ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LOUIS ROY

Recherches sur la dynamique du fil flexible

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 29 (1912), p. 371-429

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1912_3_29__371_0>

RECHERCHES

SUR

LA DYNAMIQUE DU FIL FLEXIBLE

PAR M. LOUIS ROY.

Introduction.

Les équations du mouvement des fils flexibles ont été obtenues sous leur forme définitive peu de temps après celles du mouvement des fluides. Mais, tandis que celles-ci ont donné lieu à de très nombreux travaux, celles-là n'ont été surtout étudiées d'une manière approfondie que dans le cas particulier des cordes vibrantes. Nous avons cherché à appliquer au mouvement des fils la théorie des discontinuités en Hydrodynamique, à laquelle s'attachent principalement les noms de MM. Hugoniot, Hadamard et Duhem. Nous avons pu ainsi généraliser les formules donnant les vitesses de propagation des ébranlements longitudinaux et transversaux le long d'une corde vibrante et obtenir, pour les discontinuités du premier ordre, d'autres formules analogues à celles données par MM. Jouguet et Duhem dans la théorie des ondes de choc. Dans un dernier Chapitre, nous avons établi les équations des petits mouvements autour d'une position d'équilibre et nous avons traité complètement le problème de la corde vibrante, en tenant compte de sa viscosité. Pour l'établissement des équations, nous avons suivi la méthode employée par M. Duhem dans *Hydrodynamique*, *Élasticité*, *Acoustique*, et nous nous sommes inspiré de ses *Recherches sur l'Hydrodynamique* pour tenir compte de la viscosité et étudier les discontinuités du premier ordre.

CHAPITRE I.

LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES FILS.

I. — Préliminaires; équation de continuité.

Nous emploierons les variables de Lagrange : un des points matériels du fil, qui occupe à l'instant t la position M de coordonnées x, y, z, occupait, à un instant t_0 choisi une fois pour toutes, la position m. Le lieu de M, à l'instant t, définit la configuration du fil dans son état actuel, le lieu de m, sa configuration dans son état primitif. Le point m est entièrement déterminé par la connaissance de son abscisse curviligne $\omega = \overline{m_1 m}$ comptée sur le fil à partir d'une de ses extrémités m_1, de sorte que les coordonnées x, y, z du point M peuvent être regardées comme des fonctions continues et uniformes des deux variables indépendantes ω et t, soit

$$x = f(\omega, t), \qquad y = g(\omega, t), \qquad z = h(\omega, t).$$

Chaque valeur de ω correspondant à un point matériel du fil bien déterminé, ces trois équations, où ω reste constant, définissent la trajectoire de chacun de ces points matériels.

A l'arc $\omega = \overline{m_1 m}$, compté sur l'état primitif, correspond l'arc $s = \overline{\mathrm{M}_1\mathrm{M}}$, compté sur l'état actuel. Pour abréger, désignons par la lettre d les différentielles partielles par rapport à ω, c'est-à-dire posons

$$d = \frac{\partial}{\partial \omega} d\omega;$$

à l'élément d'arc $\overline{mm'} = d\omega$ correspondra, sur l'état actuel, l'élément

$\overline{\mathrm{MM}'} = ds$ et nous aurons

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1}$$

ou

$$ds = \Delta\, d\omega,$$

en posant

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2}. \tag{2}$$

Soient ρ et ρ_0 les densités linéaires aux points M et m; les éléments ds et $d\omega$ étant constitués par les mêmes points matériels ont la même masse dm. On a donc

$$dm = \rho\, ds = \rho_0\, d\omega$$

ou

$$\rho\Delta = \rho_0. \tag{3}$$

C'est l'équation de continuité. On peut l'écrire aussi

$$\frac{\partial(\rho\Delta)}{\partial t} = 0;$$

sous cette forme, elle rappelle l'équation de continuité en Hydrodynamique donnée par Lagrange. On peut encore écrire autrement l'équation (3). Tout d'abord, soient α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente au fil mené au point M dans le sens des arcs croissants, on a $(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{d(x, y, z)}{ds}$, et comme

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial \omega}\frac{d\omega}{ds} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial \omega},$$

il vient la formule triple

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial(x, y, z)}{\partial \omega}. \tag{4}$$

Cela posé, imposons au fil une modification virtuelle : la masse dm ne variant pas, on aura $\delta\, dm = 0$ et, par suite,

$$\delta\rho\, ds + \rho\delta\, ds = 0.$$

Mais l'égalité (1) nous donne, pour $\delta\, ds$,

$$\delta\, ds = \left(\alpha \frac{d\,\delta x}{ds} + \beta \frac{d\,\delta y}{ds} + \gamma \frac{d\,\delta z}{ds}\right) ds, \tag{5}$$

δx, δy, δz étant les composantes du déplacement virtuel du point M, de sorte qu'on a

$$\delta\rho + \rho\left(\alpha \frac{d\,\delta x}{ds} + \beta \frac{d\,\delta y}{ds} + \gamma \frac{d\,\delta z}{ds}\right) = 0. \tag{6}$$

Dans une modification réelle infiniment petite, on aura

$$\delta\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dt, \qquad \delta(x, y, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial t}\, dt = (u, v, w)\, dt,$$

u, v, w désignant les composantes de la vitesse du point M, de sorte que l'égalité (6) deviendra

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho^2}{\rho_0}\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \omega} + \beta \frac{\partial v}{\partial \omega} + \gamma \frac{\partial w}{\partial \omega}\right) = 0.$$

C'est la troisième forme de l'équation de continuité, qui rappelle celle donnée par Euler en Hydrodynamique.

II. — Équations du mouvement.

Pour obtenir les équations du mouvement, nous devons écrire, d'après les principes de l'Énergétique, qu'on a pour toute modification virtuelle isothermique

$$\delta\varpi_e + \delta\varpi_v - \delta_T \mathcal{F} + \delta J = 0, \tag{7}$$

$\delta\varpi_e$ désignant le travail élémentaire des forces extérieures, $\delta\varpi_v$ le travail élémentaire des actions de viscosité, δJ celui des forces d'inertie et $\delta_T \mathcal{F}$ la variation isothermique du potentiel thermodynamique interne.

Soient X, Y, Z les composantes, au point M, de la force extérieure par unité de masse, fonctions de x, y, z, α, β, γ, t; T_{1x}, T_{1y}, T_{1z}, les composantes de la tension à l'extrémité M_1 du fil de coordonnées x_1, y_1, z_1; T_{2x}, T_{2y}, T_{2z}, les composantes de la tension à l'extrémité M_2

du fil de coordonnées x_2, y_2, z_2; on a

$$(8)\qquad \begin{aligned} \delta\varpi_e = {} & T_{1x}\,\delta x_1 + T_{1y}\,\delta y_1 + T_{1z}\,\delta z_1 \\ & + T_{2x}\,\delta x_2 + T_{2y}\,\delta y_2 + T_{2z}\,\delta z_2 \\ & + \int_{M_1}^{M_2} (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,dm. \end{aligned}$$

Par définition même du fil parfaitement flexible, nous aurons, comme expression du potentiel thermodynamique du fil,

$$\mathcal{F} = \int_{M_1}^{M_2} \varphi(\rho, T)\,dm,$$

T désignant la température absolue au point M et φ une fonction donnée. Nous aurons donc

$$\delta_T \mathcal{F} = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\,\delta\rho\,dm = -\int_{M_1}^{M_2} \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\,\delta\,ds.$$

Le travail élémentaire des forces d'inertie a pour expression

$$(9)\qquad \delta J = -\int_{M_1}^{M_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\delta x + \frac{\partial v}{\partial t}\,\delta y + \frac{\partial w}{\partial t}\,\delta z\right) dm.$$

Passons au travail de viscosité. L'état physique de l'élément *ds* étant entièrement défini par les deux seules variables ρ et T, le travail élémentaire des actions de viscosité relatif à cet élément sera

$$-\psi\left(\rho, T, \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\delta\rho\,ds,$$

ψ étant une fonction qui s'annule avec $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. L'hypothèse la plus simple qu'on puisse faire sur la forme de cette fonction consiste à poser [1]

$$\psi = \frac{\Lambda(\rho, T)}{\rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$\Lambda(\rho, T)$ étant une fonction des deux seules variables ρ, T, qu'on appelle le *coefficient de viscosité du fil*. D'après cela, le travail élémentaire de

---

(1) *Voir* P. Duhem, *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, p. 46.

viscosité dans une modification réelle sera

$$-\frac{\Lambda}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2 dt\,ds;$$

comme ce travail doit être essentiellement négatif, le coefficient Λ doit donc être essentiellement positif.

Les liaisons entre les divers éléments ds qui constituent le fil étant des soudures, au sens de M. Duhem, le travail élémentaire total des actions de viscosité sera

$$(10)\qquad \partial\mathfrak{T}_v = -\int_{M_1}^{M_2}\psi\,\partial\rho\,ds = \int_{M_1}^{M_2}\psi\rho\,\partial\,ds = \int_{M_1}^{M_2}\Lambda\frac{\partial\rho}{\partial t}\partial\,ds.$$

Si donc nous posons

$$(11)\qquad \Theta + \rho^2\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \Lambda\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,$$

nous pourrons écrire

$$\partial\mathfrak{T}_v - \partial_T\mathfrak{F} = -\int_{M_1}^{M_2}\Theta\,\partial\,ds$$

et une intégration par parties nous donnera, d'après l'égalité (5),

$$\begin{aligned}\partial\mathfrak{T}_v - \partial_T\mathfrak{F} = &-[\Theta(\alpha\,\partial x + \beta\,\partial y + \gamma\,\partial z)]_{M_1}^{M_2}\\ &+\int_{M_1}^{M_2}\left(\frac{d\Theta\alpha}{ds}\partial x + \frac{d\Theta\beta}{ds}\partial y + \frac{d\Theta\gamma}{ds}\partial z\right)ds.\end{aligned}$$

Alors, en tenant compte des égalités (8), (9) et de la précédente, l'égalité (7) deviendra

$$\begin{aligned}&(T_{1x}+\Theta\alpha)\,\partial x_1 + (T_{1y}+\Theta\beta)\,\partial y_1 + (T_{1z}+\Theta\gamma)\,\partial z_1\\ &+(T_{2x}-\Theta\alpha)\,\partial x_2 + (T_{2y}-\Theta\beta)\,\partial y_2 + (T_{2z}-\Theta\gamma)\,\partial z_2\\ &+\int_{M_1}^{M_2}\left\{\left[\rho\left(X-\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{d\Theta\alpha}{ds}\right]\partial x + \ldots\right\}ds = 0,\end{aligned}$$

les points désignant deux autres termes analogues à celui qui est écrit. Cette égalité devant avoir lieu quels que soient les déplacements virtuels ∂x, ∂y, ∂z, ∂x_1, ∂y_1, …, ∂z_2, il en résulte qu'on doit avoir :

1° A l'extrémité M_1 du fil,

$$(12)\qquad (T_{1x}, T_{1y}, T_{1z}) + \Theta(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

2° A l'extrémité M_2 du fil,

$$(T_{2x}, T_{2y}, T_{2z}) - \Theta(\alpha, \beta, \gamma) = 0; \tag{13}$$

3° En tout point du fil,

$$\rho\left[(X, Y, Z) - \frac{\partial(u, v, w)}{\partial t}\right] + \frac{d\Theta(\alpha, \beta, \gamma)}{ds} = 0.$$

Ces trois dernières équations s'écrivent encore

$$\rho_0\left[(X, Y, Z) - \frac{\partial(u, v, w)}{\partial t}\right] + \frac{\partial\Theta(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\omega} = 0. \tag{14}$$

Les équations (12), (13), (14) ont exactement la même forme que si la viscosité n'existait pas; Θ représente donc encore la tension du fil en chaque point. Mais l'équation caractéristique (11) cesse, quand le fil est doué de viscosité, d'être une relation finie entre les trois fonctions Θ, ρ, T; elle nous montre que, pour un même système de valeurs de ρ et de T, la tension Θ n'a plus la même valeur, suivant que le fil est en équilibre ou en mouvement. Ces conclusions sont tout à fait analogues à celles de M. Duhem relativement aux *fluides proprement dits* (¹).

Nous avons obtenu les équations (12), (13), (14) en imposant au fil une modification virtuelle isothermique quelconque. Si le fil garde en chaque point une densité invariable (fil inextensible), on a $\delta\mathfrak{T}_v = 0$; le fil ne peut donc pas être visqueux. Comme on a aussi $\delta_T\mathcal{F} = 0$, l'équation (7) se réduit à ses deux termes extrêmes et doit être vérifiée pour toute modification virtuelle isothermique qui n'altère pas la densité : l'équation (11) n'existe plus, mais on reconnaît que les équations (12), (13), (14) peuvent encore être écrites (²). L'équation de continuité se réduit à $\Delta = 1$.

(¹) P. Duhem, *Recherches sur l'Hydrodynamique*, sixième Partie, Chap. I, § 3. On peut remarquer qu'un fil flexible est nécessairement ce que M. Duhem pourrait appeler un *fil proprement dit*, car la déformation élémentaire d'un élément ds du fil se réduit à une simple dilatation $\frac{\delta ds}{ds} = -\frac{\delta\rho}{\rho}$. Une modification virtuelle isothermique est donc entièrement définie par la variation qu'éprouve la densité.

(²) *Voir* P. Duhem, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. II, Chap. I, § 2.

III. — Équations de la température.

Considérons, à l'instant t, la portion du fil comprise entre deux de ses points P et P' choisis arbitrairement; nous allons calculer la quantité de chaleur δQ qu'elle dégage dans une modification virtuelle.

La Thermodynamique nous enseigne que l'entropie du fil au point M par unité de masse est $-\frac{1}{E}\frac{\partial\varphi}{\partial T}$, E désignant l'équivalent mécanique de la chaleur; la quantité de chaleur δq, dégagée pendant la modification par l'élément de masse dm sera, d'après le principe de Carnot-Clausius, donnée par l'égalité

$$\frac{\delta q}{T} + \delta\left(-\frac{1}{E}\frac{\partial\varphi}{\partial T}\right)dm = \frac{1}{ET}\frac{\Lambda}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta\rho\, ds,$$

et, comme $\delta Q = \int \delta q$, nous obtenons

$$\delta Q = \frac{1}{E}\int_{P}^{P'}\left[T\rho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\,\partial T}\delta\rho + \frac{\partial^2\varphi}{\partial T^2}\delta T\right) + \frac{\Lambda}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta\rho\right]ds.$$

Soient

$$c(\rho, T) = -\frac{T}{E}\frac{\partial^2\varphi}{\partial T^2}$$

la *chaleur spécifique à densité constante* et dQ la quantité de chaleur dégagée pendant une modification réelle de durée dt; nous aurons

$$(15) \qquad dQ = dt\int_{P}^{P'}\left[\rho\left(\frac{T}{E}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\,\partial T}\frac{\partial\rho}{\partial t} - c\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \frac{\Lambda}{E\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2\right]ds.$$

Nous allons égaler cette expression à celle que nous fournit la théorie de la conductibilité.

La portion PP' du fil que nous considérons est assimilable à un tronçon d'armille; nous pouvons donc écrire immédiatement la deuxième expression de dQ, en nous reportant aux équations données pour la première fois par Fourier dans le problème du refroidissement de l'armille. Si nous supposons, pour simplifier, notre fil athermane et sans sources intérieures de chaleur, nous aurons [1]

$$(16) \qquad dQ = dt \int_{P}^{P'} \left[-\frac{d}{ds}\left(K \frac{dT}{ds}\right) + k(T - T_e) \right] ds.$$

K désignant le produit du coefficient de conductibilité intérieure par l'aire de la section droite du fil, k le produit du coefficient de conductibilité extérieure par le contour de la section droite et T_e la température absolue extérieure.

