

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. VILLAT

## Sur la résistance des fluides

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 28 (1911), p. 203-311

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1911\\_3\\_28\\_\\_203\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1911_3_28__203_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

SUR LA

# RÉSISTANCE DES FLUIDES,

PAR M. H. VILLAT.

---

## INTRODUCTION.

On sait que, dans l'étude du mouvement des fluides parfaits, l'hypothèse de la continuité conduit à des paradoxes tels que celui de d'Alembert <sup>(1)</sup> et reste absolument impuissante à fournir une approximation, même lointaine, pour l'étude des fluides naturels. Même en tenant compte de la viscosité du fluide <sup>(2)</sup> ou du frottement <sup>(3)</sup>, l'hypothèse précédente donne encore des résultats en désaccord absolu avec l'expérience.

En 1847, Stokes, discutant un cas particulier, fut le premier conduit à se demander si l'existence de discontinuités cinématiques n'était pas nécessaire dans le mouvement d'un fluide parfait <sup>(4)</sup>. En 1868, Helmholtz <sup>(5)</sup>, se basant sur des considérations expérimentales, émet l'idée que, dans certains cas, il se forme dans un fluide parfait

---

<sup>(1)</sup> Cf. surtout : U. CISOTTI, *Sul paradosso di d'Alembert* (*Atti del Reale Ist. Veneto di Scienze*, t. LXIII et LXV, parte seconda). — ALMANSI, *Atti della R. Accad. dei Lincei*, 1910, *passim*. — LEVI-CIVITA, *Sulla resistenza dei mezzi fluidi* (*Atti dei Lincei*, 1901).

<sup>(2)</sup> LAMB, *Hydrodyn.*, 1906, p. 318.

<sup>(3)</sup> LEVI-CIVITA, *Sulla resistenza d'attrito* (*Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, 1907).

<sup>(4)</sup> STOKES, *Camb. Phil. Soc. Trans.*, 1847; *Mat. Pap.*, t. I, p. 310.

<sup>(5)</sup> HELMHOLTZ, *Berl. Ber.*, 1868, p. 215; *Phil. Mag.*, t. XLIII; *Wissensch.-Abhandl.*, t. I, p. 146.

des surfaces de discontinuité (surfaces de glissement), le long desquelles deux portions du fluide glissent l'une contre l'autre : par exemple, si un solide se meut dans un fluide, il entraîne derrière lui une masse fluide (sillage) faisant corps avec lui, le reste du fluide étant en mouvement par rapport à lui.

Ce nouveau point de vue répond à la réalité, au moins approximativement <sup>(1)</sup>. On peut faire voir qu'il y répond exactement, comme cas limite : le mouvement ainsi envisagé est probablement celui qui se produirait dans un fluide réel dont la viscosité tendrait vers zéro.

Dans l'ordre d'idées ainsi introduit, et partant d'une méthode édictée surtout par Kirchhoff <sup>(2)</sup>, divers savants étaient parvenus à déterminer le mouvement permanent avec sillage d'un fluide plan autour d'obstacles de formes très particulières (et supposés animés de vitesses constantes) :

Un segment rectiligne perpendiculaire ou oblique à sa vitesse (Helmholtz, lord Rayleigh);

Deux segments rectilignes égaux, également inclinés sur leur vitesse commune (Bobyreff);

Un profil formé d'un certain nombre de segments rectilignes (Joukowski, Michell, Love) <sup>(3)</sup>.

En 1907, un Mémoire fondamental de M. T. Levi-Civita <sup>(4)</sup> a introduit dans la théorie un progrès considérable, en déterminant l'intégrale générale des mouvements plans permanents d'un fluide indéfini autour d'un obstacle immergé. La fonction arbitraire dont M. Levi-Civita fait dépendre le problème est une certaine série entière dont les coefficients (réels) doivent satisfaire à une condition qu'il a indi-

(1) Cf. surtout : MAREY, *Le mouvement des liquides* (*Comptes rendus Ac. Sc.*, 1893, 1901). — AHLBORN, *Ueber den Mechanismus des Hydr. Widders*. Hamburg, Friederichsen, 1902. — RIABOUCHINSKY, *Spectres aérodynamiques* (*Bull. de l'Inst. de Koutchino*, fasc. 3).

(2) KIRCHHOFF, *Vorles. Mechanik*, 22<sup>e</sup> Leçon (traduite dans la Thèse de M. Sautreaux). — RAYLEIGH, *Phil. Mag.*, 1876. — M. BRILLOUIN, *Recherches récentes d'Hydrodynamique* (*Ann. Fac. Sc. de Toulouse*, 1887).

(3) LOVE, *Hydrodyn.*, t. IV, p. 99.

(4) LEVI-CIVITA, *Scie e leggi di resistenza* (*R. C. del Circolo mat. di Palermo*, 1907).

quée, et à diverses égalités et inégalités récemment mises en évidence par M. M. Brillouin dans son cours au Collège de France (1909) <sup>(1)</sup>. Une fois choisie la fonction arbitraire, la méthode de M. Levi-Civita permet de déterminer la forme de l'obstacle et les éléments du mouvement.

La méthode en question est susceptible d'extensions intéressantes. Déjà M. U. Cisotti <sup>(2)</sup> en a très élégamment obtenu la généralisation au cas d'un fluide *dans un canal* rectiligne indéfini, *l'obstacle étant supposé symétrique par rapport à l'axe du canal*, et le mouvement étant également symétrique par rapport à cet axe.

J'ai cherché à obtenir une extension nouvelle, au cas où le fluide est limité par une paroi fixe indéfinie, l'obstacle étant quelconque. Tel est le problème que j'ai tout d'abord résolu dans la première Partie de ce travail.

A cet effet, j'ai déterminé une représentation conforme faisant correspondre, au champ occupé par le fluide en mouvement par rapport au solide, l'*aire intérieure à une demi-couronne circulaire*, dans le plan d'une variable auxiliaire  $\zeta$ , et cela *de façon que les bords du sillage aient leur représentation sur les bords rectilignes de la demi-couronne situés à l'axe réel*. A cause de cette propriété, la fonction  $\Omega(\zeta)$ , à l'aide de laquelle j'exprime tous les éléments du mouvement, peut être prolongée analytiquement dans la demi-couronne qui complète la première, ce qui permet de conclure que la solution générale  $\Omega$  qui convient à notre problème présente la même généralité qu'une certaine série de Laurent à coefficients réels (non tous arbitraires) assujettis à être convergente dans la couronne. Dans ces conditions la connaissance d'une solution particulière  $\Omega_0$  permettra d'écrire l'intégrale générale.

Je suis parvenu à obtenir une fonction particulière  $\Omega_0$ , en introduisant comme forme analytique une série ordonnée suivant les cosinus et sinus des multiples de  $i \log \zeta$  (série analogue à une série de Laurent, à l'ordre des termes près). Je construis tout d'abord une fonction que j'appelle  $\Omega_0^1$  et qui, pour un obstacle formé de deux segments

<sup>(1)</sup> M. BRILLOUIN, *Comptes rendus Ac. Sc.*, 21 novembre 1910.

<sup>(2)</sup> U. CISOTTI, *Sul moto di un solido in un canale* (*R. C. del Circ. mat. di Palermo*, 1909).



rectilignes comprenant un angle quelconque, satisfait à toutes les conditions d'existence et de continuité voulues. La démonstration de la continuité (sauf en deux points de la frontière exclus *a priori*) est le point le plus délicat et résulte d'une application répétée d'un théorème d'Abel.

Ceci posé, je forme, dans tous les cas possibles, une fonction  $\Omega_0$  particulière répondant toujours au problème. D'où je tire l'intégrale générale de la question, sous une forme où la fonction arbitraire est la série de Laurent dont j'ai déjà parlé, et que je serai amené plus loin à remplacer avantageusement par une autre fonction, toute différente.

Revenons au problème du fluide indéfini, résolu par M. Levi-Civita. La fonction arbitraire qu'il a introduite n'a malheureusement aucune liaison apparente avec la forme de l'obstacle; de sorte qu'après les savantes recherches de M. Levi-Civita, et d'autres plus récentes, le problème essentiel restait complètement à résoudre : *Connaissant la forme de l'obstacle, déterminer le mouvement et tous ses éléments.*

La solution de cette question fondamentale, dont M. Levi-Civita avait montré toute la difficulté, fait l'objet de la seconde Partie de ce travail. Je suis parvenu à introduire une nouvelle fonction arbitraire, au moyen de laquelle la solution générale du problème peut facilement s'exprimer, et telle que cette fonction arbitraire possède avec la forme de l'obstacle un lien étroit et évident. Il en résulte que, l'obstacle étant donné *a priori*, on peut immédiatement déterminer les propriétés caractéristiques de la fonction arbitraire qui lui correspond : cette fonction particulière appartient à une certaine classe de fonctions qui correspondent toutes à des obstacles de même forme générale; et il est possible de choisir une fonction appartenant à la classe ci-dessus, de manière qu'elle fournisse un obstacle pratiquement identique à celui qu'on s'est donné.

Je suis parti de ce fait, que l'on connaît la fonction  $\omega(\zeta)$  de M. Levi-Civita, pour un obstacle polygonal. Imaginons alors que le nombre des côtés de cette ligne croisse indéfiniment, de sorte que cette ligne devienne à la limite une courbe donnée, et prenons comme fonction arbitraire celle qui exprime la relation  $\Theta = \Phi(\sigma)$  entre l'inclinaison  $\Theta$  de la tangente en un point du profil de l'obstacle et l'argument  $\sigma$  du point correspondant dans la représentation conforme.

Dans ces conditions, un raisonnement peut-être hardi me conduit, à la limite, à un ensemble de formules dont la légitimité est loin d'être évidente. Cette légitimité se déduit de l'étude approfondie de la fonction  $\Omega(\zeta)$  que j'ai obtenue de cette manière.

Le point capital est la continuité de cette fonction  $\Omega(\zeta)$  dans le cercle  $|\zeta| = 1$ , et *jusque sur son contour* (exception faite de deux points). Là aussi est la plus grosse difficulté. Cette continuité établie, le fait que la partie réelle  $\Theta$  de la fonction  $\Omega$  ainsi constituée prenne, sur la circonférence limite, les valeurs  $\Phi(\sigma)$  achève de légitimer la marche suivie.

J'ai ensuite appliqué mes formules à quelques exemples, où la forme de l'obstacle est donnée d'avance, notamment dans le cas où l'obstacle a l'apparence d'une proue de navire, cas pratique le plus intéressant.

J'ai été ensuite tout naturellement conduit à appliquer la même méthode à l'étude du mouvement d'un fluide limité par une paroi fixe, mouvement dont j'avais déterminé l'intégrale générale dans la première Partie. Là encore, l'introduction d'une nouvelle fonction arbitraire (analogue à la précédente) permet d'obtenir la solution du problème d'une façon qui mette bien en évidence la forme de l'obstacle donné *a priori*.

L'introduction, antérieurement faite, de la fonction  $\Omega'_0$ , joue ici un rôle essentiel; je démontre en effet que la solution générale  $\Omega$  peut toujours recevoir la même forme que  $\Omega'_0$ ; et des propriétés de cette dernière se déduisent celles de la solution générale.

De ces résultats on tire des conclusions analogues à celles qu'on a données pour le fluide indéfini.

De nouvelles extensions de la méthode suivie sont possibles, et j'en exposerai prochainement ailleurs le détail relativement aux problèmes suivants : mouvement d'un solide dans un canal indéfini; écoulement des jets fluides par l'orifice d'un vase de forme donnée, etc. <sup>(1)</sup>.

---

(<sup>1</sup>) Cf. HENRI VILLAT, *Sur le mouvement d'un solide donné dans un fluide limité par une paroi fixe* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1911) (à paraître). — Id., *Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1911) et diverses Notes aux *Comptes rendus Ac. Sc.*, t. CLI, p. 933 et 1034; t. CLII, p. 303 et 680.

Je ne veux pas terminer cette Introduction sans adresser ici mes remerciements à mes Maîtres, et particulièrement à M. M. Brillouin, qui a bien voulu s'intéresser d'une façon constante à mon travail, et dont les encouragements et la bienveillance m'ont été si particulièrement précieux.

## PREMIÈRE PARTIE.

SUR LA RÉSISTANCE DES FLUIDES LIMITÉS PAR UNE PAROI FIXE INDÉFINIE.

### I.

Considérons un fluide plan incompressible, dont nous prendrons la densité pour unité. Supposons ce fluide limité par une paroi fixe rectiligne indéfinie. Parallèlement à cette paroi, un solide  $S$  se déplace d'un mouvement de translation uniforme, avec une vitesse égale à 1 (pour simplifier l'écriture). Admettons qu'on ait atteint un mouvement permanent irrotationnel, avec sillage étendu à l'infini derrière le solide, et faisant corps avec lui.

Soit  $O$  le point du profil du corps  $S$ , sur la partie antérieure, où le courant se divise pour venir entourer l'obstacle. Ce point  $O$  (proue) pourra être un point anguleux, par analogie avec la proue d'un navire; nous le prendrons comme origine d'axes  $Ox$ ,  $Oy$  liés au corps,  $Ox$  étant de sens contraire à la translation, et par suite parallèle à la paroi fixe.

