ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

R. ALEZAIS

Sur la composition de transformations linéaires de fonctions θ

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 29 (1912), p. 279-304
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1912_3_29__279_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA COMPOSITION

DE

TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DE FONCTIONS Θ

PAR M. R. ALEZAIS.

Dans ma Thèse (je la désignerai par *th.*), où j'ai développé certains calculs relatifs aux fonctions hyperfuchsiennes de M. Picard, j'ai calculé directement toutes les transformations de fonctions θ que j'ai voulu obtenir; mais ces transformations ne sont pas toutes indépendantes, et il est intéressant de chercher à les calculer comme transformations composées d'un nombre aussi petit que possible de transformations fondamentales. Ce nombre minimum est de quatre. Les fonctions θ à trois variables que j'ai eu à considérer ont leurs périodes normales de deuxième espèce fonctions de deux paramètres u et v, et tout passage d'un système de rétrosections rendant la surface de Riemann simplement connexe à un autre pareil système, correspond à une substitution linéaire effectuée sur u et v. Toute transformation linéaire de ces fonctions se rattache donc à une substitution effectuée sur u et v. Je désignerai désormais ces substitutions par des lettres cursives, et je réserverai aux transformations les lettres ordinaires correspondantes.

Chacune des substitutions considérées donne lieu à trois transformations, mais ces trois transformations peuvent s'obtenir en composant l'une d'elles avec les puissances d'une même transformation I, dont le cube est la transformation identique, et qui peut se déduire de la substitution identique $\mathfrak{s}$, ainsi que l'a indiqué M. C.-F. Craig en

traitant un problème analogue (*Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 11, 1910, n° 1, p. 47). D'autre part, les substitutions considérées forment un groupe que j'appelais S, et j'ai montré (*th.*, p. 58) que ce groupe est sous-groupe d'un groupe T engendré par trois substitutions T_1, T_2, Θ. Je parlerai maintenant du groupe s; je dirai qu'il est sous-groupe du groupe $\mathfrak{T}$ et que celui-ci a pour substitutions fondamentales $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}h$. Soient de plus T_1 l'une des transformations qui correspondent à $\mathfrak{T}_1$, T_2 l'une de celles qui correspondent à $\mathfrak{T}_2$, et Θ l'une de celles qui correspondent à $\mathfrak{T}h$, toutes les transformations linéaires de nos fonctions θ pourront s'obtenir en combinant les quatre transformations I, T_1, T_2, Θ. Je vais d'abord calculer les éléments de ces quatre transformations.

Transformation I.

Toutes les substitutions du groupe $\mathfrak{T}$ sont des substitutions linéaires

$$u' = \frac{M_3 + P_3 v + R_3 u}{M_1 + P_1 v + R_1 u}, \qquad v' = \frac{M_2 + P_2 v + R_2 u}{M_1 + P_1 v + R_1 u},$$

dont les coefficients M_1, P_1, ..., R_3 sont des entiers complexes de la forme $a + b\lambda$ où a et b sont des entiers réels et $\lambda = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Parmi les substitutions de cette forme, l'expression la plus générale de la substitution s est

$$u' = \frac{(a + b\lambda)u}{a + b\lambda}, \qquad v' = \frac{(a + b\lambda)v}{a + b\lambda}.$$

On peut se servir de la méthode ordinaire (*th.*, p. 104) pour déduire de cette substitution les coefficients de la transformation correspondante. Elle donne

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} a & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ -b & 0 & a-b & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & a-b & 0 & b \\ 0 & -b & 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

On en déduit

$$\alpha\bar{\beta}' - \beta\bar{\alpha}' = \begin{bmatrix} a^2 - ab + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 - ab + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - ab + b^2 \end{bmatrix}.$$

Pour que la transformation soit linéaire, il faut que cette matrice soit la matrice unité; il faut donc

$$a^2 - ab + b^2 = 1,$$

et cette relation étant vérifiée, on voit aisément que les autres conditions, pour que la transformation soit linéaire, le sont aussi. Les solutions en nombres entiers de cette relation sont

$$\begin{cases} a = \pm 1, \\ b = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0, \\ b = \pm 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1, \\ b = -1. \end{cases}$$

Changer à la fois les signes de a et de b revient à changer les signes de tous les coefficients; on sait que ce changement ne conduit pas à une transformation distincte; en négligeant la transformation identique, il n'en reste donc que deux à considérer; par exemple celle qui correspond à

$$a + b\lambda = \lambda,$$

et celle qui correspond à

$$a + b\lambda = -1 - \lambda = \lambda^2.$$

Chacune est manifestement le carré de l'autre et a pour cube la transformation identique.

Soient donc $a = 0$, $b = 1$; il en résulte

$$\Delta = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

On se trouve (cf. *th.*, p. 96) dans le cas où α' n'est pas la matrice o, mais où son déterminant $|\alpha'|$ est nul. De cette matrice Δ, on déduit sans peine tous les éléments de la transformation. Pour pouvoir indiquer les résultats, je rappelle d'abord brièvement les formules générales.

La formule d'une transformation S déduite d'une substitution s peut s'écrire

$$\theta_N(\delta_S x) = \frac{A_N^{(S)}}{\mu_S} e^{-\pi i \varphi_S x^2} \theta_{N_S}^{(S)}(x).$$

x est une lettre multiple (x_1, x_2, x_3); δ_S et φ_S sont des matrices dont la seconde est symétrique (de sorte que $\delta_S x$ est une lettre multiple et $\varphi_S x^2$ est une forme quadratique). Ces matrices sont données en fonction des coefficients de la transformation et des périodes normales de seconde espèce τ par les formules

$$\delta_S = \alpha + \tau\alpha', \qquad \varphi_S = \overline{\alpha}'(\alpha + \tau\alpha').$$

Les périodes τ ont pour expressions

$$\tau_{11} = \frac{\lambda^2 - \lambda}{3}(\lambda u^2 + 2v), \qquad \tau_{12} = \tau_{21} = \lambda^2 u,$$

$$\tau_{13} = \tau_{31} = \frac{\lambda^2 - \lambda}{3}(\lambda^2 u^2 - v), \qquad \tau_{22} = -\lambda^2,$$

$$\tau_{33} = \frac{\lambda^2 - \lambda}{3}(u^2 + 2v), \qquad \tau_{23} = \tau_{32} = u.$$

μ_S est le dénominateur de la substitution s; son carré est égal au déterminant $|\alpha + \tau\alpha'|$.

On voit que les trois quantités μ_S, δ_S, φ_S dépendent en général de u et de v.

N indique la caractéristique initiale que je suppose réduite; soient q, q' $(q_1, q_2, q_3; q'_1, q'_2, q'_3)$ ses éléments.

N_S représente la caractéristique transformée de N par S. Si k, k' sont ses éléments, on a

$$k = \overline{\beta}'q - \overline{\beta}q' + d(\overline{\beta}\beta'), \qquad k' = -\overline{\alpha}'q + \overline{\alpha}q' - d(\overline{\alpha}\alpha'),$$

$d(a)$ étant la lettre multiple qui a pour éléments ceux de la diagonale de la matrice a et $\overline{a}$ la matrice a transposée.

$A_N^{(S)}$ est une racine huitième de l'unité, produit de deux facteurs dont l'un dépend des caractéristiques. Ce facteur est $e^{\frac{\pi i E}{4}}$ avec

$$E = \alpha'\overline{\beta}'q^2 - 2\beta\overline{\alpha}qq' + \alpha\overline{\beta}q'^2 + 2\alpha' d(\overline{\beta}\beta')q - 2\alpha d(\overline{\beta}\beta')q'.$$

Quant à l'autre facteur, je rappellerai seulement que son calcul est facile dans les deux cas $\alpha' = 0$ et $\alpha' \neq 0$, $|\alpha'| = 0$.

θ_N est construite avec les périodes primitives τ; $\theta_{N_S}^{(S)}$ avec ces périodes où l'on a effectué sur u et v la substitution s.

Dans le cas de la transformation I, on trouve

$$\mu_1 = \lambda, \qquad \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda^2 u & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ -1 & -u & -1 \end{bmatrix}, \qquad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarquons qu'on a

$$\delta_1^2 = \begin{bmatrix} -1 & \lambda^2 u & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & u & 0 \end{bmatrix}, \qquad \varphi_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

enfin $\delta_1^3 = 1$. δ_1 changée de signe et δ_1^2 sont les matrices que j'appelais δ et δ' (*ib.*, p. 160).

$$\left| \begin{array}{l} k_1 \equiv -q_1 - q_3 \\ k_2 \equiv -q_2 - q_2' - 1 \\ k_3 \equiv \quad q_1 \end{array} \right. \pmod 4, \qquad \left| \begin{array}{l} k_1' \equiv q_3' \\ k_2' \equiv q_2 \\ k_3' \equiv q_1' + q_3' \end{array} \right. \pmod 2;$$

$$A_N^{(1)} = \eta \frac{-1+i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi i E}{4}}, \qquad E = q_2^2 + 2q_2q_2' + 2q_2.$$

η (ici et dans les formules suivantes) est un signe provenant de la réduction de la nouvelle caractéristique. C'est pour calculer η, qu'il est nécessaire de connaître les valeurs de k_1, k_2, k_3 selon le module 4.