En retranchant membre à membre les égalités (15) et (16), nous obtenons une intégrale qui doit être nulle quel que soit le tronçon PP'; il en résulte qu'on doit avoir, en chaque point du fil,

$$(17) \qquad c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{ds}\left(K \frac{dT}{ds}\right) - k(T - T_e) + \frac{T}{E}\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho\, \partial T} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{E} \frac{\Lambda}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2.$$

Quand le fil est dénué de viscosité, cette équation peut s'écrire

$$(18) \qquad c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{ds}\left(K \frac{dT}{ds}\right) - k(T - T_e) - \frac{T}{E\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial T} \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Enfin, les conditions aux extrémités sont les suivantes :

$$(19) \qquad \begin{cases} K \dfrac{dT}{ds} = k'(T - T_e) & (\text{en } M_1), \\ K \dfrac{dT}{ds} = k'(T_e - T) & (\text{en } M_2), \end{cases}$$

k' désignant le produit du coefficient de conductibilité extérieure par l'aire de la section droite du fil.

Dans l'équation (18) figure la dérivée de Θ par rapport à T; nous aurons aussi à considérer plus loin sa dérivée par rapport à ρ. Nous allons donc donner les expressions de ces dérivées en fonction de quantités expérimentales, en nous limitant au cas où l'équation caractéristique (11) se réduit à

$$\Theta + \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = 0.$$

---

[1] *Voir* par exemple J. BOUSSINESQ, *Théorie analytique de la chaleur*, t. I, p. 259.

Dans une modification virtuelle quelconque, on a

$$\delta\Theta = \frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}}\delta \mathrm{T}. \tag{20}$$

Soit l la longueur du fil par unité de masse, on aura

$$\rho l = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\delta l}{l} + \frac{\delta\rho}{\rho} = 0.$$

Faisons, dans l'égalité (20), $\delta\Theta = 0$, $\delta\mathrm{T} = 1$. La valeur correspondante de $\frac{\delta l}{l}$ s'appelle le *coefficient de dilatation à tension constante* D; nous avons ainsi

$$-\rho \mathrm{D}\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} + \frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}} = 0.$$

La valeur de $\delta\Theta$, pour $\frac{\delta l}{l} = 1$ et $\delta\mathrm{T} = 0$, s'appelle le *module de Young à température constante* $\mathcal{E}$. Nous avons donc aussi

$$\mathcal{E} = -\rho\frac{\partial\Theta}{\partial\rho},$$

de sorte qu'en définitive nous avons les deux relations

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} + \frac{\mathcal{E}}{\rho} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}} + \mathrm{D}\mathcal{E} = 0. \tag{21}$$

Établissons une dernière formule. Nous pouvons écrire

$$\delta q + \left(\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}\rho^2}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\delta\rho + c\,\delta\mathrm{T}\right)dm = 0,$$

et aussi

$$\delta q + (h\,\delta\Theta + \mathrm{C}\,\delta\mathrm{T})\,dm = 0$$

C désignant la *chaleur spécifique à tension constante* et h un autre coefficient calorifique. La comparaison de ces deux égalités, jointes à la relation (20), nous donne

$$h\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}\rho^2}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}, \qquad h\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}} + \mathrm{C} = c,$$

d'où nous déduisons, en éliminant h,

$$-\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}+\frac{\mathrm{T}}{c\mathrm{E}\rho^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)^2=-\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\frac{\mathrm{C}}{c}. \tag{22}$$

CHAPITRE II.

LES DISCONTINUITÉS AU POINT DE VUE CINÉMATIQUE.

I. — Les discontinuités et leurs vitesses de propagation.

Considérons le fil à l'instant t_0 dans son état primitif où il occupe la position $m_1 m_2$. Soient $\varphi_1(\omega, t)$, $\varphi_2(\omega, t)$ deux fonctions analytiques uniformes définies en tous les points compris entre m_1 et m_2 et à tous les instants t d'un certain laps de temps.

Supposons qu'à l'instant t il existe sur l'état primitif un point m partageant le fil en deux régions $m_1 m$ et $m m_2$, que nous désignerons respectivement par les indices 1 et 2, et jouissant des propriétés suivantes :

Au point m, les deux fonctions φ_1, φ_2 sont égales entre elles, ainsi que deux quelconques de leurs dérivées partielles correspondantes par rapport à (ω, t), jusqu'aux dérivées partielles d'ordre $n-1$ inclusivement; mais il existe au moins une dérivée partielle d'ordre n de la fonction φ_1 qui, au point m, n'est pas égale à la dérivée partielle correspondante de la fonction φ_2.

Une fonction φ, égale à φ_1, dans la région 1 et égale à φ_2 dans la région 2, est continue, mais non analytique dans la région totale considérée. On dit qu'à l'instant t, le point m est *un point de discontinuité d'ordre n* pour la fonction φ [1].

[1] La définition de la discontinuité en Hydrodynamique est donnée sous une forme particulièrement nette par M. Duhem (*Recherches sur l'Hydrodynamique*, deuxième Partie, Chap. II, § 1). Nous avons eu peu de chose à changer à cette définition pour l'adapter au cas actuel.

Si la fonction φ était discontinue au point m, celui-ci pourrait être regardé comme un point de discontinuité d'ordre zéro.

Si le point m existe aux divers instants t du laps de temps considéré, on dit que la discontinuité est persistante. Nous ne considérerons que de ces discontinuités-là.

En général, le point de discontinuité m n'est pas stationnaire; son mouvement sur l'état primitif est défini par une certaine relation entre ω et t, soit

$$F(\omega, t) = 0. \tag{23}$$

Il se déplace ainsi le long du fil avec une certaine vitesse V_0 portée suivant la tangente en m, menée dans le sens des arcs croissants et dont la valeur est

$$V_0 = \frac{d\omega}{dt}.$$

L'équation (23) devant être vérifiée quand on y remplace les variables respectivement par $\omega + d\omega$ et $t + dt$, on devra avoir

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial F}{\partial t} dt = 0,$$

d'où l'on déduit

$$V_0 \frac{\partial F}{\partial \omega} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{24}$$

Au point de discontinuité m, considéré sur l'état primitif, correspond, sur l'état actuel, le point M caractérisé par la même valeur de ω. Aux régions $m_1 m$ et mm_2 correspondent, point par point, les régions $M_1 M$ et MM_2 que nous désignerons aussi respectivement par les indices 1 et 2. A l'arc $\overline{mm'} = d\omega$, franchi par le point de discontinuité m pendant le temps dt, correspond, sur l'état actuel, l'arc $\overline{MM'} = ds$, M' étant le point du fil à l'instant t qui sera point de discontinuité à l'instant $t + dt$; la quantité

$$V = \frac{ds}{dt}$$

est la vitesse de propagation du point de discontinuité M comptée sur l'état actuel. Elle est portée sur la tangente en M menée dans le sens des s croissants : si la discontinuité est du premier ordre par rapport aux coordonnées x, y, z, elle pourra être d'ordre zéro pour les cosinus directeurs α, β, γ, et, dans ces conditions, le point M sera pour le fil un point anguleux avec deux directions de tangentes distinctes. Mais la tangente sur laquelle on porte V ayant toujours la direction MM', cette tangente se trouve toujours menée sur la région du fil vers laquelle la discontinuité se propage.

II. — Les discontinuités du premier ordre.

Supposons la discontinuité du premier ordre par rapport aux coordonnées x, y, z : une au moins des six dérivées $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\omega, t)}$ sera discontinue au point M, et, d'après les égalités (2), (3), (4), on voit qu'il en sera généralement de même de la densité ρ et des cosinus directeurs α, β, γ, φ désignant une quantité discontinue au point M, désignons en général par

$$\delta' \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

la variation brusque qu'elle subit quand on franchit le point de discontinuité dans le sens des s croissants. Par hypothèse, nous aurons

$$\delta' x = 0, \qquad \delta' y = 0, \qquad \delta' z = 0$$

pour toutes les valeurs de ω et de t vérifiant l'équation (23). Comme on peut évidemment intervertir les caractéristiques δ' et ∂, il en résulte qu'on doit avoir simultanément

$$\delta' \frac{\partial(x, y, z)}{\partial\omega} d\omega + \delta' \frac{\partial(x, y, z)}{\partial t} dt = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial\omega} d\omega + \frac{\partial F}{\partial t} dt = 0.$$

Il existe donc trois quantités λ, μ, ν telles qu'on ait

$$\frac{\delta' \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial\omega}}{\dfrac{\partial F}{\partial\omega}} = \frac{\delta' \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial t}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}} = \frac{(\lambda, \mu, \nu)}{\dfrac{\partial F}{\partial\omega}}.$$

Nous en déduisons, en tenant compte de l'égalité (24),

$$(25) \qquad \delta' \frac{\partial(x, y, z)}{\partial\omega} = (\lambda, \mu, \nu), \qquad \delta' \frac{\partial(x, y, z)}{\partial t} = -(\lambda, \mu, \nu)\,V_0.$$

Les trois quantités (λ, μ, ν) peuvent être regardées comme les composantes d'un vecteur qu'on appelle *la discontinuité* au point M. Si $V_0 = 0$, le point de discontinuité m est stationnaire sur l'état primitif; sur l'état actuel en M, il affecte toujours le même point matériel. Dans ce cas, nous voyons, d'après le second groupe des égalités (25), que les composantes de la vitesse sont nécessairement continues.

Cherchons la relation entre V_0 et V; nous allons reconnaître qu'elle dépend du sens dans lequel la discontinuité se propage. Supposons qu'elle se propage de la région 1 vers la région 2, c'est-à-dire dans le sens des s croissants et soit alors V_2 la valeur de V. On a

$$\overline{\mathrm{MM}'} = ds = V_2\,dt.$$

D'autre part, les coordonnées du point M étant x, y, z, celles du point M' qui est situé dans la région 2 sont $(x, y, z) + \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial\omega}\right]_2 d\omega$. On a donc

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)_2 d\omega = V_2\,\alpha_2\,dt = V_2 \frac{\rho_2}{\rho_0}\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)_2 dt$$

et, par suite,

$$(26) \qquad \rho_2 V_2 = \rho_0 V_0.$$

Calculons les composantes $(\mathcal{V}_{2x}, \mathcal{V}_{2y}, \mathcal{V}_{2z})$ de la vitesse absolue du point de discontinuité. A l'instant $t + dt$, celui-ci est en un certain point $\mathfrak{M}'$ de coordonnées $(x, y, z) + \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial\omega}\right]_2 d\omega + (u_2, v_2, w_2)\,dt$; on a donc

$$(27) \qquad (\mathcal{V}_{2x}, \mathcal{V}_{2y}, \mathcal{V}_{2z}) = V_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) + (u_2, v_2, w_2).$$

Si la propagation de la discontinuité se fait en sens inverse du précédent, on trouvera, pour la vitesse de propagation V_1, mesurée sur l'état actuel,

$$(26\ bis) \qquad \rho_1 V_1 = \rho_0 V_0$$

et, pour les composantes $(\varphi_{1x}, \varphi_{1y}, \varphi_{1z})$ de la vitesse absolue du point de discontinuité, les mêmes formules (27) où les indices 2 seraient partout remplacés par les indices 1.

Cherchons enfin la relation entre ρ_1 et ρ_2. D'après l'égalité (3), on aura

$$\rho_1 \Delta_1 = \rho_0, \qquad \rho_2 \Delta_2 = \rho_0,$$

d'où

$$\rho_1 \Delta_1 = \rho_2 \Delta_2.$$

III. — Les discontinuités d'ordre supérieur.

Supposons, maintenant, la discontinuité d'ordre $n > 1$ par rapport aux coordonnées x, y, z : d'après les égalités (2), (3), (4), on voit qu'elle sera généralement d'ordre $n-1$ par rapport à ρ et à α, β, γ. Les formules (26) et (26 *bis*) se réduisent donc à une seule

$$\rho V = \rho_0 V_0 \tag{28}$$

et l'on a de même

$$(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = V(\alpha, \beta, \gamma) + (u, v, w).$$

Par hypothèse, nous devons avoir

$$\delta' \frac{\partial^{n-1}(x, y, z)}{\partial \omega^{n-p-1}\, \partial t^p} = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

pour toutes les valeurs de ω et de t vérifiant l'équation (23). Comme précédemment, nous verrions qu'il existe trois quantités $(\lambda_p, \mu_p, \nu_p)$ telles qu'on ait

$$\frac{\delta' \dfrac{\partial^n(x, y, z)}{\partial \omega^{n-p}\, \partial t^p}}{\dfrac{\partial F}{\partial \omega}} = \frac{\delta' \dfrac{\partial^n(x, y, z)}{\partial \omega^{n-p-1}\, \partial t^{p+1}}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}} = \frac{(\lambda_p, \mu_p, \nu_p)}{\dfrac{\partial F}{\partial \omega}},$$

d'où nous déduisons

$$\delta' \frac{\partial^n(x, y, z)}{\partial \omega^{n-p}\, \partial t^p} = (\lambda_p, \mu_p, \nu_p), \qquad \delta' \frac{\partial^n(x, y, z)}{\partial \omega^{n-p-1}\, \partial t^{p+1}} = -(\lambda_p, \mu_p, \nu_p) V_0.$$

Si nous remplaçons, dans le premier groupe de ces égalités, p par $p+1$, les premiers membres des deux groupes deviennent respectivement identiques ; il doit donc en être de même des seconds. De là, les conditions suivantes de compatibilité

$$(\lambda_{p+1}, \mu_{p+1}, \nu_{p+1}) = -(\lambda_p, \mu_p, \nu_p) V_0,$$

d'où nous déduisons facilement

$$(\lambda_p, \mu_p, \nu_p) = (\lambda_0, \mu_0, \nu_0)(-V_0)^p.$$

D'après cela, nos deux groupes d'égalités se réduisent au groupe unique

$$(29) \qquad \delta' \frac{\partial^n(x, y, z)}{\partial\omega^{n-p}\,\partial t^p} = (\lambda, \mu, \nu)(-V_0)^p,$$

en effaçant au bas de λ, μ, ν l'indice 0 devenu inutile. Nous pouvons donc dire qu'une discontinuité d'ordre n est caractérisée par un vecteur (λ, μ, ν), qu'on appelle *la discontinuité* au point M, et par sa vitesse de propagation V ou V_0.

Ce premier résultat obtenu, nous allons chercher les variations des dérivées d'ordre $n-1$ de la densité ρ et des cosinus directeurs α, β, γ.