La portion  $\mathcal{A}$  du fluide, en mouvement par rapport au corps, sera séparée du solide et du sillage par une ligne  $L$  formée : d'une partie  $\varpi_1 + \varpi_2$  du profil de l'obstacle, et de deux lignes de discontinuité (lignes libres)  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Sur  $L$  nous admettrons qu'il existe partout une tangente, variable d'une façon continue, sauf peut-être en  $O$ ,  $P_1$  et  $P_2$  (voir *fig. 1*). Sur  $\varpi_1 + \varpi_2$  la courbure variera d'une façon continue, sauf peut-être en  $O$ .

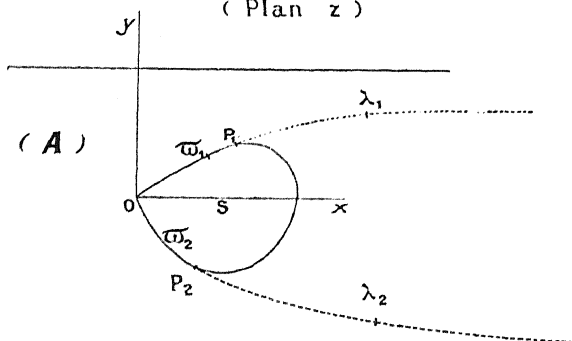
Enfin nous supposons qu'à l'infini (sauf dans le sillage, bien entendu) le fluide, primitivement au repos, n'est pas troublé par le mouvement du corps. De sorte qu'en appelant  $u$  et  $v$  les projections sur  $Ox$  et  $Oy$  de la vitesse d'une particule fluide *relativement au corps*,

on aura, à l'infini,

$$u = 1, \quad v = 0.$$

Rien n'empêche, en imprimant à tout le système une translation

Fig. 1.

( Plan  $z$  )

égale à 1 dans le sens  $Ox$ , d'imaginer que le solide  $S$  est immobile et placé dans un courant fluide de vitesse 1 à l'infini. Nous ferons dorénavant cette hypothèse.

Cela étant, le filet fluide qui tombe sur le corps, au point  $O$ , s'y arrête momentanément, puis se sépare en deux, suivant les deux lignes  $\omega_1 + \lambda_1$  et  $\omega_2 + \lambda_2$ , qui sont des lignes de courant. Les autres filets ne subissent pas d'arrêt. Par suite la vitesse  $V$  dans le fluide est partout positive, sauf en  $O$ , où elle est nulle.

Désignons par  $\varphi$  et  $\psi$  le potentiel et la fonction de courant, lesquels donnent lieu aux équations

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Comme  $\varphi$  et  $\psi$  ne sont définis qu'à une constante près, nous choisirons ces constantes de manière qu'on ait  $\varphi = 0$  et  $\psi = 0$  au point  $O$ . Alors  $\psi$  sera nul tout le long de la ligne  $L$ .

Enfin, pour déterminer la pression en chaque point, on sait qu'on déduit des équations d'Euler la relation

$$p = -\frac{1}{2}V^2 + \text{const.}$$

Dans le sillage, la pression  $p_1$  est constante; ceci ne détermine d'ailleurs pas la constante de l'équation précédente valable dans  $\mathfrak{A}$ , à cause de la discontinuité des vitesses en traversant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Mais, le long de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , l'égalité des pressions sur les deux côtés donne

$$p_1 = -\frac{1}{2}V^2 + \text{const.}$$

La vitesse est donc constante dans  $\mathfrak{A}$  le long des lignes libres et par suite égale à 1, qui est sa valeur à l'infini. D'où :  $\text{const.} = \frac{1}{2} + p_1$  et la pression dans  $\mathfrak{A}$  est

$$(1) \quad p = p_1 + \frac{1}{2}(1 - V^2).$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \\ w &= u - iv, \\ f &= \varphi + i\psi, \end{aligned}$$

il est clair qu'on a

$$(2) \quad \frac{df}{dz} = w;$$

$w$  et  $f$  sont deux fonctions analytiques de  $z$ , régulières dans le champ  $\mathfrak{A}$ ; toutefois les formules

$$\begin{aligned} d\varphi &= u\,dx + v\,dy, \\ d\psi &= -v\,dx + u\,dy \end{aligned}$$

montrent que  $f$  est infini pour  $z$  infini, tandis que  $w$  reste fini.

*Domaine du plan  $f$  correspondant au champ  $\mathfrak{A}$ .* — A la ligne L correspondent pour  $f$  des valeurs réelles. Si l'on parcourt  $\varpi_1 + \lambda_1$  ou  $\varpi_2 + \lambda_2$  en partant du point O,  $f$  partira de zéro et prendra des valeurs positives croissant jusqu'à l'infini. En effet, en appelant  $s$  l'arc d'une de ces lignes de courant, en prenant comme direction positive pour compter les arcs la direction du courant, on a sur ces lignes

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V},$$

d'où

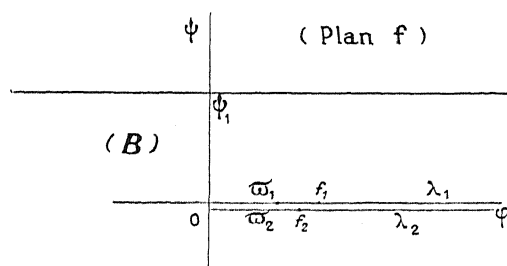
$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = V > 0;$$

donc  $\varphi$  part de zéro et va en croissant; on a montré précédemment qu'il croîtrait indéfiniment.

A la paroi fixe, qui est nécessairement une ligne de courant, puisque la vitesse du fluide y est tangentielle, correspond une valeur constante de  $\psi$  : soit  $\psi_1$ .

D'où l'aire ci-dessous  $\mathfrak{B}$  du plan  $f$ , délimitée par la droite  $\psi = \psi_1$ ,

Fig. 2.



et par la coupure le long de l'axe  $O\varphi$  (fig. 2). Nous appelons  $f_1$  et  $f_2$  les deux points qui correspondent à  $P_1$  et  $P_2$  (points où le sillage se détache de l'obstacle).

Ceci posé, l'équation  $f = f(z)$  effectue la représentation conforme de l'aire  $\mathfrak{A}$  sur le domaine  $\mathfrak{B}$ .

Si le champ  $\mathfrak{A}$  est donné d'avance, tel que l'indique la figure 1, on conclura de suite, — du fait que  $\left| \frac{df}{dz} \right| = V$  n'est jamais nul, sauf au point  $O$ , et du fait que la correspondance est biunivoque entre les contours de  $\mathfrak{A}$  et de  $\mathfrak{B}$ , — que la représentation est conforme. Mais il est bon de remarquer que si, partant du champ  $\mathfrak{B}$ , on construit *a posteriori* le champ  $\mathfrak{A}$  comme nous serons amenés à le faire (voir p. 21 et suiv.), la représentation ne sera conforme que si l'on s'est assuré que le contour du champ  $\mathfrak{A}$  est formé de lignes *ne se coupant pas*, — ce dont on pourra s'assurer dans chaque exemple. [Ce genre de difficulté a été signalé, pour la première fois, par M. M. Brillouin (*Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. CLI, p. 932).]

Nous avons donc le droit de considérer  $z$  comme une fonction de  $f$ ,

régulière et finie dans le domaine  $\mathfrak{B}$ , sauf pour  $f$  infini, cas où  $z$  est également infini.

*La fonction  $\varpi(f)$  et son logarithme  $-i\Omega$ .* — La fonction

$$\varpi = u - iv$$

était, on l'a vu, une fonction de  $z$ , régulière dans  $\mathfrak{A}$ , y compris le point à l'infini, pour lequel  $|\varpi| = 1$ . Nous pouvons donc maintenant considérer  $\varpi$  comme fonction de  $f$ , finie et continue dans  $\mathfrak{B}$ .

$|\varpi|$  sera égal à 1 pour  $f$  réel et supérieur à  $f_1$  ou  $f_2$  (suivant le bord considéré sur la coupure), puisque  $|\varpi| = V$  est égal à 1 sur les lignes libres.

$\varpi$  sera réel,  $v$  étant nul, sur la droite  $\psi = \psi_1$ .

Posons

$$\varpi = e^{-i\Omega}$$

en convenant que  $\Omega$  soit nul pour  $f$  infini ( $|\varpi| = 1$ ).  $\Omega$  sera une fonction uniforme, finie et continue dans  $\mathfrak{B}$ , exception faite pour  $f = 0$ , où  $i\Omega = +\infty$ .

A  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  correspondront des valeurs de  $\Omega$  réelles (point essentiel), car sur ces lignes on a  $|\varpi| = 1$ .

Pour  $\psi = \psi_1$ ,  $\Omega$  est imaginaire pure, car  $\varpi$  est alors réel.

Avant d'aller plus loin, nous allons faire voir que l'on peut, au moyen de deux changements de variables successifs, remplacer le champ  $\mathfrak{B}$  du plan  $f$ , par le domaine intérieur à une certaine demi-couronne dans un nouveau plan  $\zeta$ , de manière que les lignes libres correspondent aux bords de la demi-couronne sur l'axe réel.

*Introduction d'une variable auxiliaire  $t$ .* — Je vais tout d'abord effectuer la représentation conforme de l'aire  $\mathfrak{B}$  sur un demi-plan. A cet effet posons

$$(4) \quad f = A \int \frac{t-a}{t-b} dt,$$

ce qui est équivalent à

$$(5) \quad f = At + A(b-a) \log(t-b) + C.$$

Nous supposons que  $a$  et  $b$  sont deux constantes réelles telles que

$$|a| < 1, \quad b > 1,$$

$A$  est une constante réelle que nous prendrons négative,  $C$  est une constante quelconque. Les quatre constantes  $a, b, A, C$  vont satisfaire à quatre relations que nous allons établir.

Notons qu'en posant

$$t - b = r e^{i\varepsilon},$$

et en convenant de prendre  $\varepsilon = 0$  pour  $t$  réel et  $> b$ , posant encore

$$C = -A(b - a)\pi i + C'$$

(avec  $C'$  réel), notre changement de variable devient

$$(6) \quad f = At + A(b - a)(\log r + i\varepsilon) - A(b - a)\pi i + C'.$$

Cela étant, faisons décrire au point  $t$  l'axe réel de son plan.

Pour  $t$  réel et plus petit que  $b$ , on a  $\varepsilon = \pi$  et  $r = b - t$ ;  $f$  est réel; tant que  $t$  ne dépasse pas  $a$ ,  $\frac{df}{dt}$  est négatif, et  $f$  décroît depuis  $+\infty$  jusqu'à un certain minimum (que nous poserons égal à zéro), en passant par la valeur  $f_2$  que nous supposons atteinte pour

$$t = -1.$$

De  $t = a$  à  $t = b$ ,  $f$  est toujours réel et croît de zéro à  $+\infty$ , en passant par la valeur  $f_1$  que nous supposons atteinte pour

$$t = +1.$$

$t$  arrivant au point  $b$ , évitons ce point par une demi-circonférence de centre  $b$  et de très petit rayon;  $f$  devient alors imaginaire pour  $t > b$ , la partie imaginaire étant constante et égale à  $-A(b - a)\pi i$  (valeur que nous égalerons à  $i\psi_1$ ); quant à la partie réelle, elle va sans cesse en décroissant de  $+\infty$  à  $-\infty$ .

Moyennant les quatre conditions sus-énoncées et qui s'écrivent explicitement

$$(7) \quad Aa + A(b - a)\log(b - a) + C' = 0,$$

$$(8) \quad f_2 = -A + A(b - a)\log(b + 1) + C',$$

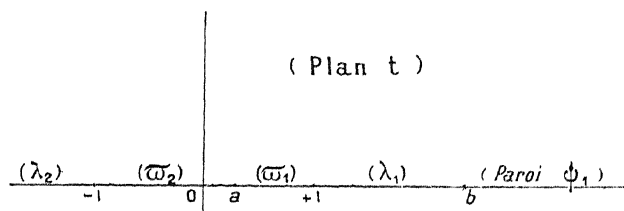
$$(9) \quad f_1 = A + A(b - a)\log(b - 1) + C',$$

$$(10) \quad \psi_1 = -A(b - a)\pi,$$



la relation (6) fait correspondre le domaine  $\mathfrak{B}$  au demi-plan  $t$  supérieur (*fig. 3*). La correspondance est biunivoque ainsi qu'on s'en

Fig. 3.



aperçoit sans peine par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent.

*Introduction d'une nouvelle variable  $\zeta$ .* — Posons maintenant

$$(11) \quad \frac{1}{i} \log \zeta = \frac{1}{i} (\log \rho + i \sigma) = B \int \frac{dt}{\sqrt{4(t^2 - 1)(t - b)}},$$

$\rho$  et  $\sigma$  désignant le module et un argument de la variable  $\zeta$  introduite, et  $B$  désignant une constante réelle.