La substitution s ne changeant rien, on a

$$\theta_N(\delta_1 x) = A_N^{(1)} \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x_2^2} \theta_{N_1}(x).$$

C'est une relation entre deux fonctions θ de mêmes périodes.

J'ai réuni plus loin en Tableau (*Tableau des Caractéristiques*) les

valeurs de N_1, de $A_N^{(1)}$ et des quantités analogues relatives à T_1, T_2 et Θ, qui correspondent à chaque valeur de N. Quand il s'agit de fonctions impaires, je suppose θ remplacé par ϑ; je n'ai ainsi à faire varier N que de 1 à 36 et de 1 à 28. Je suppose que la correspondance entre ces numéros et les caractéristiques est celle que j'ai adoptée dans ma Thèse; je la rappelle dans ce Tableau.

Transformation T_1.

La substitution $\mathfrak{T}_1$ est (*th.*, p. 37)

$$v' = v, \qquad u' = -\lambda u.$$

Les fonctions $\theta^{(\mathfrak{T}_1)}$, $\vartheta^{(\mathfrak{T}_1)}$ auront pour modules

$$\tau'_{11} = \frac{\lambda^2 - \lambda}{3}(u^2 + 2v), \qquad \tau'_{12} = -u,$$

$$\tau'_{13} = \frac{\lambda^2 - \lambda}{3}(\lambda u^2 - v), \qquad \tau'_{22} = -\lambda^2,$$

$$\tau'_{33} = \frac{\lambda^2 - \lambda}{3}(\lambda^2 u^2 + 2v), \qquad \tau'_{32} = -\lambda u.$$

L'une des trois transformations fournies par $\mathfrak{T}_1$ est dans le cas $\alpha' = 0$; c'est celle que je désigne par T_1; les deux autres sont dans le cas $\alpha' \neq 0$, $|\alpha'| = 0$; elles résulteront de la composition de T_1 avec I et I^2.

On obtient les coefficients de T_1 en partant de $\mathfrak{T}_1$ écrite sous la forme

$$v' = \frac{-\lambda^2 v}{-\lambda^2}, \qquad u' = \frac{u}{-\lambda^2}.$$

On trouve

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ \hdashline & & & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Il en résulte

$$\mu_{T_1} = 1, \qquad \delta_{T_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \varphi_{T_1} = 0.$$

Puis

$$\left| \begin{array}{l} k_1 \equiv -q_3 \\ k_2 \equiv q_2 \\ k_3 \equiv q_1 + q_3 \end{array} \right. \pmod 4, \qquad \left| \begin{array}{l} k'_1 \equiv q'_1 + q'_3 \\ k'_2 \equiv q'_2 \\ k'_3 \equiv q'_1 \end{array} \right. \pmod 2$$

$$E = 0, \qquad A_N^{(T_1)} = \eta.$$

$$\theta_N(\delta_{T_1} x) = A_N^{(T_1)} \theta_{N_{T_1}}^{(\mathfrak{T}_1)}(x).$$

Transformation T_2.

La substitution $\mathfrak{T}_2$ est (*th.*, p. 38)

$$v' = \lambda^2 + v + \lambda u, \qquad u' = 1 - \lambda u.$$

Les modules des fonctions $\mathfrak{I}^{(\mathfrak{T}_2)}$, $\mathfrak{G}^{(\mathfrak{T}_2)}$ sont

$$\tau'_{11} = \lambda + 2u + \frac{\lambda^2 - \lambda}{3}(u^2 + 2\lambda v), \qquad \tau'_{12} = \lambda^2 - u,$$

$$\tau'_{13} = \lambda u + \frac{\lambda^2 - \lambda}{3}(\lambda u^2 - v), \qquad \tau'_{22} = -\lambda^2,$$

$$\tau'_{33} = -1 + \frac{\lambda^2 - \lambda}{3}(\lambda^2 u^2 + 2v), \qquad \tau'_{32} = 1 - \lambda u.$$

Les transformations relatives à $\mathfrak{T}_2$ et à $\mathfrak{T}_1$ sont dans les mêmes cas; c'est de nouveau celle qui est dans le cas $\alpha' = 0$ que je choisis pour T_2. On obtient ses coefficients en partant de $\mathfrak{T}_2$ sous la forme

$$v' = \frac{-\lambda - \lambda^2 v - u}{-\lambda^2}, \qquad u' = \frac{-\lambda^2 + u}{-\lambda^2}.$$

On trouve

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hdashline & & & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & & -1 & 1 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Il en résulte

$$\mu_{T_2} = 1, \qquad \delta_{T_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \varphi_{T_2} = 0;$$

$$\left| \begin{array}{l} k_1 \equiv q'_1 - q'_3 - q_2 - q_3 - 1 \\ k_2 \equiv q_2 - q'_1 \\ k_3 \equiv q_1 + q_3 - q'_2 + q'_3 - 1 \end{array} \right. \pmod 4, \qquad \left| \begin{array}{l} k'_1 \equiv q'_1 + q'_3 \\ k'_2 \equiv q'_1 + q'_2 + q'_3 \\ k'_3 \equiv q'_1 \end{array} \right. \pmod 2;$$

$$A_N^{(T_2)} = \eta e^{\frac{\pi i E}{4}} \qquad \text{avec} \qquad E = 2q'_1 q'_2 - q'^2_3 + 4q'_1 - 2q'_3;$$

$$\theta_N(\delta_{T_2} x) = A_N^{(T_2)} \theta_{N_{T_2}}^{(\mathfrak{T}_2)}(x).$$

Transformation Θ.

La substitution $\mathfrak{T}h$ est (*th.*, p. 39)

$$v' = \frac{1}{v}, \qquad u' = \frac{\lambda^2 u}{v}.$$

Les fonctions $\vartheta^{(\mathfrak{T}h)}$, $\mathfrak{H}^{(\mathfrak{T}h)}$ ont pour modules

$$\tau'_{11} = \frac{\lambda^2 - \lambda}{3v^2}(\lambda^2 u^2 + 2v), \qquad \tau'_{12} = \frac{\lambda u}{v},$$

$$\tau'_{13} = \frac{\lambda^2 - \lambda}{3v^2}(u^2 - v), \qquad \tau'_{22} = -\lambda^2,$$

$$\tau'_{33} = \frac{\lambda^2 - \lambda}{3v^2}(\lambda u^2 + 2v), \qquad \tau'_{32} = \frac{\lambda^2 u}{v}.$$

Des trois transformations provenant de la substitution $\mathfrak{T}h$, l'une est dans le cas $\alpha' \neq 0$, $|\alpha'| = 0$; les deux autres dans le cas $|\alpha'| \neq 0$. C'est la première que je désigne par Θ. On obtient ses coefficients en partant de

$$v' = \frac{-\lambda}{-\lambda v}, \qquad u' = \frac{-u}{-\lambda v}.$$

On trouve

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Il en résulte

$$\mu_{(\Theta)} = \rho,$$

$$\delta_{(\Theta)} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2-\lambda}{3}(\lambda u^2 + 2\rho) & 0 & \frac{\lambda^2-\lambda}{3}(-u^2+\rho) \\ \lambda^2 u & -1 & -\lambda u \\ \frac{\lambda^2-\lambda}{3}(\lambda^2 u^2 - \rho) & 0 & \frac{\lambda^2-\lambda}{3}(-\lambda u^2+\rho) \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{(\Theta)} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2-\lambda}{3}(\lambda u^2 + 2\rho) & 0 & \frac{\lambda^2-\lambda}{3}(-u^2+\rho) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda^2-\lambda}{3}(-u^2+\rho) & 0 & \frac{\lambda^2-\lambda}{3}(\lambda^2 u^2+2\rho) \end{bmatrix};$$

$$\left|\begin{array}{l} k_1 \equiv q'_1 - q'_3 \\ k_2 \equiv -q_2 \\ k_3 \equiv q'_3 \end{array}\right. \pmod 4, \qquad \left|\begin{array}{l} k'_1 \equiv q_1 \\ k'_2 \equiv q'_2 \\ k'_3 \equiv q_1 + q_3 \end{array}\right. \pmod 2;$$

$$A_N^{(\Theta)} = -\eta e^{\frac{\pi i E}{4}} \qquad \text{avec} \qquad E = 2(q_1 q'_1 + q_3 q'_3);$$

$$\theta_N(\delta_{(\Theta)} x) = \frac{A_N^{(\Theta)}}{\rho} e^{-\pi i \varphi_{(\Theta)} x^2} \theta_{N_{(\Theta)}}^{(\overline{\mathcal{C}}h)}(x).$$

Dans le Tableau suivant, j'ai posé

$$j_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \qquad j_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Comme je l'ai dit, la transformation I a 3 pour période. En dehors de la fonction impaire 1 qu'elle transforme en elle-même, on peut vérifier sur le Tableau qu'elle divise les autres fonctions en cycles de 3, et que le produit des trois multiplicateurs est toujours l'unité. Les trois autres transformations n'ont que 6 pour période, comme les substitutions d'où elles proviennent. Le Tableau montre qu'elles partagent les fonctions en cycles de 1, 3 ou 6 fonctions. Dans le cas d'un cycle de 3, le produit des multiplicateurs est $+1$ ou -1; dans le cas d'un cycle de 6, il est toujours égal à $+1$. C'est le produit des trois multiplicateurs que j'ai inscrit au-dessous des lettres P, quand la fonction appartient à un cycle de 3. Quand je n'ai rien inscrit, c'est, ou bien

que la fonction est transformée en elle-même, ou bien qu'elle appartient à un cycle de 6. Ce dernier cas ne se présente qu'avec la transformation Θ.