Partons de l'équation $\rho\Delta = \rho_0$ et dérivons-la $n-p-1$ fois par rapport à ω et p fois par rapport à t, il viendra

$$\Delta \frac{\partial^{n-1}\rho}{\partial\omega^{n-p-1}\,\partial t^p} + \ldots + \rho \frac{\partial^{n-1}\Delta}{\partial\omega^{n-p-1}\,\partial t^p} = \frac{\partial^{n-1}\rho_0}{\partial\omega^{n-p-1}\,\partial t^p},$$

les termes non écrits correspondant à des dérivées d'ordre $n-2$ au plus et par suite continues. En écrivant cette équation de part et d'autre du point M et en retranchant membre à membre, nous obtenons

$$\Delta\delta' \frac{\partial^{n-1}\rho}{\partial\omega^{n-p-1}\,\partial t^p} + \rho\,\delta' \frac{\partial^{n-1}\Delta}{\partial\omega^{n-p-1}\,\partial t^p} = 0,$$

car la discontinuité de ρ_0 correspond à une autre valeur de ω. Considérons, d'autre part, l'équation

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\omega}\right)^2$$

et dérivons-la comme nous avons dérivé la précédente ; nous obtiendrons

$$\Delta \frac{\partial^{n-1}\Delta}{\partial\omega^{n-p-1}\,\partial t^p} + \ldots = \frac{\partial x}{\partial\omega}\,\frac{\partial^n x}{\partial\omega^{n-p}\,\partial t^p} + \frac{\partial y}{\partial\omega}\,\frac{\partial^n y}{\partial\omega^{n-p}\,\partial t^p} + \frac{\partial z}{\partial\omega}\,\frac{\partial^n z}{\partial\omega^{n-p}\,\partial t^p} + \ldots,$$

d'où nous déduisons, d'après les égalités (3), (4) et (29),

$$\delta' \frac{\partial^{n-1}\Delta}{\partial\omega^{n-p-1}\,\partial t^p} = (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)(-\mathrm{V}_0)^p.$$

Nous obtenons donc finalement

$$\delta' \frac{\partial^{n-1}\rho}{\partial\omega^{n-p-1}\,\partial t^p} = -\frac{\rho^2}{\rho_0}(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)(-\mathrm{V}_0)^p. \tag{30}$$

Passons au calcul analogue relatif à α, β, γ. La première des égalités (4) nous donne

$$\frac{\partial^{n-1}\alpha}{\partial\omega^{n-p-1}\,\partial t^p} = \frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{\partial^n x}{\partial\omega^{n-p}\,\partial t^p} + \ldots + \frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{\partial x}{\partial\omega}\,\frac{\partial^{n-1}\rho}{\partial\omega^{n-p-1}\,\partial t^p},$$

d'où nous déduisons, en tenant compte des égalités (29) et (30), la formule triple

$$\delta' \frac{\partial^{n-1}(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\omega^{n-p-1}\,\partial t^p} = \frac{\rho}{\rho_0}[(\lambda, \mu, \nu) - (\alpha, \beta, \gamma)(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)](-\mathrm{V}_0)^p. \tag{31}$$

CHAPITRE III.

ÉTUDE DES DISCONTINUITÉS DU PREMIER ORDRE.

I. — Extension de l'équation fondamentale aux discontinuités du premier ordre.

Nous allons employer la méthode suivie par M. Duhem dans ses *Recherches sur l'Hydrodynamique*.

L'équation fondamentale (7) n'a de sens que si, à chaque instant t, les accélérations des divers éléments du fil sont finies. Ceci n'aura pas lieu, en général, s'il existe une discontinuité du premier ordre.

Soient u, v, w les composantes de la vitesse d'un point matériel au temps t, u', v', w' les valeurs de ces composantes à l'instant $t+dt$; nous pouvons écrire

$$\delta \mathrm{J} = -\frac{1}{dt}\int_{\mathrm{M}_1}^{\mathrm{M}_2} [(u'-u)\,\delta x + (v'-v)\,\delta y + (w'-w)\,\delta z]\,dm,$$

de sorte que l'équation fondamentale (7) deviendra

$$(32)\quad (\delta \mathfrak{T}_e + \delta \mathfrak{T}_v - \delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F})\,dt - \int_{\mathrm{M}_1}^{\mathrm{M}_2} [(u'-u)\delta x + (v'-v)\delta y + (w'-w)\delta z]\,dm = 0.$$

Nous ferons, avec M. Duhem, l'hypothèse que cette égalité, qui garde un sens quand les différences $u'-u$, $v'-v$, $w'-w$ sont finies, pourvu que l'intégrale soit de l'ordre de dt, continue d'exprimer un principe exact.

Partageons le fil en deux parties a et b, le point de discontinuité M, supposé unique, se trouvant dans la partie a entre les instants t et $t+dt$; la partie b se composera de deux autres parties non contiguës et nous aurons évidemment

$$\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F} = \delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_a + \delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_b,$$

$$\begin{aligned}\delta \mathfrak{T}_e = {} & \mathrm{T}_{1x}\,\delta x_1 + \mathrm{T}_{1y}\,\delta y_1 + \mathrm{T}_{1z}\,\delta z_1 + \mathrm{T}_{2x}\,\delta x_2 + \mathrm{T}_{2y}\,\delta y_2 + \mathrm{T}_{2z}\,\delta z_2 \\ & + \int_{a+b} (\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z)\,dm,\end{aligned}$$

$$\delta \mathfrak{T}_v = \delta \mathfrak{T}_{va} + \delta \mathfrak{T}_{vb},$$

$$\begin{aligned}\delta \mathrm{J} = {} & -\frac{1}{dt}\int_a [(u'-u)\,\delta x + (v'-v)\,\delta y + (w'-w)\,\delta z]\,dm \\ & - \int_b \left(\frac{\partial u}{\partial t}\delta x + \frac{\partial v}{\partial t}\delta y + \frac{\partial w}{\partial t}\delta z\right) dm;\end{aligned}$$

de sorte que l'équation (32) deviendra

$$(33)\qquad \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0,$$

en posant

$$A = \left[\partial \mathfrak{C}_{va} - \partial_T \mathcal{F}_a + \int_a (X\,\partial x + Y\,\partial y + Z\,\partial z)\,dm \right] dt$$
$$- \int_a [(u' - u)\,\partial x + (v' - v)\,\partial y + (w' - w)\,\partial z]\,dm,$$

$$(34) \quad \frac{B}{dt} = \partial \mathfrak{C}_{vb} - \partial_T \mathcal{F}_b$$
$$+ \int \left[\left(X - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \partial x + \left(Y - \frac{\partial v}{\partial t} \right) \partial y + \left(Z - \frac{\partial w}{\partial t} \right) \partial z \right] dm$$
$$+ T_{1x}\,\partial x_1 + T_{1y}\,\partial y_1 + T_{1z}\,\partial z_1 + T_{2x}\,\partial x_2 + T_{2y}\,\partial y_2 + T_{2z}\,\partial z_2.$$

Tout d'abord, imposons au fil une modification virtuelle qui laisse immobiles tous les points de la partie a, y compris ses extrémités μ_1, μ_2 : l'équation (33) se réduira à $B = 0$, d'où il résulte, en suivant la même marche qu'au paragraphe II, Chap. I, qu'on doit avoir :

1° En tous les points de la partie b,

$$(35) \qquad \rho \left[(X, Y, Z) - \frac{\partial(u, v, w)}{\partial t} \right] + \frac{d\Theta(\alpha, \beta, \gamma)}{ds} = 0,$$

$$(36) \qquad \Theta + \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \Lambda \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0;$$

2° Au point M_1,

$$(37) \qquad (T_{1x}, T_{1y}, T_{1z}) + \Theta(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

3° Au point M_2,

$$(38) \qquad (T_{2x}, T_{2y}, T_{2z}) - \Theta(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Cela posé, imposons au fil une modification virtuelle quelconque : on déduit des équations (35)

$$\int_b \left[\left(X - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \partial x + \left(Y - \frac{\partial v}{\partial t} \right) \partial y + \left(Z - \frac{\partial w}{\partial t} \right) \partial z \right] dm$$
$$+ \int_b \left(\frac{d\Theta\alpha}{ds}\,\partial x + \frac{d\Theta\beta}{ds}\,\partial y + \frac{d\Theta\gamma}{ds}\,\partial z \right) ds = 0,$$

et, en transformant la deuxième intégrale par une intégration par parties,

$$\int_b \left[\left(X - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\partial x + \left(Y - \frac{\partial v}{\partial t}\right)\partial y + \left(Z - \frac{\partial w}{\partial t}\right)\partial z\right] dm$$
$$+ [\Theta(\alpha\,\partial x + \beta\,\partial y + \gamma\,\partial z)]_{M_1}^{M_2} - [\Theta(\alpha\,\partial x + \beta\,\partial y + \gamma\,\partial z)]_{\mu_1}^{\mu_2} - \int_b \Theta\,\partial\,ds = 0.$$

Si, maintenant, nous tenons compte des expressions générales de $\partial\mathcal{C}_\nu$, $\partial_T\mathcal{F}$ et des équations (36), (37), (38), nous reconnaîtrons que l'équation (34) se réduit à

$$\frac{B}{dt} = [\Theta(\alpha\,\partial x + \beta\,\partial y + \gamma\,\partial z)]_{\mu_1}^{\mu_2}.$$

L'équation (33) devient alors

$$(39) \qquad \int_a [(u' - u)\,\partial x + (v' - v)\,\partial y + (w' - w)\,\partial z]\,dm$$
$$+ dt\left[\partial_T\mathcal{F}_a - \partial\mathcal{C}_{\nu a} - \int_a (X\,\partial x + Y\,\partial y + Z\,\partial z)\,dm\right]$$
$$- dt\,[\Theta(\alpha\,\partial x + \beta\,\partial y + \gamma\,\partial z)]_{\mu_1}^{\mu_2} = 0.$$

II. — Application de l'équation précédente.

Supposons, pour fixer les idées, une discontinuité qui se propage dans le sens des s croissants, c'est-à-dire de la région 1 vers la région 2; M' étant le point du fil qui devient point de discontinuité à l'instant $t + dt$, on aura $MM' = V_2\,dt$. Prenons, comme région a, la portion composée des trois éléments

$$\mu_1 M = \varepsilon_1\,dt, \qquad MM' = V_2\,dt, \qquad M'\mu_2 = \varepsilon_2\,dt,$$

ε_1 et ε_2 étant des quantités finies. La partie $\mu_1 M$ appartiendra ainsi à la région 1, les deux autres à la région 2. Calculons alors chaque terme de l'égalité (39).

Les différents points de l'élément MM' appartiennent à la région 2 à l'instant t et à la région 1 à l'instant $t + dt$; on aura donc, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\int_{M}^{M'} [(u'-u)\,\delta x + (v'-v)\,\delta y + (w'-w)\,\delta z]\,dm$$
$$= [(u_1-u_2)\,\delta x + (v_1-v_2)\,\delta y + (w_1-w_2)\,\delta z]\,\rho_2 V_2\,dt,$$

les déplacements virtuels δx, δy, δz, fonctions continues de s, étant pris au point M. La quantité précédente étant de l'ordre de $(\delta x, \delta y, \delta z)\,dt$, nous ne conserverons, dans l'équation (39), que les termes de cet ordre-là. Dans ces conditions, on reconnaît que la même intégrale, étendue aux éléments $\mu_1 M$ et $M'\mu_2$, est négligeable.

D'après l'égalité (6), on voit que $\delta\rho$ est de l'ordre des dérivées en s de δx, δy, δz, qui sont elles-mêmes de l'ordre de $(\delta x, \delta y, \delta z)$; par suite, le terme

$$dt\,\delta_T \mathcal{F}_a = dt \int_a \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\,\delta\rho\,ds$$

est de l'ordre de $(\delta x, \delta y, \delta z)\,dt^2$, donc négligeable. Il en est de même du terme $dt \int_a (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,dm$. En réduisant le dernier terme de l'équation (39) à sa partie principale, celle-ci deviendra, en tenant compte de l'égalité (26) et en continuant de désigner par δ' les variations brusques, afin d'éviter toute confusion,

$$(40)\qquad \begin{aligned}&(\delta' u\,\delta x + \delta' v\,\delta y + \delta' w\,\delta z)\,\rho_0 V_0 + \delta\mathcal{G}_{va}\\ &+ \delta'(\Theta\alpha)\,\delta x + \delta'(\Theta\beta)\,\delta y + \delta'(\Theta\gamma)\,\delta z = 0.\end{aligned}$$

Il ne nous reste donc plus qu'à calculer $\delta\mathcal{G}_{va}$. On a, en général,

$$\delta\mathcal{G}_v = -\int \psi\,\delta\rho\,ds = \int \psi\left(\alpha\frac{d\,\delta x}{ds} + \beta\frac{d\,\delta y}{ds} + \gamma\frac{d\,\delta z}{ds}\right)\rho\,ds,$$

égalité où $\psi = \frac{\Lambda}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}$ quand $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ a une valeur finie. L'équation précédente est donc applicable aux éléments $\mu_1 M$ et $M'\mu_2$; elle donne des termes de l'ordre de $\delta\rho\,dt$, donc négligeables, puisque nous ne devons plus conserver dans l'équation (40) que les termes de l'ordre de $(\delta x, \delta y, \delta z)$. Il reste alors

$$\delta\mathcal{G}_{va} = \int_{M}^{M'} \psi\left(\alpha\frac{d\,\delta x}{ds} + \beta\frac{d\,\delta y}{ds} + \gamma\frac{d\,\delta z}{ds}\right)\rho\,ds.$$

Les différents points de l'élément MM' appartiennent à la région 2 au temps t et à la région 1 au temps $t+dt$; comme nous l'avons fait pour les accélérations, nous écrirons

$$\psi = \frac{\Lambda_2}{\rho_2}\frac{\rho'-\rho}{dt} = \frac{\Lambda_2}{\rho_2}\frac{\rho_1-\rho_2}{dt} = -\frac{\Lambda_2}{\rho_2}\frac{\delta'\rho}{dt},$$

en admettant que l'expression donnée pour ψ soit encore exacte quand $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ est très grand. D'après cela, en remarquant que les dérivées $\frac{d(\delta x, \delta y, \delta z)}{ds}$ peuvent être prises au point M, nous aurons

$$\delta\mathcal{C}_{va} = -\Lambda_2\left(\alpha_2\frac{d\,\delta x}{ds} + \beta_2\frac{d\,\delta y}{ds} + \gamma_2\frac{d\,\delta z}{ds}\right)V_2\,\delta'\rho,$$

de sorte que, finalement, l'équation (40) s'écrira

$$\begin{aligned}(41)\qquad & [\rho_0 V_0\,\delta' u + \delta'(\Theta\alpha)]\,\delta x\\ & + [\rho_0 V_0\,\delta' v + \delta'(\Theta\beta)]\,\delta y\\ & + [\rho_0 V_0\,\delta' w + \delta'(\Theta\gamma)]\,\delta z\\ & - \Lambda_2\left(\alpha_2\frac{d\,\delta x}{ds} + \beta_2\frac{d\,\delta y}{ds} + \gamma_2\frac{d\,\delta z}{ds}\right)V_2\,\delta'\rho = 0.\end{aligned}$$

Dans le dernier terme de cette égalité, nous aurions eu des indices 1 à la place des indices 2, si nous avions considéré une discontinuité se propageant en sens inverse.

III. — Cas d'un fil parfait [1].

L'équation (41) est générale; le fil étant supposé parfait, c'est-à-dire dénué de viscosité, nous devons y faire $\Lambda_2 = 0$. Il reste alors une équation qui doit être vérifiée, quels que soient les déplacements virtuels δx, δy, δz, ce qui exige qu'on ait

$$\rho_0 V_0\,\delta'(u, v, w) + \delta'[\Theta(\alpha, \beta, \gamma)] = 0.$$

---

[1] L. Roy, *Les discontinuités du premier ordre dans le mouvement des fils flexibles* (*Comptes rendus*, t. 152, juin 1911).