Par la transformation

$$(12) \quad t = \tau + h$$

réduisons le polynôme sous le radical à la forme canonique privée de terme du second degré. Il suffit de prendre  $h = \frac{b}{3}$  et il vient sans peine

$$F(t) \equiv 4(t^2 - 1)(t - b) \equiv 4\tau^3 - 4\left(1 + \frac{b^2}{3}\right)\tau - \frac{8b}{3}\left(\frac{b^2}{9} - 1\right),$$

de sorte que

$$\frac{1}{i} \log \zeta = B \int \frac{d\tau}{\sqrt{4\tau^3 - 4\left(1 + \frac{b^2}{3}\right)\tau - \frac{8b}{3}\left(\frac{b^2}{9} - 1\right)}}.$$

De là nous tirons, en introduisant la fonction elliptique de Weier-

strass,

$$(13) \quad \tau = p \left( \frac{\log \zeta}{iB} + k \right),$$

$k$  étant une constante, arbitraire pour l'instant.

Aux racines :  $-1, +1, b$ , de  $F(t)$ , correspondent les trois racines du trinôme en  $\tau$ , par ordre de grandeur croissante,

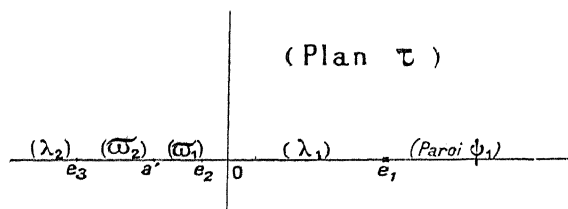
$$(14) \quad e_3 = -1 - \frac{b}{3}, \quad e_2 = 1 - \frac{b}{3}, \quad e_1 = \frac{2b}{3}.$$

Les demi-périodes de la fonction elliptique sont l'une  $\omega$  réelle, l'autre  $\omega'$  purement imaginaire, et données par les formules

$$(15) \quad \omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{4\tau^3 - \dots}}, \quad \frac{\omega'}{i} = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{4\tau^3 - \dots}}.$$

Ceci posé, observons que, lorsque  $t$  décrit l'axe réel de son plan,

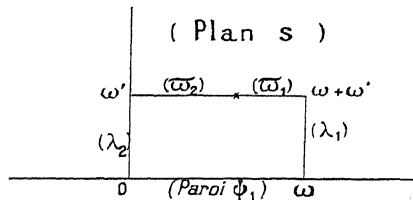
Fig. 4.



$\tau$  en fait autant, comme l'indique la figure 4 ci-dessus. Au point  $t = a$ , correspond  $\tau = a' = a - \frac{b}{3}$ .

Or, si  $s$  représente l'argument  $\frac{\log \zeta}{iB} + k$  de la fonction  $p$ , on connaît

Fig. 5.



la variation de  $p(s)$  lorsque  $s$  décrit dans le sens positif (fig. 5) le

rectangle construit sur les demi-périodes; la fonction  $p(s)$  décroît constamment de  $+\infty$  à  $-\infty$  en passant par les valeurs  $e_1, e_2, e_3$ , pour les sommets du rectangle autres que l'origine; la valeur  $\alpha'$  est atteinte sur le côté supérieur du rectangle.

Revenons maintenant à  $\zeta$ . On a dit que

$$s = \frac{\log \zeta}{iB} + k = \frac{\log \rho + i\sigma}{iB} + k.$$

Supposons que  $B$  soit positif, et que  $k = ik'$  (avec  $k'$  réel). On voit alors immédiatement que :

Si  $s$  varie de  $0$  à  $\omega$ ,  $\rho$  reste constant et égal à  $e^{Bk'}$ ,  $\sigma$  croît de  $0$  à  $B\omega$ ;

Si  $s$  varie de  $\omega$  à  $\omega + \omega'$ ,  $\rho$  varie de  $e^{Bk'}$  à  $e^{B(k' - i\omega')}$ , tandis que  $\sigma$  reste égal à  $B\omega$ ;

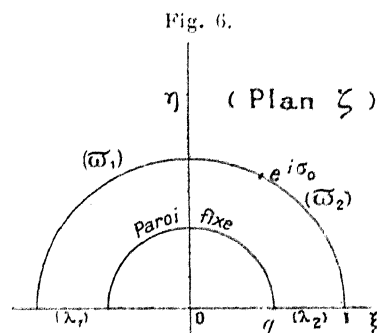
Si  $s$  varie de  $\omega + \omega'$  à  $\omega'$ ,  $\rho$  reste constant et égal à  $e^{B(k' - i\omega')}$ ,  $\sigma$  décroît de  $B\omega$  à  $0$ ;

Si  $s$  varie de  $\omega'$  à  $0$ ,  $\rho$  varie de  $e^{B(k' - i\omega')}$  à  $e^{Bk'}$ , et  $\sigma$  reste constamment égal à  $0$ .

Dans ces conditions, si nous déterminons les constantes  $B$  et  $k'$  par les conditions

$$(16) \quad B = \frac{\pi}{\omega}, \quad k' = i\omega' (< 0),$$

nous voyons que le contour décrit par la variable  $\zeta = \xi + i\eta$  dans son



plan, lorsque  $z$  décrit l'axe réel, est la demi-couronne circulaire de la figure ci-dessus. Le rayon de la grande circonférence est égal à  $1$ , à

cause du choix de  $k'$ , et le point qui correspond à  $t = a$  est situé sur cette circonférence. Quant au rayon de la petite circonférence, il est égal à

$$(17) \quad e^{kk'} = e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}} = q < 1,$$

quantité que nous désignerons par  $q$ , selon les notations habituelles de la théorie des fonctions elliptiques.

Maintenant, du fait que, lorsque le point  $\zeta$  décrit le contour de la demi-couronne,  $\tau$  et par suite  $t$  prennent une succession continue de valeurs toutes distinctes, on conclut, par un raisonnement classique, que la demi-couronne et le demi-plan  $t$  supérieur se correspondent d'une façon biunivoque. Nous avons donc réalisé la représentation conforme annoncée, du champ  $\mathfrak{A}$  du plan  $f$ , sur une demi-couronne (par l'intermédiaire d'une variable auxiliaire  $t$ ), et cela de telle manière que les lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  aient leurs images sur les limites de la demi-couronne situées sur l'axe réel.

Nous appellerons  $\sigma_0$  l'argument (entre 0 et  $\pi$ ) du point de la demi-circonférence de rayon 1, qui correspond à  $t = a$ , ou  $\tau = a'$  (c'est-à-dire en somme à la proue de l'obstacle dans le plan  $\varepsilon$ ). On a donc, d'après l'équation (13),

$$(18) \quad a' = p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 - \omega' \right).$$

Enfin, en éliminant les variables  $t$  et  $\tau$ , on a sans difficulté la relation suivante entre  $f$  et  $\zeta$  :

$$(19) \quad f = \Lambda \left[ \frac{b}{3} + p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \omega' \right) \right] \\ + \Lambda(b-a) \log \left[ -\frac{2b}{3} - p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \omega' \right) \right] + C' - \Lambda(b-a)\pi i.$$

*Détermination des constantes.* — La figure primitive du plan  $\varepsilon$  était caractérisée par les trois constantes  $f_1, f_2, \psi_1$ , toutes trois positives. La transformation à laquelle nous venons de parvenir fait intervenir d'autres constantes, à savoir :  $\Lambda (< 0)$ ,  $b (> 1)$ ,  $\sigma_0$  (entre 0 et  $\pi$ ), les autres constantes apparentes s'exprimant en fonction de celles-là : en effet la donnée de  $b$  détermine  $e_1, e_2, e_3$ , et par suite  $\omega$  et  $\omega'$ , et la

fonction  $p$ . Ensuite on a

$$(20) \quad a = a' + \frac{b}{3} - \frac{b}{3} + p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0 - \omega'\right),$$

valeur dont le module est moindre que 1, puisque,  $\sigma_0$  étant compris entre 0 et  $\pi$ ,  $p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0 - \omega'\right)$  est compris entre  $e_2$  et  $e_3$  (c'est-à-dire entre  $1 - \frac{b}{3}$  et  $-1 - \frac{b}{3}$ ).

Je veux faire voir que la donnée des trois constantes  $f_1, f_2, \psi_1$  est équivalente exactement à la donnée des trois constantes  $\Lambda, b, \sigma_0$ , avec les restrictions

$$f_1 > 0, \quad f_2 > 0, \quad \psi_1 > 0, \quad \Lambda < 0, \quad b > 1, \quad 0 < \sigma_0 < \pi.$$

En premier lieu, les quantités  $f_1, f_2, \psi_1$  s'expriment au moyen des trois autres. En effet, les équations (7), (8), (9), (10) nous donnent, après soustraction de la première aux deux suivantes :

$$(10') \quad \psi_1 = -\Lambda\pi(b-a),$$

$$(21) \quad f_1 = -\Lambda(1-a) + \Lambda(b-a) \log \frac{b-1}{b-a},$$

$$(22) \quad f_2 = -\Lambda(1+a) + \Lambda(b-a) \log \frac{b+1}{b-a},$$

ce qui donne  $f_1, f_2, \psi_1$ .  $\psi_1$  est bien positive, d'après les hypothèses. Pour ce qui est de  $f_1$  et  $f_2$ , observons qu'on peut les écrire, en éliminant  $\Lambda$  au profit de  $\psi_1$ ,

$$(23) \quad f_1 = \frac{\psi_1}{\pi} \left( \frac{b-1}{b-a} - \log \frac{b-1}{b-a} - 1 \right),$$

$$(24) \quad f_2 = \frac{\psi_1}{\pi} \left( \frac{b+1}{b-a} - \log \frac{b+1}{b-a} - 1 \right).$$

Or, si l'on considère la fonction

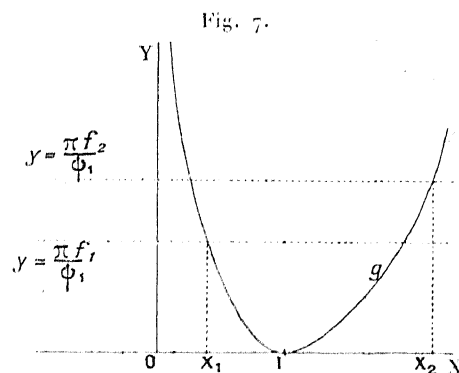
$$Y = X - \log X - 1,$$

il est facile de s'assurer que sa variation est celle qui est représentée par le dessin ci-après, où le minimum a pour abscisse l'unité.

Cette fonction est donc toujours positive, et par conséquent il en est de même de  $f_1$  et  $f_2$ .

Réciproquement, supposons maintenant qu'on se donne  $f_1, f_2, \psi_1$ ; je vais en déduire  $A, b$  et  $a$ .

A cet effet, partons des équations (23) et (24), nous pouvons



affirmer que  $\frac{b-1}{b-a}$  et  $\frac{b+1}{b-a}$  sont les abscisses de deux points situés sur la courbe  $g$  précédente, à l'intersection respectivement avec les droites

$$Y = \frac{\pi f_1}{\phi_1} \quad \text{et} \quad Y = \frac{\pi f_2}{\phi_1}.$$

En observant qu'on doit avoir

$$\frac{b-1}{b-a} < 1, \quad \frac{b+1}{b-a} > 1,$$

les points en question sont déterminés sans aucune ambiguïté, et l'on a,  $X_1$  et  $X_2$  étant des nombres maintenant connus (*voir* la figure),

$$\frac{b-1}{b-a} = X_1, \quad \frac{b+1}{b-a} = X_2.$$

D'où

$$a = \frac{X_1 + X_2 - 2}{X_2 - X_1}, \quad b = \frac{X_1 + X_2}{X_2 - X_1},$$

et l'on s'assure aisément qu'on a bien  $|a| < 1, b > 1$ .

Ceci posé,  $A$  est fourni par l'équation

et il est bien négatif; et, la fonction  $p$  une fois construite, l'équation

$$\alpha = \frac{b}{3} + p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0 - \omega'\right)$$

fait connaître une valeur unique pour  $\sigma_0$  entre 0 et  $\pi$ .

L'équivalence des deux systèmes de constantes est donc bien établie.