TABLEAU DES CARACTÉRISTIQUES DANS LES QUATRE TRANSFORMATIONS FONDAMENTALES.

N.	q_1.	q_2.	q_3.	q'_1.	q'_2.	q'_3.	N_I.	$A_N^{(I)}$.	N_{T_1}.	$A_N^{(T_1)}$.	$P_N^{(T_1)}$.	N_{T_2}.	$A_N^{(T_2)}$.	$P_N^{(T_2)}$.	N_Θ.	$A_N^{(\Theta)}$.	$P_N^{(\Theta)}$.
								Fonctions impaires.									
1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1		1	1		1	1	
2	1	0	0	1	0	0	11	$-j_2$	9	1	-1	4	1	-1	17	$-i$	
3	0	0	1	0	0	1	12	j_2	25	-1	-1	21	$-j_1$	1	5	$-i$	
4	0	1	0	1	1	1	13	1	22	1	1	8	j_2	-1	28	1	
5	1	0	1	0	0	1	14	j_2	2	-1	-1	23	$-j_1$	1	25	i	
6	1	1	0	0	1	1	15	-1	24	1	1	18	$-j_1$	-1	15	-1	1
7	0	1	1	0	0	1	16	$-i$	26	-1	-1	24	$-j_1$	-1	11	$-i$	
8	0	0	1	0	1	1	17	j_2	21	-1	-1	2	$-j_1$	-1	27	$-i$	
9	0	0	1	1	0	1	18	j_2	5	1	-1	7	j_1	-1	3	$-i$	
10	1	1	0	0	1	0	19	1	28	1	1	28	1	1	4	1	
11	1	1	1	0	0	1	20	$-i$	18	-1	-1	13	$-j_1$	-1	26	i	
12	1	1	0	1	0	1	21	$-i$	7	1	-1	3	j_1	1	14	$-i$	
13	0	1	0	1	1	0	22	1	4	1	1	17	$-i$	-1	10	1	
14	0	1	1	1	0	1	23	$-i$	11	1	-1	5	j_1	1	7	$-i$	
15	1	1	1	1	1	1	24	-1	6	-1	1	27	$-j_2$	-1	24	-1	1
16	1	0	0	1	1	1	25	j_2	8	1	-1	6	j_2	-1	20	$-i$	
17	1	0	0	1	0	1	26	j_2	3	1	-1	11	j_1	-1	9	$-i$	
18	1	1	0	1	0	0	27	i	14	1	-1	16	1	-1	12	$-i$	
19	1	1	1	0	1	0	28	1	10	1	1	10	1	1	13	1	
20	0	0	1	1	1	1	2	j_2	27	1	-1	22	j_2	-1	8	$-i$	
21	1	0	1	1	1	0	3	$-j_2$	16	1	-1	12	i	1	23	$-i$	
22	0	1	0	0	1	1	4	1	13	1	1	26	$-j_1$	-1	19	1	
23	1	0	0	1	1	0	5	$-j_2$	20	1	-1	14	i	1	16	$-i$	
24	0	1	1	1	1	0	6	1	15	-1	1	9	$-i$	-1	6	1	1
25	1	0	1	1	0	0	7	$-j_2$	17	1	-1	15	-1	-1	2	$-i$	
26	1	1	1	1	0	0	8	i	12	1	-1	20	1	-1	18	$-i$	
27	1	0	1	0	1	1	9	j_2	23	-1	-1	25	$-j_1$	-1	21	i	
28	0	1	1	0	1	0	10	1	19	1	1	19	1	1	22	1	
								Fonctions paires.									
1	0	0	0	0	0	0	13	$-j_2$	1	1		7	1	1	1	-1	
2	1	0	0	0	0	0	14	$-j_2$	3	1	1	2	1		6	-1	
3	0	0	1	0	0	0	15	$-j_2$	7	1	1	1	1	1	5	-1	
4	0	0	0	1	0	0	16	$-j_2$	6	1	1	12	-1	1	2	-1	
5	0	0	0	0	0	1	17	$-j_2$	4	1	1	29	j_1	-1	7	-1	
6	0	0	0	1	0	1	18	$-j_2$	5	1	1	20	j_1	1	3	-1	

N.	q_1.	q_2.	q_3.	q'_1.	q'_2.	q'_3.	N_I.	$A_N^{(I)}$.	N_{T_1}.	$A_N^{(T_1)}$.	$P_N^{(T_1)}$.	N_{T_2}.	$A_N^{(T_2)}$.	$P_N^{(T_2)}$.	N_Θ.	$A_N^{(\Theta)}$.	$P_N^{(\Theta)}$.
								Fonctions paires (suite).									
7	1	0	1	0	0	0	19	$-j_2$	2	1	1	3	1	1	4	-1	
8	0	0	1	1	0	0	20	$-j_2$	10	-1	1	11	-1	1	9	-1	-1
9	1	0	0	0	0	1	21	j_2	8	1	1	33	j_1	-1	10	1	-1
10	1	0	1	1	0	1	22	j_2	9	-1	1	16	$-j_1$	1	8	1	-1
11	1	1	0	1	1	1	23	-1	35	1	-1	30	$-j_2$	1	12	i	
12	0	1	1	1	1	1	24	-1	36	1	-1	34	$-j_2$	1	35	i	
13	0	1	0	0	0	0	25	i	13	1		19	1	1	13	-1	
14	1	1	1	0	0	0	26	i	15	1	1	14	1		18	-1	
15	1	1	0	0	0	0	27	i	19	1	1	13	1	1	17	-1	
16	0	1	0	0	0	1	28	i	18	1	1	24	$-j_1$	1	14	-1	
17	0	1	0	1	0	1	29	i	16	1	1	5	j_1	-1	19	-1	
18	0	1	0	1	0	0	30	i	17	1	1	32	-1	1	15	-1	
19	0	1	1	0	0	0	31	i	14	1	1	15	1	1	16	-1	
20	1	1	0	0	0	1	32	$-i$	22	1	1	23	$-j_1$	1	21	1	-1
21	1	1	1	1	0	1	33	$-i$	20	-1	1	9	$-j_1$	-1	22	1	-1
22	0	1	1	1	0	0	34	i	21	-1	1	28	1	1	20	-1	-1
23	1	1	1	1	1	0	35	1	11	1	-1	6	i	1	24	i	
24	1	1	0	1	1	0	36	1	12	1	-1	10	$-i$	1	11	i	
25	0	0	0	0	1	0	1	$-j_2$	25	1		31	1	1	25	-1	
26	0	0	1	0	1	0	2	$-j_2$	27	1	1	26	1		30	-1	
27	1	0	1	0	1	0	3	$-j_2$	31	1	1	25	1	1	29	-1	
28	0	0	0	1	1	1	4	$-j_2$	30	1	1	36	$-j_2$	1	26	-1	
29	0	0	0	1	1	0	5	$-j_2$	28	1	1	17	i	-1	31	-1	
30	0	0	0	0	1	1	6	$-j_2$	29	1	1	8	j_1	1	27	-1	
31	1	0	0	0	1	0	7	$-j_2$	26	1	1	27	1	1	28	-1	
32	1	0	1	1	1	1	8	j_2	34	-1	1	35	j_2	1	33	1	-1
33	0	0	1	1	1	0	9	$-j_2$	32	-1	1	21	$-i$	-1	34	-1	-1
34	1	0	0	0	1	1	10	j_2	33	1	1	4	j_1	1	32	1	-1
35	0	1	1	0	1	1	11	-1	23	-1	-1	18	$-j_1$	1	36	i	
36	1	1	1	0	1	1	12	-1	24	-1	-1	22	$-j_1$	1	23	$-i$	

Formule d'une transformation composée.

Soient deux transformations linéaires S_i et S_j, et soit S_iS_j celle qui consiste à effectuer à la suite, d'abord S_i, puis S_j. Si Δ_i est la matrice des coefficients α, α', β, β' de S_i, et Δ_j celle de S_j, on sait que celle de S_iS_j est $\Delta_i\Delta_j$ (en convenant de former l'élément de la $m^{\text{ième}}$ ligne et de la $n^{\text{ième}}$ colonne du produit en combinant les éléments de la $m^{\text{ième}}$ ligne de la matrice de gauche avec ceux de la $n^{\text{ième}}$ colonne de la matrice de droite). Si donc on connaît les matrices des coefficients de

deux transformations, il est facile de calculer directement la transformation qui résulte de leur composition. Une autre manière de procéder est la suivante : connaissant les expressions des matrices α, α', β, β' de la transformation composée en fonction des matrices analogues relatives aux transformations composantes, on peut s'en servir pour obtenir en fonction des coefficients de ces dernières toutes les quantités telles que δ, φ, k, k', E, ..., qui caractérisent la transformation composée. Enfin, et c'est ce que je me propose ici, une fois calculées pour deux transformations, les quantités N_S, $A_N^{(S)}$, μ_S, δ_S, φ_S, qui, avec les nouvelles périodes, figurent seules dans la formule de transformation, on peut en déduire, sans passer par l'intermédiaire des coefficients, les quantités analogues relatives à la transformation composée.

