T. Levi-Civita

Sur les équations à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du noeud lunaire

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 28 (1911), p. 325-376
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1911_3_28__325_0>

SUR LES

ÉQUATIONS LINÉAIRES A COEFFICIENTS PÉRIODIQUES

ET SUR LE

MOYEN MOUVEMENT DU NŒUD LUNAIRE,

PAR M. T. LEVI-CIVITA,

à Padoue.

Préface.

La forme analytique des intégrales des équations linéaires à coefficients périodiques est bien connue.

S'il s'agit par exemple d'une équation du second ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2p\frac{dx}{dt} + qx = 0, \tag{I}$$

dont les coefficients p et q sont réels et admettent la période 2π, on peut poser, dans le cas des exposants caractéristiques purement imaginaires,

$$x = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n \alpha_n \cos[(n+g)t + \beta_n], \tag{II}$$

où les α_n, les β_n et g sont des constantes réelles, cette dernière restant toujours la même quelle que soit l'intégrale envisagée : g n'est qu'une des déterminations (différant entre elles par le signe et en outre par des nombres entiers arbitraires) qu'on peut attribuer au coefficient de $\pm 2\pi i$ dans les exposants caractéristiques.

Le terme général du développement s'annule pour

$$(n+g)t+\beta_n = \text{multiple impair de } \frac{\pi}{2}.$$

Il s'ensuit qu'au bout d'un temps t (c'est-à-dire en faisant parcourir à la variable un intervalle quelconque de longueur t), on rencontre, à une unité près, $|n+g|\frac{t}{\pi}$ racines, ce qu'on peut aussi exprimer en disant qu'il y a, en moyenne, $2|n+g|$ racines pour chaque période 2π.

Ceci posé, si parmi les coefficients α de la série il y en a un, soit par exemple α_j, qui l'emporte de beaucoup sur les autres (1), les choses se passeront évidemment, au point de vue qualitatif, comme si le terme

$$\alpha_j \cos[(j+g)t+\beta_j]$$

existait seul. On aura en particulier $2|j+g|$ comme nombre moyen de racines pour chaque période.

Si l'expression (II) de x ne contient pas un tel terme prépondérant, la loi de distribution des racines échappe en général à l'intuition.

On peut toutefois démontrer — quels que soient les exposants caractéristiques (réels ou complexes) de l'équation (I) — que, si la valeur moyenne de $q-p^2$ est positive, un intervalle quelconque t contient encore, *en moyenne*, $|j+g|\frac{t}{\pi}$ racines, c'est-à-dire $2|j+g|$ à chaque période (j entier convenable, $\pm 2\pi i g$ partie imaginaire de la détermination choisie pour les exposants caractéristiques), et cela d'autant plus exactement que t sera plus grand.

Nous rencontrerons cette proposition comme corollaire du théorème suivant :

Considérons une solution quelconque Σ

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

---

(1) D'une façon plus précise, si la valeur absolue de α_j dépasse à elle seule la somme de la série $\Sigma|\alpha_n|$, étendue à toutes les valeurs positives et négatives de n, j excepté ; et s'il subsiste en outre une inégalité analogue provenant de $\frac{dx}{dt}$, c'est-à-dire si

$$|(j+g)\alpha_j| > \Sigma|(n+g)\alpha_n|.$$

d'un système différentiel

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

à coefficients périodiques, et le mouvement plan qu'elle définit.

Soit ϑ l'anomalie du point mobile. *On peut toujours poser*

$$\text{(IV)} \qquad \vartheta = \omega t + \varepsilon(t),$$

où $\varepsilon(t)$ *reste fini même pour* t *indéfiniment croissant, et* ω *est une constante*, égale, suivant les cas, à $j + g$ ou à $j - g$ (j entier; g détermination choisie pour le coefficient de $\pm 2\pi i$ dans les exposants caractéristiques du système différentiel).

Notons, en passant, que *cet énoncé fournit une spécification non artificielle des exposants caractéristiques*. On l'obtient en convenant, une fois pour toutes, de fixer le signe et l'entier additif, qui restent *a priori* indéterminés dans ces exposants, par la condition que le coefficient de $\pm 2\pi i$ soit justement le coefficient ω de t dans l'expression (asymptotique) (IV) de l'anomalie ϑ.

La formule (IV) donne

$$\lim_{t=\infty} \frac{\vartheta}{t} = \omega,$$

montrant que le rapport entre l'espace angulaire décrit par le point mobile et le temps employé tend à différer autant moins de ω que l'intervalle grandit. La rotation autour de l'origine est donc asymptotiquement uniforme.

Il est bien naturel d'exprimer une telle circonstance en disant qu'il existe un *moyen mouvement asymptotique* pour le point mobile sur Σ, ou, si l'on veut, pour la solution Σ elle-même, ou, en remontant encore, pour tout système différentiel (III) [1].

---

[1] Il convient de rattacher ce résultat à une question (se présentant dans la théorie ordinaire des inégalités séculaires) posée déjà par Lagrange :

La première partie de ma recherche (Chap. I et II) a eu pour but principal la démonstration du théorème d'existence énoncé tout à l'heure. J'y suis parvenu par des considérations indirectes, très élémentaires d'ailleurs, sur les substitutions linéaires. Il convient toutefois de remarquer qu'il s'agit d'une propriété touchant exclusivement à l'anomalie $\mathfrak{S}$, et par cela même incluse (d'une façon plus ou moins cachée) dans l'équation du premier ordre

$$\text{(V)} \qquad \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = a_{21}\cos^2\mathfrak{S} + (a_{22} - a_{11})\cos\mathfrak{S}\sin\mathfrak{S} - a_{12}\sin^2\mathfrak{S},$$

qui est une conséquence immédiate du système (III) et définit complètement $\mathfrak{S}$ en fonction de t.

---

* Soit un mouvement plan défini par les équations :

$$x(t) = \sum_{1}^{N}{}_{n}\, \alpha_n \cos(g_n t + \beta_n),$$

$$y(t) = \sum_{1}^{N}{}_{n}\, \alpha_n \sin(g_n t + \beta_n),$$

où les sommes comprennent un nombre fini (d'ailleurs arbitraire) N de termes, les g, les α et les β sont des constantes réelles quelconques. Existe-il un moyen mouvement (asymptotique) pour l'anomalie $\mathfrak{S}$?

La réponse est affirmative pour $N = 2$, ou bien (N étant quelconque) si une des $|\alpha|$ dépasse la somme de toutes les autres. [Comparez par exemple : Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, Band I, Leipzig, Veit, 1902, p. 354-356, 369-372.] Mais l'analyse du cas général paraît assez peu encourageante : c'est Lagrange, lui-même, qui l'avait fait remarquer. On s'en rend compte nettement d'après une intéressante recherche de M. Bohl [*Ueber ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, B. 135, 1908, p. 189-283)], où se trouve épuisé le cas de $N = 3$. Il s'ensuit que l'existence d'un moyen mouvement est liée *en général* à la nature arithmétique des coefficients.

Pour les solutions $x(t)$, $y(t)$ des systèmes (III), on n'est pas gêné par de telles distinctions. Cela tient, peut-on dire, à la circonstance particulière que les g_n de Lagrange ont ici des valeurs en progression arithmétique ($g_n = g + n$) : dès lors le passage de la somme (d'un nombre fini N de termes) à une série n'augmente pas la difficulté.

On est ainsi amené à ajouter aux deux cas signalés par Lagrange ($N = 2$; présence d'un terme prépondérant) un troisième cas, assez particulier d'un côté (à cause de la liaison entre les g), très général de l'autre (les sommes pouvant même être remplacées par des séries), où l'existence d'un moyen mouvement apparaît sous son jour naturel de caractère qualitatif.

A ce point de vue la question de l'existence du moyen mouvement se pose également pour toute équation

$$\text{(VI)} \qquad \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \Theta(t, \mathfrak{S}),$$

où Θ est une fonction finie, continue et périodique, soit par rapport à t que par rapport à $\mathfrak{S}$.

En désignant par $\mathfrak{S}_0$ la valeur initiale de $\mathfrak{S}$, par m et M la plus petite et la plus grande valeur de Θ, on tire de (VI)

$$mt \leqq \mathfrak{S} - \mathfrak{S}_0 \leqq \mathrm{M}t.$$

Le rapport $\frac{\mathfrak{S}}{t}$ reste par conséquent compris, lorsqu'on fait croître t indéfiniment, entre des limites finies (qu'il est permis de supposer, pour t assez grand, si proches que l'on veut, de m, M). Mais tend-il vers une limite bien déterminée? Je ne pense pas qu'il en soit ainsi, en général; cependant je ne saurais citer en ce moment aucun exemple à l'appui de mon impression. La limite existe non seulement pour les équations (V), mais aussi pour quelques autres formes de Θ [par exemple lorsqu'on peut, dans (VI), séparer les variables].

En revenant au présent Mémoire, je dois ajouter quelques mots sur l'application à la théorie de la Lune contenue dans le dernier Chapitre. On n'y trouvera la résolution d'aucun problème nouveau, mais plutôt un exposé didactique de prémisses et développements assez connus, visant à établir en toute rigueur un résultat théorique qui remonte, peut-on dire, à Newton : l'existence d'un moyen mouvement (asymptotique) du nœud lunaire.

On le rattache ordinairement à une équation du second ordre telle que (I) (à exposants caractéristiques imaginaires). La nature de la question implique la présence d'un terme prépondérant dans le développement de l'intégrale qu'il y a lieu de considérer; d'où la conséquence légitime qu'il y a, en moyenne, un nombre bien déterminé de racines à chaque période. On tire d'ici la mesure du moyen mouvement du nœud, *en supposant toutefois d'avance que ce moyen mouvement existe*. Il en est bien ainsi en première approximation (lorsqu'on ne retient que les termes du premier ordre par rapport à un certain paramètre); mais on n'a nullement le droit d'en conclure sans discussion que cela est vrai exactement, d'autant plus que — on le sait bien — pour des équations non linéaires, la conclusion serait en défaut.

Cette petite lacune du raisonnement classique disparaît après coup par une transformation (classique elle-même, à quelques détails près) de ladite équation du second ordre. On n'a alors qu'à appliquer à la longitude du nœud le théorème général d'existence concernant les systèmes (III).

Qu'il me soit permis de signaler, en terminant, l'extension qu'on pourrait faire à l'espace (ou plus généralement à un nombre quelconque de variables) des questions discutées, pour deux variables, dans les Chapitres I et II.

CHAPITRE I.

QUELQUES REMARQUES SUR LES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES A DEUX VARIABLES.

I. — Généralités.

Considérons (dans le champ réel) la substitution linéaire S,

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} x = a\xi + b\eta, \\ y = c\xi + d\eta, \end{cases}$$

propre, c'est-à-dire telle que le déterminant des coefficients

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas.

Si l'on envisage x, y; ξ, η comme coordonnées cartésiennes de deux points P et Π d'un même plan, la substitution S s'interprète géométriquement comme une affinité (transformation homographique conservant la droite de l'infini) ayant son centre (point uni à distance finie) dans l'origine O.

A tout point Π distinct de O correspond, d'après (1), un point P, également distinct de O, et réciproquement.

Soit f l'angle dont il faut tourner autour de O, le sens positif étant $Ox \rightarrow Oy$, pour passer de $O\Pi$ à OP. Cet angle n'est déterminé (en fonction de x, y, ou, si l'on veut, de ξ, η, a, b, c, d) qu'à des multiples de 2π près, à moins qu'on ne fasse intervenir quelque convention ultérieure.

On convient bien souvent (même sans le dire explicitement, tant c'est naturel) de se rapporter à la plus petite des rotations amenant $O\Pi$ en OP (en lui attribuant le signe + ou le signe − suivant le sens), ce qui revient à supposer f compris entre $-\pi$ et π.

II. — Substitutions variables. Lemme sur l'uniformité.

Mais parfois il peut être plus avantageux d'adopter un critère différent. C'est ce qui arrive par exemple lorsqu'il y a lieu de faire varier, d'une façon continue, soit les coordonnées ξ, η, soit les coefficients a, b, c, d qui figurent dans les formules (1). Il est alors naturel d'exiger que la variation de f soit elle-même continue, et on est conduit à adopter la détermination de f provenant par continuité d'une détermination initiale f_0. A l'égard de celle-ci le choix reste arbitraire : on pourrait par exemple avoir recours à la spécification précédente en s'imposant les inégalités $-\pi < f_0 \leqq \pi$, mais il suffira simplement de retenir que f_0 est une constante bien déterminée.