*Expression de la différentielle  $df$ .* — Des deux équations (4) et (13) nous déduisons

$$(25) \quad df = \Lambda \frac{b-a}{b} dt, \quad dt = p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \omega'\right) \frac{\omega}{i\pi} \frac{+d\zeta}{\zeta},$$

c'est-à-dire

$$df = \Lambda \frac{p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \omega'\right) + \frac{b}{3} - a}{p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \omega'\right) - \frac{3b}{3}} p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \omega'\right) \frac{\omega}{i\pi} \frac{+d\zeta}{\zeta}.$$

Or on a, d'après la formule d'addition de la fonction  $p$ ,

$$p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \omega'\right) = e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) - e_3},$$

et par suite

$$p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \omega'\right) = - \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\left[p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) - e_3\right]^2} p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right).$$

D'ailleurs

$$\frac{3b}{3} = e_1$$

et

$$\frac{b}{3} - a = -p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0 - \omega'\right) = - \left[ e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3} \right].$$

Ce qui permet d'écrire la différentielle  $df$  sous la forme suivante

$$(26) \quad df = \Lambda \frac{\frac{\omega}{i\pi}(e_3 - e_2)}{\left[p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) - e_2\right] \left[p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) - e_3\right]} \frac{e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) - e_3}}{p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) - e_3} p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) \frac{+d\zeta}{\zeta}$$

ou encore

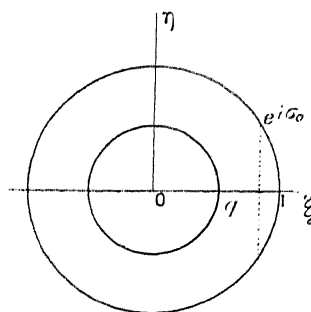
$$(27) \quad df = A \frac{\omega}{i\pi} (e_3 - e_1) (e_3 - e_2)^2 \times \frac{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) \right] p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)}{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - e_3 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) - e_2 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) - e_3 \right]^2} \frac{-d\zeta}{\zeta}.$$

Nous observerons que, la fonction  $p$  étant paire, cette différentielle reste invariable si l'on change  $\zeta$  et  $\frac{1}{\zeta}$ , car cette opération change  $\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta$  en la quantité opposée (à un multiple près de la période  $2\omega$ ).

Cette propriété nous sera utile un peu plus loin.

*Prolongement analytique de la fonction  $\Omega$ .* — Par suite du changement de variable entre  $f$  et  $\zeta$ , la fonction  $\Omega$ , régulière dans le champ  $\mathfrak{A}$  du plan  $f$ , peut être considérée comme une fonction de  $\zeta$  régulière dans la demi-couronne de tout à l'heure. Et, comme  $\Omega$  prend des

Fig. 8.



valeurs réelles le long de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , c'est-à-dire pour les points  $\zeta$  situés sur les bords de la demi-couronne appartenant à l'axe réel  $O\xi$ , elle sera prolongeable analytiquement, selon le principe de Schwartz, dans la demi-couronne symétrique de la première par rapport à  $O\xi$ . Les valeurs prises par  $\Omega$  en deux points  $\zeta$  imaginaires conjugués, seront elles-mêmes imaginaires conjuguées.

Dans ces conditions, la fonction  $\Omega$  sera régulière dans la couronne tout entière. Elle y sera finie et continue, limites comprises, sauf au



point  $\zeta = e^{i\sigma_0}$  (qui correspond à  $f = 0$ , c'est-à-dire à la proue de l'obstacle) et au point conjugué.

$\Omega$  devra être nulle lorsque  $f$  est infini, c'est-à-dire pour  $\zeta = \pm q$ .

Sur la circonférence  $|\zeta| = q$ , qui correspond à la paroi fixe,  $\Omega$  doit être imaginaire pure.

Voyons maintenant comment  $\Omega$  se comporte au voisinage du point  $\zeta = e^{i\sigma_0}$  ou du point conjugué.

En posant

$$(28) \quad \Omega = \Theta + iT$$

(avec  $\Theta$  et  $T$  réels) on a

$$u - iv = e^{-i\Omega} = e^T e^{-i\Theta},$$

d'où

$$(29) \quad V = |u - iv| = e^T, \quad \frac{u + iv}{V} = e^{i\Theta}.$$

Donc la partie réelle  $\Theta$  de  $\Omega$  est l'angle de la vitesse avec  $Ox$ . Observons, en passant, que la condition que  $\Omega$  soit nul pour  $f = \infty$  entraîne que  $\Theta$  s'y annule; les lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ont donc  $Ox$  pour direction asymptotique.

De la signification de  $\Theta$  nous déduisons que, si le point  $\zeta$  tend vers le point  $e^{i\sigma_0}$  ou vers le point conjugué, en restant sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ ,  $\Theta$  tend vers  $\delta + \alpha$  si l'on arrive à gauche d'un de ces points (sur la portion de circonférence correspondant à la paroi  $\varpi_1$ ), et vers  $\delta - \alpha$  si l'on arrive à droite (sur la portion qui correspond à  $\varpi_2$ ). Nous désignons ici par  $2\alpha$  l'angle ( $\leq 2\pi$ ) des deux tangentes en  $O$  à  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  dans le sens du courant; et par  $\delta$  l'angle, plus petit que  $\frac{\pi}{2}$  en valeur absolue, que fait avec  $Ox$  la bissectrice intérieure des deux tangentes en question.

Enfin, de l'équation  $V = e^T$  résulte que, pour  $f$  nul, c'est-à-dire  $\zeta = e^{i\sigma_0}$ ,  $V$  étant nul,  $T$  est égal à  $-\infty$ .

Ceci posé, nous allons maintenant faire voir que tous les éléments géométriques et cinématiques du mouvement peuvent s'exprimer au moyen de  $\zeta$  et de  $\Omega(\zeta)$ .

## II.

EXPRESSION DES ÉLÉMENTS DU MOUVEMENT EN FONCTION DE  $\zeta$  ET  $\Omega(\zeta)$ .

*Lignes de courant.* — Ces lignes ayant pour équation  $\psi = \text{const.}$  on les obtiendra en égalant à une constante le coefficient de  $i$  dans  $f$ , dont l'expression est fournie par l'équation (19). On y parvient aisément en observant que

$$\mathfrak{p}\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \omega'\right) = \mathfrak{p}\left[\frac{\omega}{i\pi}(\log\rho + i\sigma) - \omega'\right] = \mathfrak{p}\left[\frac{\omega}{\pi}\sigma - i\left(\frac{\omega}{\pi}\log\rho + \frac{\omega'}{i}\right)\right].$$

Or la formule d'addition de la fonction  $\mathfrak{p}$  donne

$$\mathfrak{p}(A + B) = \frac{i}{4} \left( \frac{\mathfrak{p}'A + \mathfrak{p}'B}{\mathfrak{p}A - \mathfrak{p}B} \right)^2 = \mathfrak{p}A + \mathfrak{p}B,$$

et par suite ici

$$\mathfrak{p}\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \omega'\right) = \frac{i}{4} \left\{ \frac{\mathfrak{p}'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) + \mathfrak{p}'\left[i\left(\frac{\omega}{\pi}\log\rho + \frac{\omega'}{i}\right)\right]}{\mathfrak{p}\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - \mathfrak{p}\left[i\left(\frac{\omega}{\pi}\log\rho + \frac{\omega'}{i}\right)\right]} \right\}^2 = \mathfrak{p}\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) + \mathfrak{p}\left[i\left(\frac{\omega}{\pi}\log\rho + \frac{\omega'}{i}\right)\right].$$

Et comme  $\mathfrak{p}\left[i\left(\frac{\omega}{\pi}\log\rho + \frac{\omega'}{i}\right)\right]$  est réel, et  $\mathfrak{p}'\left[i\left(\frac{\omega}{\pi}\log\rho + \frac{\omega'}{i}\right)\right]$  imaginaire pure, on a immédiatement la quantité  $\mathfrak{p}\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \omega'\right)$  sous une forme où le réel et l'imaginaire sont séparés. On fera de même pour

$$\log\left[-\frac{2b}{3} + \mathfrak{p}\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \omega'\right)\right] = \log\left[\mathfrak{p}\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \omega'\right) - e_1\right],$$

d'où pour  $\psi$  une expression facile à écrire, et qu'il nous paraît inutile d'expliciter.

*Vitesse et position d'une molécule correspondant à  $\zeta$  donné.* — On a d'après (2)

$$\frac{df}{dz} = w,$$

et par suite

$$dz = \frac{df}{\Omega} = e^{i\Omega} df.$$

D'où, en se rappelant que pour  $z = 0$  on a  $\zeta = e^{i\sigma_0}$ ,

$$(30) \quad z = \int_{e^{i\sigma_0}}^{\zeta} e^{i\Omega} df,$$

où  $df$  a l'expression (27), l'intégrale étant prise sur un chemin quelconque sans sortir de la couronne.

Ceci donne la position de la molécule. On a déjà vu que la vitesse est donnée en grandeur et direction par

$$V = e^T, \quad \frac{u + iv}{V} = e^{i\Theta}.$$

*Élément d'arc.* — Il est égal à

$$(31) \quad |dz| = e^{-T} |df|.$$

*Rayon de courbure d'une ligne de courant.* — L'angle de contingence étant alors  $d\Theta$ , le rayon de courbure est

$$(32) \quad R = e^{-T} \left| \frac{df}{d\Theta} \right|.$$

Sur une des lignes libres, en particulier, on a  $V = e^T = 1$  et le rayon de courbure devient  $\left| \frac{df}{d\Theta} \right|$ .

*Parois  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ .* — Il suffira de prendre l'intégrale (30) le long de la demi-circonférence  $|\zeta| = 1$ , en cheminant du point  $\zeta = e^{i\sigma_0}$  vers le point  $\zeta = -1$  pour  $\varpi_1$ , et vers le point  $\zeta = +1$  pour  $\varpi_2$ . Et comme sur cette demi-circonférence on a  $\zeta = e^{i\sigma}$  ( $0 \leq \sigma \leq \pi$ ) il vient sans peine, en partant de (27), d'abord

$$dz = e^{i\Omega} df = -e^{-T} e^{i\Theta} \frac{\Lambda \omega}{\pi} \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)^2 \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \right] p'\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) d\sigma}{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - e_3 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_2 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_3 \right]^2}$$

puis, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$(33) \quad x = -\frac{\Lambda \omega}{\pi} (e_3 - e_1) (e_3 - e_2)^2 \\ \times \int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{-\Gamma} \cos \Theta \frac{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \right] p'\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right)}{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - e_3 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_2 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_3 \right]^2} d\sigma,$$

$$(34) \quad y = -\frac{\Lambda \omega}{\pi} (e_3 - e_1) (e_3 - e_2)^2 \\ \times \int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{-\Gamma} \sin \Theta \frac{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \right] p'\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right)}{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - e_3 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_2 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_3 \right]^2} d\sigma.$$

L'élément d'arc sur une de ces parois est d'après (31)

$$d\varpi = e^{-\Gamma} \frac{\Lambda \omega}{\pi} (e_1 - e_3) (e_2 - e_3)^2 \frac{\left| p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \right| \left| p'\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \right| d\sigma}{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - e_3 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_2 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_3 \right]^2}$$

D'où l'arc  $\varpi$  :

$$\varpi = \frac{\Lambda \omega}{\pi} (e_1 - e_3) (e_2 - e_3)^2 \\ \times \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{e^{-\Gamma} \left| p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \right| \left| p'\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \right|}{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - e_3 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_2 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_3 \right]^2} d\sigma.$$

Pour  $\varpi_1$ ,  $\sigma$  croît de  $\sigma_0$  à  $\pi$ ; on a alors

$$p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) > 0, \quad p'\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) < 0, \quad d\sigma > 0;$$

donc

$$(35) \quad \varpi = \frac{\Lambda \omega}{\pi} (e_1 - e_3) (e_2 - e_3)^2 \\ \times \int_{\sigma}^{\sigma_0} \frac{e^{-\Gamma} \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \right] p'\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right)}{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - e_3 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_2 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_3 \right]^2} d\sigma.$$

Pour  $\varpi_2$ ,  $\sigma$  décroît de  $\sigma_0$  à 0; on a

$$p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) < 0, \quad p'\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) < 0, \quad d\sigma < 0;$$

donc en remplaçant on constate qu'on obtient pour  $\varpi$  la même expression que dans le premier cas.

L'élément d'arc s'écrit alors

$$(36) \quad d\varpi = -\frac{\Lambda\omega}{\pi}(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2 \frac{e^{-1} \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) \right] p'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) d\sigma}{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_2 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3 \right]^2};$$

d'où le rayon de courbure

$$\frac{d\varpi}{d\theta}.$$

*Lignes libres.* — On les obtient lorsque  $\zeta$  décrit une portion de l'axe réel : de  $-1$  à  $-q$ , pour  $\lambda_1$ ; de  $+1$  à  $q$  pour  $\lambda_2$ .

Soit  $z_1$  l'affixe du point  $P_1$ , où se détache la première ligne libre. On a sur  $\lambda_1$  d'après (30)

$$z = z_1 + \int_{-1}^{\zeta} e^{i\Omega} df.$$

Or, sur l'axe réel,  $\Omega$  est réel et  $\zeta$  également; quant à la différentielle  $df$ , prenons-la sous la forme (27). Sur  $\lambda_1$ ,  $\zeta$  étant entre  $-1$  et  $-q$ , on a

$$\log \zeta = \log \rho + i\pi,$$

puis

$$p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) = p\left(-\frac{i\omega}{\pi} \log \rho + \omega\right) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p\left(-\frac{i\omega}{\pi} \log \rho\right) - e_1},$$

quantité réelle, puisque  $p\left(-\frac{i\omega}{\pi} \log \rho\right)$  est réel. D'autre part, il vient

$$p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) = -\frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) p'\left(-\frac{i\omega}{\pi} \log \rho\right)}{\left[p\left(-\frac{i\omega}{\pi} \log \rho\right) - e_1\right]^2},$$

quantité visiblement imaginaire pure. Nous en concluons que  $df$  se présente sous forme réelle. On peut donc écrire sur  $\lambda_1$  ( $z_1 = x_1 + iy_1$ )

$$(37) \quad \begin{cases} x = x_1 + \int_{-1}^{\zeta} \cos \Omega df, \\ y = y_1 + \int_{-1}^{\zeta} \sin \Omega df. \end{cases}$$

Calcul analogue pour  $\lambda_2$ , où  $\zeta$  est réel entre 1 et  $q$ , de sorte que  $\log \zeta = \log \rho$ ,  $p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)$  est réel, et  $p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)$  imaginaire pure et enfin  $df$  réel.