Soient s_i et s_j les substitutions auxquelles correspondent les deux transformations S_i et S_j; en se servant des mêmes notations que plus haut, les formules de ces transformations peuvent s'écrire

$$(1)\qquad \theta_N(\delta_{S_i}x) = \frac{A_N^{(S_i)}}{\mu_{S_i}} e^{-\pi i \varphi_{S_i} x^2} \theta_{N_{S_i}}^{(S_i)}(x),$$

$$(2)\qquad \theta_N(\delta_{S_j}x) = \frac{A_N^{(S_j)}}{\mu_{S_j}} e^{-\pi i \varphi_{S_j} x^2} \theta_{N_{S_j}}^{(S_j)}(x).$$

Ces formules valent, quels que soient les arguments x et quels que soient les modules τ. Désignons par $(\delta_{S_j})_{s_i}$ la matrice obtenue en effectuant sur u et v la substitution s_i dans la matrice δ_{S_j} et remplaçons dans l'équation (1) les arguments x par $(\delta_{S_j})_{s_i}x$; nous aurons

$$\theta_N[\delta_{S_i}(\delta_{S_j})_{s_i}x] = \frac{A_N^{(S_i)}}{\mu_{S_i}} e^{-\pi i \varphi_{S_i}[(\delta_{S_j})_{s_i}x]^2} \theta_{N_{S_i}}^{(S_i)}[(\delta_{S_j})_{s_i}x].$$

Mais, d'une manière générale, si a et b sont deux matrices à p^2 éléments, si a est symétrique et si $\overline{b}$ est la transformée de b, enfin si x est une lettre multiple à p éléments, on a

$$a(bx)^2 = babx^2.$$

On peut donc écrire

$$(3)\qquad \theta_N[\delta_{S_i}(\delta_{S_j})_{s_i}x] = \frac{A_N^{(S_i)}}{\mu_{S_i}} e^{-\pi i (\overline{\delta}_{S_j})_{s_i}\varphi_{S_i}(\delta_{S_j})_{s_i}x^2} \theta_{N_{S_i}}^{(S_i)}[(\delta_{S_j})_{s_i}x].$$

D'autre part, appliquons la formule (2) en prenant pour fonction initiale $\theta_{N_{s_i}}^{(S_i)}$; u et v devront partout être remplacés par les expressions linéaires que s_i substitue à ces quantités; si de plus nous désignons par $N_{s_i s_j}$ la transformée de la caractéristique N_{s_i} par la transformation S_j, nous aurons

$$\theta_{N_{s_i}}^{(S_i)}[(\delta_{s_j})_{s_j} x] = \frac{A_{N_{s_i}}^{(S_j)}}{(\mu_{s_j})_{s_i}} e^{-\pi i(\varphi_{s_j})_{s_i} x^2} \theta_{N_{s_i s_j}}^{(S_j S_i)}(x). \tag{4}$$

En éliminant entre (3) et (4) la fonction intermédiaire, il vient

$$\theta_N[\delta_{s_i}(\delta_{s_j})_{s_i} x] = \frac{A_N^{(S_i)} A_{N_{s_i}}^{(S_j)}}{\mu_{s_i}(\mu_{s_j})_{s_i}} e^{-\pi i[(\bar{\delta}_{s_j})_{s_i}\varphi_{s_i}(\delta_{s_j})_{s_i} + (\varphi_{s_j})_{s_i}]} x^2 \theta_{N_{s_i s_j}}^{(S_j S_i)}(x).$$

Telle est la formule de la transformation $S_i S_j$; on voit qu'elle correspond à la substitution $s_j s_i$.

On peut manifestement généraliser ces résultats

La transformation

$$S = S_1 S_2 \ldots S_{\alpha-1} S_\alpha$$

correspond à la substitution

$$s = s_\alpha s_{\alpha-1} \ldots s_2 s_1,$$

et a pour formule

$$\theta_N(\delta_S x) = \frac{A_N^{(S)}}{\mu_S} e^{-\pi i \varphi_S x^2} \theta_{N_S}^{(S)}(x),$$

avec

$$N_S = N_{s_1 s_2 \ldots s_\alpha},$$

$$A_N^{(S)} = A_N^{(S_1)} A_{N_{s_1}}^{(S_2)} A_{N_{s_1 s_2}}^{(S_3)} \ldots A_{N_{s_1 s_2 \ldots s_{\alpha-1}}}^{(S_\alpha)},$$

$$\mu_S = \mu_{s_1}(\mu_{s_2})_{s_1}(\mu_{s_3})_{s_2 s_1} \ldots (\mu_{s_\alpha})_{s_{\alpha-1} \ldots s_2 s_1},$$

$$\delta_S = \delta_{s_1}(\delta_{s_2})_{s_1}(\delta_{s_3})_{s_2 s_1} \ldots (\delta_{s_\alpha})_{s_{\alpha-1} \ldots s_2 s_1},$$

$$\begin{aligned}
\varphi_S = {} & (\bar{\delta}_{s_\alpha})_{s_{\alpha-1} \ldots s_2 s_1}(\bar{\delta}_{s_{\alpha-1}})_{s_{\alpha-2} \ldots s_2 s_1} \ldots (\bar{\delta}_{s_2})_{s_1}\varphi_{s_1}(\delta_{s_2})_{s_1} \ldots (\delta_{s_{\alpha-1}})_{s_{\alpha-2} \ldots s_2 s_1}(\delta_{s_\alpha})_{s_{\alpha-1} \ldots s_2 s_1} \\
& + (\bar{\delta}_{s_\alpha})_{s_{\alpha-1} \ldots s_2 s_1} \ldots (\bar{\delta}_{s_3})_{s_2 s_1}(\varphi_{s_2})_{s_1}(\delta_{s_3})_{s_2 s_1} \ldots (\delta_{s_\alpha})_{s_{\alpha-1} \ldots s_2 s_1} \\
& + (\bar{\delta}_{s_\alpha})_{s_{\alpha-1} \ldots s_2 s_1} \ldots (\bar{\delta}_{s_4})_{s_3 s_2 s_1}(\varphi_{s_3})_{s_2 s_1}(\delta_{s_4})_{s_3 s_2 s_1} \ldots (\delta_{s_\alpha})_{s_{\alpha-1} \ldots s_2 s_1} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (\bar{\delta}_{s_\alpha})_{s_{\alpha-1} \ldots s_2 s_1}(\varphi_{s_{\alpha-1}})_{s_{\alpha-2} \ldots s_2 s_1}(\delta_{s_\alpha})_{s_{\alpha-1} \ldots s_2 s_1} \\
& + (\varphi_{s_\alpha})_{s_{\alpha-1} \ldots s_2 s_1}.
\end{aligned}$$

Applications.

Les deux quantités qui dépendent de N

$$N_S = N_{S_1 S_2 \ldots S_\alpha}, \qquad A_N^{(S)} = A_N^{(S_1)} A_{N_{S_1}}^{(S_2)} \ldots A_{N_{S_1 S_2 \ldots S_{\alpha-1}}}^{(S_\alpha)},$$

sont d'un calcul facile, si l'on suppose dressé un Tableau des caractéristiques relatif à chacune des transformations $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha$. Il se présente encore des simplifications si les transformations composantes sont des transformations fondamentales. Le Tableau est alors celui que j'ai donné plus haut, et il suffit de se reporter aux remarques dont je l'ai fait précéder pour voir qu'on pourra négliger, non seulement I^3, mais aussi T_1^3 et T_2^3, et quelquefois Θ^3, à la seule condition de tenir compte du facteur $+1$ ou -1 inscrit au-dessous de la lettre P correspondante.