Pour que le critère de la continuité soit justifié sans discussions complémentaires, nous supposerons :

A. Qu'on ait toujours affaire à une véritable substitution, c'est-à-dire que, pendant la variation de a, b, c, d, le déterminant D ne s'annule pas;

B. Que le point Π, et par suite P, ne passent jamais à l'origine, l'angle $\widehat{\Pi OP}$ ayant ainsi toujours une signification géométrique.

Il va nous convenir de préciser davantage.

Envisageons nos éléments variables ξ, η, a, b, c, d comme fonctions d'un certain nombre de paramètres réels : t et τ, pour fixer les idées ;

et supposons qu'elles remplissent A et B en restant continues et uniformes dans un certain domaine Γ (de valeurs des paramètres t et τ). Je dis que, *si le champ* Γ *est simplement connexe*, $f(t, \tau)$, *déduite par continuité d'une valeur initiale* f_0 (correspondante à un point particulier quelconque t_0, τ_0 de Γ) *résulte elle-même une fonction uniforme.*

Pour le prouver, il suffit de constater l'identité des déterminations de f avec lesquelles on parvient à un point quelconque (t, τ) à partir de (t_0, τ_0), en suivant des chemins différents entièrement situés dans Γ.

Soient en effet f et f' les deux déterminations correspondant à deux quelconques L, L′ des chemins susdits. Ils forment ensemble un cycle fermé, réductible par continuité à un point, ou, si l'on veut, à une circulation infiniment petite sans sortir de Γ.

Or, si l'on décrit le cycle, en partant de (t, τ) avec la détermination f (et en parcourant d'abord L à reculons, puis L′) on revient en (t, τ) avec la détermination f'. D'ailleurs la différence $f' - f$ ne peut être qu'un multiple entier de 2π; dans une déformation continue du cycle elle ne saurait subir des variations brusques; c'est donc une constante. Mais elle s'annule pour une circulation infiniment petite; on a, partant, $f' - f = 0$.

C. Q. F. D.

III. — Déplacement du point paramétrique dans une substitution à coefficients constants.

Cherchons d'abord, pour une substitution quelconque S, dans quelles conditions la rotation f est un multiple entier (ou nul) de π, ce qui équivaut à $\sin f = 0$.

Il faut et il suffit pour cela que deux points correspondants II et P (distincts de l'origine, d'après B) se trouvent alignés avec l'origine, c'est-à-dire qu'on ait

$$x = \lambda\xi, \qquad y = \lambda\eta,$$

en désignant par λ un facteur de proportionnalité, qui peut être d'ailleurs positif ou négatif. Dans le premier cas II et P appartiennent à un même rayon vecteur issu de l'origine, et f est par conséquent un multiple *pair* de π; dans le second cas OH et OP sont opposés, et f est un multiple *impair* de π.

Quoi qu'il en soit, en posant, dans les (1), $x = \lambda\xi$, $y = \lambda\eta$, comme nous excluons que ξ, η s'annulent à la fois, on voit que λ doit vérifier l'équation du second degré

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

La façon dont se comporte f comme fonction du point H est bien différente selon que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

est positif ou négatif. Examinons séparément les deux éventualités.

$D > 0$. — Les deux racines de l'équation précédente peuvent être réelles ou imaginaires; lorsqu'elles sont réelles, elles ont un même signe.

Il s'ensuit que, en faisant varier H dans tout le plan (à l'exclusion seulement du point O) : ou bien on ne rencontre aucune valeur de f multiple de π (racines imaginaires); ou bien l'on rencontre des multiples pairs (racines positives); ou bien des multiples impairs (racines négatives); jamais de multiples pairs et impairs à la fois.

Ceci nous indique que l'oscillation de la fonction f du point H (déduite par continuité d'une détermination initiale, arbitrairement choisie en correspondance d'une position particulière quelconque de H) ne peut jamais atteindre 2π, de quelle façon qu'on déplace H, même en le faisant tourner autour de l'origine.

En effet, si ladite oscillation était $\geqq 2\pi$, l'ensemble des valeurs prises par f comprendrait à la fois des multiples pairs et des multiples impairs de π, ce que nous venons d'exclure.

Une conséquence immédiate est que la fonction dont il s'agit résulte nécessairement *uniforme*. En effet les autres déterminations, *a priori* possibles, diffèrent par des multiples de 2π, et il n'est pas à craindre d'y parvenir en faisant décrire à H des cycles fermés, dès que l'oscillation reste au-dessous de 2π.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que ce cas d'uniformité ne rentre pas dans la remarque générale du numéro précédent, puisque le champ de variabilité de Π (qui correspond au Γ du numéro précédent, les coordonnées ξ, η jouant ici le rôle de t, τ) n'est plus simplement connexe à cause de l'exclusion de l'origine.

$D < 0$. — Envisageons d'abord le cas particulièrement simple d'une reflexion (sur l'axe des abscisses)

$$x = \xi, \qquad y = -\eta.$$

Partons, pour fixer les idées, d'un point Π situé sur l'axe des abscisses. Il coïncide alors avec son correspondant P, et l'on peut adopter la détermination initiale $f = 0$.

Faisons maintenant tourner Π, dans un sens quelconque, autour de l'origine; le point P tourne évidemment en sens opposé; par conséquent la valeur absolue de la rotation va toujours en augmentant. Après un tour complet, l'augmentation sera 4π (chacun des deux points ayant tourné de 2π).

On a donc affaire à une fonction *non uniforme* f de Π, qui croît (ou décroît suivant le sens) de 4π, lorsqu'on fait décrire à Π un cycle renfermant l'origine.

Nous allons prouver que cela arrive également pour une substitution quelconque S à déterminant négatif.

Il suffit d'invoquer la circonstance qu'on peut passer de S à la reflexion $x = \xi$, $y = -\eta$ (pour laquelle $D = -1$) en modifiant d'une façon continue les coefficients a, b, c, d sans que la condition $D \neq 0$ (A du numéro précédent) soit jamais en défaut.

Dès lors, soient, pour la substitution S qu'on prend à considérer, f et f' deux déterminations correspondantes à un même point Π et déduites l'une de l'autre en tournant *une seule fois* autour de l'origine.

La différence $f' - f$, qui ne peut être qu'un multiple entier de 2π, reste constante lorsqu'on fait varier les coefficients avec continuité; elle est -4π pour la reflexion (si l'on est passé de f à f' en tournant dans le sens direct $Ox \to Oy$); elle reste donc -4π pour toute substitution à déterminant négatif.

C. Q. F. D.

IV. — Déplacement du point paramétrique dans le cas général.

Nous nous proposons d'assigner une limite supérieure des oscillations de la fonction f lorsqu'on combine le déplacement de Π avec une variation quelconque des coefficients a, b, c, d.

On parviendra sans peine à se débarrasser de cette dernière influence, en se reconduisant au cas des coefficients constants envisagé tout à l'heure.

Supposons, pour plus de netteté, les a, b, c, d fonctions d'un seul paramètre t, et ξ, η indépendants de t.

Il convient de se représenter P comme un point mobile en fonction de t (temps) et dépendant en outre d'un point paramétrique Π.

Soit ϑ l'anomalie de P, en convenant, bien entendu, de lui attribuer la détermination qui se déduit par continuité d'une détermination initiale, d'ailleurs quelconque.

Déplaçons Π en $\Pi^\star$, et soit $P^\star$ la position occupée, dans cette hypothèse, par le point mobile à l'instant t; $\vartheta^\star$ l'anomalie correspondante, toujours déduite par continuité d'une détermination initiale (arbitraire). J'en disposerai, pour fixer les idées, de façon qu'on ait, à l'instant initial $t = t_0$,

$$-\pi < \vartheta^\star - \vartheta \leqq \pi.$$

Soient encore $\xi^\star$, $\eta^\star$ les coordonnées de $\Pi^\star$; $x^\star$, $y^\star$ celles de $P^\star$, liées à $\xi^\star$, $\eta^\star$ par les relations (1), qui s'écrivent

$$(1') \qquad \begin{cases} x^\star = a\xi^\star + b\eta^\star, \\ y^\star = c\xi^\star + d\eta^\star. \end{cases}$$

Ceci posé, si Π et $\Pi^\star$ sont alignés avec l'origine, c'est-à-dire si leurs coordonnées sont proportionnelles, il en sera de même, à cause de (1) et (1'), pour P et $P^\star$ quel que soit t.

La différence $\vartheta^\star - \vartheta$ se maintient alors constante, et par suite égale ou bien à zéro, ou bien à π, d'après la spécification adoptée pour la valeur initiale.

En dehors de ce cas particulier, le déterminant

$$\nu = \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \xi^\star & \eta^\star \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas.

Les équations (1) et (1') donnent d'ailleurs

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x^\star & y^\star \end{vmatrix} = \mathrm{D}\nu.$$

Le premier membre est identique à $rr^\star \sin(\vartheta^\star - \vartheta)$, en désignant par r, $r^\star$ les rayons vecteurs OP, OP*.

Il s'ensuit

$$\sin(\vartheta^\star - \vartheta) = \frac{\mathrm{D}\nu}{rr^\star},$$

où — c'est tout ce qu'il nous faut retenir — le second membre ne s'annule pas.

La différence $\vartheta^\star - \vartheta$ étant initialement comprise entre $-\pi$ et o, ou bien entre o et π (extrémités exclues, puisqu'il ne s'agit pas de points alignés) restera toujours dans le même intervalle, car autrement elle devrait traverser un zéro de $\sin(\vartheta^\star - \vartheta)$.

On a partant $|\vartheta^\star - \vartheta| < \pi$, d'où la limitation

$$|\vartheta^\star - \vartheta| \leqq \pi,$$

embrassant aussi le cas de l'alignement.

Remarquons maintenant qu'en disposant d'une manière convenable des coordonnées ξ, η du point II on peut attribuer à x, y des valeurs initiales arbitraires, c'est-à-dire une position initiale fixée d'avance au point mobile P. Nous sommes ainsi conduit à l'énoncé suivant :

Dans tout mouvement défini par une substitution (1) (à coefficients fonctions de t), le nombre de tours décrits, dans un temps donné, par le rayon vecteur du point mobile est indépendant de sa position initiale; d'une façon plus précise, la différence $\vartheta^\star - \vartheta$ des anomalies (fixée initialement entre $-\pi$ et π) ne peut jamais dépasser un demi-tour.

Il est aisé d'en déduire une limitation pour l'oscillation que peut subir, avec t, la différence $f^\star - f$ des rotations faisant passer respectivement de $O\Pi^\star$ à $OP^\star$ et de $O\Pi$ à OP. L'une et l'autre, cela va sans dire, sont censées déduite, par variation continue de t, de leurs déterminations initiales $f_0^\star$, f_0 : à l'égard de cette dernière on ne fait aucune convention, mais $f_0^\star$ en reste fixée, par loi de continuité, d'après le déplacement du point paramétrique (de Π à $\Pi^\star$).

Tout d'abord, dans le cas de l'alignement, la dite différence $f^\star - f$ garde, quel que soit t, sa valeur initiale $f_0^\star - f_0$. Pour se rendre compte de la variation dans le cas général, il suffit de remarquer que les différences

$$\mathfrak{S} - f, \quad \mathfrak{S}^\star - f^\star$$

sont des constantes, puisqu'elles représentent les anomalies des points paramétriques Π et $\Pi^\star$, prises avec des déterminations convenables. L'identité

$$\mathfrak{S}^\star - \mathfrak{S} = f^\star - f + \text{const.}$$

montre alors que $f^\star - f$ ne peut s'écarter de sa valeur initiale plus que π (à droite et à gauche), car autrement on traverserait quelque zéro de $\sin(\mathfrak{S}^\star - \mathfrak{S})$.

On en conclut

$$|f^\star - f| \leqq |f_0^\star - f_0| + \pi,$$

en tout cas et pour toute valeur de t.

Corollaire pour les substitutions à déterminant positif.

S'il s'agit d'une substitution à déterminant positif, la différence $|f_0^\star - f_0|$ reste au-dessous de 2π (numéro précédent), d'où

$$|f^\star - f| \leqq 3\pi.$$

L'oscillation de la fonction f (de t et du point paramétrique Π) ne peut donc dépasser 3π [de quelle façon qu'on fasse varier soit t, soit Π (¹)].