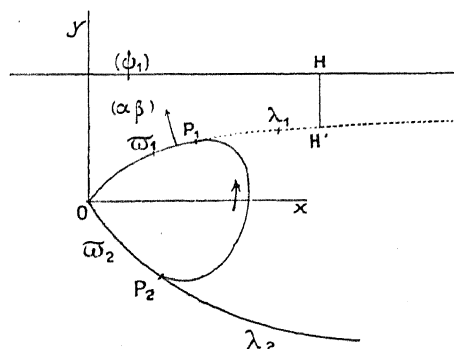
L'arc d'une des lignes  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  est donné par

$$|d\lambda| = |df|.$$

Sur une des lignes libres, l'arc compris entre deux points correspondant à  $\zeta'$  et  $\zeta''$  est égal à  $|f' - f''|$ ,  $f'$  et  $f''$  étant les valeurs de  $f$  correspondantes, fournies par la formule (19).

*Quantité de fluide s'écoulant entre l'obstacle et la paroi.* — Construisons très loin à droite une normale  $HH'$  à la paroi fixe, jusqu'à la rencontre avec la ligne libre  $\lambda_1$ . La quantité  $Q$  de fluide qui s'écoule

Fig. 9.



pendant une seconde entre l'obstacle et la paroi est égale à la largeur  $HH'$  du flux liquide, puisqu'à l'infini la vitesse est horizontale, constante et égale à 1. On a donc

$$38) \quad Q = \int_{HH'} dy = \int_{HH'} u dy - v dx.$$

Mais à cause de  $u = \frac{d\psi}{dy}$ ,  $v = -\frac{d\psi}{dx}$ , on a

$$Q = \int_{HH'} d\psi,$$

et comme  $\psi$  est nul sur  $\lambda_1$ , il vient

$$Q = \psi_1.$$

Q est donc une quantité connue. En même temps, ce qui précède nous apprend que la ligne  $\lambda_1$  a une asymptote parallèle à la paroi fixe, et à une distance de celle-ci égale à  $\psi_1$ .

*Résistance de l'obstacle.* — En appelant  $\alpha$  et  $\beta$  les cosinus directeurs de la normale extérieure à l'obstacle, les pressions élémentaires exercées par le fluide sur l'obstacle ( $-p\alpha ds$ ,  $-p\beta ds$ , sur chaque élément  $ds$  du contour), se composent en une résultante générale  $P_x$ ,  $P_y$ , et un moment résultant M au point O, donnés par les formules

$$(39) \quad P_x = - \int p \alpha ds, \quad P_y = - \int p \beta ds, \quad M = - \int p (\beta x - \alpha y) ds,$$

où les intégrales sont étendues au contour total, parcouru dans le sens direct.

Occupons-nous seulement de  $P_x$  et  $P_y$ . A cause des formules

$$\alpha ds = dy, \quad \beta ds = -dx,$$

on a immédiatement

$$P = P_x + iP_y = - \int p(dy - i dx) = i \int p dz.$$

D'où, en observant qu'on a, d'après (1) :  $p = p_1 + \frac{1}{2}(1 - V^2)$  sur  $P_1OP_2$ , et  $p = p_1$  sur le reste du contour,

$$P = \frac{i}{2} \int (1 - V^2) dz,$$

l'intégrale étant étendue cette fois à l'arc  $P_1OP_2$  seulement. D'où

$$(40) \quad P = \frac{i}{2} \int_{P_1OP_2} (1 - V^2) dz = \frac{i}{2i} \int_{P_1OP_1} (1 - V^2) dz.$$

La résistance ne dépend donc que de l'état du mouvement sur  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ .

Utilisant les formules (2), (3) et (29), nous aurons finalement

$$(41) \quad P = \frac{1}{2i} \int (e^{i\Omega} - e^{2T+i\Omega}) df,$$

l'intégrale étant prise cette fois sur la demi-circonférence  $|\zeta| = 1$ , dans le sens direct, du point 1 au point  $-1$ . Observons maintenant, comme l'a fait M. Levi-Civita dans un cas analogue, que la fonction  $\Omega$  prend des valeurs conjuguées en deux points  $\zeta$  conjugués. Par suite, en deux points :  $\zeta$  et  $\frac{1}{\bar{\zeta}}$ , conjugués sur la circonférence de rayon 1,  $\Theta$  est le même et  $T$  a des valeurs opposées. Donc on a, sur cette circonférence,

$$2T + i\Omega = T + i\Theta = i(\Theta - iT) = i\Omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right).$$

Par suite

$$\int_{(1, i, -1)} e^{2T+i\Omega} df = \int_{(1, i, -1)} e^{i\Omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} df.$$

Rappelons-nous ici que  $df$  n'est pas modifiée par l'échange de  $\zeta$  en  $\frac{1}{\bar{\zeta}}$ ; nous en concluons immédiatement

$$\int_{(1, i, -1)} e^{i\Omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} df = \int_{(1, -i, -1)} e^{i\Omega(\zeta)} df.$$

D'où pour  $P$ ,

$$(42) \quad P = \frac{1}{2i} \int_{|\zeta|=1} e^{i\Omega} df,$$

l'intégrale étant étendue à toute la circonférence  $|\zeta| = 1$ , dans le sens direct.

Or, l'expression de  $e^{i\Omega} df$  sur cette circonférence résulte de la formule (27), où  $\zeta = e^{i\sigma}$ . Nous avons donc finalement

$$(43) \quad P = -\frac{\Lambda_0}{2i\pi} (e_3 - e_1)(e_3 - e_2)^2 \\ \times \int_0^{2\pi} \frac{e^{-T}(\cos\Theta + i\sin\Theta) \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) \right] p'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_2 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3 \right]^2} d\sigma.$$



D'où, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$(44) \quad P_x = - \frac{\Lambda \omega}{2\pi} \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)^2}{\left| p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3 \right|} \\ \times \int_0^{2\pi} e^{-\tau} \sin \Theta \frac{\left| p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) \right| p'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\left| p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_2 \right| \left| p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3 \right|^2} d\sigma,$$

$$(45) \quad P_y = + \frac{\Lambda \omega}{2\pi} \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)^2}{\left| p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3 \right|} \\ \times \int_0^{2\pi} e^{-\tau} \cos \Theta \frac{\left| p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) \right| p'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\left| p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_2 \right| \left| p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3 \right|^2} d\sigma.$$

L'analogie qu'on remarque entre ces formules et celles qui sont intervenues dans le calcul des parois  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  va nous permettre de démontrer les deux résultats suivants (en supposant que l'angle  $\Theta$  sur la paroi reste compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ ):

En désignant par  $x_1, y_1$  les coordonnées du point  $P_1$ , et par  $x_2, y_2$  celles du point  $P_2$ ,

1° La composante  $P_x$  est essentiellement positive, et sa grandeur est inférieure à la demi-distance verticale  $\frac{1}{2}(y_1 - y_2)$  des deux points  $P_1$  et  $P_2$ ;

2° La composante  $P_y$  normale à la paroi est comprise entre les deux limites  $\frac{1}{2}x_2$  et  $-\frac{1}{2}x_1$ .

*2. Limites de  $P_x$ .* — Considérons en effet  $P_x$ . Décomposons l'intégrale qui y figure en une somme de trois autres : relatives aux intervalles

$$0, \sigma_0, \quad \sigma_0, \pi, \quad \pi, 2\pi$$

pour  $\sigma$ . En se reportant aux formules (33) et (34) on voit de

suite que la première intégrale partielle est égale à  $-\frac{1}{2}\gamma_2$  (quantité positive, ce qui du reste était évident); la seconde intégrale est de même  $\frac{1}{2}\gamma_4$ . Dans la partie restante, faisons le changement de variable  $\sigma = 2\pi - \sigma'$  (ce qui revient à remplacer  $\zeta$  par  $\frac{1}{\bar{\zeta}}$ ); on sait qu'alors  $\Omega$  se change en sa conjuguée, donc

$$\Theta(2\pi - \sigma') = \Theta(\sigma'), \quad T(2\pi - \sigma') = -T(\sigma').$$

Par conséquent, en remarquant que

$$p\left[\frac{\omega}{\pi}(2\pi - \sigma')\right] = p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma'\right),$$

il vient, après suppression de l'accent ' :

$$\begin{aligned} & \int_{\pi}^{2\pi} e^{-T} \sin \Theta \frac{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right] p'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_2\right] \left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3\right]^2} d\sigma \\ & - \int_0^{\pi} e^T \sin \Theta \frac{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right] p'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_2\right] \left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3\right]^2} d\sigma. \end{aligned}$$

Or, comme on sait, la vitesse  $V = e^T$  ne peut dépasser la valeur limite 1, qu'elle possède à l'infini; on en conclut que, pour  $0 < \sigma < \pi$ ,  $T$  est négatif, et par suite

$$e^T < e^{-T};$$

donc, en observant que l'expression écrite sous le signe  $\int_0^{\pi}$  est négative dans tout l'intervalle  $0, \pi$ , puisque

$$\begin{aligned} p'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) &< 0, \quad \sin \Theta(\sigma - \sigma_0) > 0, \\ \left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right] &(\sigma - \sigma_0) > 0, \end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
 0 &< -\frac{\Lambda \omega}{2\pi} \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)^2}{\left[ \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3 \right]} \\
 &\times \int_0^{\sigma_0} e^{\mathbf{r}} \sin \Theta \frac{\left[ \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) \right] \wp'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\left[ \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_2 \right] \left[ \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3 \right]^2} d\sigma < \frac{-\gamma_2}{2}, \\
 0 &< -\frac{\Lambda \omega}{2\pi} \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)^2}{\left[ \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3 \right]} \\
 &\times \int_{\sigma_0}^{\pi} e^{\mathbf{r}} \sin \Theta \frac{\left[ \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) \right] \wp'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\left[ \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_2 \right] \left[ \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3 \right]^2} d\sigma < \frac{\gamma_1}{2}.
 \end{aligned}$$

La quantité

$$-\frac{\Lambda \omega}{2\pi} \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)^2}{\left[ \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3 \right]} \int_0^{\pi} e^{\mathbf{r}} \sin \Theta \dots d\sigma$$

est donc en module plus petite que  $\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$ .

Donc enfin la somme des trois intégrales, en lesquelles nous avons décomposé  $P_x$ , est positive (et non nulle) et elle est inférieure à  $\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ .

*Limites de  $P_y$ .* — En suivant exactement la même voie, on décomposera l'intégrale qui représente  $P_y$  en trois autres, dont les deux premières seront égales à  $\frac{1}{2}x_2$  et à  $-\frac{1}{2}x_1$ . La troisième

$$\frac{\Lambda \omega}{2\pi} \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)^2}{\left[ \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3 \right]} \int_{\pi}^{2\pi} e^{-\mathbf{r}} \cos \Theta \dots d\sigma$$

comme précédemment se remplacera par

$$-\frac{\Lambda \omega}{2\pi} \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)^2}{\wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3} \int_0^{\pi} e^{\mathbf{r}} \cos \Theta \dots d\sigma.$$

Ensuite nous aurons les inégalités

$$0 < \frac{A\omega}{2\pi} \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)^2}{p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3} \int_0^{\sigma_0} e^T \cos \Theta \dots d\sigma < \frac{1}{2}x_2,$$

$$0 < -\frac{A\omega}{2\pi} \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)^2}{p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3} \int_{\sigma_0}^{\pi} e^T \cos \Theta \dots d\sigma < \frac{1}{2}x_1,$$

ce qui, en désignant par  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  deux nombres compris entre 0 et 1, nous donne pour  $P_y$

$$P_y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) - \frac{1}{2}\varepsilon_2 x_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 x_1,$$

expression sur laquelle il est clair que  $P_y$  est compris entre les deux limites annoncées :  $\frac{1}{2}x_2$  et  $-\frac{1}{2}x_1$ . On a des résultats analogues si l'on suppose que l'angle  $\Theta$ , sur les parois de l'obstacle, puisse sortir de l'intervalle  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $+\frac{\pi}{2}$ .