Considérons en particulier les transformations fondamentales du groupe que j'ai appelé S. En se servant de mes notations actuelles, les expressions des substitutions correspondantes au moyen des trois substitutions fondamentales du groupe $\mathfrak{T}$ sont (*th.*, p. 39-43)

$$\begin{array}{lll} S_1 = \mathfrak{T}_1^2, & S_2 = \mathfrak{T}_2^2, & S_3 = \mathfrak{T}_1^5 \mathfrak{T}_2^2 \mathfrak{T}_1, \\ S_4 = (\mathfrak{T} h \mathfrak{T}_2^5 \mathfrak{T}_1^4 \mathfrak{T}_2^5)^2, & S_5 = (\mathfrak{T}_2^5 \mathfrak{T} h \mathfrak{T}_2^5 \mathfrak{T}_1^4)^2, & S_6 = (\mathfrak{T}_1^5 \mathfrak{T}_2^5 \mathfrak{T} h \mathfrak{T}_2^5 \mathfrak{T}_1^5)^2. \end{array}$$

On a donc pour les transformations elles-mêmes

$$\begin{array}{lll} S_1 = T_1^2, & S_2 = T_2^2, & S_3 = T_1 T_2^2 T_1^5, \\ S_4 = (T_2^5 T_1^4 T_2^5 \Theta)^2, & S_5 = (T_1^4 T_2^5 \Theta T_2^5)^2, & S_6 = (T_1^5 T_2^5 \Theta T_2^5 T_1^5)^2. \end{array}$$

Les transformations que j'appelais S_i'' et S_i''' peuvent s'écrire au choix IS_i ou $S_i I$, $I^2 S_i$ ou $S_i I^2$, car la transformation I, qui correspond à la substitution identique, est manifestement échangeable avec chacune des autres. Grâce à ces formules et au Tableau des caractéristiques, on pourra sans peine retrouver chacun des résultats que j'ai calculés directement et réunis en tableaux dans ma Thèse, pages 135-158 [1].

---

[1] Pour quelques-unes des transformations, on trouvera les multiplicateurs des fonctions impaires changés de signe (Cf. *th.*, p. 106, notes).

Le calcul de μ_S par la formule

$$\mu_S = \mu_{s_1}(\mu_{s_2})_{s_1}\ldots(\mu_{s_\alpha})_{s_{\alpha-1}\ldots s_2 s_1}$$

ne présente aucune difficulté. On sait que μ_S est le dénominateur de la substitution s, mais ceci, même en supposant u' et v' réduits au plus petit dénominateur commun, ne détermine μ_S qu'à une racine sixième de l'unité près; en effet, λ est la seconde unité principale de nos quantités complexes, et de plus, nous avons vu qu'on pouvait changer les signes de tous les coefficients. Une fois cette racine sixième choisie arbitrairement dans $\mu_{s_1}, \mu_{s_2}, \ldots, \mu_{s_\alpha}$, la valeur de μ_S se trouve elle-même complètement déterminée, ou bien par la formule précédente, ou bien comme le dénominateur de la substitution composée s quand on a pris $\mu_{s_1}, \ldots, \mu_{s_\alpha}$ respectivement pour dénominateurs de $s_1, \ldots, s_\alpha$.

Si l'on n'avait à considérer que les fonctions paires à arguments nuls, tout le calcul de la transformation S se réduirait à celui des trois quantités N_S, $A_N^{(S)}$, μ_S et la méthode serait vraiment avantageuse. Elle le sera d'ailleurs, dans le cas général, pour le calcul de ces trois quantités, mais on aura ensuite avantage à passer à la méthode directe pour δ_S et φ_S, dont le calcul par la méthode actuelle est souvent beaucoup plus compliqué, bien qu'il se présente une simplification très notable, provenant de ce que δ_{T_1} et δ_{T_2} sont indépendants de u et de v, et de ce que $\varphi_{T_1} = \varphi_{T_2} = 0$. On voit que si la transformation Θ n'entre pas dans la composition de S, le calcul de δ_S et de φ_S sera facile, même par la méthode actuelle.

Si l'on applique la formule aux six transformations $S_1, S_2, \ldots, S_6$, on a d'abord immédiatement

$$\delta_{S_1} = \delta^2_{T_1}, \qquad \delta_{S_2} = \delta^2_{T_2}, \qquad \delta_{S_3} = \delta_{T_1}\delta^2_{T_2}\delta^2_{T_1}, \qquad \varphi_{S_1} = \varphi_{S_2} = \varphi_{S_3} = 0.$$

Puis en posant, pour $i = 4, 5, 6$,

$$s_i = \mathfrak{T}_i^2, \qquad \text{d'où} \qquad S_i = T_i^2,$$

il vient

$$\delta_{S_i} = \delta_{T_i}(\delta_{T_i})_{\mathfrak{T}_i}, \qquad \varphi_{S_i} = (\bar{\delta}_{T_i})_{\mathfrak{T}_i}\varphi_{T_i}(\delta_{T_i})_{\mathfrak{T}_i} + (\varphi_{T_i})_{\mathfrak{T}_i},$$

avec

$$\delta_{T_4} = \delta_{T_2^2}\delta_{T_1^4}\delta_{T_2^2}(\delta_\Theta)_{\mathfrak{T}_2^2\mathfrak{T}_1^4\mathfrak{T}_2^2}, \qquad \varphi_{T_4} = (\varphi_\Theta)_{\mathfrak{T}_2^2\mathfrak{T}_1^4\mathfrak{T}_2^2},$$

$$\delta_{T_5} = \delta_{T_1^4}\delta_{T_2^2}(\delta_\Theta)_{\mathfrak{T}_2^2\mathfrak{T}_1^4}\delta_{T_2^2}, \qquad \varphi_{T_5} = \bar{\delta}_{T_2^2}(\varphi_\Theta)_{\mathfrak{T}_2^2\mathfrak{T}_1^4}\delta_{T_2^2},$$

$$\delta_{T_6} = \delta_{T_1^4}\delta_{T_2^2}(\delta_\Theta)_{\mathfrak{T}_2^2\mathfrak{T}_1^4}\delta_{T_2^2}\delta_{T_1^4}, \qquad \varphi_{T_6} = \delta_{T_1^4}\bar{\delta}_{T_2^2}(\varphi_\Theta)_{\mathfrak{T}_2^2\mathfrak{T}_1^4}\delta_{T_2^2}\delta_{T_1^4}.$$

On facilitera le calcul en écrivant les deux substitutions qui figurent dans le calcul de S_4,

$$\mathfrak{T}_2^5\mathfrak{T}_1^4\mathfrak{T}_2^5[v, u; \lambda - \lambda^2 + v, \lambda^2 u], \qquad \mathfrak{T}_4\left[v, u; \frac{1}{\lambda - \lambda^2 + v}, \frac{\lambda u}{\lambda - \lambda^2 + v}\right],$$

sous la forme

$$\mathfrak{T}_2^5\mathfrak{T}_1^4\mathfrak{T}_2^5[v, u; \mu, \lambda^2 u], \qquad \mathfrak{T}_4\left[v, u, \mu; \frac{1}{\mu}, \frac{\lambda u}{\mu}, \lambda - \lambda^2 + \frac{1}{\mu}\right],$$

avec

$$\mu = \mu_{T_4} = \lambda - \lambda^2 + v.$$

De même les deux substitutions qui figurent dans le calcul de S_5,

$$\mathfrak{T}_2^5\mathfrak{T}_1^4[v, u; \lambda + v + \lambda u, \lambda^2 - u], \qquad \mathfrak{T}_5\left[v, u; \frac{v}{1 + \lambda^2 v + u}, \frac{\lambda v - \lambda u}{1 + \lambda^2 v + u}\right],$$

sous la forme

$$\mathfrak{T}_2^5\mathfrak{T}_1^4[v, u; \lambda\mu, -w], \qquad \mathfrak{T}_5\left[v, w, \mu; \frac{v}{\mu}, \frac{w}{\mu}, 1 - \lambda + \frac{\lambda}{\mu}\right],$$

avec

$$w = u - \lambda^2, \qquad \mu = \mu_{T_5} = 1 + \lambda^2 v + u = -\lambda + \lambda^2 v + w,$$

et enfin les deux substitutions qui figurent dans le calcul de S_6,

$$\mathfrak{T}_2^5\mathfrak{T}_1^5[v, u; \lambda + v - \lambda^2 u, \lambda^2 + \lambda u], \qquad \mathfrak{T}_6\left[v, u; \frac{v}{1 + \lambda^2 v - \lambda u}, \frac{-v - \lambda u}{1 + \lambda^2 v - \lambda u}\right],$$

sous la forme

$$\mathfrak{T}_2^5\mathfrak{T}_1^5[v, u; \lambda\mu, \lambda w], \qquad \mathfrak{T}_6\left[v, w, \mu; \frac{v}{\mu}, \frac{w}{\mu}, 1 - \lambda + \frac{\lambda}{\mu}\right],$$

avec

$$w = \lambda + u, \qquad \mu = \mu_{T_6} = 1 + \lambda^2 v - \lambda u = -\lambda + \lambda^2 v - \lambda w.$$

Après avoir éliminé v au moyen de μ, si l'on sait que le produit de deux matrices a ses éléments entiers en u et v, on pourra négliger tous les termes du produit qui contiendraient μ en dénominateur. Ceci se produira d'abord pour $\delta_{S_i} = \delta_{T_i}(\delta_{T_i})_{\mathfrak{T}_i}$, car si α, α', β, β' sont les coefficients de la transformation S_i, on a $\delta_{S_i} = \alpha + \tau\alpha'$, matrice entière en u et v. C'est aussi le cas pour $\varphi_{T_i}(\delta_{T_i})_{\mathfrak{T}_i}$ ou sa transposée $(\overline{\delta_{T_i}})_{\mathfrak{T}_i}\varphi_{T_i}$; car α, α', β, β' étant maintenant les coefficients de T_i, et τ' étant le résultat

obtenu en effectuant sur u et v dans τ la substitution $\mathfrak{T}_i$, on a

$$\varphi_{T_i}(\delta_{T_i})\mathfrak{T}_i = \overline{\alpha}'(\alpha+\tau\alpha')(\alpha+\tau'\alpha') = \overline{\alpha}'(\alpha+\tau\alpha')\alpha + \overline{\alpha}'(\alpha+\tau\alpha')\tau'\alpha',$$

et, en appliquant l'identité fondamentale

$$(\alpha+\tau\alpha')\tau' = \beta+\tau\beta',$$

on peut écrire

$$\varphi_{T_i}(\delta_{T_i})\mathfrak{T}_i = \overline{\alpha}'(\alpha+\tau\alpha')\alpha + \overline{\alpha}'(\beta+\tau\beta')\alpha';$$

ce qui met bien la propriété en évidence.