(¹) On reconnaît aisément que f est une fonction uniforme de t, Π, c'est-à-dire des arguments t, ξ, η, le champ de variation étant le champ réel (ξ, η, t) tout entier, à l'exclusion de la droite $\xi = 0$, $\eta = 0$.

V. — Substitutions périodiques et semi-périodiques. Indices. Moyen mouvement vrai et moyen mouvement asymptotique.

Une substitution (1), dont les coefficients a, b, c, d dépendent d'un paramètre t, sera dite *périodique*, si les fonctions a, b, c, d admettent toutes la même période T. On peut naturellement supposer $T > 0$, car, T étant une période, $-T$ l'est également.

Il y a avantage à considérer ensemble les substitutions périodiques et une classe un peu plus générale jouissant (au point de vue qui va nous intéresser) de propriétés identiques. Ce sont les substitutions *semi-périodiques*, définies par la condition que les coefficients a, b, c, d soient périodiques de seconde espèce, comme s'exprimait Hermite, c'est-à-dire se reproduisent au bout d'une période à un facteur constant ρ près (le même pour toutes les quatre fonctions).

Fixons partant notre attention sur une substitution semi-périodique quelconque, ce qui comprend aussi (pour $\rho = 1$) le cas des substitutions périodiques.

En faisant croître t à partir d'une valeur quelconque, au bout d'une période T, les coordonnées x, y de P se trouvent multipliées par ρ ; le rayon vecteur OP acquiert par conséquent une direction égale ou opposée à sa direction initiale. Il a donc accompli, en tout cas, une rotation de $N\pi$, N étant un entier (positif, négatif ou nul).

Ce nombre N reste toujours le même, par raison de continuité, quelle que soit la valeur initiale de t, et aussi la position du point paramétrique Π.

On a partant dans N un élément caractéristique de la substitution : je l'appellerai *indice* de la substitution semi-périodique dont il s'agit.

Ceci posé, considérons (comme fonction de t) la rotation f, en adoptant — cela va sans dire — la détermination imposée par la continuité, à partir d'une certaine détermination initiale.

La propriété invariante de N se traduit dans l'équation fonctionnelle

$$f(t+T) - f(t) = N\pi,$$

subsistant pour toute valeur de t.

On en déduit immédiatement qu'en posant

$$f(t) = \frac{N\pi}{T} t + \sigma(t), \tag{2}$$

le terme résiduel $\sigma(t)$ est une fonction périodique de t. C'est ce qu'on exprime parfois en disant que la fonction f possède le *moyen mouvement vrai* $\frac{N\pi}{T}$ (¹). Nous le dirons même moyen mouvement de la substitution semi-périodique dont il s'agit. La raison en est manifeste si l'on pense au mouvement du point représentatif P autour de O.

En effet, dans le cas particulier où l'indice N est nul, ce moyen mouvement s'annule aussi, et $f(t)$ se réduit à une fonction périodique, ce qui veut dire que le rayon vecteur reprendra sa position initiale, ayant exactement tourné d'autant dans un sens que dans le sens opposé (moyen mouvement $= 0$).

Pour $N \neq 0$, la différence $f - \frac{N\pi}{T} t$ des rotations accomplies par P et par un point fictif doué de la vitesse angulaire constante $\frac{N\pi}{T}$ (et coïncidant avec P pour $t = 0$) reste toujours finie d'après (2), et on a

$$\lim_{t=\infty} \frac{f(t) - \frac{N\pi}{T} t}{\frac{N\pi}{T} t} = 0.$$

Cette différence est par conséquent d'autant moins importante vis-à-vis de $\frac{N\pi}{T} t$ que les valeurs de t vont en croissant.

Chaque fois qu'une pareille circonstance se présente, il y a bien en quelque sorte un moyen mouvement.

Nous voici partant conduits à la définition suivante :

Si une fonction $f(t)$ peut être représentée sous la forme

$$f(t) = \omega t + \varepsilon(t),$$

où $\varepsilon(t)$ reste finie, même pour t grandissant indéfiniment, on dira qu'elle admet *le moyen mouvement asymptotique* ω.

(¹) *Voir* par exemple CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, Leipzig, Veit, 1902-1907, B. II, p. 452.

On dira analoguement qu'une substitution à coefficients variables possède un moyen mouvement asymptotique s'il en est ainsi pour la rotation $f(t)$ (du point représentatif P, autour de O).

VI. — Substitutions composées.

Prenons pour S le produit de deux substitutions linéaires Σ, Σ_1, définies respectivement par les formules

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} x = \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y}, \\ y = \gamma\mathfrak{x} + \delta\mathfrak{y}; \end{cases}$$

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \alpha_1\xi + \beta_1\eta, \\ \mathfrak{y} = \gamma_1\xi + \delta_1\eta. \end{cases}$$

On peut supposer, sans nuire à la généralité, que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

de la substitution Σ soit positif. En effet, s'il était négatif, on n'aurait qu'à changer $\mathfrak{y}$ dans $-\mathfrak{y}$ pour renverser le signe de Δ (et en même temps du déterminant de Σ_1).

Les $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ seront censés fonctions d'un paramètre t, finies, continues et vérifiant la condition A du n° 2. Il en sera alors de même pour les coefficients a, b, c, d de la substitution $S = \Sigma\Sigma_1$.

Les coordonnées ξ, η seront traitées ici comme des constantes (par rapport à t).

P, Π et f conservant toujours leur signification, appelons $\mathfrak{P}$ le point $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$; φ_1 la rotation amenant $O\Pi$ en $O\mathfrak{P}$; Φ la rotation amenant $O\mathfrak{P}$ en OP, déduites l'une et l'autre par continuité de certaines déterminations initiales (arbitraires). Ces rotations φ_1 et Φ sont évidemment, autant que f, des fonctions de t; la somme $\Phi + \varphi_1$ ne peut d'ailleurs différer de f que par des multiples de 2π. Si la différence initiale est $2n\pi$ (n entier), on aura, par raison de continuité,

$$f(t) = \Phi(t) + \varphi_1(t) + 2n\pi,$$

pour toutes les valeurs de t.

La rotation Φ figurant dans cette formule se rapporte à des $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$ variables avec t d'après (3). Désignons par φ la rotation correspondant à la même substitution Σ, pour la même valeur de t, dans l'hypothèse toutefois que les $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$ ne varient pas (gardant par exemple leurs valeurs initiales).

Le déterminant Δ de la substitution Σ étant par hypothèse positif, on est assuré (n° 4, corollaire final) que la différence $\Phi - \varphi$ ne peut jamais dépasser 3π en valeur absolue. Si donc on pose

$$\Psi = \Phi - \varphi + 2n\pi,$$

la fonction Ψ *restera toujours finie.*

D'ailleurs la relation précédente peut s'écrire

$$f = \varphi + \varphi_1 + \Psi, \tag{5}$$

φ et φ_1 ayant une signification analogue pour Σ et Σ_1 respectivement.

Il s'ensuit que la loi de croissance de f pour les grandes valeurs de t est fixée par la somme

$$\varphi + \varphi_1.$$

Voilà ramenée la substitution composée S à ses composantes Σ, Σ_1.

Remarque. — On a supposé dans ce qui précède que le déterminant Δ de Σ soit positif, ou, pour mieux dire, qu'on ait pris préalablement le soin de le rendre tel en changeant, au besoin, $\mathfrak{y}$ en $-\mathfrak{y}$.

On pourrait naturellement traiter d'une manière directe aussi le *cas du déterminant* Δ *négatif*. On serait conduit, après quelques réductions, au résultat bien simple qu'il suffit de remplacer, dans l'expression de f, la somme des rotations φ, φ_1 par leur différence.

La formule qui fait pendant à (5), *pour* $\Delta < 0$, *est donc*

$$f = \varphi - \varphi_1 + \Psi^*, \tag{5'}$$

Ψ^* représentant une quantité qui reste toujours finie.

VII. — Cas particulier.

Si les substitutions Σ et Σ_1 sont périodiques ou semi-périodiques, on peut aller plus loin.

On peut alors poser (n° 4)

$$\varphi = \frac{N\pi}{T} + \sigma,$$

$$\varphi_1 = \frac{N_1\pi}{T_1} + \sigma_1,$$

T, T_1 désignant les périodes de Σ, Σ_1 ; N, N_1 leurs indices ; σ et σ_1 deux fonctions périodiques.

Supposons d'abord le déterminant de Σ positif.

L'expression de la rotation f (correspondante à la substitution composée $S = \Sigma.\Sigma_1$) pourra s'écrire, d'après (5),

$$f = \frac{N\pi}{T}t + \frac{N_1\pi}{T_1}t + \varepsilon, \tag{6}$$

où

$$\varepsilon = \Psi + \sigma + \sigma_1$$

reste finie même si t grandit indéfiniment.

Dans le cas du déterminant négatif, on aurait d'une manière analogue

$$f = \frac{N\pi}{T}t - \frac{N_1\pi}{T}t + \varepsilon^*, \tag{6'}$$

où $\varepsilon^* = \Psi^* + \sigma - \sigma_1$ reste également finie en tout cas.

Les formules (6) et (6′) donnent lieu à l'énoncé suivant :

Toute substitution S, *produit de deux substitutions semi-périodiques* Σ, Σ_1, *possède un moyen mouvement asymptotique, qui est la somme ou la différence des moyens mouvements admis par les substitutions composantes :* la somme si le déterminant de Σ est positif, la différence s'il est négatif.

CHAPITRE II.

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES A COEFFICIENTS PÉRIODIQUES.

I. — Préliminaires. Expression classique de l'intégrale générale.

Nous nous occuperons des systèmes linéaires à deux inconnues :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

les a étant des fonctions périodiques réelles de la variable indépendante t (finies et continues); la période sera désignée par T, en supposant $T > 0$, ainsi qu'il est toujours loisible et qu'il a été déjà convenu au Chapitre précédent (n° 5). Il sera en outre commode de se servir parfois de locutions cinématiques en interprétant la variable indépendante t comme temps et faisant correspondre à chaque solution (réelle) de (1) un point mobile P, ayant pour coordonnées à un instant quelconque t les valeurs $x(t)$, $y(t)$.

Toute propriété générale des systèmes linéaires s'applique naturellement à (1). Citons notamment la formule [1]

$$\frac{dD}{dt} = -(a_{11} + a_{22})D, \tag{2}$$

où D représente le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

de deux solutions particulières quelconques

$$\begin{aligned} x &= x_1(t), & y &= y_1(t); \\ x &= x_2(t), & y &= y_2(t). \end{aligned}$$

---

[1] Donnée explicitement par Jacobi, mais remontant dans la substance à Liouville, ou même, pour le second ordre, à Abel (*Voir* l'article de M. Vessiot, dans l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, vol. 5, fasc. 1, p. 130).

Elle nous assure que la condition d'indépendance ne peut jamais cesser d'être satisfaite, dès qu'elle l'est pour l'instant initial $t = t_0$.

Ceci rappelé, tenons compte de la périodicité des coefficients et citons encore quelques résultats bien connus. (¹)

La forme analytique des intégrales de (1) dépend essentiellement d'une certaine équation du second degré à coefficients numériques *réels* (ces coefficients pouvant être calculés en tout cas par approximations successives en opérant des quadratures superposées sur les fonctions a) : les logarithmes (naturels) des racines ρ_1, ρ_2 de la dite équation sont ce qu'on appelle *les exposants caractéristiques du système différentiel.*

D'après les hypothèses faites à l'égard des a, ρ_1, ρ_2 résultent nécessairement finies et différentes de zéro, leur produit étant essentiellement *positif.*

Elles peuvent être d'ailleurs réelles ou bien complexes conjuguées.