D'après le second groupe des égalités (25), les équations précédentes peuvent encore s'écrire

$$(42)\qquad (\lambda, \mu, \nu)\rho_0 V_0^2 - \delta'[\Theta(\alpha, \beta, \gamma)] = 0.$$

Voyons les conséquences de ces égalités. On a identiquement

$$(43)\qquad \delta'(\Theta\alpha) = \Theta_2\,\delta'\alpha + \alpha_1\,\delta'\Theta = \Theta_1\,\delta'\alpha + \alpha_2\,\delta'\Theta.$$

Appliquant la même identité à la première des formules

$$\rho_0(\alpha, \beta, \gamma) = \rho\frac{\partial(x, y, z)}{\partial\omega},$$

nous aurons également

$$\rho_0\delta'\alpha = \rho_2\delta'\frac{\partial x}{\partial\omega} + \left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)_1\delta'\rho = \rho_1\,\delta'\frac{\partial x}{\partial\omega} + \left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)_2\delta'\rho,$$

ou encore

$$(44)\qquad \rho_0\delta'\alpha = \rho_2\lambda + \frac{\rho_0}{\rho_1}\alpha_1\,\delta'\rho = \rho_1\lambda + \frac{\rho_0}{\rho_2}\alpha_2\,\delta'\rho.$$

Les doubles égalités (43) et (44) et quatre autres analogues nous permettent d'écrire les équations (42) sous les deux formes équivalentes

$$(45)\qquad \begin{cases} (\lambda, \mu, \nu)(\rho_0^2 V_0^2 - \rho_2\Theta_2) - \dfrac{\rho_0}{\rho_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\,\delta'(\rho\Theta) = 0, \\ (\lambda, \mu, \nu)(\rho_0^2 V_0^2 - \rho_1\Theta_1) - \dfrac{\rho_0}{\rho_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\,\delta'(\rho\Theta) = 0; \end{cases}$$

d'où nous déduisons, en supposant la quantité $\delta'(\rho\Theta)$ différente de zéro,

$$(46)\qquad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \pm 1, \qquad \frac{\lambda}{(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{\mu}{(\beta_1, \beta_2)} = \frac{\nu}{(\gamma_1, \gamma_2)}.$$

La discontinuité est donc longitudinale, mais il y a deux cas à distinguer :

Si la valeur commune des rapports égaux du premier groupe est $+1$, on a

$$(47)\qquad \delta'(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

la discontinuité est donc au moins du premier ordre pour les cosinus. D'après cela, les égalités (43) et (44) deviennent

$$\delta'(\Theta\alpha) = \alpha\,\delta'\Theta, \qquad \rho_1\rho_2\lambda + \rho_0\alpha\,\delta'\rho = 0,$$

de sorte que les équations (42) peuvent s'écrire

$$(\lambda, \mu, \nu)\,(\rho_0^2 V_0^2\,\delta'\rho + \rho_1\rho_2\,\delta'\Theta) = 0.$$

En égalant à zéro la deuxième parenthèse, nous obtenons la vitesse de propagation de la discontinuité mesurée sur l'état primitif; en nous reportant aux formules (26) et (26 *bis*), nous obtenons, pour cette même vitesse mesurée sur l'état actuel, les expressions

$$V_1 = -\sqrt{-\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho}}, \qquad V_2 = +\sqrt{-\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho}},$$

suivant que le point de discontinuité se propage de la région 2 vers la région 1 ou en sens inverse. Les signes des radicaux sont entièrement déterminés, puisque V_1 est toujours négatif et V_2 toujours positif; de plus, ces vitesses sont réelles, car $\frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho}$ est essentiellement négatif, sans quoi, le fil tendu entre deux points, et n'étant soumis à aucune force, ne pourrait être en équilibre stable ([1]). Il est intéressant de comparer ces formules à celles données par M. Duhem en Hydrodynamique ([2]).

Supposons, maintenant, que la valeur commune des rapports égaux du premier groupe des égalités (46) soit -1; on aura

$$(48) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \qquad \beta_1 + \beta_2 = 0, \qquad \gamma_1 + \gamma_2 = 0.$$

Les directions $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sont alors opposées, de sorte que le point de discontinuité M constitue, au point de vue de la figure géométrique du fil à l'instant t, un point de rebroussement. Les égalités (43) et (44) nous donnent alors, en vertu des égalités (48),

$$2\,\delta'(\Theta\alpha) = (\Theta_1 + \Theta_2)\,\delta'\alpha, \qquad \rho_0(\rho_1 + \rho_2)\,\delta'\alpha = 2\rho_1\rho_2\lambda,$$

([1]) P. Duhem, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. II, p. 20.

([2]) P. Duhem, *Recherches sur l'Hydrodynamique*, deuxième Partie, Chap. I, § 6, équation (61).

de sorte que les équations (42) peuvent s'écrire

$$(\lambda, \mu, \nu)\left(\rho_0^2 V_0^2 - \rho_1\rho_2 \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\rho_1 + \rho_2}\right) = 0.$$

Égalant encore à zéro la deuxième parenthèse, nous obtenons la vitesse de propagation de la discontinuité mesurée sur l'état primitif; mesurée sur l'état actuel, cette vitesse est susceptible, en vertu des formules (26) et (26 *bis*), des deux expressions

$$(49) \qquad V_1 = -\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\rho_1 + \rho_2}}, \qquad V_2 = +\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\rho_1 + \rho_2}},$$

suivant que la discontinuité se propage de la région 2 vers la région 1 ou en sens inverse [1].

Voyons, enfin, si la température absolue T peut être discontinue.

Admettons, tout d'abord, que les expressions (15) et (16) soient encore applicables à une portion du fil où les fonctions ρ et T peuvent être discontinues. Appliquons-les, alors, à l'élément $MM' = V_2\,dt$, la discontinuité étant supposée se propageant de la région 1 vers la région 2; nous aurons

$$(50) \qquad dQ = dt\int_M^{M'} \rho\left(\frac{T}{E}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\,\partial T}\frac{\partial\rho}{\partial t} - c\frac{\partial T}{\partial t}\right)ds,$$

et, en remarquant que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{dt} = -\frac{\delta'\rho}{dt}, \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_1 - T_2}{dt} = -\frac{\delta' T}{dt},$$

$$(51) \qquad dQ = \rho_2\left[-\frac{T_2}{E}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\,\partial T}\right)_2 \delta'\rho + c_2\,\delta' T\right] V_2\,dt.$$

---

(1) Ainsi que l'a fait remarquer M. E. Jouguet [*Sur la vitesse et l'accélération des ondes de choc de seconde et de troisième espèce dans les fils* (*Comptes rendus*, 27 novembre 1911)], les conséquences que nous venons de déduire des égalités (45) supposent la quantité $\delta'(\rho\Theta)$ différente de zéro. Si $\delta'(\rho\Theta) = 0$, les égalités (45) se réduisent à

$$\rho_0^2 V_0^2 - \rho\Theta = 0;$$

de là, la possibilité de nouvelles discontinuités que M. Jouguet a appelées *ondes de choc de troisième espèce* et qui se propagent avec la vitesse $V_1 = -\sqrt{\frac{\Theta_1}{\rho_1}}$ ou $V_2 = +\sqrt{\frac{\Theta_2}{\rho_2}}$.

Cette expression est de l'ordre de dt. D'après l'égalité (16), on a aussi

$$dQ = dt\left(K\frac{dT}{ds}\right)_{M'}^{M} + dt\int_{M}^{M'} k(T - T_e)\,ds.$$

Le dernier terme du second membre est de l'ordre de dt^2, donc négligeable. D'après l'égalité (51), $\left(K\frac{dT}{ds}\right)_{M'}^{M}$ doit être une quantité finie. Or $\left(K\frac{dT}{ds}\right)_{M'}$ est finie, il doit donc en être de même de $\left(K\frac{dT}{ds}\right)_{M}$. Donc, si l'on a $K \neq 0$ (fil bon conducteur), il faut qu'on ait $\delta' T = 0$; par suite, la discontinuité est au moins du premier ordre pour la température.

Si $K = 0$ (fil mauvais conducteur), le second membre de la dernière égalité se réduit à son second terme. L'équation (51) nous donne alors

$$\left[-\frac{T_2}{E}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial\rho\,\partial T}\right)_2 \delta'\rho + c_2\,\delta' T\right]\rho_2 V_2 = 0, \tag{52}$$

relation qui nous fait connaître $\delta' T$ en fonction de $\delta'\rho$ si $V_2 \neq 0$. Dans ce cas, la température peut donc être discontinue [1].

IV. — Cas d'un fil affecté de viscosité.

Revenons à l'égalité (41). Celle-ci doit être vérifiée, quels que soient les déplacements virtuels δx, δy, δz et leurs dérivées $\frac{d(\delta x, \delta y, \delta z)}{ds}$; il en résulte qu'on doit avoir, outre les égalités (42), l'égalité

$$\delta'\rho = 0. \tag{53}$$

---

[1] Ainsi que l'a montré M. E. Jouguet [*La loi adiabatique dynamique dans le mouvement des fils* (*Comptes rendus*, 23 octobre 1911)], on peut étendre aux fils la loi adiabatique dynamique d'Hugoniot, qui remplace alors la relation (52). De cette loi adiabatique et des formules que nous avons données, M. Jouguet a déduit diverses conséquences, relatives principalement à l'accélération des discontinuités, qu'il a résumées dans les deux Notes citées et dans la suivante : *Sur l'accélération des ondes de choc dans les fils* (*Comptes rendus*, 13 novembre 1911).

Ainsi, la densité est nécessairement continue. Ce résultat implique une relation entre les éléments de la discontinuité : l'égalité $\rho\Delta = \rho_0$ nous donne, en vertu de la précédente,

$$\delta' \Delta = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\delta'\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 + \delta'\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2 + \delta'\left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2 = 0.$$

D'après le premier groupe des formules (25), l'égalité précédente peut encore s'écrire

$$\lambda\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)_2\right] + \mu\left[\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)_2\right] + \nu\left[\left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)_2\right] = 0,$$

ou bien

$$(54) \qquad \lambda(\alpha_1 + \alpha_2) + \mu(\beta_1 + \beta_2) + \nu(\gamma_1 + \gamma_2) = 0.$$

Voyons maintenant les conséquences des égalités (42), quand on tient compte de l'égalité (53) : les égalités (44) nous donnent

$$(55) \qquad \rho_0 \delta'(\alpha, \beta, \gamma) = \rho(\lambda, \mu, \nu)$$

et les égalités (45)

$$(56) \qquad \begin{cases} (\lambda, \mu, \nu)(\rho_0^2 V_0^2 - \rho\Theta_2) - \rho_0(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\delta'\Theta = 0, \\ (\lambda, \mu, \nu)(\rho_0^2 V_0^2 - \rho\Theta_1) - \rho_0(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\delta'\Theta = 0; \end{cases}$$

nous en déduisons immédiatement les égalités (46), en vertu desquelles la discontinuité est longitudinale, si toutefois $\delta'\Theta \neq 0$.

Si la valeur commune des rapports égaux du premier groupe des égalités (46) est $+1$, on a les égalités (47) qui, jointes aux égalités (55), montrent qu'on a

$$(\lambda, \mu, \nu) = 0.$$

L'égalité (54) se trouve ainsi vérifiée et les égalités (56) nous donnent

$$\delta'\Theta = 0.$$

La discontinuité est donc au moins du second ordre pour les coordonnées et au moins du premier ordre pour les cosinus et la tension.

Si la valeur commune des rapports égaux du premier groupe des égalités (46) est -1, on a les relations (48), en vertu desquelles l'égalité (54) se trouve encore vérifiée. Comme les formules (26) et (26 *bis*) se réduisent ici à $\rho V = \rho_0 V_0$, d'après l'égalité (53), la vitesse de propagation, mesurée sur l'état actuel, a pour expression, d'après les formules (49),

$$V = \pm\sqrt{\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2\rho}},$$

le radical étant pris avec le signe + ou le signe $-$, suivant que la propagation se fait de la région 1 vers la région 2 ou en sens inverse.

Si, maintenant, on suppose $\delta'\Theta = 0$, les équations (46) se réduisent à

$$\rho_0^2 V_0^2 - \rho\Theta = 0$$

et la vitesse de propagation, mesurée sur l'état actuel, devient

$$V = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho}}.$$

Ce cas correspond aux ondes de troisième espèce, signalées par M. Jouguet.

Enfin, on doit ajouter à l'élément différentiel de l'intégrale de l'égalité (50) le terme $\frac{\Lambda}{E\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2$, afin de tenir compte de la viscosité. Mais comme $\delta'\rho = 0$, l'équation (51) se réduit à

$$dQ = \rho_2 c_2 V_2\, \delta' T\, dt,$$

Si l'on a $K \neq 0$, on a donc encore $\delta' T = 0$; si $K = 0$, on a, à la place de l'égalité (52),

$$V_2\, \delta' T = 0,$$

ce qui revient à dire que $\delta' T = 0$ si la discontinuité se propage.

Si le fil est inextensible, on doit avoir, outre les égalités (42), l'égalité (53); les conclusions sont alors identiques à celles que nous venons d'obtenir pour les fils affectés de viscosité.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DES DISCONTINUITÉS D'ORDRE SUPÉRIEUR.

I — Les discontinuités du second ordre dans les fils affectés de viscosité.

Supposons que le point M soit un point de discontinuité persistante du second ordre par rapport à x, y, z; la discontinuité sera, en général, du premier ordre par rapport à ρ et à α, β, γ. Les équations du mouvement, qui sont établies dans l'hypothèse où $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ est continu, ne sont donc pas directement applicables; aussi devons-nous reprendre l'établissement de ces équations à partir du moment où cette hypothèse s'introduit.

Nous avons vu que l'équation fondamentale (7) pouvait se mettre sous la forme

$$\partial\mathcal{E}_e + \partial\mathrm{J} - \int_{\mathrm{M}_1}^{\mathrm{M}_2} \Theta\,\partial\,ds = 0, \tag{57}$$

en posant

$$\Theta + \rho^2\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \Lambda\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \tag{11}$$

Partageons encore le fil en deux parties a et b, définies comme au précédent Chapitre; on aura

$$\begin{aligned}\int_b \Theta\,\partial\,ds = {} & [\Theta(\alpha\,\partial x + \beta\,\partial y + \gamma\,\partial z)]_{\mathrm{M}_1'}^{\mathrm{M}_2} - [\Theta(\alpha\,\partial x + \beta\,\partial y + \gamma\,\partial z)]_{\mu_1}^{\mu_2} \\ & - \int_b \left(\frac{d\Theta\alpha}{ds}\partial x + \frac{d\Theta\beta}{ds}\partial y + \frac{d\Theta\gamma}{ds}\partial z\right)ds,\end{aligned}$$

de sorte que l'équation (57) s'écrira

$$\begin{aligned}\partial\mathcal{E}_e + \partial\mathrm{J} - \int_a \Theta\,\partial\,ds - [\Theta(\alpha\,\partial x + \beta\,\partial y + \gamma\,\partial z)]_{\mathrm{M}_1'}^{\mathrm{M}_2} \\ + [\Theta(\alpha\,\partial x + \beta\,\partial y + \gamma\,\partial z)]_{\mu_1}^{\mu_2} + \int_b \left(\frac{d\Theta\alpha}{ds}\partial x + \frac{d\Theta\beta}{ds}\partial y + \frac{d\Theta\gamma}{ds}\partial z\right)ds = 0.\end{aligned}$$

Tout d'abord, imposons au fil une modification virtuelle qui laisse immobiles tous les points de la partie a, y compris ses extrémités μ_1 et μ_2 : dans une semblable modification, l'intégrale $\int_a \Theta\delta\, ds$ est nulle, et il résulte, de la dernière équation, qu'on doit avoir :

1° En tout point de la région b,

$$\rho\left[(X, Y, Z) - \frac{\partial(u, v, w)}{\partial t}\right] + \frac{d\Theta(\alpha, \beta, \gamma)}{ds} = 0;$$

2° A l'extrémité M_1,

$$(T_{1x}, T_{1y}, T_{1z}) + \Theta(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

3° A l'extrémité M_2,

$$(T_{2x}, T_{2y}, T_{2z}) - \Theta(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Cela posé, imposons au fil une modification virtuelle quelconque; on déduit aisément, des trois groupes d'équations ci-dessus,

$$(\delta\mathcal{E}_e)_b + \delta J_b - [\Theta(\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z)]_{\mu_1}^{\mu_2} - \int_b \Theta\,\delta\, ds = 0$$

et, en retranchant de l'équation (57),

$$(\delta\mathcal{E}_e)_a + \delta J_a + [\Theta(\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z)]_{\mu_1}^{\mu_2} - \int_a \Theta\,\delta\, ds = 0.$$

Cette équation peut s'écrire d'une manière plus explicite de la façon suivante :

$$\int_a \left[\left(X - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\delta x + \left(Y - \frac{\partial v}{\partial t}\right)\delta y + \left(Z - \frac{\partial w}{\partial t}\right)\delta z\right] dm$$
$$+ \int_a \left(\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \Lambda \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\left(\alpha \frac{d\,\delta x}{ds} + \beta \frac{d\,\delta y}{ds} + \gamma \frac{d\,\delta z}{ds}\right) ds$$
$$+ [\Theta(\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z)]_{\mu_1}^{\mu_2} = 0.$$

La partie a se compose de trois segments $\mu_1 M = \varepsilon_1\, dt$ appartenant à la région 1, $MM' = V\, dt$ et $M'\mu_2 = \varepsilon_2\, dt$ appartenant à la région 2. La première intégrale est donc de l'ordre de $(\delta x, \delta y, \delta z)\, dt$, la seconde de l'ordre de $\frac{d(\delta x, \delta y, \delta z)}{ds} dt$, c'est-à-dire du même ordre que la précédente ; enfin, la troisième quantité diffère infiniment peu de $(\Theta_2 - \Theta_1)(\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z)$, qui est de l'ordre de $(\delta x, \delta y, \delta z)$. L'équation précédente se réduit donc à

$$\delta'\Theta(\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z) = 0,$$

et, comme elle doit être vérifiée quels que soient δx, δy, δz, il en résulte qu'on doit avoir

$$\delta'\Theta = 0.$$

Ainsi la discontinuité est au moins du premier ordre pour la tension Θ; supposons-la, de plus, au moins du premier ordre pour T, l'égalité précédente revient à écrire, en vertu de la relation (11), qu'on a

$$\delta' \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{58}$$

ou, d'après l'égalité (30), où l'on fait $n = 2, p = 1$,

$$(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) V_0 = 0. \tag{59}$$

Cette dernière égalité exprime qu'un fil affecté de viscosité ne peut propager que des discontinuités transversales.

