\,\alpha\,d\sigma'. \tag{58}$$

Le second terme, en U, est nul, à raison de ce que l'ellipsoïde, symétrique par rapport au plan des yz, se compose, à son arrière, d'éléments $d\sigma'$ égaux à ceux de l'avant, mais avec valeurs contraires du facteur α, tandis que l'autre facteur sous le signe $\int$, u, a son expression (44) paire en x ou, par suite, pareille à l'avant et à l'arrière. Quant au premier terme, le trinome $u\alpha + v\beta + w\gamma$ y est proportionnel à α sur toute l'étendue σ' de l'ellipsoïde, d'après (44) et vu que x, y, z égalent $\sqrt{\Pi}\,[(a^2+\lambda)\alpha,\ (b^2+\lambda)\beta,\ (c^2+\lambda)\gamma]$. Car la formule de cette composante de la vitesse suivant la normale à l'ellipsoïde devient immédiatement, en éliminant x, y, z,

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = [\psi - \varphi - 2(a^2+\lambda)\varphi']\alpha. \tag{59}$$

Ce premier terme de (58) peut donc s'écrire

$$[\psi - \varphi - 2(a^2+\lambda)\varphi']\int_{\sigma'} u\,\alpha\,d\sigma';$$

et il est nul comme le second. On a donc bien

$$\mathfrak{P}'_x = \mathfrak{P}_x. \tag{60}$$

Ainsi, tous les ellipsoïdes fluides homofocaux à paramètre λ, jusqu'à ceux qui sont infiniment grands, éprouvent, dans leurs mouvements entraînés par la translation uniforme de l'ellipsoïde solide central $\lambda = 0$, la même résistance totale que celui-ci, de la part du fluide extérieur.

La formule (59) montre que la vitesse du fluide, en un point quelconque, a pour composante, suivant la normale à l'ellipsoïde λ qui y passe, la projection, sur cette normale, d'une vitesse translatoire fictive de tout l'ellipsoïde λ suivant les x positifs, qui serait exprimée par $\psi - \varphi - 2(a^2 + \lambda)\varphi'$ [1].

---

[1] Le présent Mémoire a été résumé dans trois Notes insérées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. 154, 18 mars et 10 juin 1912, p. 737 et 1557; t. 155, 1er juillet 1912, p. 5.