Cas des racines réelles. — Si ρ_1, ρ_2 sont réelles (qu'elles soient distinctes ou coïncidentes), les équations (1) admettent (au moins) une solution *réelle* à multiplicateur, c'est-à-dire une solution

$$x = a(t), \qquad y = c(t),$$

telle que

$$a(t+\mathrm{T}) = \rho_1 a(t), \qquad c(t+\mathrm{T}) = \rho_1 c(t). \tag{3}$$

Soit alors

$$x = b(t), \qquad y = d(t),$$

une seconde solution *réelle* quelconque, indépendante de (a, c), ce qui se traduit dans l'inégalité

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

(¹) *Voir*, par exemple : FLOQUET, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2ᵉ série, t. XII, 1883, p. 47-83). POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Paris, Gauthier-Villars, 1892-1899, t. I, nº 30, p. 64-68. CHARLIER, *loc. cit.*, Band I, p. 22-41. LIAPOUNOFF, *Problème général de la stabilité du mouvement* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. IX, 1907, nºˢ 46-54, p. 392-426).

L'intégrale générale de notre système pourra s'exprimer sous la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} x = a\xi + b\eta, \\ y = c\xi + d\eta, \end{cases}$$

en indiquant par ξ, η les deux constantes d'intégration.

Les solutions réelles sont évidemment toutes et seulement celles qui correspondent à valeurs réelles de ξ, η.

Cas des racines imaginaires. — Dès que ρ_1, ρ_2 ne sont pas réelles, elles sont conjuguées (et distinctes).

En posant

$$(5)\qquad \frac{1}{2\pi i}\log\rho_1 = \frac{1}{2\pi i}k_1 = g + i\frac{h}{2\pi} \qquad (g, h \text{ réels}),$$

g et, par conséquent, l'exposant caractéristique k_1 ne sont déterminés qu'à un nombre entier près. On pourrait par exemple adopter la détermination de g plus petite en valeur absolue. On aurait alors

$$0 < |g| < \frac{1}{2},$$

ou même

$$(6)\qquad 0 < g < \frac{1}{2},$$

en convenant d'appeler ρ_1 celle des deux racines pour laquelle le coefficient de i est positif (ce qui équivaut à $\sin 2\pi g > 0$).

Il vaut mieux toutefois ne pas introduire, à l'égard de g, une convention artificielle, qui pourrait devenir gênante. Ceci surtout pour le cas, où l'on a affaire à des systèmes différentiels dépendant de paramètres. On désire alors généralement de respecter la continuité; et il convient par conséquent d'adopter la détermination de g se déduisant par continuité d'une détermination initiale g_0 arbitrairement choisie [par exemple d'après (6)] en correspondance à un système particulier de valeurs des paramètres.

Ceci bien fixé, posons encore

$$(5')\qquad \frac{k_2}{2\pi i} = -g + i\frac{h}{2\pi},$$

d'où (ρ_2 étant conjuguée à ρ_1)

$$e^{k_2} = \rho_2;$$

k_2 est donc le second exposant caractéristique (conjugué à k_1).

Venons désormais à l'intégrale générale. La théorie des équations à coefficients périodiques lui assigne le type suivant :

$$(7)\qquad \begin{cases} x = C_1 u_1 e^{\frac{k_1 t}{T}} + C_2 u_2 e^{\frac{k_2 t}{T}}, \\ y = C_1 v_1 e^{\frac{k_1 t}{T}} + C_2 v_2 e^{\frac{k_2 t}{T}}, \end{cases}$$

où C_1, C_2 représentent les constantes d'intégration, et $u_1, u_2; v_1, v_2$ sont des fonctions périodiques (u_1 conjuguée à u_2, v_1 à v_2) ayant la même période T des coefficients a : le déterminant

$$w = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

ne s'annule jamais.

Pour obtenir de (7) toutes les solutions réelles, il faut et il suffit d'attribuer aux constantes C_1 et C_2 des valeurs complexes conjuguées. On peut mettre en évidence la réalité en posant d'abord

$$(8)\qquad \begin{cases} e^{-\frac{ht}{T}} u_1 = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta), \\ e^{-\frac{ht}{T}} v_1 = \frac{1}{2}(\gamma - i\delta), \end{cases}$$

ce qui introduit quatre fonctions α, β, γ, δ réelles et semi-périodiques.

En effet, si l'on change t en $t + T$, les premiers membres des (8) deviennent

$$e^{-h} e^{-\frac{ht}{T}} u_1 = \frac{1}{2} e^{-h}(\alpha - i\beta),$$

$$e^{-h} e^{-\frac{ht}{T}} v_1 = \frac{1}{2} e^{-h}(\gamma - i\delta),$$

d'où les identités

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha(t + T) = e^{-h}\alpha(t), \\ \beta(t + T) = e^{-h}\beta(t), \\ \gamma(t + T) = e^{-h}\gamma(t), \\ \delta(t + T) = e^{-h}\delta(t). \end{cases}$$

En changeant i en $-i$, on obtient de (8)

$$(8')\qquad \begin{cases} e^{-\frac{ht}{T}} u_2 = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta), \\ e^{-\frac{ht}{T}} v_2 = \frac{1}{2}(\gamma + i\delta). \end{cases}$$

Posons ensuite

$$(10)\qquad C_1 = \xi + i\eta, \qquad C_2 = \xi - i\eta \qquad (\xi, \eta \text{ réels}),$$

et aussi

$$\mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = C_1 e^{\frac{i2\pi}{T}gt},$$

c'est-à-dire

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \xi \cos\frac{2\pi}{T}gt - \eta \sin\frac{2\pi}{T}gt, \\ \mathfrak{y} = \xi \sin\frac{2\pi}{T}gt + \eta \cos\frac{2\pi}{T}gt. \end{cases}$$

Explicitons maintenant les seconds membres des (7) en tenant compte des (5), (5′), (8), (8′), (10) et (11). Il vient bien simplement

$$(12)\qquad \begin{cases} x = \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y}, \\ y = \gamma\mathfrak{x} + \delta\mathfrak{y}, \end{cases}$$

qui, combiné avec (11), fournit l'expression cherchée de l'intégrale générale des (1) dans le champ réel : α, β, γ, δ désignent des fonctions semi-périodiques de multiplicateur e^{-h} [d'après (9)], dont le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix},$$

lié à ϖ [d'après (8) et (8′)] par la relation

$$2e^{-\frac{2ht}{T}}\varpi = i\Delta,$$

ne s'annule jamais; ξ, η sont deux constantes arbitraires, et g une constante caractéristique du système différentiel donné. A la vérité g n'est déterminée qu'à un entier près, qu'on peut *a priori* fixer à son gré. Nous supposons néamoins qu'un tel choix a été effectivement fait, ce qui rend bien déterminé tout ce qui figure dans les expressions des intégrales.

Les formules (11) définissent évidemment une substitution périodique Σ_1 (n° 5 du Chapitre précédent), ayant pour période $\frac{T}{g}$. Elle correspond à une rotation uniforme de vitesse angulaire $\frac{2\pi g}{T}$. Cette vitesse angulaire ne diffère pas, naturellement, du moyen mouvement (vrai, et à fortiori) asymptotique de la substitution.

Les formules (12) définissent à leur tour une substitution Σ, semi-périodique, d'après (9), de période T. Son indice N est pair, car le multiplicateur e^{-h} des coefficients de la substitution est positif (et le rayon vecteur du point (x, y) reprend par suite sa direction initiale au bout d'une période). Si donc l'on pose $N = 2j$, j sera, lui aussi, un entier, caractéristique des coefficients α, β, γ, δ de la substitution Σ, ou, en définitive, du système diffrentiel donné. Toute valeur entière de j est possible, suivant les cas. Pour l'assigner effectivement, il arrivera parfois que des remarques qualitatives suffisent; en concept, on doit s'appuyer sur la construction préalable des intégrales du système, ou (ce qui suffit, mais n'est pas beaucoup plus simple) sur la connaissance des rapports des fonctions α, β, γ, δ pendant la durée d'une période.

II. — Conséquences qualitatives. Moyen mouvement asymptotique.

La forme analytique des intégrales d'un système (1) a permis depuis longtemps de décider la question de la stabilité. Il s'agit, peut-on-dire, de l'allure asymptotique du rayon vecteur (correspondant au point représentatif P d'une solution particulière quelconque). On sait que, si les racines ρ_1, ρ_2 ont toutes les deux des modules différents de l'unité, il y certainement instabilité, dans ce sens que, pour t indéfiniment croissant, le point représentatif P tend : ou bien à s'éloigner à l'infini, ou bien à tomber dans l'origine.

Si, les racines étant distinctes, $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$, il y a stabilité, le rayon vecteur OP restant toujours compris entre deux limites finies et différentes de zéro.

Si $|\rho_1| = 1$, tandis que $|\rho_2| \neq 1$, il y a en général instabilité, tout en existant ∞^1 solutions stables; etc.

Ordinairement on s'arrête à la stabilité. On n'a pas eu l'occasion, à ce que je sais, de fixer aussi l'allure asymptotique de l'anomalie ϑ. Les considérations développées jusqu'ici vont nous permettre de le faire sans peine.

Il nous suffira d'invoquer cette circonstance : l'intégrale générale de (1) [formules (4) pour ρ_1, ρ_2 réels; ou bien (11) et (12) pour ρ_1, ρ_2 complexes] définit toujours une substitution linéaire à coefficients variables, faisant passer d'un point paramétrique fixe Π (de coordonnées ξ, η) au point représentatif P.

D'après cela, l'étude de l'anomalie ϑ revient à l'étude de la rotation f correspondante à ladite substitution : ϑ et f diffèrent en effet d'un angle fixe (l'anomalie de Π).

Premier cas (ρ_1, ρ_2 réels). — Pour $\eta = 0$ (point paramétrique Π sur l'axe des abscisses), l'intégrale générale (4) donne lieu à des solutions

$$x = \xi a(t), \qquad y = \xi c(t),$$

semi-périodiques, d'après (3).

Au bout d'une période les coordonnées du point représentatif se trouvent multipliées par ρ_1. L'indice N de la substitution sera donc pair ou impair suivant que ρ_1 est positif ou négatif.

Quoi qu'il en soit, la rotation f vérifie, pour ces ∞^1 solutions, la relation fonctionnelle

$$f(t+\mathrm{T}) - f(t) = \mathrm{N}\pi,$$

d'où

$$f(t) = \frac{\mathrm{N}\pi}{\mathrm{T}} t + \sigma(t),$$

$\sigma(t)$ désignant une fonction périodique.

Qu'arrive-t-il, en général, pour une solution quelconque correspondante à des valeurs non nulles de la seconde constante η?

On peut le prévoir tout de suite en remarquant que la variation des constantes ξ, η ne diffère pas de ce que nous avons appelé (Chapitre précédent, n° 4) déplacement du point paramétrique. Or il a été démontré que, pour deux positions quelconques du point paramétrique, la différence des valeurs de f à un instant quelconque t ne peut s'écarter de la différence initiale par plus que π. Si donc on pose, pour une position quelconque de II,

$$f = \frac{N\pi}{T} t + \varepsilon(t),$$

et l'on forme la différence avec la valeur

$$\frac{N\pi}{T} t + \sigma(t)$$

(qui convient à la rotation, pour II appartenant à l'axe des abscisses), on a le droit d'affirmer que cette différence reste finie *quel que soit* t.

Il s'ensuit que $\varepsilon(t)$ reste fini, même pour t indéfiniment croissant, *d'où l'existence d'un moyen mouvement asymptotique* $\omega = \frac{N\pi}{T}$, *le même pour toutes les solutions du système donné.*

La détermination du nombre (entier) N résulte, si l'on veut, de cette circonstance elle-même. Mais il vaut mieux d'en donner une définition indépendante, exempte de tout passage à la limite. C'est justement ce que nous avons fait et qui fournit la règle suivante :

On se rapporte à une (quelconque) des solutions à multiplicateur (semi-périodiques). Le point représentatif correspondant accomplit, pendant une période, un nombre exact de demi-tour autour de l'origine. N n'est que ce nombre, pris avec le signe + ou avec le signe — suivant le sens de la rotation.

Il convient d'ajouter encore une remarque. ρ_1, ρ_2 étant réels et de même signe, les exposants caractéristiques — quelle détermination qu'on en choisisse — ont leurs parties imaginaires multiples entiers de $i\pi$; plus précisément [d'après (5) et (5')], le nombre $2g$, qui leur correspond, ne peut être qu'un entier, pair lorsque ρ_1, ρ_2 sont positifs, impair lorsqu'ils sont négatifs.