### III.

#### L'INTÉGRALE GÉNÉRALE $\Omega$ .

*Forme générale de la fonction  $\Omega$ .* — La fonction  $\Omega$  devait satisfaire, nous l'avons vu, aux conditions suivantes :

- a. Elle est réelle sur l'axe réel;
- b. Elle prend des valeurs conjuguées en deux points  $\zeta$  conjugués;
- c. Elle est régulière, finie et continue dans toute la couronne comprise entre les circonférences de rayons 1 et  $q$ , limites comprises, exception faite du point  $\zeta = e^{i\sigma_0}$  et du point conjugué;
- d. Si le point  $\zeta$ , sur la circonférence de rayon 1, tend vers l'un des deux points précédents, la partie réelle  $\Theta$  de  $\Omega$  tend vers la valeur  $\delta + \alpha$  si l'on arrive à gauche d'un de ces points, et vers la valeur  $\delta - \alpha$  si l'on arrive à droite;  $T$  est alors égal à  $-\infty$ ;
- e.  $\Omega$  doit être imaginaire pure pour  $|\zeta| = q$ ;
- f. Elle doit être nulle pour  $\zeta = \pm q$ .

On peut d'ailleurs supprimer la dernière condition  $f$ , laquelle est

une conséquence de  $\alpha$  et  $e$ , puisqu'en un point commun à l'axe réel et à la circonférence de rayon  $q$ ,  $\Omega$ , devant être à la fois réelle et imaginaire pure, est nécessairement nulle.

Cela étant, si  $\Omega_0$  est une fonction particulière répondant à toutes les conditions précédentes, la fonction  $\Omega - \Omega_0$  sera régulière, réelle sur l'axe réel, finie et continue dans toute la couronne, circonférences limites comprises, sans aucune restriction. Alors cette différence sera développable dans la couronne, en une série de Laurent à coefficients réels, de la forme

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega - \Omega_0 = c_0 + c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \dots + c_n \zeta^n + \dots \\ \quad + d_1 \frac{1}{\zeta} + d_2 \frac{1}{\zeta^2} + \dots + d_n \frac{1}{\zeta^n} + \dots, \end{array} \right.$$

les coefficients  $c_n$  et  $d_n$  étant assujettis à rendre convergente la série précédente.

Il est en outre nécessaire que  $\Omega - \Omega_0$  satisfasse aux conditions :

$\alpha'$ . D'avoir sa partie réelle nulle pour  $\zeta = e^{i\sigma}$  et au point conjugué (ce qui ne fait qu'une condition);

$\beta'$ . D'être imaginaire pure pour  $|\zeta| = q$ .

Pour satisfaire d'abord à cette seconde condition, nous ferons

$$\zeta = q e^{i\sigma}.$$

Alors la partie réelle de  $\Omega - \Omega_0$  s'écrit immédiatement sous la forme

$$c_0 + \left(c_1 q + d_1 \frac{1}{q}\right) \cos \sigma + \dots + \left(c_n q^n + d_n \frac{1}{q^n}\right) \cos n\sigma + \dots$$

Cette expression doit être nulle, par conséquent, quel que soit  $\sigma$  entre 0 et  $2\pi$ . On sait que cela entraîne la nullité de tous les coefficients; d'où les relations

$$(47) \quad c_0 = 0, \quad d_1 = -c_1 q^2, \quad \dots, \quad d_n = -c_n q^{2n}, \quad \dots$$

La fonction  $\Omega - \Omega_0$  est par suite de la forme

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega - \Omega_0 = c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \dots + c_n \zeta^n + \dots \\ \quad - c_1 q^2 \frac{1}{\zeta} - c_2 q^4 \frac{1}{\zeta^2} - \dots - c_n q^{2n} \frac{1}{\zeta^n} - \dots \end{array} \right.$$

La condition  $\alpha'$  fournit entre les coefficients restants  $c_n$  une relation supplémentaire :

$$(49) \quad c_1(1 - q^2) \cos \sigma_0 + c_2(1 - q^4) \cos 2\sigma_0 + \dots + c_n(1 - q^{2n}) \cos n\sigma_0 + \dots = 0.$$

Nous pouvons alors dire que l'équation

$$(50) \quad \Omega = \Omega_0 + \left\{ \begin{array}{l} c_1 \zeta + \dots + c_n \zeta^n + \dots, \\ -c_1 q^2 \frac{1}{\zeta} - \dots - c_n q^{2n} \frac{1}{\zeta^n} - \dots \end{array} \right.$$

sous la restriction (49) constitue l'intégrale générale du mouvement du fluide limité par une paroi fixe, et nous mettons ainsi nettement en évidence le degré de généralité de la solution.

*Remarque.* — Le raisonnement précédent n'échappe pas à une objection relative à la convergence de la série de Laurent (46) sur la frontière de la couronne. La difficulté qui en résulte sera résolue dans un prochain Mémoire [H. VILLAT, *Sur le mouvement d'un solide donné dans un fluide limité par une paroi fixe* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1911)] (à paraître). Cette difficulté, d'ailleurs, ne se présente pas si l'inclinaison  $\Theta$  de la tangente à la paroi de l'obstacle est une fonction de l'argument  $\sigma$ , développable en série trigonométrique.

*Construction et étude d'une solution particulière  $\Omega_0$ .* — Nous allons rechercher une solution particulière sous forme de série procédant suivant les cosinus et sinus des multiples d'une certaine fonction de  $\zeta$ . Pour assurer l'uniformité, nous prendrons cette fonction de  $\zeta$  égale à  $i \log \zeta$  : de la sorte, si le point  $\zeta$  décrit dans la couronne un chemin fermé entourant l'origine,  $i \log \zeta$  augmentera d'un multiple positif ou négatif de  $2\pi$ , et les cosinus et sinus reprendront les mêmes valeurs.

Nous essaierons donc pour  $\Omega_0$  une expression de la forme

$$(51) \quad \Omega_0 = \sum_0^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) \cos(in \log \zeta) + \sum (\gamma_n + i\delta_n) \sin(in \log \zeta),$$

équivalente au fond à une série de Laurent, et dans laquelle  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ , sont des constantes réelles. Ce qui peut s'écrire, en observant

qu'on a ( $\zeta = \rho e^{i\sigma}$ )

$$\begin{aligned} in \log \zeta &= in(\log \rho + i\sigma) = -n\sigma + in \log \rho, \\ \cos(in \log \zeta) &= \cos n\sigma \operatorname{ch}(n \log \rho) + i \sin n\sigma \operatorname{sh}(n \log \rho), \\ \sin(in \log \zeta) &= -\sin n\sigma \operatorname{ch}(n \log \rho) + i \cos n\sigma \operatorname{sh}(n \log \rho), \\ \Omega_0 &= \begin{cases} \sum \alpha_n \cos n\sigma \operatorname{ch}(n \log \rho) - \beta_n \sin n\sigma \operatorname{sh}(n \log \rho) - \gamma_n \sin n\sigma \operatorname{ch}(n \log \rho) \\ \quad - \delta_n \cos n\sigma \operatorname{sh}(n \log \rho) \\ + i \sum \alpha_n \sin n\sigma \operatorname{sh}(n \log \rho) + \beta_n \cos n\sigma \operatorname{ch}(n \log \rho) + \gamma_n \cos n\sigma \operatorname{sh}(n \log \rho) \\ \quad - \delta_n \sin n\sigma \operatorname{ch}(n \log \rho), \end{cases} \end{aligned}$$

c'est-à-dire,  $\Theta_0$  et  $T_0$  étant deux fonctions réelles

$$\Omega_0 = \Theta_0 + iT_0,$$

avec

$$(52) \quad \Theta_0 = \sum \alpha_n \cos n\sigma \operatorname{ch}(n \log \rho) - \beta_n \sin n\sigma \operatorname{sh}(n \log \rho) - \gamma_n \sin n\sigma \operatorname{ch}(n \log \rho) \\ - \delta_n \cos n\sigma \operatorname{sh}(n \log \rho),$$

$$(53) \quad T_0 = \sum \alpha_n \sin n\sigma \operatorname{sh}(n \log \rho) + \beta_n \cos n\sigma \operatorname{ch}(n \log \rho) + \gamma_n \cos n\sigma \operatorname{sh}(n \log \rho) \\ - \delta_n \sin n\sigma \operatorname{ch}(n \log \rho).$$

Il s'agit maintenant de voir si l'on peut, avec cette expression, satisfaire aux conditions  $a, b, c, d, e$ , énoncées précédemment.

Pour que  $\Omega_0$  soit réelle sur l'axe réel, il faut que  $T_0$  soit nul pour  $\sigma = K\pi$ , quel que soit  $\rho$ ,  $K$  étant un nombre entier. Cette condition sera vérifiée si

$$\beta_n = \gamma_n = 0.$$

Alors  $\Omega_0$  se réduira à

$$(54) \quad \Omega_0 = \sum [\alpha_n \operatorname{ch}(n \log \rho) - \delta_n \operatorname{sh}(n \log \rho)] \cos n\sigma \\ + i \sum [\alpha_n \operatorname{sh}(n \log \rho) - \delta_n \operatorname{ch}(n \log \rho)] \sin n\sigma,$$

forme qui vérifie d'elle-même la condition  $b$ , comme il est facile de s'en assurer.

La condition  $e$  indique que  $\Theta_0$  doit être nul pour  $|\zeta| = q$ , c'est-à-dire

qu'on doit avoir

$$\sum [\alpha_n \operatorname{ch}(n \log q) - \delta_n \operatorname{sh}(n \log q)] \cos n\sigma = 0,$$

quel que soit  $\sigma$ . On sait que cela entraîne la nullité de tous les coefficients; il faut donc

$$\alpha_n \operatorname{ch}(n \log q) - \delta_n \operatorname{sh}(n \log q) = 0,$$

et, par suite,  $A_n$  désignant d'autres constantes, on peut poser

$$(55) \quad \begin{cases} \alpha_n = A_n \operatorname{sh}(n \log q), \\ \delta_n = A_n \operatorname{ch}(n \log q). \end{cases}$$

D'où

$$(56) \quad \Omega_0 = \sum A_n \operatorname{sh}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right) \cos n\sigma - i \sum A_n \operatorname{ch}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right) \sin n\sigma.$$

Restent la condition  $c$  et surtout la condition  $d$ . Occupons-nous d'abord de cette dernière.

A cet effet, observons que, pour  $|\zeta| = 1$ ,  $\Theta_0$  se présente sous la forme

$$(57) \quad \Theta'_0 = \sum_1^{\infty} A_n \operatorname{sh}(n \log q) \cos n\sigma.$$

Or c'est là le développement en série trigonométrique d'une certaine fonction de l'argument  $\sigma$  que nous considérerons entre  $-\pi$  et  $+\pi$ ; cette fonction n'est d'ailleurs pas absolument quelconque, car le développement en série manque de terme constant; si l'on remarque que la fonction en question, que nous désignerons par  $\Phi(\sigma)$ , prend la même valeur pour  $\sigma$  et  $-\sigma$ , il en résulte de suite l'inégalité

$$(58) \quad \int_0^{\pi} \Phi(\sigma) d\sigma = 0,$$

obtenue en intégrant de  $-\pi$  à  $+\pi$ , et simplifiant.

J'expliquerai à la fin de ce travail cette restriction relative à la fonction  $\Phi$ , et je montrerai qu'elle est nécessaire (*voir* p. 302).

*Cas d'un obstacle formé de deux segments rectilignes.* — Cette remarque faite, cherchons tout d'abord s'il est possible de s'arranger



pour que  $\Theta'_0$  prenne la valeur constante  $\delta + \alpha$  pour  $\zeta$  à gauche de l'ordonnée du point  $\zeta = e^{i\sigma_0}$ , et la valeur constante  $\delta - \alpha$  à droite de cette ordonnée. La relation de condition (58) donnera actuellement

$$\left[ \text{puisque } \Phi(\sigma) = \begin{cases} \delta - \alpha & (0 < \sigma < \sigma_0) \\ \delta + \alpha & (\sigma_0 < \sigma < \pi) \end{cases} \right]$$

$$(59) \quad (\delta - \alpha)\sigma_0 + (\delta + \alpha)(\pi - \sigma_0) = 0.$$

L'hypothèse faite, que  $\Theta_0$  prenne des valeurs constantes sur les deux portions de la circonférence  $|\zeta| = 1$  qui correspondent aux parois  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  de l'obstacle, implique que celui-ci soit formé de deux segments rectilignes issus de l'origine du plan  $z$ , et faisant avec  $Ox$  les angles  $\delta \pm \alpha$ . Dans ces conditions, nous ne devons pas nous étonner de rencontrer une condition entre les constantes  $\alpha, \delta, \sigma_0$ . M. Levi-Civita, en traitant pour le fluide indéfini le problème de Bobyleff, a été conduit également, quoique sa fonction arbitraire  $\Omega_0$  n'ait aucune analogie avec la nôtre, à une restriction analogue.

Il en résulte actuellement que, des trois paramètres  $A, b, \sigma_0$ , qui fixent, comme on l'a vu, la configuration du solide et de la paroi fixe, l'un,  $\sigma_0$ , est déterminé quand on connaît  $\alpha$  et  $\delta$ . Nous pourrions profiter des deux autres pour donner aux deux segments de l'obstacle des longueurs arbitraires; mais alors la position de la paroi fixe en résulterait. Ou bien, si nous nous donnons cette paroi fixe, nous ne pourrions plus choisir arbitrairement que la longueur d'un des segments. Les longueurs en question sont d'ailleurs déterminées par l'application de la formule (35).