Ainsi, dans le cas de S_5, un calcul facile donnera d'abord $\left(\text{en posant, pour abréger } k = \frac{\lambda^2-\lambda}{3} = -\frac{i}{\sqrt{3}}\right)$

$$\delta_{T_5} = \begin{bmatrix} \lambda\varpi - k\lambda\mu + k\varpi^2 & -1+\lambda^2\varpi + 2k\lambda\mu + k\lambda\varpi^2 & -\varpi + k\lambda\mu - k\lambda^2\varpi^2 \\ \lambda\varpi & -1+\lambda^2\varpi & -\varpi \\ -\lambda\varpi - k\lambda\mu + k\lambda\varpi^2 & 1-\lambda^2\varpi - k\lambda\mu + k\lambda^2\varpi^2 & \varpi - 2k\lambda\mu - k\varpi^2 \end{bmatrix},$$

$$(\delta_{T_5})\mathfrak{T}_5 = \begin{bmatrix} -1+\frac{\lambda\varpi - k\lambda^2}{\mu} + \frac{k\varpi^2}{\mu^2} & 1+\frac{\lambda^2\varpi + 2k\lambda^2}{\mu} + \frac{k\lambda\varpi^2}{\mu^2} & 1-\frac{\varpi - k\lambda^2}{\mu} - \frac{k\lambda^2\varpi^2}{\mu^2} \\ \frac{\lambda\varpi}{\mu} & -1+\frac{\lambda^2 u}{\mu} & -\frac{\varpi}{\mu} \\ -1-\frac{\lambda\varpi + k\lambda^2}{\mu} + \frac{k\lambda\varpi^2}{\mu^2} & -\frac{\lambda^2\varpi + k\lambda^2}{\mu} + \frac{k\lambda^2\varpi}{\mu^2} & -2+\frac{\varpi - 2k\lambda^2}{\mu} - \frac{k\varpi^2}{\mu^2} \end{bmatrix};$$

puis, sachant que le produit est entier, on aura sans peine

$$= \begin{bmatrix} (1-\lambda)\varpi + \lambda\varpi^2 & (\lambda^2-1)\mu + 2 + (\lambda-\lambda^2)\varpi + \lambda^2\varpi^2 & (\lambda^2-1)\mu + 1 + (1-\lambda^2)\varpi - \varpi^2 \\ (1-\lambda)\varpi & 1+(\lambda-\lambda^2)\varpi & (1-\lambda^2)\varpi \\ (1-\lambda^2)\mu - 1 + (\lambda-1)\varpi + \lambda^2\varpi^2 & -1+(\lambda-\lambda^2)\varpi + \varpi^2 & (1-\lambda^2)\mu - 1 + (\lambda^2-1)\varpi - \lambda\varpi^2 \end{bmatrix}$$

D'une manière toute semblable, on trouvera

$$(\overline{\delta}_{T_5})_{\mathfrak{T}_5}\varphi_{T_5} = \begin{bmatrix} -h+\varpi^2 & \lambda\varpi^2 & -h-\lambda^2\varpi^2 \\ h+\lambda\varpi^2 & -h+\lambda^2\varpi^2 & -\varpi^2 \\ -\lambda^2\varpi^2 & -h-\varpi^2 & -h+\lambda\varpi^2 \end{bmatrix},$$

où j'ai posé

$$h = \mu_{S_5} = (1-\lambda^2)\mu - 1.$$

Puis, en introduisant h, on écrira

$$(\delta_{T_5})_{\mathfrak{T}_5}=\begin{bmatrix} \frac{k}{\mu}\left[\lambda^2 h+(\lambda^2-1)w+\frac{w^2}{\mu}\right] & \frac{k}{\mu}\left[h+(1-\lambda^2)v+\frac{\lambda w^2}{\mu}\right] & \frac{k}{\mu}\left[-\lambda^2 h+(\lambda^2-\lambda)w-\frac{\lambda^2 w^2}{\mu}\right] \\ \frac{\lambda w}{\mu} & -1+\frac{\lambda^2 w}{\mu} & -\frac{w}{\mu} \\ \frac{k}{\mu}\left[\lambda^2 h+(1-\lambda^2)w+\frac{\lambda w^2}{\mu}\right] & \frac{k}{\mu}\left[\lambda h+(\lambda^2-1)v+\frac{\lambda^2 w^2}{\mu}\right] & \frac{k}{\mu}\left[2\lambda^2 h+(\lambda-\lambda^2)w-\frac{w^2}{\mu}\right] \end{bmatrix}.$$

Soient d_{ij}, $d'_{i,j}$, D_{ij} les éléments respectivement de $(\overline{\delta_{T_5}})_{\mathfrak{T}_5}\varphi_{T_5}(\delta_{T_5})_{\mathfrak{T}_5}$, de $(\varphi_{T_5})_{\mathfrak{T}_5}$ et de φ_{S_5}, de sorte que

$$D_{ij}=d_{ij}+d'_{ij};$$

on trouvera

$$\begin{aligned}
d_{11} &= k\left(-\frac{2\lambda^2 h^2}{\mu}+\frac{\lambda^2 h w^2}{\mu^2}\right)-\frac{h w^2}{\mu},\\
d_{12}=d_{21} &= k\left(\frac{\lambda^2 h^2}{\mu}+\frac{h w^2}{\mu^2}\right)+(1-\lambda)w^2+\frac{\lambda w^2}{\mu},\\
d_{13}=d_{31} &= -k\left(\frac{\lambda^2 h^2}{\mu}+\frac{\lambda h w^2}{\mu^2}\right)+\frac{\lambda^2 h w^2}{\mu},\\
d_{22} &= k\left(\frac{h^2}{\mu}+\frac{\lambda h w^2}{\mu^2}\right)+(\lambda-\lambda^2)(w^2-\lambda h)+\frac{\lambda^2(w^2-\lambda h)}{\mu}\\
d_{33} &= k\left(-\frac{2\lambda^2 h^2}{\mu}+\frac{h w^2}{\mu^2}\right)-\frac{\lambda h w^2}{\mu},\\
d_{23}=d_{32} &= -k\left(\frac{\lambda^2 h^2}{\mu}+\frac{\lambda^2 h w^2}{\mu^2}\right)+\frac{h w^2}{\mu},\\
d'_{11} &= 2+k\left(\frac{2\lambda^2}{\mu}+\frac{\lambda^2 w^2}{\mu^2}\right),\\
d'_{12}=d'_{21} &= -1+k\left(-\frac{\lambda^2}{\mu}+\frac{w^2}{\mu^2}\right),\\
d'_{13}=d'_{31} &= 1+k\left(\frac{\lambda^2}{\mu}-\frac{\lambda w^2}{\mu^2}\right),\\
d'_{22} &= 2+k\left(\frac{2\lambda^2}{\mu}+\frac{\lambda w^2}{\mu^2}\right),\\
d'_{33} &= 2+k\left(\frac{2\lambda^2}{\mu}+\frac{w^2}{\mu^2}\right),\\
d'_{23}=d'_{32} &= 1+k\left(\frac{\lambda^2}{\mu}-\frac{\lambda^2 w^2}{\mu^2}\right).
\end{aligned}$$

Pour mettre les éléments D_{ij} sous forme entière, il suffira d'appli-

quer l'identité

$$k+1=(1-\lambda^2)\mu.$$

Ainsi, on aura

$$\begin{aligned}D_{11}&=2+k\left[\frac{2\lambda^2(1-h^2)}{\mu}+\frac{\lambda^2\varpi^2(h+1)}{\mu^2}\right]-\frac{h\varpi^2}{\mu}\\&=2h-\frac{\varpi^2(1+h)}{\mu}=2h+(\lambda^2-1)\varpi^2,\end{aligned}$$

et en continuant de même, on aura

$$\varphi_{S_5}=\begin{bmatrix}2h+(\lambda^2-1)\varpi^2 & -h+(1-\lambda)\varpi^2 & h+(\lambda^2-\lambda)\varpi^2\\ -h+(1-\lambda)\varpi^2 & 2h+(\lambda-\lambda^2)\varpi^2 & h+(1-\lambda^2)\varpi^2\\ h+(\lambda^2-\lambda)\varpi^2 & h+(1-\lambda^2)\varpi^2 & 2h+(1-\lambda)\varpi^2\end{bmatrix}.$$

En remplaçant μ, h, ϖ par leurs valeurs dans δ_{S_5} et φ_{S_5}, on retrouvera les matrices $\alpha+\tau\alpha'$ (changée de signe) et φ'_5 de ma Thèse, page 122.