Mais nous avons vu qu'il en est de même pour l'entier N; $N \pm 2g$ représente donc, en tout cas, un entier pair $2j$. *On peut* par conséquent *attribuer à son gré au moyen mouvement asymptotique* ω *une des deux expressions, ou bien*

$$\omega = \frac{2\pi}{T}(j + g),$$

ou bien

$$\omega = \frac{2\pi}{T}(j - g),$$

g étant le coefficient de $\pm 2\pi i$ dans la détermination choisie des exposants caractéristiques et j un entier convenable (tel que $2(j+g)$ ou respectivement $2(j-g)$ reproduisent N).

Second cas (ρ_1, ρ_2 complexes conjugués). — L'intégrale générale se présente (n° précédent) sous la forme de produit des deux substitutions Σ_1 et Σ (dans l'ordre $\Sigma\Sigma_1$). La première a pour moyen mouvement $\frac{2\pi}{T}g$, la seconde (son indice étant $2j$) $\frac{2\pi}{T}j$. On en déduit (n° 7 du Chapitre précédent) que le produit $\Sigma\Sigma_1$ et, par conséquent, *le point représentatif d'une solution quelconque de* (1) *possède un moyen mouvement asymptotique* ω *donné par la formule*

$$\omega = \frac{2\pi}{T}(j \pm g),$$

où l'on doit prendre le signe + ou le signe — selon que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

de Σ *a valeur positive ou négative.*

Résumé. — Bien que la nature des trajectoires d'un système (1) soit essentiellement différente suivant les cas, il y a toujours (pour le point représentatif d'une solution quelconque) un moyen mouvement asymptotique. On peut même le représenter en tout cas sous une forme unique

$$\omega = \frac{2\pi}{T}(j \pm g), \tag{13}$$

où g est la détermination adoptée pour le coefficient de $\pm 2\pi i$ dans les exposants caractéristiques du système. Le signe à lui prémettre dans (13) et l'entier j résultent univoquement déterminés, sauf dans le cas de $2g$ entier (ρ_1, ρ_2 réels); on peut alors choisir ce signe à son gré, les valeurs respectives de j s'en déduisant sans ambiguité.

Il peut être intéressant de remarquer que, si le système différentiel dépend de paramètres et si, en les faisant varier dans un domaine, où l'on ne rencontre pas des valeurs réelles de ρ_1, ρ_2, on convient d'adopter pour g la détermination déduite par continuité de la détermination initiale g_0, les deux autres éléments qui restent à fixer dans (13) (j et le signe) ne changent pas. En effet j est un nombre entier, et il ne saurait changer tant que tout reste continu; le signe est en tout cas celui du déterminant Δ qui ne s'annule jamais.

III. — Équation du premier ordre définissant directement l'anomalie.

En passant des x, y aux coordonnées polaires r, ϑ, on peut déduire des (1) une équation du premier ordre contenant uniquement l'anomalie ϑ.

En effet, si l'on pose

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta,$$

$$Q = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}, \tag{14}$$

c'est-à-dire, en remplaçant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ par leurs valeurs tirées des (1),

$$\begin{aligned} Q &= a_{21}x^2 + (a_{22} - a_{11})xy - a_{12}y^2 \\ &= r^2[a_{21}\cos^2\vartheta + (a_{22} - a_{11})\cos\vartheta\sin\vartheta - a_{12}\sin^2\vartheta], \end{aligned} \tag{14'}$$

l'identité

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\vartheta}{dt},$$

donne après coup

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{Q}{r^2} = a_{21}\cos^2\vartheta + (a_{22} - a_{11})\cos\vartheta\sin\vartheta - a_{12}\sin^2\vartheta. \tag{15}$$

Le second membre est une fonction de t et de ϑ périodique par rapport aux deux arguments. Il est lié aux seconds membres du système linéaire (1) par la relation (14). Cette relation devient particulièrement expressive, lorsqu'il s'agit de systèmes (1) ayant forme canonique. On a dans ce cas

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

H étant une forme quadratique en x, y (à coefficients périodiques par rapport à t).

Il s'en suit, d'après (14)

$$Q = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = -\left(x\frac{\partial H}{\partial x} + y\frac{\partial H}{\partial y}\right) = -2H,$$

d'où l'équation en ϑ

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{2H}{r^2}. \tag{15'}$$

Revenant au cas général, il y a lieu d'ajouter deux remarques :

1° (au point de vue formel). L'équation (15) devient une équation de Riccati, si l'on prend comme fonction inconnue $e^{2i\vartheta}$ à la place de ϑ;

2° (au point de vue de la méthode). On est tenté à penser que l'équation (15), où tout ce qui est inessentiel a disparu, prête bien à la discussion d'existence du moyen mouvement asymptotique.

A la vérité, il peut bien se faire qu'il en soit ainsi. Je dois pourtant avouer que c'est justement parce que mes tentatives dans cette direction avaient échouées que j'ai été conduit à tourner la difficulté à l'aide des considérations développées jusqu'ici.

IV. — Racines des intégrales $x(t)$, $y(t)$.

Si le point représentatif P tourne autour de l'origine *toujours dans le même sens*, il coupe évidemment, deux fois pour chaque tour, les axes coordonnés. Dans ce cas on peut évaluer sans peine la densité des racines d'une équation

$$x(t) = 0,$$

ou bien

$$y(t) = 0,$$

où $x(t)$, $y(t)$ désignent des solutions quelconques des (1).

Considérons en effet un intervalle de temps de longueur arbitraire t. L'espace angulaire, décrit par P, diffère de ωt (ω étant le moyen mouvement asymptotique dont on vient d'établir l'existence en tout cas) par une quantité qui reste finie, lorsqu'on fait croître t indéfiniment. Le nombre des tours a par suite l'expression asymptotique $\left|\frac{\omega t}{2\pi}\right|$, et celui des racines $\left|\frac{\omega t}{\pi}\right|$. Les choses se passent donc en moyenne (on pourrait dire au point de vue statistique) comme si chaque période T comprendrait $\left|\frac{\omega T}{\pi}\right|$, c'est-à-dire, d'après (13), $2|j \pm g|$ racines ([1]).

Il y a une classe d'équations (1), pour lesquelles on est assuré d'avance que le mouvement angulaire de P ne change jamais de sens. Ce sont les équations, dont les coefficients a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} rendent définie (quelle que soit la valeur de t) la forme quadratique Q [*voir* équation (14')].

L'équation (15) impose en effet à ϑ de varier toujours dans le même sens, dès que Q ne s'annule pas.

V. — Équation unique du second ordre.

Soit l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2p\frac{dx}{dt} + qx = 0, \tag{16}$$

où l'on suppose p et q [comme les coefficients a des (1)] fonctions réelles de t, finies, continues et périodiques, T étant la période.

En introduisant l'auxiliaire $y = \frac{dx}{dt}$, on peut évidemment remplacer l'équation (16) par le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -qx - 2py. \end{cases} \tag{16'}$$

La forme quadratique Q relative à ce système est

$$-(qx^2 + 2pxy + y^2),$$

([1]) Il est à peine nécessaire d'avertir que, même en ayant fixé d'avance la détermination de g (ce que nous supposons toujours), le nombre des racines pourrait être représenté en tout cas par $2|j+g|$, comme il a été annoncé dans l'introduction du présent Mémoire. En effet $2|j-g|$ peut s'écrire $2|j'+g|$, pourvu qu'on pose $j' = -j$ (après quoi j' désigne toujours un entier).

qui reste définie sous la condition

$$q - p^2 > 0. \tag{17}$$

On pourra donc, dès qu'une telle inégalité se trouve satisfaite, appliquer aux solutions de l'équation (16) la conclusion précédente sur la distribution statistique des zéros.

Mais la condition (17) est assez restrictive (devant être remplie pour toute valeur de t). Il y a lieu de la remplacer par une simple inégalité numérique portant sur la valeur moyenne μ de la différence $q - p^2$, c'est-à-dire par

$$\mu = \frac{1}{T}\int_0^T (q - p^2)\, dt > 0. \tag{18}$$

Pour nous en rendre compte, remarquons d'abord que, si l'on désigne par σ une fonction réelle de t, continue avec sa dérivée première et périodique, mais d'ailleurs quelconque, et si l'on pose

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{\int \sigma\, dt} x, \\ p_1 &= p + \sigma, \\ q_1 &= q + \frac{d\sigma}{dt} + \sigma^2 + 2p\sigma, \end{aligned}$$

x étant intégrale de (16), la fonction x_1 a les mêmes zéros que x et vérifie l'équation à coefficients périodiques, analogue à (16),

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2p_1 \frac{dx_1}{dt} + q_1 x_1 = 0.$$

L'inégalité

$$q_1 - p_1^2 > 0$$

est, d'après cela, également suffisante pour notre but. Elle s'écrit

$$\frac{d\sigma}{dt} + q - p^2 > 0.$$

En tenant compte de (18), on peut facilement assigner une fonction *périodique* σ qui la rend satisfaite.

Prenons en effet

$$\frac{d\sigma}{dt} + q - p^2 = \mu.$$

D'après (18), on aura avant tout

$$\frac{d\sigma}{dt} + q - p^2 > 0.$$

σ résultera d'ailleurs périodique, puisque la différence des valeurs au bout d'une période se réduit à zéro.

On a en effet, en intégrant l'expression $\mu - (q - p^2)$ de $\frac{d\sigma}{dt}$ entre t et $t + T$,

$$\mu T - \int_t^{t+T} (q - p^2)\, dt,$$

ce qui s'annule à cause de la définition (18) de μ et de la périodicité de $q - p^2$, permettant de remplacer $\int_t^{t+T} \cdots$ par $\int_0^T \cdots$.

On a donc le théorème :

Si la valeur moyenne de $q - p^2$ est positive, toute solution de (16) a ses zéros distribués quasi-uniformément, c'est-à-dire le nombre de zéros tombant dans un intervalle donné tend de plus en plus à devenir proportionnel à l'intervalle, lorsque celui-ci augmente indéfiniment.

CHAPITRE III.

APPLICATION A LA LUNE.

I. — Les équations cartésiennes du mouvement troublé en proximité des orbites planes. Cas de la Lune.

Prenons l'origine O des axes coordonnés dans le centre de gravité du corps central, les axes étant supposés de direction invariable.

Soient x, y, z les coordonnées d'un corps L soumis à l'attraction newtonienne du centre et à d'autres forces perturbatrices dérivant d'une fonction des forces $R(x, y, z, t)$ (rapportée à l'unité de masse, finie et continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, pour les valeurs des arguments que nous aurons à considérer).

$\overline{\mathrm{OL}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ étant le rayon vecteur de L, M la masse du corps central, f la constante d'attraction, les équations du mouvement de L s'écrivent :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f\mathrm{M}}{\overline{\mathrm{OL}}} + \mathrm{R}\right), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f\mathrm{M}}{\overline{\mathrm{OL}}} + \mathrm{R}\right), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f\mathrm{M}}{\overline{\mathrm{OL}}} + \mathrm{R}\right). \end{aligned} \right.$$

Supposons que $\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}$ s'annule pour $z = 0$, quels que soient x, y, t.

La dernière des équations (1) est alors vérifiée dès qu'on y pose $z = 0$, et le système admet les ∞^4 solutions planes, définies par les deux premières équations, où l'on ait préalablement fait $z = 0$.

En posant

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= r, \\ \mathrm{R}(x, y, 0, t) &= \mathrm{U}(x, y, t), \end{aligned} \right.$$

ce système réduit en x, y peut s'écrire :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f\mathrm{M}}{r} + \mathrm{U}\right), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f\mathrm{M}}{r} + \mathrm{U}\right). \end{aligned} \right.$$

Il a une grande importance, puisqu'il s'applique non seulement aux solutions rigoureusement planes, mais aussi à celles qui s'en écartent peu.

Supposons plus précisément :

1° De n'envisager que des cas, où r (projection du rayon vecteur $\overline{\mathrm{OL}}$ sur le plan $z = 0$), ne descend pas au-dessous d'une certaine limite, de façon à pouvoir considérer $\frac{1}{r}$ comme une quantité toujours finie ;

2° z assez petit pour qu'on puisse négliger le carré du rapport $\frac{z}{r}$.

Sous ces hypothèses, les deux premières équations (1) peuvent encore être remplacées par le système (3) (comme pour $z=0$).

En effet, la différence des seconds membres [des dites équations (1) et des correspondantes (3)] résulte du second ordre (par rapport à z) du moment que

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f\mathrm{M}}{\overline{\mathrm{OL}}}+\mathrm{R}\right)$$

s'annule identiquement (par rapport à x, y, t) pour $z=0$.