Nous avons supposé la discontinuité du premier ordre par rapport à T : d'après les principes posés antérieurement (Chap. II, § II), on reconnait qu'il existe une quantité τ telle que

$$\delta' \frac{\partial T}{\partial \omega} = \tau, \qquad \delta' \frac{\partial T}{\partial t} = -\tau V_0.$$

L'équation indéfinie de la température (17) où figure une des dérivées secondes de T ne s'applique pas encore, mais on peut écrire, en vertu des égalités (15) et (16),

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} \left[\rho\left(\frac{T}{E}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho\,\partial T}\frac{\partial \rho}{\partial t} - c\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \frac{A}{E\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2 - k(T - T_e)\right] ds = \left(K\frac{dT}{ds}\right)_{\mu_2}^{\mu_1}.$$

Supposons d'abord $K \neq 0$ (fil bon conducteur) : toutes les quantités sous le signe $\int$ étant finies, l'intégrale est de l'ordre de dt.

Comme K ne dépend que de ρ et de T qui sont continus, nous en concluons qu'on a

$$\left(\frac{d\mathrm{T}}{ds}\right)_1 - \left(\frac{d\mathrm{T}}{ds}\right)_2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad \delta' \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega} = 0,$$

par suite, $\tau = 0$. La discontinuité est donc au moins du second ordre pour T. Alors, l'équation (17) est applicable ; écrivons-la sous la forme

$$(60) \qquad c\rho \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\mathrm{K} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega}\right) - k(\mathrm{T} - \mathrm{T}_e) + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}} \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{E}} \frac{\Lambda}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2.$$

En écrivant cette équation de part et d'autre du point de discontinuité et en tenant compte de l'égalité (58), il vient

$$\delta' \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\mathrm{K} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega}\right) = 0.$$

Supposons $\mathrm{V}_0 \neq 0$: d'après l'égalité (59), la discontinuité est transversale et, par suite, au moins du second ordre pour la densité ρ, d'après l'égalité (30). L'égalité précédente se réduit alors à $\delta' \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \omega^2} = 0$; elle montre que la discontinuité est au moins du troisième ordre pour T.

Supposons maintenant $\mathrm{K} = 0$ (fil mauvais conducteur) : l'équation (60) devient applicable. En l'écrivant de part et d'autre du point M et en tenant compte de l'égalité (58), nous obtenons

$$\delta' \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \tau \mathrm{V}_0 = 0.$$

Si donc la discontinuité se propage, elle est au moins du second ordre pour T.

II. — Les discontinuités d'ordre $n > 2$ dans les fils affectés de viscosité.

Supposons la discontinuité d'ordre $n > 2$ par rapport aux coordonnées ; elle sera, en général, d'ordre $n - 1$ pour ρ, de sorte qu'on pourra écrire les équations de mouvement

$$(14)\qquad \rho_0\left[(X, Y, Z) - \frac{\partial(u, v, w)}{\partial t}\right] + \frac{\partial\Theta(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\omega} = 0,$$

$$(11)\qquad \Theta + \rho^2\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \Lambda\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Nous avons aussi l'équation (60). Si l'on a $K \neq 0$, T figure dans cette équation par sa dérivée seconde en ω, tandis que ρ n'y figure que par ses dérivées premières; la discontinuité sera donc d'ordre n pour T en général; mais, comme il nous arrivera de faire l'hypothèse $K = 0$, nous ne supposerons la discontinuité que d'ordre $n-1$ pour T. D'après les principes posés antérieurement (Chap. II, § III), on reconnaît qu'il existe une quantité τ telle qu'on ait

$$(61)\qquad \delta'\frac{\partial^{n-1}T}{\partial\omega^{n-p-1}\,\partial t^p} = \tau(-V_0)^p.$$

Supposons qu'au moyen de l'égalité (11) on remplace Θ par sa valeur dans les équations (14): les termes qui renferment les dérivées de l'ordre le plus élevé sont respectivement $(\alpha, \beta, \gamma)\Lambda\frac{\partial^2\rho}{\partial\omega\,\partial t}$. Si donc nous dérivons ces équations $n-3$ fois par rapport à ω, nous aurons

$$(\alpha, \beta, \gamma)\Lambda\frac{\partial^{n-1}\rho}{\partial\omega^{n-2}\,\partial t} + \ldots = 0,$$

les termes non écrits demeurant continus quand on franchit le point de discontinuité. Il en résulte qu'on a

$$(62)\qquad \delta'\frac{\partial^{n-1}\rho}{\partial\omega^{n-2}\,\partial t} = 0,$$

ou, en nous reportant à l'égalité (30), dans laquelle on fait $p = 1$,

$$(63)\qquad (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)V_0 = 0.$$

Cette égalité exprime qu'un fil affecté de viscosité ne peut propager que des discontinuités transversales; c'est la généralisation de la proposition énoncée au paragraphe précédent.

Dérivons l'égalité (11) $n-2$ fois par rapport à ω et tenons compte de l'égalité (62), nous obtiendrons

$$(64) \qquad \delta' \frac{\partial^{n-2}\Theta}{\partial\omega^{n-2}} = 0,$$

ce qui exprime que la discontinuité est au moins d'ordre $n-1$ pour la tension.

Considérons, d'autre part, l'équation (60) et dérivons-la $n-2$ fois par rapport à ω, dans l'hypothèse où l'on a $K \neq 0$. Si nous supposons $V_0 \neq 0$, la discontinuité est transversale d'après l'égalité (63) et, par suite, au moins d'ordre n pour ρ d'après l'égalité (30); nous aurons donc

$$\delta' \frac{\partial^n T}{\partial\omega^n} = 0,$$

ce qui montre que la discontinuité est au moins d'ordre $n+1$ par rapport à T.

Si $K = 0$, l'équation (60) dérivée $n-2$ fois par rapport à ω nous donne, d'après l'égalité (62),

$$\delta' \frac{\partial^{n-1} T}{\partial\omega^{n-2}\,\partial t} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \tau V_0 = 0,$$

d'après l'égalité (61). Si donc la discontinuité se propage, elle est au moins d'ordre n pour T.

Ces résultats généralisent ceux qui ont été obtenus au précédent paragraphe.

Il ne nous reste plus qu'à trouver la direction de la discontinuité, quand celle-ci est stationnaire, et à calculer sa vitesse de propagation quand elle est transversale.

Considérons les équations (14) et dérivons-les $n-2$ fois par rapport à ω, ce que nous avons le droit de faire, d'après l'égalité (64); nous obtenons ainsi

$$(65) \qquad -\rho_0 \frac{\partial^n (x, y, z)}{\partial\omega^{n-2}\,\partial t^2} + (\alpha, \beta, \gamma)\frac{\partial^{n-1}\Theta}{\partial\omega^{n-1}} + \Theta \frac{\partial^{n-1}(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\omega^{n-1}} + \ldots = 0,$$

d'où nous déduisons

$$-\rho_0 \delta' \frac{\partial^n (x, y, z)}{\partial\omega^{n-2}\,\partial t^2} + (\alpha, \beta, \gamma)\,\delta' \frac{\partial^{n-1}\Theta}{\partial\omega^{n-1}} + \Theta\,\delta' \frac{\partial^{n-1}(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\omega^{n-1}} = 0.$$

Mais les égalités (29) et (31) nous donnent

$$\delta' \frac{\partial^n (x, y, z)}{\partial \omega^{n-2}\, \partial t^2} = (\lambda, \mu, \nu)\, V_0^2,$$

$$(66) \qquad \delta' \frac{\partial^{n-1}(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \omega^{n-1}} = \frac{\rho}{\rho_0}[(\lambda, \mu, \nu) - (\alpha, \beta, \gamma)(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)],$$

de sorte que l'égalité précédente s'écrit, en tenant compte de ce que $\rho V = \rho_0 V_0$,

$$(67) \quad \left(V^2 - \frac{\Theta}{\rho}\right)(\lambda, \mu, \nu) + (\alpha, \beta, \gamma)\left[\frac{\Theta}{\rho}(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) - \frac{\rho_0}{\rho^2}\delta' \frac{\partial^{n-1}\Theta}{\partial \omega^{n-1}}\right] = 0.$$

Multiplions ces égalités respectivement par α, β, γ et ajoutons, il vient

$$(68) \qquad (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)V^2 - \frac{\rho_0}{\rho^2}\delta' \frac{\partial^{n-1}\Theta}{\partial \omega^{n-1}} = 0,$$

ce qui permet d'écrire les équations (67) sous la forme

$$(69) \qquad \left(V^2 - \frac{\Theta}{\rho}\right)[(\lambda, \mu, \nu) - (\alpha, \beta, \gamma)(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)] = 0.$$

Supposons d'abord $(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) \neq 0$: d'après l'égalité (63), V_0 est nul et, si l'on admet que Θ est différent de zéro, les égalités (69) nous montrent qu'on a

$$\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\mu}{\beta} = \frac{\nu}{\gamma};$$

la discontinuité est donc longitudinale et au moins d'ordre n pour les cosinus d'après les égalités (66).

Supposons maintenant $(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) = 0$: l'égalité (63) est vérifiée et les égalités (69) nous montrent que la discontinuité, alors transversale, se propage avec la vitesse

$$(70) \qquad V = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho}};$$

elle est au moins d'ordre n pour la densité et la tension, d'après les égalités (30) et (68).

Remarquons que ces conclusions sont valables pour la discontinuité du second ordre.

III. — Les discontinuités d'ordre $n > 1$ dans les fils parfaits [1].

Passons à l'étude des discontinuités d'ordre $n > 1$ par rapport aux coordonnées dans les fils parfaits; nous pouvons écrire les équations de mouvement

$$\rho_0\left[(X, Y, Z) - \frac{\partial(u, v, w)}{\partial t}\right] + \frac{\partial\Theta(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\omega} = 0, \tag{14}$$

$$\Theta + \rho^2\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = 0. \tag{71}$$

D'après ce que nous avons vu au paragraphe I, l'équation indéfinie de la température s'applique même si la discontinuité est du premier ordre par rapport à T. Nous écrirons cette équation sous la forme

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(K\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial T}{\partial\omega}\right) - k(T - T_e) - \frac{T}{E\rho}\frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{72}$$

Comme précédemment, nous ne supposerons la discontinuité que d'ordre $n-1$ pour T et il existera une quantité τ vérifiant l'égalité (61). La discontinuité étant aussi d'ordre $n-1$ pour ρ sera, en général, également d'ordre $n-1$ pour Θ, d'après l'égalité (71). En dérivant celle-ci $n-1$ fois par rapport à ω, nous obtenons

$$\frac{\partial^{n-1}\Theta}{\partial\omega^{n-1}} = \frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\frac{\partial^{n-1}\rho}{\partial\omega^{n-1}} + \frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial^{n-1}T}{\partial\omega^{n-1}} + \ldots,$$

de sorte que, en vertu des égalités (30) et (61), nous aurons

$$\delta'\frac{\partial^{n-1}\Theta}{\partial\omega^{n-1}} = -\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\frac{\rho^2}{\rho_0}(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) + \frac{\partial\Theta}{\partial T}\tau.$$

Nous aurons encore les équations (65), d'où nous déduirons les équations (67), (68), (69). En tenant compte de l'égalité précédente,

---

[1] L. Roy, *Sur la propagation des discontinuités dans le mouvement des fils flexibles* (*Comptes rendus*, 6 mars 1911).

l'équation (68) devient

$$(68\ bis)\qquad (\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)\left(V^2+\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\right)-\frac{\rho_0}{\rho^2}\frac{\partial\Theta}{\partial T}\tau=0.$$

Examinons les conséquences de ces égalités :

I. Supposons d'abord $(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)\neq 0$. Si l'on a $K\neq 0$, l'équation (72) nous montre que $\tau=0$, et nous savons que ceci est encore vrai pour $n=2$. La discontinuité est donc au moins d'ordre n pour T. L'équation (68 *bis*) nous donne alors, pour la vitesse de propagation,

$$(73)\qquad V=\pm\sqrt{-\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}};$$

enfin, les équations (69) deviennent

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}+\frac{\Theta}{\rho}\right)[(\lambda,\mu,\nu)-(\alpha,\beta,\gamma)(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)]=0,$$

et, comme la quantité $\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}+\frac{\Theta}{\rho}$ est négative pour tous les fils connus [1], il en résulte qu'on a

$$(\lambda,\mu,\nu)-(\alpha,\beta,\gamma)(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)=0.$$

La discontinuité est donc longitudinale et au moins d'ordre n par rapport aux cosinus, d'après les égalités (66). La formule (73) est analogue à celle donnée par Newton pour les fluides.

Si l'on a $K=0$, l'équation (72) dérivée $n-2$ fois par rapport à ω nous donne, en vertu des égalités (61), (28) et (30),

$$V\left[\tau-\frac{T}{cE\rho_0}\frac{\partial\Theta}{\partial T}(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)\right]=0,$$

de sorte que si l'on a $V\neq 0$, l'équation (68 *bis*) devient

$$(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)\left[V^2+\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}-\frac{T}{cE\rho^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)^2\right]=0.$$

---

(1) P. Duhem, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. II, p. 58.

Nous en déduisons, pour la vitesse de propagation,

$$(74) \qquad V = \pm\sqrt{-\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\frac{C}{c}},$$

en tenant compte de l'égalité (22). Cette formule est analogue à celle donnée par Laplace pour les gaz. Les égalités (69) montrent encore que la discontinuité est longitudinale et, par suite, au moins d'ordre n par rapport aux cosinus.