Puissance d'une transformation. — Soit

$$s=\mathfrak{T}^\alpha,\qquad S=T^\alpha;$$

on aura

$$\theta_N(\delta_S x)=\frac{A_N^{(T)}A_{N_T}^{(T)}A_{N_{T^2}}^{(T)}\ldots A_{N_{T^{\alpha-1}}}^{(T)}}{\mu_T(\mu_T)_{\mathfrak{T}}(\mu_T)_{\mathfrak{T}^2}\ldots(\mu_T)_{\mathfrak{T}^{\alpha-1}}}e^{-\pi i\varphi_S x^2}\theta_{N_{T^\alpha}}^{(\mathfrak{T}^\alpha)}(x).$$

avec

$$\begin{aligned}\delta_S&=\delta_T(\delta_T)_{\mathfrak{T}}(\delta_T)_{\mathfrak{T}^2}\ldots(\delta_T)_{\mathfrak{T}^{\alpha-1}},\\ \varphi_S&=\quad(\bar\delta_T)_{\mathfrak{T}^{\alpha-1}}\ldots(\bar\delta_T)_{\mathfrak{T}}\varphi_T(\delta_T)_{\mathfrak{T}}\ldots(\delta_T)_{\mathfrak{T}^{\alpha-1}}\\ &\quad+(\bar\delta_T)_{\mathfrak{T}^{\alpha-1}}\ldots(\bar\delta_T)_{\mathfrak{T}^2}(\varphi_T)_{\mathfrak{T}}(\delta_T)_{\mathfrak{T}^2}\ldots(\delta_T)_{\mathfrak{T}^{\alpha-1}}\\ &\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad+(\bar\delta_T)_{\mathfrak{T}^{\alpha-1}}(\varphi_T)_{\mathfrak{T}^{\alpha-2}}(\delta_T)_{\mathfrak{T}^{\alpha-1}}+(\varphi_T)_{\mathfrak{T}^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

Dans le cas général, cette formule est encore très compliquée. Je ne m'en servirai que pour vérifier la périodicité des transformations fondamentales. Nous avons déjà fait cette vérification pour ce qui concerne les caractéristiques, et tout l'intérêt porte sur δ et φ. Même pour ces quantités, la vérification est très simple quand la transformation se trouve dans le cas $\alpha'=0$, car alors φ étant nul pour la transformation elle-même, est nul pour toutes ses puissances, et δ étant indépendant de u et de v, tout revient à vérifier qu'une certaine puissance de δ se

réduit à l'unité. Ainsi on vérifie que T_1 et T_2 ont 6 pour période en vérifiant que l'on a $\delta_{T_1}^6 = \delta_{T_2}^6 = 1$.

Pour Θ la vérification ne présente aussi aucune difficulté, parce que la transformation Θ^2 est dans le cas $\alpha' = 0$. Ceci peut se constater directement en faisant le carré de la matrice des coefficients de Θ; on peut le conclure aussi de ce que l'on trouve

$$\delta_{(\Theta)^2} = \delta_{(\Theta)}(\delta_{(\Theta)})_{\overline{\omega}h} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On se rend compte facilement, en effet, que la matrice $\delta = \alpha + \tau\alpha'$ d'une de nos transformations ne peut être indépendante de u et de v que si $\alpha' = 0$. Ceci posé, il suffit de calculer le cube de la matrice $\delta_{(\Theta)^2}$ pour vérifier que Θ^6 est la transformation identique.

On remarque que le fait que $\delta_{(\Theta)^2}$ est indépendant de u et de v entraîne l'identité

$$\varphi_{(\Theta)^2} = (\overline{\delta}_{(\Theta)})_{\overline{\omega}h}\varphi_{(\Theta)}(\delta_{(\Theta)})_{\overline{\omega}h} + (\varphi_{(\Theta)})_{\overline{\omega}h} = 0.$$

Quant à la transformation I, nous avons déjà vérifié que $\delta_I^3 = 1$; or, quoique δ_I dépende de u, on a $\delta_{I^3} = \delta_I^3$, puisque $\mathfrak{z}$ ne change rien. On trouve ensuite sans peine

$$\varphi_{I^2} = \overline{\delta}_I\varphi_I\delta_I + \varphi_I = \varphi_I^2,$$
$$\varphi_{I^3} = \varphi_{I^2 I} = \overline{\delta}_I\varphi_I^2\delta_I + \varphi_I = 0.$$

Transformations S″ *et* S‴. — Une application simple de la méthode actuelle est la composition de la transformation I avec les autres. Soit

$$S'' = IS.$$

Il est évident *a priori* que l'ordre de la composition est indifférent; on le vérifiera en vérifiant les identités

$$\delta_{S''} = \delta_S(\delta_I)_S = \delta_I\delta_S,$$
$$\varphi_{S''} = (\overline{\delta}_I)_S\varphi_S(\delta_I)_S + \varphi_I = \overline{\delta}_S\varphi_I\delta_S + \varphi_S.$$

Pour le calcul, les secondes formes sont préférables. On en obtient de toutes semblables pour

$$S''' = I^2S.$$

On a d'abord

$$\delta_{S'''} = \delta_{I^2}\delta_S, \qquad \varphi_{S'''} = \bar{\delta}_S\varphi_{I^2}\delta_S + \varphi_S;$$

mais en vertu des remarques faites plus haut, on peut écrire

$$\delta_{S'''} = \delta_I^2\delta_S, \qquad \varphi_{S'''} = \bar{\delta}_S\varphi_I^2\delta_S + \varphi_S,$$

et nous avons vu que δ_I^2 et φ_I^2 sont respectivement de même forme que δ_I et φ_I.

Le principal intérêt de la transformation I est qu'elle fournit des relations entre nos fonctions θ. Les considérations développées ici permettent de trouver ces relations plus directement que je ne l'ai fait dans ma Thèse.

Il résulte de la correspondance établie entre les valeurs de N et les caractéristiques que la formule de la transformation I peut s'écrire, dans le cas des fonctions paires et avec $N = 1, 2, \ldots, 12$,

$$\theta_{N+12}(x) = \frac{\lambda}{A_N^{(I)}} e^{\pi i\varphi_I x^2}\theta_N(\delta_I x);$$

dans le cas des fonctions impaires, avec $N = 2, 3, \ldots, 9$,

$$\vartheta_{N+9}(x) = \frac{\lambda}{A_N^{(I)}} e^{\pi i\varphi_I x^2}\vartheta_N(\delta_I x).$$

De même pour I^2, avec les mêmes valeurs de N,

$$\theta_{N+24}(x) = \frac{\lambda^2}{A_N^{(I)}A_{N+12}^{(I)}} e^{\pi i\varphi_I^2 x^2}\theta_N(\delta_I^2 x),$$

$$\vartheta_{N+18}(x) = \frac{\lambda^2}{A_N^{(I)}A_{N+9}^{(I)}} e^{\pi i\varphi_I^2 x^2}\vartheta_N(\delta_I^2 x).$$

Il suffit de remplacer les quantités A_N par leurs valeurs tirées du Tableau des caractéristiques (et de tenir compte de $\delta_I = -\delta$, $\delta_I^2 = \delta'$) pour retrouver les relations que j'ai données dans ma Thèse, pages 162-163.

On voit que ces relations permettent d'éliminer toutes les fonctions paires d'indice supérieur à 12, et toutes les fonctions impaires d'indice supérieur à 10; mais, s'il s'agit de faire cette élimination dans la formule d'une transformation S, il suffira d'effectuer l'une des transformations SI ou SI^2.

En effet, le Tableau des caractéristiques donne pour les fonctions paires

$$N_{I^2} = N - 12 \quad \text{avec} \quad 12 < N \leqq 24,$$
$$N_I = N - 24 \quad \text{avec} \quad 24 < N \leqq 36;$$

pour les fonctions impaires

$$N_{I^2} = N - 9 \quad \text{avec} \quad 10 < N \leqq 19,$$
$$N_I = N - 18 \quad \text{avec} \quad 19 < N \leqq 28.$$

Soit donc, avec $0 < N \leqq 12$,

$$\theta_N(\delta_S x) = \frac{A_N^{(S)}}{\mu_S} e^{-\pi i \varphi_S x^2} \theta_{N_S}^{(S)}(x).$$

Si l'on a $N_S = 12 + N_1$, avec $0 < N_1 \leqq 12$, on effectuera la transformation SI^2; en tenant compte de l'échangeabilité, on aura

$$\theta_N[\delta_I^2 \delta_S x] = \frac{A_N^{(S)} A_{N_S}^{(I)} A_{N_S+12}^{(I)}}{\mu_S \lambda_2} e^{-\pi i [\bar{\delta}_S \varphi_I^2 \delta_S + \varphi_S] x^2} \theta_{N_1}^{(S)}(x).$$

Si l'on a $N_S = 24 + N_1$, avec $0 < N_1 \leqq 12$, on effectuera la transformation SI; on aura

$$\theta_N[\delta_I \delta_S x] = \frac{A_N^{(S)} A_{N_S}^{(I)}}{\mu_S \lambda} e^{-\pi i [\bar{\delta}_S \varphi_I \delta_S + \varphi_S] x^2} \theta_{N_1}^{(S)}(x).$$

Pour les fonctions impaires, on effectuera SI^2 avec $N_S = 10 + N_1$ et $0 < N_1 \leqq 9$; SI avec $N_S = 19 + N_1$ et $0 < N_1 \leqq 9$. On trouvera des formules toutes semblables aux précédentes. En les appliquant aux transformations $S_1, \ldots, S_6$, on retrouvera les formules de ma Thèse, pages 164-165.