Quant à la troisième équation (1), elle devient naturellement linéaire en z, dès qu'on néglige, comme ci-dessus, les termes d'ordre supérieur. Remplaçons en conformité

$$\frac{\partial \dfrac{f\mathrm{M}}{\overline{\mathrm{OL}}}}{\partial z}=-\frac{f\mathrm{M}z}{\overline{\mathrm{OL}}^3}$$

par

$$-\frac{f\mathrm{M}}{r^3}z,$$

$\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}$ par $\left(\dfrac{\partial^2\mathrm{R}}{\partial z^2}\right)_{z=0} z$, et posons, pour abréger,

$$q(x,y,t)=\frac{f\mathrm{M}}{r^3}-\left(\frac{\partial^2\mathrm{R}}{\partial z^2}\right)_{z=0}. \tag{4}$$

Il reste

$$\frac{d^2z}{dt^2}+qz=0, \tag{5}$$

servant à déterminer z, après intégration du système (3).

Voici ramené l'étude du mouvement troublé à la résolution successive de deux problèmes distincts :

I. Intégration du système (3) en x, y.

II. Intégration de l'équation linéaire (5) en z, où le coefficient q est à regarder comme fonction connue de la variable indépendante t, en y introduisant pour x, y les expressions fournies par la première opération.

Cas où le corps central étant la Terre, la masse de L (*Lune*) *est négligeable, et la perturbation provient d'un troisième corps* S (*Soleil*).

On a affaire à un cas particulier du problème des trois corps, et il est loisible de supposer connu et keplérien le mouvement de S par rapport à O, dès qu'on néglige la masse de L.

Prenons le plan de l'orbite de S (écliptique) pour plan Oxy, et désignons par $x', y', z' = 0$ les coordonnées du Soleil, qui seront des fonctions périodiques de t ayant une certaine période T' : le moyen mouvement est naturellement $n' = \frac{2\pi}{T'}$.

Appellons encore M' la masse du Soleil,

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$
$$\Delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2},$$

ses distances de O et de L.

Le mouvement absolu de L a lieu sous les deux attractions de O et de S. Cette dernière dérive de la fonction des forces

$$\frac{fM'}{\Delta}.$$

Pour le mouvement rapporté à O (et à des axes de direction invariable tels que Ox, Oy, Oz), on n'a qu'à retrancher le trinome (¹)

$$fM' \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3},$$

et on en tire l'expression classique de la fonction perturbatrice.

Notre R (z' étant ici constamment nul) s'écrit donc

$$R = fM'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy'}{r'^3}\right).$$

Soit

$$d = (\Delta)_{z=0} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

la projection de $\overline{SL}$ sur le plan $z = 0$.

On aura

$$R(x, y, 0, t) = U = fM'\left(\frac{1}{d} - \frac{xx' + yy'}{r'^3}\right) \tag{6}$$

(¹) *Voir* par exemple TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, Paris, Gauthier-Villars, 1889-1896, t. I, p. 75-76.

et

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)_{z=0} = f M' \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{\Delta}}{\partial z^2}\right)_{z=0} = -\frac{f M'}{d^3},$$

d'où, d'après (4),

$$q = f\left(\frac{M}{r^3} + \frac{M'}{d^3}\right), \tag{7}$$

ce qui est une quantité essentiellement positive.

Il faut commencer par se procurer une solution du problème plan [équations (3) avec la valeur (6) de U], applicable au cas réel de la Lune.

Les seconds membres des (3), dès qu'on y remplace x', y' par leurs expressions en fonction de t deviennent de fonctions périodiques de t, mais ils dépendent encore de x, y d'une manière trop compliquée pour aborder le calcul des intégrales. On est ainsi conduit à le restreindre au cas particulier, où le mouvement képlérien de S se réduit à une rotation uniforme, en réservant, bien entendu, aux méthodes usuelles de la théorie des perturbations d'introduire ensuite les (faibles) corrections, qui se rendront nécessaires pour tenir compte des influences négligées : ici, par exemple, l'excentricité du Soleil.

Du système (3), simplifié moyennant ladite hypothèse sur le mouvement de S, on peut faire disparaître toute fonction explicite du temps.

Il suffit de se rapporter à des axes $O\xi\eta$ (du plan $z = o$) uniformément tournant avec S : leur vitesse angulaire s'indentifie naturellement avec le moyen mouvement n' de S. Convenons, par exemple, de prendre la droite OS elle-même pour direction positive de l'axe des ξ, et la direction positive de l'autre axe tournée (par rapport à OS) de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens de la rotation.

En appelant ξ, η les coordonnées de L par rapport aux nouveaux axes, on aura évidemment

$$\left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ d &= \sqrt{(\xi - r')^2 + \eta^2}, \\ U &= f M'\left(\frac{1}{d} - \frac{\xi}{r'^2}\right), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

r' étant ici constante. Entre r' et n' on a la relation bien connue

$$n'^2 = f\frac{M'+M}{r'^3},$$

ce qui peut être remplacé à fort peu près par

$$n'^2 = f\frac{M'}{r'^3},$$

en négligeant le rapport $\frac{M}{M'}$ de la masse de la Terre à celle du Soleil. Rappelons encore l'identité $n' = \frac{2\pi}{T'}$, où T′ désigne la période, c'est-à-dire la durée de la rotation du Soleil (an).

En introduisant dans le système (3) les coordonnées ξ, η, on tire de suite, à l'aide du théorème de Coriolis,

$$(3')\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - 2n'\dfrac{d\eta}{dt} - n'^2\xi = \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{fM}{r} + U\right), \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2n'\dfrac{d\xi}{dt} - n'^2\eta = \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{fM}{r} + U\right). \end{cases}$$

r et U ayant les expressions (8), le temps n'intervient plus explicitement. Ceci rend possible la recherche d'une solution périodique des (3′), *ayant une période* T *fixée d'avance.* Il n'en serait pas de même pour le système originaire (3), où figurent des fonctions explicites de t ayant la période T′ : les solutions d'un tel système ne pourraient en général admettre autre période que T′ (ou un multiple de T′).

C'est justement en disposant de l'arbitrariété de T qu'on obtient une représentation satisfaisante des circonstances réelles par une solution périodique.

Remarquons, en effet, que (pour un observateur terrestre et par rapport à des repères de direction invariable) la durée de la révolution lunaire (révolution sidérale) est $T = 27^{j}7^{h}43^{m}11^{s},5$, qui n'est nullement un multiple de T′ (an). Mais il existe une autre période non moins importante : celle des phases de la Lune, la lunaison ou mois lunaire, qui est la durée T de la révolution rapportée aux axes mobiles ξ, η (révolution synodique). On a

$$\mathsf{T} = 29^{j}12^{h}44^{m}2^{s},9.$$

Ces deux périodes T et T peuvent naturellement se déduire l'une de l'autre en tenant compte de la vitesse de rotation des deux systèmes d'axes auxquels elles se rapportent.

Pour rendre intuitive cette relation, il suffit de considérer, à côté du mouvement réel de la Lune, une rotation fictive (dans le plan $z = 0$), uniforme, et ayant (par rapport aux axes fixes Oxy) la même durée T de L, et, par suite, la vitesse angulaire absolue $n = \frac{2\pi}{T}$. La durée de cette rotation, par rapport aux axes mobiles, sera évidemment T, comme pour la Lune.

D'ailleurs la vitesse angulaire relative, c'est-à-dire rapportée aux axes $O\xi\eta$ (qui tournent dans le même sens que L, avec la vitesse angulaire n'), n'est que $n - n'$. Il s'ensuit

$$\mathsf{T} = \frac{2\pi}{n - n'} = \frac{1}{\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}} = \frac{TT'}{T' - T}.$$

On doit à M. Hill [1] la découverte et la détermination effective d'une solution Σ

$$\xi = \xi(t), \qquad \eta = \eta(t),$$

des $(3')$, ayant cette période T et répondant, aussi pour le reste, d'une manière très satisfaisante aux données de l'observation : l'allure générale de Σ est naturellement bien proche à celle d'une orbite elliptique faiblement excentrique.

A la vérité, dans le calcul de Σ, on néglige encore la *parallaxe* $\left(\text{c'est-à-dire les termes qui seraient de l'ordre du rapport } \frac{\overline{OL}}{\overline{OS}}\right)$.

En nous plaçant désormais dans ces conditions, nous pourrons simplifier davantage l'expression (8) de U et la réduire à

$$\text{(9)} \qquad U = \frac{n'^2}{2}(2\xi^2 - \eta^2),$$

en tenant compte de ce qu'il est permis d'identifier

$$\frac{fM'}{d^3}, \quad \frac{fM'}{r'^3} \quad \text{et} \quad n'^2.$$

---

[1] *Voir* par exemple TISSERAND, *loc. cit.*, t. III, Chap. XIV, ou bien POINCARÉ, *Leçons de Mécanique céleste*, t. II, Chap. XXV. Paris, Gauthier-Villars; 1905-1910.

L'expression (7) du coefficient q de l'équation définissant z se réduit en conformité à

$$q = \frac{fM}{r^3} + n'^2. \tag{10}$$

Quoi qu'il en soit, dès que, d'après (8), r et d ne dépendent que de ξ, η, il en est de même pour q. Si donc on y introduit les valeurs de ξ, η relatives à la solution périodique Σ, ce coefficient q devient lui-même une fonction périodique de période T.

II. — Passages aux nœuds.

Appliquons à l'équation (5) les conclusions du Chapitre précédent (n° 5), ce qui est légitime, l'inégalité $q - p^2 > 0$ étant ici satisfaite (puisque $p = 0$ et $q > 0$).

Il s'ensuit que *la distribution des racines de*

$$z(t) = 0,$$

c'est-à-dire la distribution dans le temps des passages de la Lune aux nœuds, est quasi uniforme.

Le nombre moyen des passages pendant une période (mois lunaire) est, d'après la formule générale,

$$2|j \pm g|.$$

Dans le cas actuel, on peut retenir $j = 0$ *et* g *assez voisin de* $1,0808$.

Pour nous en rendre compte, considérons ce qui se passe dans le cas d'une orbite circulaire de faible inclinaison. Ce serait, peut-on dire, le cas du mouvement non troublé de la Lune, pourvu qu'on néglige aussi son excentricité et qu'on prenne, cela va sans dire, le rayon r de l'orbite circulaire correspondant à la période observée T (du mouvement absolu). r est alors lié au moyen mouvement $n = \frac{2\pi}{T}$ par la relation

$$\frac{fM}{r^3} = n^2,$$

et l'équation (5) devient [q se réduisant, d'après (7), à la constante n^2]

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + n^2 z = 0. \tag{5'}$$

Il est bien clair que, dans ce mouvement circulaire uniforme, on a exactement deux passages aux nœuds, c'est-à-dire deux racines de $z(t) = 0$, à chaque période T (révolution sidérale).

D'ailleurs, le nombre moyen des racines dans un intervalle quelconque est proportionnel à l'intervalle. On obtient ainsi, pour la période T (mois lunaire), le nombre

$$2\frac{\mathsf{T}}{\mathrm{T}} = 2\frac{n}{n - n'} = 2g_0,$$

où g_0 a la valeur numérique $1,0808$ (en prenant pour T et T les valeurs citées au n° 1).

On peut naturellement le confirmer en s'appuyant sur l'expression formelle de l'intégrale générale de (5'). Elle s'écrit

$$z = \alpha \sin(nt + \beta),$$

α et β désignant deux constantes arbitraires. Dans un intervalle de longueur t, le nombre des racines est, en moyenne, $\frac{nt}{\pi}\cdot$ Il en résulte bien, pour $t = \mathsf{T}$,

$$\frac{n\mathsf{T}}{\pi} = \frac{n}{\pi}\frac{2\pi}{n - n'} = 2\frac{n}{n - n'} = 2g_0.$$

Ceci posé, remarquons que, si la fonction $z(t)$ (se rapportant au mouvement troublé de la Lune) n'est pas rigoureusement périodique, elle s'écarte peu toutefois de l'allure générale envisagée tout à l'heure. Il s'ensuit en particulier que le nombre moyen de racines dans un intervalle t, c'est-à-dire $2|j \pm g|$, doit différer très peu de la valeur $2g_0$ qu'on vient de calculer pour (5').