Les vitesses de propagation (73) et (74) peuvent encore s'écrire respectivement, au moyen des formules (21),

$$(73\ bis) \qquad V = \pm\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\rho}},$$

$$(74\ bis) \qquad V = \pm\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\rho}\left(1 + \frac{TD^2\mathcal{E}}{cE\rho}\right)}.$$

II. Supposons maintenant $(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) = 0$, ce qui correspond à une discontinuité transversale. D'après l'égalité (30), la discontinuité est au moins d'ordre n pour ρ et, d'après l'égalité (68 *bis*) et l'expression de $\delta' \frac{\partial^{n-1}\Theta}{\partial\omega^{n-1}}$, au moins d'ordre n pour Θ. Les égalités (69) nous redonnent la formule (70).

Examinons, pour terminer, le cas d'un fil inextensible $(\rho = \rho_0)$: l'équation (72) se réduit à

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\omega}\left(K\frac{\partial T}{\partial\omega}\right) - k(T - T_e)$$

et nous montre que la température se détermine indépendamment des autres éléments du mouvement. Les équations du mouvement se réduisent aux équations (14) et à l'équation de continuité

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\omega}\right)^2 = 1.$$

Dérivons celle-ci $n-1$ fois par rapport à ω, tenons compte des égalités (4) et (29) et nous obtiendrons

$$(75) \qquad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$$

La discontinuité est donc transversale. Les équations (67) nous donnent alors

$$\left(V^2 - \frac{\Theta}{\rho}\right)(\lambda, \mu, \nu) - (\alpha, \beta, \gamma)\frac{1}{\rho}\delta' \frac{\partial^{n-1}\Theta}{\partial\omega^{n-1}} = 0,$$

d'où nous déduisons, en multipliant par α, β, γ et ajoutant,

$$\delta' \frac{\partial^{n-1}\Theta}{\partial\omega^{n-1}} = 0.$$

La discontinuité est donc au moins d'ordre n pour Θ et les égalités (69) nous redonnent la formule (70).

IV. — Résumé.

Avant d'aller plus loin, rassemblons les principaux résultats que nous venons d'obtenir, relativement aux discontinuités des divers ordres et à leurs vitesses de propagation.

Les discontinuités du premier ordre, par rapport aux coordonnées, que peut présenter un fil flexible peuvent être de trois espèces, dont les deux premières sont longitudinales.

Les discontinuités de première espèce, caractérisées par les relations $\delta'(\rho\Theta) \neq 0$, $\delta'(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, ne peuvent exister que dans le mouvement des fils parfaits extensibles et sont analogues à celles que propagent les fluides : elles sont au moins du premier ordre par rapport aux cosinus directeurs de la tangente au fil, de sorte que le point de discontinuité ne présente pas de singularité au point de vue de la configuration géométrique du fil. Leur vitesse de propagation a pour valeur

$$+\sqrt{-\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho}}, \qquad \text{ou} \qquad -\sqrt{-\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho}},$$

suivant que la propagation se fait de la région 1 vers la région 2 ou en sens inverse.

Les discontinuités de deuxième espèce, caractérisées par les relations $\delta'(\rho\Theta) \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, ..., peuvent exister à la fois dans le mouvement des fils parfaits et dans le mouvement des fils affectés de viscosité : elles sont d'ordre zéro par rapport aux cosinus directeurs, de sorte que le point de discontinuité est un point singulier qu'on reconnaît être un point de rebroussement. La discontinuité se propage avec la vitesse

$$+\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\Theta_1+\Theta_2}{\rho_1+\rho_2}}, \qquad \text{ou} \qquad -\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\Theta_1+\Theta_2}{\rho_1+\rho_2}},$$

si le fil est parfait et extensible. Si le fil est affecté de viscosité ou inextensible, la discontinuité est au moins du premier ordre pour la densité et se propage avec la vitesse

$$\pm\sqrt{\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2\rho}}.$$

Les discontinuités de troisième espèce sont caractérisées par l'égalité $\delta'(\rho\Theta)=0$, l'angle des deux régions pouvant être quelconque, et peuvent se manifester aussi bien dans le mouvement des fils parfaits que dans le mouvement des fils affectés de viscosité. Elles se propagent avec la vitesse

$$+\sqrt{\frac{\Theta_2}{\rho_2}} \qquad \text{ou} \qquad -\sqrt{\frac{\Theta_1}{\rho_1}}.$$

Les discontinuités d'ordre $n>1$ par rapport aux coordonnées ne peuvent être que longitudinales ou transversales.

Les discontinuités longitudinales sont au moins d'ordre n pour les cosinus directeurs : si le fil est affecté de viscosité, ces discontinuités ne se propagent pas; si le fil est parfait et extensible, elles se propagent avec les vitesses

$$\pm\sqrt{-\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}} \qquad \text{ou} \qquad \pm\sqrt{-\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\frac{C}{c}},$$

suivant que le fil est bon conducteur ou mauvais conducteur de la chaleur.

Les discontinuités transversales sont au moins d'ordre n pour la densité et la tension : que le fil soit parfait ou affecté de viscosité, elles se propagent avec la vitesse

$$\pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho}}.$$

Les discontinuités transversales sont les seules que puisse présenter un fil inextensible.

CHAPITRE V.

LES PETITS MOUVEMENTS DES FILS.

I. — Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable.

Nous avons vu que les équations générales du mouvement d'un fil étaient les suivantes :

$$\rho_0\left[(X, Y, Z) - \frac{\partial^2(x, y, z)}{\partial t^2}\right] + \frac{\partial\Theta(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\omega} = 0,$$

$$(11) \qquad \Theta + \rho^2\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \Lambda\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,$$

$$(3) \qquad \rho\Delta = \rho_0,$$

$$(60) \quad c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(K\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial T}{\partial\omega}\right) - k(T - T_e) + \frac{T}{E}\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\,\partial T}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{E}\frac{\Lambda}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2;$$

$$(T_{1x}, T_{1y}, T_{1z}) + \Theta(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \qquad K\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial T}{\partial\omega} = k'(T - T_e) \qquad (\text{en } M_1);$$

$$(T_{2x}, T_{2y}, T_{2z}) - \Theta(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \qquad K\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial T}{\partial\omega} = k'(T_e - T) \qquad (\text{en } M_2).$$

Supposons le fil en équilibre sous l'action de forces indépendantes du temps et prenons cet état d'équilibre comme état primitif; soient alors

$$(x, y, z) = (a, b, c), \qquad s = \omega, \qquad \rho = \rho_0, \qquad T = T_0, \qquad \Theta = \Theta_0,$$
$$\Lambda = \Lambda_0, \qquad K = K_0, \qquad k = k_0, \qquad k' = k'_0$$

les valeurs des paramètres correspondant à l'équilibre et fonctions de ω

seulement. Nous devrons avoir

$$\rho_0(\mathrm{X, Y, Z}) + \frac{d\Theta_0(a', b', c')}{d\omega} = 0, \qquad \left[(a', b', c') = \frac{d(a, b, c)}{d\omega}\right],$$

(76)
$$\Theta_0 + \rho_0^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_0 = 0,$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{T}_0}{d\omega}\right) - k_0(\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_e) = 0;$$

$$(\mathrm{T}_{1x}, \mathrm{T}_{1y}, \mathrm{T}_{1z}) + \Theta_0(a', b', c') = 0, \qquad \mathrm{K}_0\frac{d\mathrm{T}_0}{d\omega} = k'_0(\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_e) \qquad (\text{en } \mathrm{M}_1);$$

$$(\mathrm{T}_{2x}, \mathrm{T}_{2y}, \mathrm{T}_{2z}) - \Theta_0(a', b', c') = 0, \qquad \mathrm{K}_0\frac{d\mathrm{T}_0}{d\omega} = k'_0(\mathrm{T}_e - \mathrm{T}_0) \qquad (\text{en } \mathrm{M}_2).$$

Pour étudier les petits mouvements du fil autour de cette position d'équilibre, nous poserons

(77)
$$\begin{cases} x = a + \xi(\omega, t), & \Theta = \Theta_0 + \Im(\omega, t), \\ y = b + \eta(\omega, t), & \rho = \rho_0 + r(\omega, t), \\ z = c + \zeta(\omega, t), & \mathrm{T} = \mathrm{T}_0 + \theta(\omega, t). \end{cases}$$

Les quantités ξ, η, ζ, $\Im$, r, θ, ainsi que leurs dérivées seront traitées comme des infiniment petits, dont nous négligerons les carrés et produits. Dès lors, nous aurons

$$\Delta^2 = \left(a' + \frac{\partial\xi}{\partial\omega}\right)^2 + \left(b' + \frac{\partial\eta}{\partial\omega}\right)^2 + \left(c' + \frac{\partial\zeta}{\partial\omega}\right)^2 = 1 + 2\left(a'\frac{\partial\xi}{\partial\omega} + b'\frac{\partial\eta}{\partial\omega} + c'\frac{\partial\zeta}{\partial\omega}\right),$$

et, si nous posons

(78)
$$\Omega = a'\frac{\partial\xi}{\partial\omega} + b'\frac{\partial\eta}{\partial\omega} + c'\frac{\partial\zeta}{\partial\omega},$$

il viendra

$$\Delta = 1 + \Omega.$$

D'autre part, nous avons

$$\Theta\alpha = (\Theta_0 + \Im)\frac{\rho}{\rho_0}\left(a' + \frac{\partial\xi}{\partial\omega}\right) = \left(\Theta_0 a' + \Theta_0\frac{\partial\xi}{\partial\omega} + a'\Im\right)\frac{\rho}{\rho_0},$$

et comme, d'après l'équation (3),

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\Delta} = 1 - \Omega,$$

il vient

$$\Theta\alpha = \Theta_0 a'(1 - \Omega) + \Theta_0\frac{\partial\xi}{\partial\omega} + a'\Im.$$

Dès lors, la première équation du mouvement deviendra

$$\rho_0\left(X - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial \omega}\left[\Theta_0 a'(1 - \mathfrak{D}) + \Theta_0 \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + a'\mathfrak{T}\right] = 0,$$

ou, en tenant compte de l'équation d'équilibre correspondante,

$$(79) \qquad -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial \omega}\left[\Theta_0\left(\frac{\partial \xi}{\partial \omega} - a'\mathfrak{D}\right) + a'\mathfrak{T}\right] = 0.$$

Passons au calcul de $\mathfrak{T}$. L'équation (11) peut s'écrire, à un infiniment petit du second ordre près,

$$\Theta + \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \Lambda_0 \frac{\partial r}{\partial t} = 0,$$

d'où, en en retranchant l'égalité (76) et eu égard au degré d'approximation adopté,

$$\mathfrak{T} - \frac{\partial \Theta_0}{\partial \rho_0} r - \frac{\partial \Theta_0}{\partial T_0} \theta + \Lambda_0 \frac{\partial r}{\partial t} = 0.$$

Mais l'équation de continuité nous donne

$$r + \rho_0 \mathfrak{D} = 0;$$

si donc nous tenons compte des deux dernières égalités, l'équation (79) est équivalente à la première des trois suivantes :

$$(80) \quad \left\{ \begin{aligned} &\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \omega}\left[\Theta_0 \frac{\partial \xi}{\partial \omega} - a'\left(\Theta_0 + \rho_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial \rho_0}\right)\mathfrak{D} + a'\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial T_0}\theta + \rho_0 \Lambda_0 \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right)\right] = 0, \\ &\rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \omega}\left[\Theta_0 \frac{\partial \eta}{\partial \omega} - b'\left(\Theta_0 + \rho_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial \rho_0}\right)\mathfrak{D} + b'\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial T_0}\theta + \rho_0 \Lambda_0 \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right)\right] = 0, \\ &\rho_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \omega}\left[\Theta_0 \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} - c'\left(\Theta_0 + \rho_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial \rho_0}\right)\mathfrak{D} + c'\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial T_0}\theta + \rho_0 \Lambda_0 \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right)\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue. Voyons ce que deviennent les conditions aux limites : la première des conditions relatives au point M_1 s'écrit

$$T_{1x} + \left[\Theta_0 a'(1 + \mathfrak{D}) + \Theta_0 \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + a'\mathfrak{T}\right] = 0,$$

et, d'après la condition correspondante relative à l'équilibre, nous donne la première des égalités

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned} &\Theta_0 \frac{\partial\xi}{\partial\omega} - a'\left(\Theta_0 + \rho_0 \frac{\partial\Theta_0}{\partial\rho_0}\right)\varpi + a'\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial T_0}\theta + \rho_0\Lambda_0 \frac{\partial\varpi}{\partial t}\right) = 0,\\ &\Theta_0 \frac{\partial\eta}{\partial\omega} - b'\left(\Theta_0 + \rho_0 \frac{\partial\Theta_0}{\partial\rho_0}\right)\varpi + b'\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial T_0}\theta + \rho_0\Lambda_0 \frac{\partial\varpi}{\partial t}\right) = 0,\\ &\Theta_0 \frac{\partial\zeta}{\partial\omega} - c'\left(\Theta_0 + \rho_0 \frac{\partial\Theta_0}{\partial\rho_0}\right)\varpi + c'\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial T_0}\theta + \rho_0\Lambda_0 \frac{\partial\varpi}{\partial t}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces égalités doivent être vérifiées aux deux extrémités M_1 et M_2 du fil.

Cela posé, nous allons former les équations en θ : la théorie de la conductibilité thermique nous enseigne que l'équation (60) n'est valable qu'autant que les quantités $\frac{\partial T}{\partial\omega}$, $T - T_e$ sont très petites. Dès lors, nous ne ferons que négliger des quantités du second ordre en remplaçant, dans cette équation, ρ par ρ_0, K et k respectivement par K_0 et k_0. $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ y sera remplacé par $-\rho_0\frac{\partial\varpi}{\partial t}$; le dernier terme en Λ est donc du second ordre et par suite négligeable. Au degré d'approximation adopté, nous pourrons donc écrire

$$c_0\rho_0\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\omega}\left[K_0\frac{\partial(T_0+\theta)}{\partial\omega}\right] - k_0(T_0+\theta-T_e) - \frac{T_0+\theta}{E}\rho_0^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\,\partial T}\right)_0\frac{\partial\varpi}{\partial t}$$

ou, en tenant compte de l'équation correspondante relative à l'équilibre et en négligeant θ vis-à-vis de T_0 dans le dernier terme,

$$(82)\qquad c_0\rho_0\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\omega}\left(K_0\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right) - k_0\theta + \frac{T_0}{E}\frac{\partial\Theta_0}{\partial T_0}\frac{\partial\varpi}{\partial t}.$$

Nous verrions de même que les conditions aux extrémités deviennent

$$(83)\quad \left\{\begin{aligned} &K_0\frac{\partial\theta}{\partial\omega} = k'_0\theta \qquad (\text{en } M_1),\\ &K_0\frac{\partial\theta}{\partial\omega} = -k'_0\theta \qquad (\text{en } M_2). \end{aligned}\right.$$

Enfin, pour achever de déterminer le problème, il faut se donner les conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs de θ, ξ, η, ζ, $\dfrac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial t}$, en fonction de ω pour $t = 0$. Les équations (80), (81), (82) et (83) déterminent alors complètement le problème des petits mouvements, comme nous allons le voir.