Cela étant, supposons pour le moment la condition (59) vérifiée, et calculons les coefficients  $A_n$ . Il suffit pour cela d'écrire qu'on a

$$\sum A_n \operatorname{sh}(n \log q) \cos n\sigma = \begin{cases} \delta - \alpha & (0 < \sigma < \sigma_0), \\ \delta + \alpha & (\sigma_0 < \sigma < \pi). \end{cases}$$

Multiplions par  $\cos n\sigma d\sigma$ , et intégrons de 0 à  $\pi$ ; il vient, en laissant de côté les termes visiblement nuls dans le résultat,

$$\begin{aligned} A_n \operatorname{sh}(n \log q) \times \frac{\pi}{2} &= (\delta - \alpha) \int_0^{\sigma_0} \cos n\sigma d\sigma + (\delta + \alpha) \int_{\sigma_0}^{\pi} \cos n\sigma d\sigma \\ &= \frac{\delta - \alpha}{n} \sin n\sigma_0 - \frac{\delta + \alpha}{n} \sin n\sigma_0 = -\frac{2\alpha}{n} \sin n\sigma_0. \end{aligned}$$

D'où

$$(60) \quad A_n = -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n \operatorname{sh}(n \log q)}.$$

La fonction  $\Omega_0$  correspondante est donc

$$(61) \quad \Omega_0^1 = \Theta_0^1 + iT_0^1 = -\frac{4\alpha}{\pi} \left[ \sum \frac{\operatorname{sh}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right)}{\operatorname{sh}(n \log q)} \frac{\cos n\sigma \sin n\sigma_0}{n} - i \sum \frac{\operatorname{ch}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right)}{\operatorname{sh}(n \log q)} \frac{\sin n\sigma \sin n\sigma_0}{n} \right].$$

Il nous reste à vérifier la convergence et la continuité de cette fonction dans la couronne, limites comprises, exception faite des deux points  $e^{\pm i\sigma_0}$ .

*Convergence et continuité de la fonction  $\Omega_0^1$ .* — Supposons d'abord  $\rho \leq \rho' < 1$ ,  $\rho'$  étant un nombre fixe choisi un peu plus petit que 1. Je dis que la convergence et la continuité sont alors assurées pour  $\Theta_0^1$  et  $T_0^1$ . La démonstration est analogue pour  $\Theta_0^1$  et pour  $T_0^1$ ; je la développe pour  $\Theta_0^1$ .

Dans chaque terme de  $\Theta_0^1$ , les lignes trigonométriques qui figurent ont pour module maximum l'unité; le facteur

$$\frac{\operatorname{sh}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right)}{\operatorname{sh}(n \log q)},$$

qui peut évidemment s'écrire

$$\frac{\operatorname{sh}\left(n \log \frac{\rho}{q}\right)}{\operatorname{sh}\left(n \log \frac{1}{q}\right)},$$

se comporte, pour  $n$  infini, comme

$$\frac{\left(\frac{\rho}{q}\right)^n}{\frac{1}{1 \setminus n}} = \rho^n;$$

plus précisément, on peut s'assurer qu'on a toujours

$$\frac{\text{sh}\left(n \log \frac{\rho}{q}\right)}{\text{sh}(n \log q)} < \rho^n.$$

Alors le terme général de  $\Theta_0^!$  a son module inférieur à la quantité

$$\frac{4\alpha}{\pi} \frac{\rho^n}{n} \leq \frac{4\alpha}{\pi} \frac{\rho'^n}{n}.$$

La série  $\Theta_0^!$  est donc, quel que soit  $\sigma$ , pourvu qu'on ait  $\rho \leq \rho'$ , une série absolument et uniformément convergente. On peut alors choisir  $n$  fixe une fois pour toutes (sur la série de terme général  $\frac{4\alpha}{\pi} \rho'^n$ ), de manière que le reste de la série, à partir du rang  $n$ , soit toujours inférieur à un nombre  $\varepsilon$  donné d'avance arbitrairement petit; ce nombre  $n$  est indépendant de  $\sigma$  et de  $\rho$  ( $\leq \rho'$ ). Ensuite la somme des  $n$  premiers termes de  $\Theta_0^!$  est évidemment une fonction continue des deux variables  $\sigma$  et  $\rho$ . Un raisonnement classique permet alors d'affirmer la continuité de la fonction  $\Theta_0^!$ .

Voyons maintenant ce qui se passe pour  $\rho = 1$  ou voisin de 1.

Pour  $\rho = 1$ ,  $\Theta_0^!$  se réduit à la série trigonométrique dont on est en somme parti, et qui représente  $\delta \pm \alpha$ , suivant les intervalles. Quant à  $T_0^!$ , il prend la forme

$$(62) \quad \frac{4\alpha}{\pi} \sum \frac{\sin n \sigma_0 \sin n \sigma}{n \text{ th}(n \log q)} = - \frac{4\alpha}{\pi} \sum \frac{\sin n \sigma_0 \sin n \sigma}{n \text{ th}\left(n \log \frac{1}{q}\right)},$$

ou encore

$$\frac{2\alpha}{\pi} U(\sigma)$$

avec

$$(63) \quad U(\sigma) = \sum \frac{-2 \sin n \sigma_0 \sin n \sigma}{n \text{ th}\left(n \log \frac{1}{q}\right)}.$$

On a évidemment

$$(64) \quad U(\sigma) = \sum \frac{\cos n(\sigma + \sigma_0) - \cos n(\sigma - \sigma_0)}{n \text{ th}\left(n \log \frac{1}{q}\right)}.$$

Ceci posé, je vais démontrer que la fonction  $U(\sigma)$  et, par suite,  $T'_0$  sont convergentes et continues, quel que soit  $\sigma$ , sauf pour  $\sigma = \pm \sigma_0$  (en considérant par exemple seulement l'intervalle  $-\pi, +\pi$ , pour  $\sigma$ ). A cet effet, j'établirai le lemme suivant :

LEMME. — *La série*

$$(65) \quad W(\lambda) = \sum \frac{\cos n\lambda}{n \operatorname{th} \left( n \log \frac{1}{q} \right)},$$

(qu'il suffit de considérer entre 0 et  $2\pi$ ) est convergente sauf pour  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 2\pi$ .

Je vais faire voir que la somme  $S_{n+p} - S_n$  d'un nombre quelconque de termes pris à partir du  $n^{\text{ième}}$  tend vers zéro pour  $n$  infini, quel que soit  $p$ .

Observons d'abord que la série

$$\frac{\cos \lambda}{1} + \frac{\cos 2\lambda}{2} + \dots + \frac{\cos n\lambda}{n} + \dots$$

est convergente et égale à  $\log \left( 2 \sin \frac{\lambda}{2} \right)$ , sauf pour  $\lambda = 0$ , ou  $\lambda = 2\pi$  (Cf. PICARD, *Analyse*, t. II, p. 129). De là résulte que les sommes d'un nombre quelconque de termes de cette dernière série sont assurément comprises entre deux nombres fixes.

Plus précisément, posons

$$(66) \quad s_{n+K} - s_n = \frac{\cos(n+1)\lambda}{n+1} + \dots + \frac{\cos(n+K)\lambda}{n+K}.$$

Remarquons que les sommes telles que  $\cos(n+1)\lambda + \dots + \cos(n+r)\lambda$ , sont, d'après une formule élémentaire, et en supposant  $\lambda$  non nul, comprises entre

$$-\frac{1}{\sin \frac{\lambda}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sin \frac{\lambda}{2}}.$$

Remarquons en outre que les facteurs

$$\frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n+K}$$

sont positifs et décroissants. Alors l'application d'un théorème d'Abel nous permet d'affirmer qu'on a

$$-\frac{1}{\sin \frac{\lambda}{2}} \frac{1}{n+1} < s_{n+k} - s_n < \frac{1}{\sin \frac{\lambda}{2}} \frac{1}{n+1}.$$

Ceci posé, revenons à  $W(\lambda)$ , et considérons-y la somme

$$(67) \quad S_{n+p} - S_n = \left[ \frac{\cos(n+1)\lambda}{n+1} \right] \frac{1}{\operatorname{th} \left[ (n+1) \log \frac{1}{q} \right]} + \dots \\ + \left[ \frac{\cos(n+p)\lambda}{n+p} \right] \frac{1}{\operatorname{th} \left[ (n+p) \log \frac{1}{q} \right]}.$$

D'une part, nous venons de voir que des sommes de termes de la forme  $\frac{\cos m\lambda}{m}$  sont comprises entre

$$-\frac{1}{\sin \frac{\lambda}{2}} \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sin \frac{\lambda}{2}} \frac{1}{n+1}.$$

D'autre part, les quantités

$$\frac{1}{\operatorname{th} \left[ (n+1) \log \frac{1}{q} \right]}, \quad \dots, \quad \frac{1}{\operatorname{th} \left[ (n+p) \log \frac{1}{q} \right]},$$

sont positives et décroissantes. Donc, une nouvelle application du théorème d'Abel nous permet d'écrire les inégalités :

$$(68) \quad -\frac{1}{\sin \frac{\lambda}{2}} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\operatorname{th} \left[ (n+1) \log \frac{1}{q} \right]} < S_{n+p} - S_n < \frac{1}{\sin \frac{\lambda}{2}} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\operatorname{th} \left[ (n+1) \log \frac{1}{q} \right]}.$$

Et par suite, à condition que  $\lambda$  ne soit pas nul ou égal à  $2\pi$ , on voit que  $|S_{n+p} - S_n|$  tend vers zéro pour  $n$  infini, quel que soit  $p$ , et la série  $W(\lambda)$  est convergente.

Elle est même *uniformément convergente* dans tout intervalle ne comprenant pas la valeur zéro. En effet, si  $\sin \frac{\lambda'}{2}$  est la valeur mini-

mum de  $\sin \frac{\lambda}{2}$  dans l'intervalle en question, on aura constamment

$$|S_{n+p} - S_n| < \frac{1}{\sin \frac{\lambda'}{2}} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\text{th}(n+1) \log \frac{1}{q}}.$$

Or on peut s'arranger pour choisir  $n$  fixe, indépendant de  $\lambda$ , de sorte que le second membre de l'inégalité précédente soit inférieur à un nombre  $\varepsilon$  donné à l'avance arbitrairement petit : ce qui légitime notre assertion.

Nous en concluons immédiatement que la fonction  $W(\lambda)$  est bien continue, sauf pour  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 2\pi$ .

La fonction  $U(\sigma)$  peut maintenant s'écrire sous la forme

$$(69) \quad U(\sigma) = W(\sigma + \sigma_0) - W(\sigma - \sigma_0).$$

Elle est donc une fonction de  $\sigma$  continue, sauf pour  $\sigma = \pm \sigma_0$ .

C. Q. F. D.

La fonction  $\Omega_0^1$  est donc continue sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ , à l'exception près signalée.

La continuité de  $\Omega_0^1$  est-elle assurée au voisinage de cette circonférence  $|\zeta| = 1$ ? Telle est la question qu'il nous faut maintenant résoudre. Ici encore c'est le théorème d'Abel qui va nous permettre de conclure. La démonstration sera la même, à peu de choses près, pour  $\Theta_0^1$  et pour  $T_0^1$ . Prenons par exemple  $T_0^1$ .

En un point de la circonférence, d'argument  $\sigma (\neq \pm \sigma_0)$ , on a, pour  $T_0^1$ , la valeur

$$(70) \quad t = \frac{4\alpha}{\pi} \sum \frac{\sin n\sigma_0}{n \text{ sh}(n \log q)} \text{ch}(n \log q) \sin n\sigma.$$

En un point au voisinage, *sur le rayon qui aboutit au point précédent*,  $T_0^1$  a la valeur

$$(71) \quad t' = \frac{4\alpha}{\pi} \sum \frac{\sin n\sigma_0}{n \text{ sh}(n \log q)} \text{ch}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right) \sin n\sigma.$$

Si nous appelons  $u_n$  le terme général de la série convergente  $t$ , le

terme de même rang de  $t'$  sera

$$u_n \frac{\operatorname{ch}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right)}{\operatorname{ch}(n \log q)} = u_n \mu_n,$$

en posant

$$\mu_n = \frac{\operatorname{ch}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right)}{\operatorname{ch}(n \log q)} = \frac{\frac{q^n}{\rho^n} + \frac{\rho^n}{q^n}}{q^n + \frac{1}{q^n}} = \left[ \frac{\operatorname{ch}\left(n \log \frac{\rho}{q}\right)}{\operatorname{ch}\left(n \log \frac{1}{q}\right)} \right].$$

Or les nombres  $\mu_n$  sont plus petits que 1. Cela tient à ce fait que

$$\log \frac{\rho}{q} < \log \frac{1}{q} \quad \left( \frac{\rho}{q} < \frac{1}{q} \right),$$

joint à cet autre, que la fonction  $\operatorname{ch}$  est une fonction croissante lorsque son argument est positif.