D'autre part, l'altération des coefficients entre (5) et (5') est petite; par conséquent, parmi les déterminations de g (différant entre elles par le signe et par des nombres entiers) qui se rapportent à l'équation (5), il en existe une peu différente de g_0. En choisissant celle-ci, il faut bien lui associer $j = 0$.

C. Q. F. D.

III. — Les éléments osculateurs obliques. Cas des petites inclinaisons.

Considérons, pour un moment, un mouvement quelconque du point L, rapporté aux axes fixes $Oxyz$. Soient, à un instant donné, x, y, z les coordonnées de la position occupée par L; $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{z} = \frac{dz}{dt}$, les composantes de la vitesse V (vecteur).

Dès qu'on suppose la position distincte de l'origine et la vitesse non nulle, il y a un plan bien déterminé χ passant par l'origine et contenant la vitesse. Ce vecteur définit, dans le plan χ, un sens de circulation autour de l'origine O. En circulant dans ce sens, on traverse en deux points l'intersection de χ avec le plan coordonné $z = 0$: une fois en passant de la région des z négatives à la région des z positives, et l'autre fois en revenant aux z négatives. La direction fixée sur ladite intersection par le premier point est ce qu'on appelle le *nœud ascendant*. Il n'y a indétermination que dans le cas particulier où χ coïncide avec le plan $z = 0$.

L'*inclinaison* φ de χ sur $z = 0$ (convenablement précisée) et (dans le cas général où $\varphi \neq 0$) *la longitude* θ *du nœud ascendant* (comptée à partir de Ox vers Oy) sont, classiquement, deux des six éléments osculateurs relatifs à l'instant envisagé : M. Poincaré les appelle *éléments obliques*. Le cas exceptionnel $\varphi = 0$ se présente évidemment alors et alors seulement que z et $\dot{z}$ s'annulent à la fois.

Les formules qui relient φ et θ à l'état de mouvement de L (c'est-à-dire aux coordonnées x, y, z de sa position et aux composantes $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ de sa vitesse) s'établissent immédiatement en ayant recours au moment G de la vitesse par rapport à l'origine.

D'une part les composantes de ce moment sont (en supposant le système coordonné *dextrorsum*, comme il est d'usage en Astronomie)

$$\begin{gathered} -(y\dot{z} - z\dot{y}), \\ -(z\dot{x} - x\dot{z}), \\ -(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{gathered}$$

D'autre part, G étant perpendiculaire au plan χ et Oz au plan coordonné Oxy, l'angle formé par $\mathbf{G}$ avec Oz est égal à celui des deux plans, c'est-à-dire à φ; en outre (si φ n'est pas zéro, ce qui revient à $\mathbf{G}$ perpendiculaire à Oxy), la projection de $\mathbf{G}$ sur Oxy est perpendiculaire à la ligne des nœuds. Il s'ensuit, en ayant égard au sens du vecteur $\mathbf{G}$, que ses cosinus directeurs sont :

$$\begin{gathered} -\sin\varphi\sin\theta, \\ \sin\varphi\cos\theta, \\ -\cos\varphi, \end{gathered}$$

ce qui s'applique aussi au cas $\varphi = 0$.

En les multipliant par la valeur absolue G du moment, on a les composantes; d'où les relations

$$\left\{\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= G\sin\varphi\sin\theta, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= -G\sin\varphi\cos\theta, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= G\cos\varphi. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Les deux premières, linéaires en z, $\dot{z}$, peuvent être résolues par rapport à ces deux quantités, pourvu que le déterminant

$$\begin{vmatrix} -\dot{y} & y \\ \dot{x} & -x \end{vmatrix} = x\dot{y} - y\dot{x} = G\cos\varphi$$

ne s'annule pas. On a, avec cette restriction, au lieu de (11), le système équivalent

$$\left\{\begin{aligned} z &= \frac{1}{\cos\varphi}(-x\sin\varphi\sin\theta + y\sin\varphi\cos\theta), \\ \dot{z} &= \frac{1}{\cos\varphi}(-\dot{x}\sin\varphi\sin\theta + \dot{y}\sin\varphi\cos\theta), \\ & x\dot{y} - y\dot{x} = G\cos\varphi. \end{aligned}\right. \tag{11'}$$

Cas des petites inclinaisons. — Fixons notre attention sur les mouvements pour qui l'inclinaison φ reste petite, de façon qu'on puisse négliger φ^2 : c'est ce qui arrive dans les circonstances réelles du mouvement troublé de la Lune.

Les équations (11'), où il est encore permis de remplacer $\cos\varphi$ par l'unité, en les réduisant à

$$(12)\qquad \begin{cases} z = -x\sin\varphi\sin\theta + y\sin\varphi\cos\theta, \\ \dot{z} = -\dot{x}\sin\varphi\sin\theta + \dot{y}\sin\varphi\cos\theta, \\ G = x\dot{y} - y\dot{x}, \end{cases}$$

montrent que z et $\dot{z}$, ou plus précisément $\frac{z}{r}$, $\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$, résultent du même ordre de grandeur que φ.

On peut dès lors reprendre tout ce qu'on a dit au n° 1, et retenir, pour le cas de la Lune, que la projection du mouvement troublé sur le plan Oxy, et par conséquent les fonctions $x, y, \dot{x}, \dot{y}$, correspondent à la solution Σ de M. Hill, tandis que z, et avec elle $\dot{z}$, sont définies par l'équation (5).

Remarquons, en passant, que l'inclinaison φ ne traverse jamais la valeur zéro.

En effet, on ne peut avoir $\varphi = 0$ sans que z et $\dot{z}$ s'annulent à la fois, mais alors ils seraient identiquement nuls ([1]) et il en résulterait $\varphi = 0$, quel que soit t, ce qui n'est pas le cas.

Introduisons l'anomalie v du point x, y (mobile sur Σ). On a évidemment

$$x = r\cos v, \qquad y = r\sin v,$$

d'où la première des équations (12) sous la forme

$$(13)\qquad z = r\sin\varphi\sin(v - \theta).$$

Cette anomalie v est comptée naturellement à partir de la direction invariable Ox. Comme Σ a été originairement caractérisée en se servant des axes tournants $O\xi\eta$ [d'après les équations (3')], il convient d'introduire encore l'*anomalie relative* $v^* = v - n't$, qu'on peut interpréter, en choisissant convenablement l'origine des temps, comme l'anomalie comptée à partir de $O\xi$. On introduira de même la *longitude relative du nœud* $\theta^* = \theta - n't$. L'expression de z s'écrit en conformité

$$(14)\qquad z = r\sin\varphi\sin(v^* - \theta^*) = \sin\varphi(-\xi\sin\theta^* + \eta\cos\theta^*).$$

([1]) Puisque l'équation du second ordre (5) admet la seule solution $z = 0$, répondant aux conditions initiales $z = z' = 0$.

Aussi les deux autres équations (12) peuvent être, pour ainsi dire, rapportées aux axes tournants. Il suffit d'invoquer pour cela la relation entre la vitesse absolue et la vitesse relative du point mobile sur Σ. La première a pour composantes $\dot{x}$, $\dot{y}$ (suivant Ox, Oy); la seconde $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ (suivant $O\xi$, $O\eta$). En appelant V_ξ, V_η les composantes de la vitesse absolue **V** suivant les axes mobiles (qui tournent avec la vitesse angulaire n'), on a les formules bien connues de Cinématique

$$(15)\qquad \begin{cases} V_\xi = \dfrac{d\xi}{dt} - n'\eta, \\ V_\eta = \dfrac{d\eta}{dt} + n'\xi. \end{cases}$$

Si l'on remarque que $-\sin\varphi$, $\cos\varphi$; $-\sin\varphi^*$, $\cos\varphi^*$ sont les composantes d'un même vecteur **u** (de longueur 1) par rapport aux deux systèmes d'axes, on s'aperçoit de l'identité des deux binomes

$$-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta$$

et

$$-V_\xi\sin\theta^* + V_\eta\cos\theta^*,$$

qui représentent l'un et l'autre le produit intérieur $\mathbf{V} \times \mathbf{u}$ [1].

Il s'ensuit

$$(16)\qquad \dot{z} = \sin\varphi(-V_\xi\sin\theta^* + V_\eta\cos\theta^*),$$

où V_ξ, V_η sont définis par (15).

On a encore l'identité

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \xi V_\eta - \eta V_\xi,$$

puisque les deux membres représentent la composante (changée de signe) du vecteur **G** suivant Oz : la première calculée avec référence au trièdre $Oxyz$, la seconde avec référence au trièdre $O\xi\eta z$.

La dernière des équations (12) prend ainsi la forme

$$(17)\qquad G = \xi V_\eta - \eta V_\xi.$$

---

[1] J'emploie les notations de MM. Burali-Forti et Marcolongo. *Voir* par exemple : *Éléments de calcul vectoriel*, traduits par M. S. Lattès (Paris, Hermann; 1910).

IV. — Manière habituelle de déduire le moyen mouvement du nœud. Complément qu'elle exige.

Voici l'essence du raisonnement par lequel on rattache ordinairement la constante caractéristique g de l'équation du second ordre (5) au moyen mouvement du nœud :

1° On remarque tout d'abord que, d'après la nature de la solution Σ, l'angle $\varphi^* = \varphi - n't$ augmente de 2π à chaque période T, ce qui se traduit par l'équation

$$\varphi - n't = \frac{2\pi}{\mathsf{T}} t + \sigma(t),$$

en désignant par $\sigma(t)$ une fonction périodique.

Si l'on a égard à la formule

$$\frac{2\pi}{\mathsf{T}} = n - n',$$

il reste plus simplement

$$\varphi = nt + \sigma(t).$$

2° On remarque ensuite que le double de la constante caractéristique g de l'équation (5) exprime justement le nombre moyen de racines de $z(t) = 0$ à chaque période.

Cette conclusion (*voir* la Préface du présent Mémoire) est bien justifiée par la circonstance que la série trigonométrique représentant $z(t)$ doit nécessairement contenir un terme prépondérant : celui qui subsisterait seul, lorsqu'on néglige les perturbations.

Nous venons de retrouver la même chose sous un autre jour.

3° *On admet que la longitude θ du nœud possède un moyen mouvement asymptotique*, ω, c'est-à-dire qu'on puisse poser

$$\theta = \omega t + \varepsilon(t),$$

la fonction ε restant finie, même quand t grandit indéfiniment.

4° On tire de (13) (r et φ ne s'annulant jamais) que les zéros de la fonction z coïncident avec ceux de $\sin(\varphi - \theta)$, c'est-à-dire, en remplaçant v et θ par leurs valeurs, de

$$\sin[(n-\omega)t+\sigma-\varepsilon].$$

D'après la nature de la question, θ varie très lentement vis-à-vis de v, qui, à son tour, diffère de nt par une quantité presque constante (constante en première approximation). On peut tranquillement retenir que l'argument du sinus croît toujours. Le nombre des racines est donc, en moyenne, pour un intervalle de longueur t,

$$\frac{n-\omega}{\pi}t,$$

c'est-à-dire, en donnant à t la valeur $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{n-n'}$,

$$2\frac{n-\omega}{n-n'}.$$

5° Égalant à $2g$, on tire la relation cherchée entre g et le moyen mouvement asymptotique ω du nœud :

$$g=\frac{n-\omega}{n-n'},$$

d'où

$$\omega=n-(n-n')g\ ^{(1)}. \tag{18}$$

La conclusion en est que le raisonnement classique a besoin d'être complété sur le point 3°. Tel qu'il est, il prouve seulement ceci : Dès qu'un moyen mouvement asymptotique existe, il est nécessairement donné par la formule (18).

Il paraît par suite désirable de se débarrasser de toute restriction en prouvant au préalable l'effective existence d'un moyen mouvement ω du nœud. C'est ce qui réussit sans peine par une transformation convenable de l'équation (5). La quantité ω se trouvera ainsi définie d'une façon directe, préférable, en concept, à la voie détournée, qui fait inter-

---

(1) Tisserand désigne notre g par h, et parvient à la relation (*loco citato*, dernière ligne de la page 287)

$$h(n-n')=n-\text{mouvement moyen du nœud.}$$

C'est bien identique à (18).

venir les zéros de $z(t)$. Il est douteux toutefois, au point de vue numérique, s'il y aurait avantage à abandonner les méthodes de Lindstedt, Adams, Hill, Poincaré ([1]), qui conduisent à un calcul très satisfaisant de la constante caractéristique g de l'équation (5).