II. — Les équations des petits mouvements n'admettent qu'une seule solution.

Les équations (80), (81), (82), (83) sont linéaires et homogènes par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées; la différence de deux systèmes de solutions vérifiera donc les mêmes équations, mais les valeurs initiales de ces différences et de leurs dérivées relatives à ξ, η, ζ seront nulles. Supposons donc que, dans les équations précédentes, θ, ξ, η, ζ désignent les différences correspondant à deux systèmes de solutions. On devra avoir

$$\left[\theta, \xi, \eta, \zeta, \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial t}\right] = 0, \qquad \text{pour } t = 0.$$

Il s'agit de montrer que les fonctions θ, ξ, η, ζ seront nulles à toute époque.

Pour cela, multiplions les équations (80) respectivement par $\dfrac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial t}\,d\omega$, ajoutons-les membre à membre et intégrons entre les extrémités M_1 et M_2 du fil; nous aurons

$$(84) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int \rho_0\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2\right] d\omega \\ &\quad = \int \left\{ \frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\Theta_0\frac{\partial\xi}{\partial\omega} - a'\left(\Theta_0 + \rho_0\frac{\partial\Theta_0}{\partial\rho_0}\right)\omega \right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left. + a'\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial T_0}\theta + \rho_0\Lambda_0\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)\right] + \dots \right\} d\omega, \end{aligned}$$

les points remplaçant deux termes analogues à celui qui est écrit. Mais, au moyen d'une intégration par parties, la deuxième intégrale se transforme en une première quantité intégrée qui est nulle en vertu des équations (81) [1] et en une seconde qui est

$$
\begin{aligned}
&-\int\left\{\left[\Theta_0\frac{\partial\xi}{\partial\omega}-a'\left(\Theta_0+\rho_0\frac{\partial\Theta_0}{\partial\rho_0}\right)\omega+a'\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial T_0}\theta+\rho_0\Lambda_0\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial^2\xi}{\partial t\,\partial\omega}+\ldots\right\}d\omega\\
&=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\Theta_0\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial\omega}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\omega}\right)^2\right]d\omega+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\Theta_0+\rho_0\frac{\partial\Theta_0}{\partial\rho_0}\right)\omega^2\,d\omega\\
&\quad-\int\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial T_0}\theta+\rho_0\Lambda_0\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)\frac{\partial\omega}{\partial t}\,d\omega.
\end{aligned}
$$

D'après cela, si nous posons, pour abréger,

$$
\begin{aligned}
\sum\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2&=\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2,\\
\sum\left(\frac{\partial\xi}{\partial\omega}\right)^2&=\left(\frac{\partial\xi}{\partial\omega}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\omega}\right)^2,
\end{aligned}
$$

l'équation (84) pourra s'écrire

$$
\begin{aligned}
(85)\quad &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\left[\rho_0\sum\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2+\Theta_0\sum\left(\frac{\partial\xi}{\partial\omega}\right)^2-\left(\Theta_0+\rho_0\frac{\partial\Theta_0}{\partial\rho_0}\right)\omega^2\right]d\omega\\
&\qquad+\int\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial T_0}\theta+\rho_0\Lambda_0\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)\frac{\partial\omega}{\partial t}\,d\omega=0.
\end{aligned}
$$

Considérons, maintenant, l'équation (82) : multiplions par $\theta\,d\omega$ et intégrons de M_1 à M_2, nous aurons

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int c_0\rho_0\theta^2\,d\omega=\int\theta\frac{\partial}{\partial\omega}\left(K_0\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right)d\omega-\int k_0\theta^2\,d\omega+\int\frac{T_0}{E}\frac{\partial\Theta_0}{\partial T_0}\frac{\partial\omega}{\partial t}\theta\,d\omega.
$$

Mais, au moyen d'une intégration par parties et en tenant compte des conditions (83), on peut écrire

$$
\int\theta\frac{\partial}{\partial\omega}\left(K_0\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right)d\omega=-(k_0'\theta^2)_{M_1}-(k_0'\theta^2)_{M_2}-\int K\left(\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right)^2d\omega,
$$

---

[1] Si les extrémités du fil étaient fixes, la partie intégrée serait encore nulle, car on aurait aux extrémités non seulement $(\xi,\eta,\zeta)=0$, mais aussi $\dfrac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial t}=0$.

de sorte que l'égalité précédente devient

$$(86)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int c_0\rho_0\theta^2\,d\omega+\int\left[\mathrm{K}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right)^2+k_0\theta^2\right]d\omega$$
$$+(k'_0\theta^2)_{\mathrm{M}_1}+(k'_0\theta^2)_{\mathrm{M}_2}-\int\frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{E}}\frac{\partial\Theta_0}{\partial\mathrm{T}_0}\frac{\partial\varpi}{\partial t}\theta\,d\omega=0.$$

La température absolue T_0 doit varier très peu par rapport à elle-même tout le long du fil, sans quoi la théorie de la conductibilité ne serait pas applicable. On peut donc supposer que, dans la dernière intégrale, T_0 désigne la température absolue moyenne du fil en équilibre, car cela n'altère qu'infiniment peu son élément différentiel. T_0 pouvant alors être traité comme une constante, les égalités (85) et (86) nous donnent

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\left\{\frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{E}}\left[\rho_0\sum\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2+\Theta_0\sum\left(\frac{\partial\xi}{\partial\omega}\right)^2-\left(\Theta_0+\rho_0\frac{\partial\Theta_0}{\partial\rho_0}\right)\varpi^2\right]+c_0\rho_0\theta^2\right\}d\omega$$
$$=-\int\left[\mathrm{K}_0\left(\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right)^2+k_0\theta^2+\frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{E}}\rho_0\Lambda_0\left(\frac{\partial\varpi}{\partial t}\right)^2\right]d\omega-(k'_0\theta^2)_{\mathrm{M}_1}-(k'_0\theta^2)_{\mathrm{M}_2}\leqq 0.$$

Nous avons dit que la quantité $\Theta_0+\rho_0\dfrac{\partial\Theta_0}{\partial\rho_0}$ est essentiellement négative; la première intégrale est donc essentiellement positive. Comme elle est nulle à l'instant initial et qu'à partir de cet instant elle ne peut que décroître ou rester constante d'après la dernière égalité, on en conclut qu'on a à toute époque

$$\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial t}=0,\qquad\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\omega}=0,\qquad\theta=0$$

et, par suite,

$$(\xi,\eta,\zeta)=0.$$

La solution est donc unique.

III. — Mouvement d'un fil tendu, dont une extrémité est fixe et dont l'autre est animée d'un mouvement donné.

Supposons que l'extrémité M_1 du fil soit fixée à l'origine O des coordonnées et que l'autre extrémité M_2 soit, dans la position d'équilibre du fil, au point de l'axe des x, dont l'abscisse est positive et égale à l; supposons, de plus, que le fil ne soit soumis à aucune force et que, dans sa position d'équilibre, il se confonde avec l'axe des x. Dans ces conditions, nous aurons

$$a' = 1, \qquad b' = 0, \qquad c' = 0,$$

et si nous supposons que la température T_0 soit uniforme et égale à la température ambiante T_e, les équations d'équilibre montrent que Θ_0 et ρ_0 seront des quantités constantes.

Si nous supposons le fil animé d'un petit mouvement autour de cette position d'équilibre, nous aurons $\omega = \frac{\partial \xi}{\partial \omega}$, d'après l'égalité (78), et les équations indéfinies du mouvement (80) et (82) seront les suivantes :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial \Theta_0}{\partial \rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Theta_0}{\partial T_0} \frac{\partial \theta}{\partial \omega} - A_0 \frac{\partial^3 \xi}{\partial \omega^2 \, \partial t} = 0, \tag{87}$$

$$\frac{\partial^2 (\eta, \zeta)}{\partial t^2} - \frac{\Theta_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 (\eta, \zeta)}{\partial \omega^2} = 0, \tag{88}$$

$$c_0 \rho_0 \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left(K_0 \frac{\partial \theta}{\partial \omega}\right) - k_0 \theta + \frac{T_0}{E} \frac{\partial \Theta_0}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega \, \partial t}. \tag{89}$$

Nous voyons ainsi que la viscosité n'intervient que dans le mouvement longitudinal; le mouvement transversal se détermine à part, au moyen des équations (88), qui montrent qu'il se propage avec la vitesse constante $\sqrt{\frac{\Theta_0}{\rho_0}}$. Nous vérifions ainsi, dans un cas particulier, une proposition touchant les discontinuités transversales que nous avons reconnu être générale (Chap. IV, § II).

Nous allons étudier d'une manière complète le mouvement longitudinal. Pour simplifier, nous supposerons qu'on ait $\theta = 0$ pour $t = 0$; alors, comme le dernier terme de l'équation (89) est dans la réalité très petit, nous aurons très sensiblement $\theta = 0$ à toute époque, ce qui nous permettra de négliger le terme en $\frac{\partial \theta}{\partial \omega}$ dans l'équation (87). Nous poserons, pour abréger,

$$-\frac{\partial \Theta_0}{\partial \rho_0} = a^2,$$

de sorte que les équations du mouvement longitudinal du fil, dont l'extrémité ($\omega = 0$) est fixe et dont l'autre ($\omega = l$) est animée d'un mouvement donné seront, en effaçant l'indice 0 de A,

$$(90)\quad \left\{\begin{array}{l} A\dfrac{\partial^3\xi}{\partial\omega^2\,\partial t} + a^2\dfrac{\partial^2\xi}{\partial\omega^2} - \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0, \\ \text{pour } \omega = 0 : \xi = 0, \\ \text{pour } \omega = l : \xi = F(t), \\ \text{pour } t = 0 : \xi = f(\omega), \qquad \dfrac{\partial\xi}{\partial t} = g(\omega), \end{array}\right.$$

F, f et g étant des fonctions données.

Pour intégrer les équations (90), nous allons procéder de la manière suivante : nous chercherons d'abord une solution particulière φ, telle qu'on ait

$$(91)\quad \left\{\begin{array}{l} A\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\omega^2\,\partial t} + a^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \\ \text{pour } \omega = 0 : \varphi = 0, \\ \text{pour } \omega = l : \varphi = F(t). \end{array}\right.$$

Si, alors, nous posons

$$(92)\qquad \xi = \varphi + \psi,$$

ψ étant une nouvelle fonction inconnue, nous devrons avoir

$$(93)\quad \left\{\begin{array}{l} A\dfrac{\partial^3\psi}{\partial\omega^2\,\partial t} + a^2\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \\ \text{pour } \omega = (0, l) : \psi = 0, \\ \text{pour } t = 0 : \psi = f(\omega) - \varphi_0, \qquad \dfrac{\partial\psi}{\partial t} = g(\omega) - \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0 \end{array}\right.$$

et le problème sera complètement résolu par l'égalité (92).

IV. — Recherche d'une solution particulière.

Supposons la fonction $F(t)$ périodique de période T; elle pourra être représentée par un développement de la forme

$$(94)\qquad F(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n\, e^{ik_n t},$$

où l'on a posé

$$A_n = \frac{1}{T}\int_0^T F(\alpha)\, e^{-ik_n\alpha}\, d\alpha, \qquad k_n = \frac{2\pi n}{T}, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Si nous regardons, pour un instant, t comme une variable complexe, nous supposerons que le développement (94) est absolument et uniformément convergent à l'intérieur d'une bande limitée par deux droites parallèles à l'axe réel et situées de part et d'autre de cet axe. C'est ce qui arrivera, par exemple, si la fonction $F(t)$ résulte du changement de variable $z = e^{2\pi i \frac{t}{T}}$ effectué sur une fonction de la variable complexe z, holomorphe dans la couronne comprise entre deux circonférences concentriques décrites de l'origine comme centre et comprenant entre elles la circonférence de rayon 1, qui correspond à l'axe réel de la variable t.

Cela posé, nous allons chercher à satisfaire aux équations (91), en prenant pour $\varphi(\omega, t)$ un développement de la forme (94)

$$\varphi(\omega, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} B_n(\omega)\, e^{ik_n t}, \tag{95}$$

où les coefficients B_n seront des fonctions de ω à déterminer.

L'égalité précédente nous donne

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^3\varphi}{\partial\omega^2\,\partial t} &= \sum_{-\infty}^{\infty} ik_n \frac{d^2 B_n}{d\omega^2}\, e^{ik_n t}, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 B_n}{d\omega^2}\, e^{ik_n t}, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= \sum_{-\infty}^{\infty} - k_n^2 B_n\, e^{ik_n t}, \end{aligned}\right. \tag{96}$$

en admettant toutefois la convergence uniforme des séries ainsi obtenues. En substituant ces valeurs dans la première des équations (91), nous voyons que $B_n(\omega)$ doit satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2 B_n}{d\omega^2} - r_n^2 B_n = 0, \tag{97}$$

où l'on a posé

$$r_n^2 = -\frac{k_n^2}{a^2 + i\Lambda k_n}. \tag{98}$$

D'autre part, les conditions aux limites exigent qu'on ait

$$\left\{\begin{array}{l} \text{pour } \omega = 0 : B_n = 0, \\ \text{pour } \omega = l : B_n = A_n. \end{array}\right. \tag{99}$$

L'équation (98) admet deux racines opposées; soit r_n l'une d'elles. L'intégrale générale de l'équation (97) est alors

$$B_n(\omega) = M e^{r_n \omega} + N e^{-r_n \omega},$$

M et N étant deux constantes arbitraires déterminées par les conditions initiales (99); on trouve aisément

$$B_n = A_n \frac{\operatorname{sh} r_n \omega}{\operatorname{sh} r_n l}, \tag{100}$$

sh désignant le sinus hyperbolique. Pour $n = 0$, on a $r_n = 0$ et la solution est $B_0 = A_0 \frac{\omega}{l}$; mais comme $\frac{\omega}{l}$ est précisément la limite vers laquelle tend le rapport des deux sinus hyperboliques quand r_n tend vers zéro, on voit que ce cas particulier est encore compris dans la formule générale (100). Nous aurons donc, d'après l'égalité (95),

$$\varphi(\omega, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh} r_n \omega}{\operatorname{sh} r_n l} e^{ik_n t}. \tag{101}$$

L'équation (98) nous donne

$$r_n = \frac{k_n}{\sqrt{-a^2 - i\Lambda k_n}},$$

en prenant une quelconque des deux déterminations du radical. Calculons cette racine d'une manière plus explicite et soient, respectivement, ρ et θ le module et l'argument de la quantité placée sous le radical; nous avons

$$-a^2 - i\Lambda k_n = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

d'où

$$\sqrt{-a^2 - i\Lambda k_n} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

et, par suite,

(102) $$r_n = k_n \rho^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}} = \frac{k_n}{\sqrt{\rho}}\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Or, nous avons

$$\cos\theta = -\frac{a^2}{\rho}, \qquad \sin\theta = -\frac{\Lambda k_n}{\rho}, \qquad \rho = \sqrt{a^4 + \Lambda^2 k_n^2},$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}, \qquad 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\Lambda k_n}{\rho},$$

car il suffit de prendre le signe $+$ devant le dernier radical, puisque nous calculons une quelconque des racines de l'équation (98). Nous avons tout d'abord

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\rho - a^2}{2\rho}},$$

et comme $\Lambda k_n = \pm\sqrt{\rho^2 - a^4}$, suivant que n est positif ou négatif, il vient aussi

$$\sin\frac{\theta}{2} = \mp\sqrt{\frac{\rho + a^2}{2\rho}},$$

formule où l'on doit prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que n est positif ou négatif. La formule (102) nous donne ainsi

$$r_n = \frac{k_n}{\rho\sqrt{2}}\left(\sqrt{\rho - a^2} \pm i\sqrt{\rho + a^2}\right)$$

et si nous posons

(103) $$\alpha = |k_n|\frac{\sqrt{\rho - a^2}}{\rho\sqrt{2}}, \qquad \beta = |k_n|\frac{\sqrt{\rho + a^2}}{\rho\sqrt{2}},$$

il viendra finalement

(104) $$r_n = \pm\alpha + i\beta,$$

formule où l'on doit prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que n est positif ou négatif.