Voici encore quelques compléments à ma Thèse. Je renverrai au résumé qui en a paru dans ce Journal en 1902, et j'en reprends ici les notations.

J'ai indiqué (p. 277-279) une analogie remarquable entre le groupe modulaire et le groupe hyperfuchsien de M. Picard dont je me suis occupé. Les substitutions fondamentales de S_1 et S_2 du groupe modulaire peuvent s'obtenir en faisant tourner sur la surface de Riemann le point critique x autour des deux autres points critiques 0 et 1. Appelons A et B ces deux derniers points et faisons tourner l'un des

deux autour de l'autre, nous obtiendrons une substitution S_3 qui appartient au groupe, mais qui n'est pas fondamentale; on a

$$S_1 S_2 S_3 = -1.$$

De même, dans le cas du groupe de M. Picard, les cinq substitutions fondamentales $S_1, S_2, \ldots, S_5$ s'obtiennent en faisant tourner les deux points critiques x et y autour l'un de l'autre et autour des deux autres points critiques 0 et 1. Au lieu de 0 et 1, écrivons A et B et faisons tourner l'un de ces points autour de l'autre, nous obtiendrons une substitution S_6 qui n'est pas fondamentale, et qui, cependant, fait partie du groupe; je l'ai montré par un calcul direct, mais la relation qui la relie aux substitutions fondamentales m'avait échappé. Elle est cependant bien simple. Si l'on introduit les substitutions que j'ai appelées S'_3, S'_4, S'_5, qui fournissent les constructions les plus simples sur la surface de Riemann, on obtient la formule suivante, facile à vérifier sur cette surface,

$$S_1 S_2 S'_3 S'_4 S'_5 S_6 = I,$$

en posant

$$I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Il suffirait, pour ramener le produit à l'unité, de multiplier tous les éléments de S_6 par λ^2, ce qui n'a aucun inconvénient, car, dans ce calcul, λ joue le rôle d'unité principale; multiplier tous les termes d'une substitution par λ ou λ^2 correspond sur la surface de Riemann au glissement des rétrosections d'un feuillet sur un autre, qu'on obtient en faisant tourner de 360°, dans un sens ou dans l'autre, l'une des lignes de passage autour du point critique correspondant.

Les substitutions S_3, S_4, S_5, dont s'est servi M. Picard, s'expriment assez simplement au moyen des cinq premières; le résultat un peu compliqué, obtenu en les introduisant, se simplifie au moyen d'identités que j'ai fait connaître et se ramène à une forme non moins simple que la précédente; on a

$$S_6 S_5 S_4 S_3 S_2 S_1 = I.$$

Il est facile de vérifier directement cette formule, surtout si l'on

introduit les substitutions Σ_1 et Σ_2 (p. 282); on peut alors l'écrire de l'une des deux manières suivantes

$$S_6 S_5 \Sigma_2 S_1 = I, \qquad S_6 S_5 S_4 \Sigma_1 S_1 = I.$$

On trouve, en se reportant au Tableau de la page 289 (où $T_i^2 = S_i$),

$$S_6 S_5 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \Sigma_2 S_1 = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda_2 - 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_6 S_5 S_4 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda_2 - 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \Sigma_1 S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et il ne reste plus qu'à effectuer le produit de deux matrices simples.

J'ajoute un mot sur le calcul du signe de la transformation linéaire des fonctions θ à p variables. Ce signe est fixé par celui d'une expression de la forme

$$k = \sqrt{a_1 + c_1 i}\sqrt{a_2 + c_2 i} \ldots \sqrt{a_p + c_p i},$$

où l'on sait que chacune des quantités a est positive, et que chaque radical a sa partie réelle positive. Ces conditions suffisent à déterminer le signe de K, voici comment on peut effectivement le calculer.

Il suffit évidemment de déterminer le signe de la partie réelle de K, or, si θ_k est l'argument de $a_k + c_k i$, la partie réelle de K a même signe que

$$\cos\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \ldots + \frac{\theta_p}{2}\right).$$

Chacune des quantités a étant positive, on peut supposer chacun des arguments θ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{tang}\frac{\theta_k}{2}$ est alors de même signe que $\operatorname{tang}\theta_k$, et l'on doit écrire

$$\operatorname{tang}\frac{\theta_k}{2} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\theta_k} - 1}{\operatorname{tang}\theta_k} = \frac{s_k}{c_k},$$

en posant

$$s_k = \sqrt{a_k^2 + c_k^2} - a_k = r_k - a_k.$$

Il en résulte

$$\sin\frac{\theta_k}{2} = \frac{\pm s_k}{\sqrt{2 r_k s_k}}, \qquad \cos\frac{\theta_k}{2} = \frac{\pm c_k}{\sqrt{2 r_k s_k}}.$$

Mais $\cos\frac{\theta_k}{2}$ doit être positif, car il donne son signe à la partie réelle de $\sqrt{a_k + c_k i}$, et par suite $\sin\frac{\theta_k}{2}$ doit avoir le signe de $\operatorname{tang}\frac{\theta_k}{2}$, c'est-à-dire le signe de c_k; si donc ε_k est le signe de c_k, on doit avoir

$$\sin\frac{\theta_k}{2} = \frac{\varepsilon_k s_k}{\sqrt{2 r_k s_k}}, \qquad \cos\frac{\theta_k}{2} = \frac{\varepsilon_k c_k}{\sqrt{2 r_k s_k}}.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule qui donne le cosinus de la somme de p arcs connaissant les sinus et cosinus de ces arcs. Comme il ne s'agit que du signe, on peut négliger les facteurs positifs communs partout et l'on arrive au résultat suivant.

Si l'on désigne par $\Pi_s^n \Pi_c^{p-n}$ le produit des quantités s relatives à n des expressions sous radical et des quantités c relatives aux $p-n$ autres de ces quantités, et par $\Sigma\Pi_s^n \Pi_c^{p-n}$ la somme des C_p^n produits analogues, le signe de la partie réelle de K est avec $p = 2q$, celui de

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{2q} (\Pi_c^{2q} - \Sigma\Pi_s^2 \Pi_c^{2q-2} + \ldots + (-1)^q \Pi_s^{2q}),$$

avec $p = 2q+1$, celui de

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{2q+1} (\Pi_c^{2q+1} - \Sigma\Pi_s^2 \Pi_c^{2q-1} + \ldots + (-1)^q \Sigma\Pi_s^{2q} \Pi_c^1).$$

Dans ces expressions, on peut changer les signes de tous les c, on peut négliger tout facteur positif commun à a_k et c_k; enfin, si ces quantités dépendent de variables, il suffit de les calculer pour un système particulier de valeurs de ces variables.

M. H. Weber a fait remarquer qu'avec $p = 2$, la partie réelle de K est toujours positive. On le vérifie sur la première des expressions précédentes qui se réduit alors à

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 (c_1 c_2 - s_1 s_2),$$

en remarquant que chaque quantité s est inférieure à la valeur absolue de la quantité c correspondante.

On peut ajouter que la partie réelle de K est encore positive, avec $p = 3$, si les c ne sont pas tous de même signe, et, avec $p = 4$, si deux des c ont un signe et les deux autres l'autre signe; car, de

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < 0, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta_2 < 0, \qquad 0 < \theta_3 < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqq \theta_4 < \frac{\pi}{2},$$

il suit immédiatement

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Ces résultats peuvent se vérifier sur les expressions précédentes.

Pour $p = 3$ et $p = 4$, elles se réduisent à

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 (c_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 c_3 - s_1 s_3 c_2 - s_2 s_3 c_1),$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 (c_1 c_2 c_3 c_4 &- s_1 s_2 c_3 c_4 - s_1 s_3 c_2 c_4 - s_1 s_4 c_2 c_3 \\ &- s_2 s_3 c_1 c_4 - s_2 s_4 c_1 c_3 - s_3 s_4 c_1 c_2 + s_1 s_2 s_3 s_4).\end{aligned}$$

Soient

$$c_1 = -c'_1, \qquad c_2 = -c'_2,$$

et supposons c'_1, c'_2, c_3, c_4 positifs; on pourra les écrire

$$(c'_1 c'_2 - s_1 s_2) c_3 + s_1 s_3 c'_2 + s_2 s_3 c'_1,$$

$$(c'_1 c'_2 - s_1 s_2)(c_3 c_4 - s_3 s_4) + s_1 s_3 c'_2 c_4 + s_1 s_4 c'_2 c_3 + s_2 s_3 c'_1 c_4 + s_2 s_4 c'_1 c_3,$$

quantités positives.