V. — Transformation canonique. Moyen mouvement du nœud. Déduction abrégée.

Commençons par substituer à l'équation (5) un système canonique binaire.

Il suffit pour cela d'associer à z, comme inconnue auxiliaire, sa dérivée première $\dot{z}$, et de prendre pour fonction caractéristique

$$F = \frac{1}{2}(\dot{z}^2 + q z^2). \tag{19}$$

Le système

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \dot{z}}, \qquad \frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial z}, \tag{20}$$

donne lieu évidemment à l'équation unique (5), lorsqu'on élimine $\dot{z}$.

Cherchons à opérer un changement de variables, qui, sans altérer la forme canonique, laisse directement apercevoir ce qui se passe pour la longitude du nœud.

Reprenons à ce but les équations (14) et (16). En posant

$$\left\{\begin{aligned} X &= -\sqrt{G}\sin\varphi\sin\theta^*, \\ Y &= \sqrt{G}\sin\varphi\cos\theta^*, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

on peut les écrire

$$\left\{\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{G}}(\xi X + \eta Y), \\ \dot{z} &= \frac{1}{\sqrt{G}}(V_\xi X + V_\eta Y). \end{aligned}\right. \tag{22}$$

([1]) *Voir*, pour ne citer que des traités : TISSERAND, *loc. cit.*, t. III, Chap. XVI; ADAMS, *Lectures on the lunar theory* (Cambridge, University Press; 1900), p. 68-72; POINCARÉ, *Ouvrages cités : Leçons, etc.*, t. II, Chap. XXVI; *Les méthodes nouvelles*, etc., t. II, Chap. XVII.

Il en résulte, entre z, $\dot z$ et X, Y, qui seront nos nouvelles variables, une transformation linéaire, dont le déterminant se réduit à l'unité, d'après l'expression (17) de G. Ceci suffit à montrer que la transformation est canonique et que, par conséquent, le système (20), où l'on introduit X, Y à la place de z, $\dot z$, conserve la forme canonique. Comme toutefois les coefficients $\frac{\xi}{\sqrt{G}}, \frac{\eta}{\sqrt{G}}, \frac{V_\xi}{\sqrt{G}}, \frac{V_\eta}{\sqrt{G}}$ ne sont pas des constantes, mais des fonctions périodiques du temps (correspondant à la solution Σ de M. Hill), on doit s'attendre à une altération dans la fonction caractéristique. Appelons H celle qui conviendra au système transformé. Elle résulte de F (exprimée moyennant les nouvelles variables) et d'un terme additionnel W, qu'on va calculer d'après une règle connue. Voici de quelle manière :

Supposons que, dans les seconds membres des (22), on fasse varier X, Y de dX, dY et appelons δz, $\delta \dot z$ les incréments correspondants de z, $\dot z$. Supposons d'autre part qu'on fasse varier le temps t, qui y figure par l'intermédiaire des coefficients ; et soient $d_t z$, $d_t \dot z$ les incréments dus à l'accroissement dt de t. Les différentielles totales seront évidemment

$$(23)\qquad \begin{cases} dz = \delta z + d_t z, \\ d\dot z = \delta \dot z + d_t \dot z. \end{cases}$$

En remarquant que δz, $\delta \dot z$ sont liés à dX, dY par la même transformation linéaire, à déterminant unité, qui lie X, Y à z, $\dot z$, on a d'abord

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} z & \dot z \\ \delta z & \delta \dot z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} X & Y \\ dX & dY \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, d'après (23),

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} z & \dot z \\ dz & d\dot z \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z & \dot z \\ d_t z & d_t \dot z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} X & Y \\ dX & dY \end{vmatrix}.$$

En remplaçant $\frac{1}{2}(z\,d\dot z - \dot z\,dz)$ par $z\,d\dot z - \frac{1}{2}d\,(z\dot z)$, et de même $\frac{1}{2}(X\,dY - Y\,dX)$ par $X\,dY - \frac{1}{2}d\,(XY)$, on peut écrire

$$(24) \qquad z\,d\dot{z} = \mathrm{X}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{W}\,dt + d\Omega,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z & \dot{z} \\ \dfrac{dz}{dt} & \dfrac{d\dot{z}}{dt} \end{vmatrix},$$

$$\Omega = \frac{1}{2}(z\dot{z} - \mathrm{XY}).$$

Il est bien entendu que la dérivation $\frac{d}{dt}$, appliquée à z, $\dot{z}$, se rapporte aux coefficients $\frac{\xi}{\sqrt{\mathrm{G}}}$, $\frac{\eta}{\sqrt{\mathrm{G}}}$, $\frac{\mathrm{V}_\xi}{\sqrt{\mathrm{G}}}$, $\frac{\mathrm{V}_\eta}{\sqrt{\mathrm{G}}}$, figurant dans les expressions (22). On peut même traiter $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}$ comme une constante, puisque le terme de W provenant de la dérivation de G s'annule identiquement. En tenant compte des valeurs (15) de V_ξ, V_η, c'est-à-dire de

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathrm{V}_\xi + n'\eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \mathrm{V}_\eta - n'\xi,$$

il vient

$$\frac{d_t z}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}[(\mathrm{V}_\xi + n'\eta)\mathrm{X} + (\mathrm{V}_\eta - n'\xi)\mathrm{Y}] = \dot{z} + \frac{n'}{\sqrt{\mathrm{G}}}(\eta\mathrm{X} - \xi\mathrm{Y}).$$

Les équations (3′) donnent d'ailleurs

$$\frac{d\mathrm{V}_\xi}{dt} = \quad n'\mathrm{V}_\eta + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{f\mathrm{M}}{r} + \mathrm{U}\right),$$

$$\frac{d\mathrm{V}_\eta}{dt} = - n'\mathrm{V}_\xi + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{f\mathrm{M}}{r} + \mathrm{U}\right),$$

et par conséquent

$$\frac{d_t \dot{z}}{dt} = \frac{n'}{\sqrt{\mathrm{G}}}(\mathrm{V}_\eta\mathrm{X} - \mathrm{V}_\xi\mathrm{Y}) + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\left[\mathrm{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{f\mathrm{M}}{r} + \mathrm{U}\right) + \mathrm{Y}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{f\mathrm{M}}{r} + \mathrm{U}\right)\right].$$

Comme, avec les valeurs (22) de z, $\dot{z}$ et (17) de G, on a

$$\frac{1}{2}n'\left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}(\mathrm{V}_\eta\mathrm{X} - \mathrm{V}_\xi\mathrm{Y})z - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}(\eta\mathrm{X} - \xi\mathrm{Y})\dot{z}\right] = \frac{1}{2}n'(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2),$$

l'expression de W prend la forme

$$(25)\qquad \begin{aligned} W = {}& \frac{1}{2} n'(X^2+Y^2) \\ &+ \frac{1}{2} z \frac{1}{\sqrt{G}} \left[X \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{fM}{r}+U\right) + Y \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{fM}{r}+U\right)\right] - \frac{1}{2} \dot{z}^2. \end{aligned}$$

Or l'identité différentielle (24), provenant de la transformation canonique envisagée, montre [1] que W est précisément le terme à ajouter à l'ancienne fonction caractéristique F pour passer à la fonction nouvelle $H(X, Y, t)$.

On tire, partant des (19), (25) et (22),

$$(26)\qquad \begin{aligned} H = F + W = {}& \frac{1}{2} n'(X^2+Y^2) \\ &+ \frac{1}{2G}(\xi X + \eta Y) \left\{ X \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{fM}{r}+U\right) + q\xi \right] \right. \\ &\left. + Y \left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{fM}{r}+U\right) + q\eta \right] \right\}, \end{aligned}$$

et le système transformé, équivalent toujours à l'équation (5), prend la forme définitive

$$(20')\qquad \frac{dX}{dt} = \frac{\partial H}{\partial Y}, \qquad \frac{dY}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X}.$$

Avec les valeurs (9) et (10) de U et de q (ordinairement adoptées en négligeant la parallaxe) on a simplement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{fM}{r}+U\right) + q\xi &= 3 n'^2 \xi, \\ \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{fM}{r}+U\right) + q\eta &= 0, \end{aligned}$$

et en conformité

$$(27)\qquad H = \frac{1}{2} n'(X^2+Y^2) + \frac{3}{2}\frac{n'^2}{G}\xi X(\xi X + \eta Y).$$

Les nouvelles variables X, Y sont liées à φ et θ^* par les formules (21).

---

[1] Comparez MORERA, *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 5e série, t. XII, 1er semestre 1903, p. 113-122); ou bien POINCARÉ, *Leçons, etc.*, t. I, n° 12, p. 13-16.

Il s'ensuit que le point représentatif des intégrales du système canonique (20′) a pour anomalie $\theta^\star + \frac{\pi}{2}$. Mais ce système est linéaire à coefficients périodiques. Il existe donc, d'après le Chapitre précédent, un moyen mouvement asymptotique, toujours le même, quelle que soit la solution envisagée. C'est comme dire qu'il en est ainsi pour $\theta^\star$, et par conséquent aussi pour $\theta = \theta^\star + n't$.

C. Q. F. D.

L'équation du premier ordre dans la seule $\theta^\star$, provenant du système canonique (20′) d'après les valeurs (21) de X, Y, est (nº 3 du Chapitre précédent)

$$\frac{d\theta^\star}{dt} = -\frac{2\,\mathrm{H}}{\mathrm{G}\sin^2\varphi}.$$

Avec l'expression (27) de H, il vient

$$\frac{d\theta^\star}{dt} = -n' + 3n'\frac{r^2 n'}{\mathrm{G}}\cos\varphi^\star \sin\theta^\star \sin(\varphi^\star - \theta^\star), \tag{28}$$

où r, $\varphi^\star$, G sont des fonctions périodiques de t se rapportant à la solution Σ. En première approximation, c'est-à-dire en remplaçant la solution Σ par un cercle de moyen mouvement (absolu) n, on a

$$\mathrm{G} = r^2 n,$$

et en outre (en supposant que l'axe Ox passe par la position initiale du mobile)

$$\varphi = nt,$$

d'où

$$\varphi^\star = (n - n')t.$$

Avec ces valeurs de G et de $\varphi^\star$ l'équation (28) se réduit à une forme déjà connue par Newton, qui avait su en tirer le moyen mouvement du nœud à 2 pour 100 de sa valeur près [1].

Déduction abrégée. — J'ai tenu à donner sous forme explicite le système en X, Y et l'équation (28), définissant directement $\theta^\star$.

Si l'on se contente de mettre à l'abri de toute objection la relation (18)

---

[1] Tisserand, *loc. cit.*, p. 42-43.

entre le moyen mouvement ω du nœud et la g, on peut se tirer d'affaire en peu de mots, ayant égard aux formules de transformation (22) entre z, $\dot{z}$ et X, Y. Les coefficients sont des fonctions périodiques, ayant la même période T des coefficients du système (20) en z, $\dot{z}$. Il s'ensuit que le système transformé en X, Y doit avoir les mêmes exposants caractéristiques. D'autre part le système (20) a à son tour les mêmes exposants caractéristiques de l'équation (5).

On peut donc prendre, même pour le système X, Y, $\pm 2\pi i g$ comme détermination de ces exposants.

C'est assez pour conclure en toute rigueur (n° 2 du Chapitre précédent) que le point représentatif X, Y, ou, ce qui revient au même d'après (21), l'angle θ^* admettent le moyen mouvement asymptotique $\frac{2\pi}{T}(j \pm g)$, j étant un entier. La comparaison avec le mouvement non troublé montre immédiatement (*cf.* n° 2) qu'en entendant par g la détermination voisine de 1,0808, il faut attribuer à j la valeur 1 et adopter le signe —. Ce moyen mouvement est donc exprimé par

$$\frac{2\pi}{T}(1-g) = (n-n')(1-g).$$

L'identité

$$\theta = \theta^* + n't$$

montre que θ possède aussi un moyen mouvement asymptotique, ω, somme du précédent avec n'. On a donc

$$\omega = (n-n')(1-g) + n' = n - (n-n')g.$$

C'est bien la formule qu'il s'agissait d'établir.