Cela posé, la solution particulière cherchée sera fournie par l'égalité (101), si toutefois les séries (96) convergent uniformément, et c'est là le point qu'il nous reste à établir.

Nous allons montrer tout d'abord que, ω étant considéré comme une variable complexe $\omega = x + iy$, on peut trouver, dans le plan de cette variable, une région comprenant la portion $(0 \leqq \omega \leqq l)$ de l'axe réel, telle que la fonction

$$C_n(\omega) = \frac{\operatorname{sh} r_n \omega}{\operatorname{sh} r_n l}$$

conserve un module fini quel que soit n.

Tout d'abord, le dénominateur $\operatorname{sh} r_n l$ ne peut pas s'annuler hors de la valeur $n = 0$, pour laquelle, ainsi que nous l'avons vu, $C_n(\omega) = \frac{\omega}{l}$. Nous avons, en effet, d'après la formule (104),

$$\operatorname{sh} r_n l = \pm \operatorname{sh} \alpha l \cos \beta l + i \operatorname{ch} \alpha l \sin \beta l,$$

ch désignant le cosinus hyperbolique. Or, on voit immédiatement que cette formule ne s'annule que pour $\beta l = m\pi$, m étant un nombre entier, et $\alpha = 0$. Mais, α ne s'annulera que si $\rho = a^2$, c'est-à-dire si $A = 0$, ce que nous ne supposons pas.

Donc $C_n(\omega)$ conservera une valeur finie pour toute valeur finie de n. Pour voir ce que devient cette fonction lorsque $|n|$ augmente indéfiniment, partons de la double inégalité presque évidente

$$\operatorname{sh} |x| \leqq |\operatorname{sh}(x + iy)| \leqq \operatorname{ch} x;$$

comme

$$r_n \omega = (\pm \alpha x - \beta y) + i(\beta x \pm \alpha y),$$

nous voyons qu'on aura

$$|C_n(\omega)| \leqq \frac{\operatorname{ch}(\pm \alpha x - \beta y)}{\operatorname{sh} \alpha l}. \tag{105}$$

Supposons d'abord, pour fixer les idées, $n > 0$: lorsque n croît indéfiniment, nous voyons que ρ croît comme n, α et β comme $\sqrt{n}$, et que le rapport

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{\rho - a^2}{\rho + a^2}}$$

tend vers l'unité. Si ω se trouve dans la région du plan pour laquelle

$\alpha x - \beta y \geqq 0$, le second membre de l'inégalité (105) différera infiniment peu de $\frac{e^{\alpha x - \beta y}}{e^{\alpha l}}$, quantité qui restera finie pour $\alpha x - \beta y - \alpha l \leqq 0$. De même, si ω se trouve dans la région du plan pour laquelle $\alpha x - \beta y \leqq 0$, le second membre de l'inégalité (105) restera fini pour $\alpha x + \beta y - \alpha l \leqq 0$. Puisque le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ tend vers 1 pour n infini, nous voyons donc que la fonction $C_n(\omega)$ restera finie si la variable complexe ω se trouve à l'intérieur de la bande limitée par les deux droites parallèles

$$x - y \pm l = 0,$$

qui passent respectivement par les points $(-l, +l)$ de l'axe réel.

Nous verrions de même que si n décroît indéfiniment, la fonction $C_n(\omega)$ restera finie si ω se trouve à l'intérieur de la bande limitée par les deux droites parallèles

$$x + y \pm l = 0,$$

de sorte qu'en définitive la fonction $C_n(\omega)$ restera finie, quel que soit n, pour tous les points du plan communs à ces deux bandes, c'est-à-dire pour tous les points intérieurs au carré dont les sommets ont pour coordonnées

$$(x = l,\ y = 0), \qquad (x = 0,\ y = l), \qquad (x = -l,\ y = 0), \qquad (x = 0,\ y = -l).$$

Il résulte immédiatement, de ce qui précède, que le second membre de l'égalité (101) est uniformément convergent par rapport aux deux variables ω, t, lorsque celles-ci se meuvent dans les deux régions de leurs plans que nous leur avons assignées. Comme les termes du développement sont holomorphes dans le domaine considéré, ce développement représente une fonction $\varphi(\omega, t)$ holomorphe dans le même domaine. D'après un théorème fondamental de la théorie des fonctions, la dérivée $p^{\text{ième}}$ de $\varphi(\omega, t)$ est égale à la somme de la série obtenue en différentiant p fois chaque terme de la série qui représente $\varphi(\omega, t)$. Les égalités (96) se trouvent donc justifiées, puisque l'axe réel de la variable t et la portion $(0, l)$ de l'axe réel de la variable ω appartiennent au domaine considéré, de sorte que l'égalité (101) représente bien la solution particulière cherchée.

V. — Calcul de la fonction ψ.

Cherchons maintenant à intégrer les équations (93). L'équation indéfinie, ne renfermant que des dérivées d'ordre pair en ω, pourra être vérifiée par une solution simple de la forme

$$\mathfrak{C}(\mathrm{M}\cos m\omega + \mathrm{N}\sin m\omega),$$

$\mathfrak{C}$ étant une fonction de t seulement, M, N et m des constantes. L'équation indéfinie montre qu'on doit avoir

$$\mathfrak{C}'' + \mathrm{A}m^2\mathfrak{C}' + a^2m^2\mathfrak{C} = 0 \tag{106}$$

et les conditions aux limites exigent qu'on ait

$$\mathrm{M} = 0, \qquad \sin ml = 0,$$

N étant arbitraire. Il en résulte qu'on a

$$m = \frac{n\pi}{l} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et qu'une solution simple est de la forme

$$\mathrm{N}\mathfrak{C}\sin n\pi\frac{\omega}{l}.$$

Calculons $\mathfrak{C}$: si nous posons

$$\mu = \frac{\mathrm{A}n^2\pi^2}{2l^2}, \qquad \nu = \frac{n\pi}{l}\sqrt{a^2 - \frac{\mathrm{A}^2n^2\pi^2}{4l^2}}, \tag{107}$$

l'intégrale générale de l'équation (106) sera

$$\mathfrak{C} = e^{-\mu t}(\mathrm{P}\cos\nu t + \mathrm{Q}\sin\nu t),$$

P et Q étant deux constantes arbitraires. Nous obtiendrons ainsi, comme expression de la fonction ψ, en faisant $\mathrm{N} = 1$,

$$\psi = \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\mu t}(\mathrm{P}\cos\nu t + \mathrm{Q}\sin\nu t)\sin n\pi\frac{\omega}{l}. \tag{108}$$

Les constantes P et Q vont être déterminées par les conditions initiales. On a d'abord, sauf à établir plus loin la convergence uniforme de la série,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sum e^{-\mu t}[(-P\mu + Q\nu)\cos\nu t - (P\nu + Q\mu)\sin\nu t]\sin n\pi\frac{\omega}{l},$$

de sorte qu'en vertu des dernières égalités (93), nous devrons avoir

$$(109)\qquad \left\{\begin{aligned} f(\omega) - \varphi_0 &= \sum P\sin n\pi\frac{\omega}{l},\\ g(\omega) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0 &= \sum(-P\mu + Q\nu)\sin n\pi\frac{\omega}{l}.\end{aligned}\right.$$

Multiplions les deux membres de ces égalités par $\sin n\pi\frac{\omega}{l}d\omega$ et intégrons de o à l, il viendra

$$(110)\qquad \left\{\begin{aligned} \int_0^l[f(\omega) - \varphi_0]\sin n\pi\frac{\omega}{l}d\omega &= P\frac{l}{2},\\ \int_0^l\left[g(\omega) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0\right]\sin n\pi\frac{\omega}{l}d\omega &= (-P\mu + Q\nu)\frac{l}{2}.\end{aligned}\right.$$

Ces égalités nous font connaître les valeurs de P et de Q pour chaque valeur de n et la fonction ψ se trouve entièrement déterminée; pour montrer qu'elle constitue bien la solution du problème, il reste à établir la convergence uniforme de la fonction ψ et des dérivées $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2}$, $\frac{\partial^3\psi}{\partial\omega^2\,\partial t}$ obtenues en différentiant terme à terme la série (108).

Cette démonstration peut se faire aisément de la manière suivante : on peut admettre que les fonctions $f(\omega)$ et $g(\omega)$, nécessairement finies et continues, possèdent des dérivées premières également finies et satisfaisant aux conditions de Dirichlet. Dans ces conditions, les seconds membres des égalités (109) seront absolument et uniformément convergents. Cela posé, la série (108) et celles qui s'en déduisent par différentiations peuvent être considérées comme obtenues en multipliant chaque terme de l'une ou l'autre des séries (109) par une certaine fonction de t. Si cette fonction reste finie pour $t \geq 0$, quand n augmente indéfiniment, la série considérée sera uniformément convergente. C'est ce qu'il est facile de démontrer, en supposant seulement que la dérivée $f''(\omega)$ reste finie et satisfasse, comme $f'(\omega)$, aux conditions de Dirichlet. Aussi n'insisterons-nous pas davantage sur ce point.

Revenant donc à la détermination de $\xi(\omega, t)$, la formule (92) nous donnera, d'après les égalités (101) et (108),

$$(111) \quad \xi(\omega, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh} r_n \omega}{\operatorname{sh} r_n l} e^{ik_n t} + \sum_{1}^{\infty} e^{-\mu t}(P \cos \nu t + Q \sin \nu t) \sin n\pi \frac{\omega}{l}.$$

Le problème est donc complètement résolu. Nous voyons que, lorsque t croît indéfiniment, le mouvement tend à devenir périodique, de même période que le mouvement imposé à l'extrémité M_2 et indépendant des conditions initiales ; c'est le *mouvement forcé*. Nous retrouvons là une propriété commune à tous les systèmes sur lesquels agissent des causes extérieures périodiques.

VI. — Cas particuliers; moyen de déterminer expérimentalement le coefficient de viscosité [1].

I. Supposons que les deux extrémités du fil soient fixes. On aura $F(t) = 0$ et, par suite, $\varphi = 0$. Les égalités (108) nous donnent, en désignant par x la variable d'intégration,

$$P = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin n\pi \frac{x}{l}\, dx,$$

$$Q = \frac{2}{\nu l} \int_0^l [g(x) + \mu f(x)] \sin n\pi \frac{x}{l}\, dx,$$

de sorte que l'égalité (109) devient

$$(112) \quad \xi(\omega, t) = \frac{2}{l} \sum e^{-\mu t} \sin n\pi \frac{\omega}{l} \int_0^l \left[f(x) \cos \nu t + \frac{g(x) + \mu f(x)}{\nu} \sin \nu t \right] \sin n\pi \frac{x}{l}\, dx.$$

---

[1] L. Roy, *De la viscosité dans le mouvement des fils flexibles* (*Comptes rendus*, 8 mai 1911).

Reportons-nous à l'expression (107) de ν : pour les petites valeurs de n, surtout si l est un peu grand, ν sera en général réel. Les premiers termes du développement de l'égalité (112) seront donc, par rapport à t, périodiques amortis de périodes τ_n données par la formule

$$\tau_n = \frac{2l}{n\sqrt{a^2 - \frac{\Lambda^2 n^2 \pi^2}{4l^2}}}. \tag{113}$$

Le radical s'annule pour une valeur de n égale à $\frac{2al}{\pi\Lambda}$; mais cette valeur ne peut être que très exceptionnellement un nombre entier. Soient alors p et $p+1$ les deux nombres entiers consécutifs comprenant $\frac{2al}{\pi\Lambda}$ dans leur intervalle; les p premiers termes du développement de ξ seront périodiques amortis, tandis que tous les autres ne contiendront plus que des exponentielles décroissantes : en effet, pour $n > p$, ν deviendra purement imaginaire, de sorte que la quantité νi sera réelle et l'on pourra remplacer $\cos \nu t$ par $\operatorname{ch} \nu i t$ et $\frac{\sin \nu t}{\nu}$ par $\frac{\operatorname{sh} \nu i t}{\nu i}$. Si la viscosité était telle qu'on eût

$$\Lambda > \frac{2al}{\pi},$$

on aurait $p = 0$ et tous les termes du développement de ξ seraient apériodiques. Dans ces conditions, le fil écarté de sa position d'équilibre et abandonné sans vitesse y reviendrait asymptotiquement sans effectuer d'oscillations; le mouvement serait apériodique.

D'après la formule (113), il suffirait de déterminer expérimentalement la période fondamentale τ_1 pour en déduire la valeur du coefficient de viscosité Λ. Mais il est plus simple de chercher par tâtonnements la valeur de l pour laquelle le mouvement devient apériodique critique; on a, alors, simplement

$$\Lambda = \frac{2al}{\pi}.$$

Cette détermination est tout à fait analogue à la recherche de la résistance critique d'un galvanomètre. Rappelons que a est la vitesse avec laquelle se propageraient les discontinuités longitudinales d'ordre supérieur si le fil n'était pas visqueux; cette quantité peut être déterminée avec précision par des expériences d'extension.

II. Supposons le mouvement de l'extrémité M_2 pendulaire simple, et prenons simplement

$$F(t) = \varepsilon \sin 2\pi \frac{t}{T} = \frac{\varepsilon}{2i}(e^{ikt} - e^{-ikt}) \qquad \left(k = \frac{2\pi}{T}\right),$$

ε étant une constante. Nous aurons $A_1 = \frac{\varepsilon}{2i}$, $A_{-1} = -\frac{\varepsilon}{2i}$, tous les autres coefficients du développement (94) étant nuls. Supposons, en outre, qu'on ait attendu suffisamment, à partir de l'instant initial, pour que le mouvement se soit régularisé, c'est-à-dire pour que la fonction ψ, qui dépend seule de l'état initial, soit devenue négligeable. Nous aurons, d'après l'égalité (111),

$$\xi(\omega, t) = -\frac{\varepsilon}{2i}\frac{\operatorname{sh}(-\alpha + i\beta)\omega}{\operatorname{sh}(-\alpha + i\beta)l}e^{-ikt} + \frac{\varepsilon}{2i}\frac{\operatorname{sh}(\alpha + i\beta)\omega}{\operatorname{sh}(\alpha + i\beta)l}e^{ikt},$$

ce qui s'écrit encore

$$\xi(\omega, t) = C\cos kt + D\sin kt, \tag{114}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} C &= -\varepsilon\frac{\operatorname{sh}\alpha(\omega + l)\sin\beta(\omega - l) - \operatorname{sh}\alpha(\omega - l)\sin\beta(\omega + l)}{\operatorname{ch}2\alpha l - \cos 2\beta l},\\ D &= \varepsilon\frac{\operatorname{ch}\alpha(\omega + l)\cos\beta(\omega - l) - \operatorname{ch}\alpha(\omega - l)\cos\beta(\omega + l)}{\operatorname{ch}2\alpha l - \cos 2\beta l}.\end{aligned}\right. \tag{115}$$

Les égalités (114) et (115) résolvent le problème. Si A est différent de zéro, ce qui a toujours lieu en réalité, $\operatorname{ch}2\alpha l$ sera supérieur à l'unité, de sorte que les dénominateurs de C et de D ne pourront pas s'annuler. Toutefois, si A est assez petit, D pourra être notablement supérieur à ε pour une longueur de fil vérifiant la relation $\cos 2\beta l = 1$; dans ces conditions, l'amplitude du mouvement, en certains points du fil, sera très notablement supérieure à l'amplitude du mouvement de son extrémité. Ce cas correspond aux phénomènes de résonance observés dans les expériences de Melde.