En outre, ces nombres  $\mu_n$  sont positifs et vont en décroissant quand  $n$  croît. En effet, l'inégalité

$$\mu_{n+1} < \mu_n$$

revient à

$$\frac{\left(\frac{\rho}{q}\right)^{n+1} + \left(\frac{q}{\rho}\right)^{n+1}}{\frac{1}{q^{n+1}} + q^{n+1}} < \frac{\left(\frac{\rho}{q}\right)^n + \left(\frac{q}{\rho}\right)^n}{\frac{1}{q^n} + q^n},$$

inégalité qui peut s'écrire, après un calcul élémentaire,

$$\frac{1-\rho}{q^{2n+1}\rho^{n+1}}(\rho^{2n+1} - q^{2n+2}) + \left(\frac{\rho}{q^2} - 1\right)(1 - \rho^{2n+1})\frac{q}{\rho^{n+1}} > 0.$$

Or on a, puisque le point  $\rho e^{i\sigma}$  est dans la couronne,

$$1 > \rho, \quad \rho > q > q^2, \quad \frac{\rho}{q^2} - 1 > 0;$$

L'inégalité précédente est donc évidente.

Cela étant, observons qu'on a

$$(72) \quad t - t' = \sum u_n - \sum u_n \mu_n = u_1(1 - \mu_1) + \dots + u_n(1 - \mu_n) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mu_n.$$

La série  $\iota$  étant convergente, on peut choisir  $n$  fixe assez grand pour qu'on ait, quel que soit  $p$ ,

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$\varepsilon$  étant un nombre positif donné d'avance aussi petit qu'on veut.

$n$  étant ainsi choisi, on a

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} u_n \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puis le théorème d'Abel nous permet d'écrire, puisque les  $\mu_n$  sont positifs décroissants,

$$|u_{n+1}\mu_{n+1} + u_{n+2}\mu_{n+2} + \dots + u_{n+p}\mu_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{3}\mu_{n+1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On aura donc

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} u_n \mu_n \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Enfin, les  $\mu_n$  tendant vers 1 lorsque  $\rho$  tend vers 1, on peut choisir  $\rho$  assez voisin de 1 pour que

$$|u_1(1 - \mu_1) + u_2(1 - \mu_2) + \dots + u_n(1 - \mu_n)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dans ces conditions, on a

$$|\iota - \iota'| < \varepsilon,$$

pour  $\rho$  suffisamment voisin de 1.

La continuité de  $T_0^1$  est donc démontrée, lorsqu'on s'approche de la circonférence extérieure de la couronne, en suivant le rayon. (Le mode de raisonnement que nous venons d'employer est d'ailleurs classique dans la théorie des séries entières.)

La continuité subsiste quel que soit le chemin, intérieur à la couronne, suivi pour atteindre la circonférence de rayon 1 (bien entendu, les points d'arguments  $\pm \sigma_0$  sont toujours exceptés).

Considérons en effet un arc  $JJ'$  de la circonférence en question ne comprenant pas un des points exclus; la série  $\Sigma u_n$  étant convergente



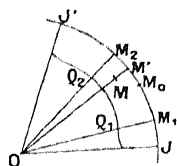
uniformément sur cet arc, on peut,  $\varepsilon$  étant donné, choisir  $n$  une fois pour toutes, de manière que, tout le long de cet arc

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

quel que soit  $p$ .

Ceci posé, à chaque valeur de  $\sigma$  correspond une valeur  $\rho_1$  de  $\rho'$ , infé-

Fig. 10.



rieure à 1, telle que pour  $1 \geq \rho \geq \rho_1$  on ait

$$|\iota - \iota'| < \varepsilon.$$

Nous tracerons sur la figure le lieu des points  $\rho_1 e^{i\sigma}$ . Soit maintenant  $M_0$  un point quelconque de l'arc ci-dessus, entre J et J'; on peut déterminer un arc  $M_1 M_2$  ayant ce point pour milieu, tel que, en tout point de  $M_1 M_2$ , la valeur de  $T_0^1$  diffère de celle qu'elle prend au point  $M_0$ , de moins de  $\varepsilon$ . Dans ces conditions, les valeurs de  $T_0^1$  en  $M_0$  et en un point M quelconque du petit domaine  $Q_1 M_1 M_2 Q_2 Q_1$  diffèrent de moins de  $2\varepsilon$ . Il suffit de prendre comme intermédiaire la valeur au point  $M'$ ; alors

$$|(T_0^1)_M - (T_0^1)_{M'}| < \varepsilon, \quad |(T_0^1)_{M_0} - (T_0^1)_{M'}| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |(T_0^1)_M - (T_0^1)_{M_0}| < 2\varepsilon.$$

La continuité est donc assurée lorsqu'on tend vers  $M_0$  en suivant un chemin quelconque intérieur à la couronne.

Des considérations analogues seront valables pour la fonction  $\Theta_0^1$  au voisinage de la circonférence  $|\zeta| = 1$ . Les nombres  $\mu'_n$ , qui joueront dans la démonstration le rôle des nombres  $\mu_n$  de tout à l'heure, seront ici

$$\mu'_n = \frac{\text{sh} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right)}{\text{sh} (n \log q)} = \frac{\text{sh} \left( n \log \frac{\rho}{q} \right)}{\text{sh} \left( n \log \frac{1}{q} \right)}.$$

Ces nombres sont évidemment positifs, et plus petits que 1.

Le fait que  $\mu'_n$  décroisse constamment quand  $n$  croît est un peu moins évident. Mais l'inégalité

$$\mu'_{n+1} < \mu'_n$$

donne ici

$$\frac{\frac{\rho^{n+1}}{q^{n+1}} - \frac{q^{n+1}}{\rho^{n+1}}}{\frac{1}{q^{n+1}} - q^{n+1}} < \frac{\frac{\rho^n}{q^n} - \frac{q^n}{\rho^n}}{\frac{1}{q^n} - q^n},$$

ou, par une réduction facile,

$$\frac{(1-\rho)(q^{2n+1}-q^{2n+2})}{q^{2n}} - (\rho-q^2)(1-\rho^{2n+1}) > 0.$$

Or on peut diviser par les quantités positives  $1-\rho$  et  $\rho-q^2$ , et il reste à vérifier

$$\rho^{2n} + \rho^{2n-1}q^2 + \dots + q^{2n} - q^{2n}(1+\rho+\rho^2+\dots+\rho^{2n}) > 0,$$

ce qu'on écrira sous la forme

$$\begin{aligned} & \rho^{2n}(1-q^{2n}) + \rho^{2n-1}q^2(1-q^{2n-2}) + \dots \\ & + \rho^{n+1}q^{2n-2}(1-q^2) + \rho^{n-1}q^{2n}(q^2-1) + \dots + q^{2n}(q^{2n}-1) > 0, \end{aligned}$$

ou enfin

$$\begin{aligned} & (1-q^{2n})(\rho^{2n}-q^{2n}) + \rho q^2(1-q^{2n-2})(\rho^{2n-2}-q^{2n-2}) + \dots \\ & + \rho^{n-1}q^{2n-2}(1-q^2)(\rho^2-q^2) > 0. \end{aligned}$$

L'inégalité est alors évidente, à cause de  $\rho > q$ ,  $q < 1$ .

La démonstration s'achève alors comme ci-dessus.

En conséquence, la fonction  $\Omega_0^1$  satisfait à toutes les conditions requises, et elle résout complètement le problème proposé, pour un obstacle formé de deux segments rectilignes issus du point O dans le plan  $z$ .

Est-il besoin de faire remarquer que, si l'on a

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \delta = 0,$$

et par suite alors  $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$ , par la condition (59), les deux segments

$\varpi_1$  et  $\varpi_2$  sont en prolongement l'un de l'autre, et l'on a affaire à une lame unique perpendiculaire au courant général. Dans ce cas la résistance est normale à la lame.

Il n'y a qu'à transporter la fonction  $\Omega_0^1$  dans les formules générales démontrées antérieurement, pour obtenir immédiatement la longueur des deux segments  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ , la résistance correspondante et tous les éléments du mouvement.

Ce qui précède constitue la généralisation, au cas d'un fluide limité par une paroi rectiligne indéfinie, des problèmes de Helmholtz et de Bobyleff<sup>(1)</sup>.

*Cas d'un obstacle polygonal.* — Revenons à l'équation (57), qui donnait pour  $\Theta_0'$ , valeur de  $\Theta$  sur le cercle de rayon 1, l'expression

$$(57') \quad \Theta_0' = \sum_1^{\infty} \Lambda_n \operatorname{sh}(n \log q) \cos n\sigma.$$

Cette expression peut convenir, comme nous l'avons dit, au développement en série trigonométrique d'une fonction  $\Phi(\sigma)$  satisfaisant à

$$(58') \quad \int_0^{\pi} \Phi(\sigma) d\sigma = 0.$$

Considérons sur la demi-circonférence supérieure  $|\zeta| = 1$ ,  $N - 1$  points d'arguments (entre 0 et  $\pi$ ):

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \dots, \quad \sigma_p (= \sigma_0), \quad \dots, \quad \sigma_{N-1},$$

et imposons à la fonction  $\Phi(\sigma)$  la condition d'être égale à

$$\begin{array}{lll} \theta_1 & \text{pour} & 0 < \sigma < \sigma_1, \\ \theta_2 & \text{»} & \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, \\ \dots & \text{»} & \dots\dots\dots, \\ \theta_N & \text{»} & \sigma_{N-1} < \sigma < \pi, \end{array}$$

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$  étant constants.

---

(1) Je suis parvenu récemment à donner à la fonction  $\Omega_0^1$  une forme remarquable, extrêmement simple, par l'introduction de certaines fonctions elliptiques. (Voir mon Mémoire du *Journal de Mathématiques*, déjà signalé, et *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. CLII, p. 303.)

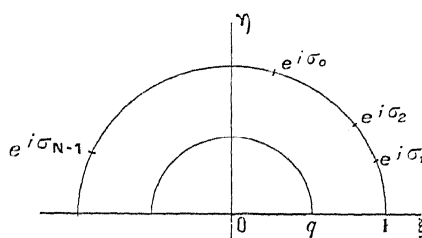
Le contour de l'obstacle correspondant sera un contour polygonal formé de  $N$  segments rectilignes, faisant avec  $Ox$  respectivement les angles  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ .

La condition (58) nous imposera ici qu'on ait

$$(73) \quad \theta_1 \sigma_1 + \theta_2 (\sigma_2 - \sigma_1) + \dots + \theta_N (\pi - \sigma_{N-1}) = 0.$$

J'expliquerai plus loin la nécessité de cette relation (voir p. 302); elle implique que le contour polygonal satisfasse à une certaine

Fig. 11.



condition, si la position de la paroi fixe est donnée; si au contraire on se donne complètement et arbitrairement le polygone, la paroi fixe en résultera.

Cette remarque faite, les coefficients  $A_n$  s'obtiendront en intégrant la série qui doit représenter la fonction  $\Phi(\sigma)$  actuelle, entre 0 et  $\pi$ , après multiplication par  $\cos n\sigma d\sigma$ . On trouve ainsi

$$A_n \operatorname{sh}(n \log q) \frac{\pi}{2} = \int_0^{\sigma_1} \theta_1 \cos n\sigma d\sigma + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \theta_2 \cos n\sigma d\sigma + \dots + \int_{\sigma_{N-1}}^{\pi} \theta_N \cos n\sigma d\sigma;$$

d'où

$$A_n = \frac{2}{\pi n \operatorname{sh}(n \log q)} [\theta_1 \sin n\sigma_1 + \theta_2 (\sin n\sigma_2 - \sin n\sigma_1) + \dots - \theta_N \sin n\sigma_{N-1}]$$

Et la fonction  $\Omega_0$  correspondante aura pour expression [équation (56)]

$$(74) \quad \Omega_0 = \sum A_n \operatorname{sh}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right) \cos n\sigma - i \sum A_n \operatorname{ch}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right) \sin n\sigma.$$

Cette fonction satisfera à toutes les conditions imposées relativement à la convergence et à la continuité : cela est une conséquence

de ce fait, que  $A_n$  se présente actuellement comme une somme de quantités ayant la même forme que l'expression de  $A_n$  qui convenait à  $\Omega_0^1$ . Sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ , les points où la continuité cessera d'être assurée seront tous les points  $e^{i\sigma_k}$  qui correspondent aux sommets du polygone, et naturellement aussi les points conjugués.

Dans une autre Partie de ce travail, nous ferons voir comment, d'une manière analogue, on peut obtenir la fonction  $\Omega$  qui correspond à un obstacle dont le contour a une allure donnée à l'avance. La solution la plus générale du problème, pour un contour quelconque, pourra s'obtenir à partir de là. (*Voir aussi notre Mémoire Sur le mouvement d'un solide donné dans un fluide limité par une paroi fixe, où le problème se trouve complètement résolu par une tout autre méthode.*)

REMARQUE. — Du point de vue hydrodynamique, les calculs précédents n'ont de sens que lorsque le polygone est concave vers le courant. Cependant, *dans tous les cas, et comme intermédiaire analytique*, les calculs ci-dessus nous seront utiles plus loin, et dans le Mémoire auquel nous venons de reporter.

*Calcul d'une fonction  $\Omega_0$  particulière, dans le cas où la condition (59) n'est pas satisfaite d'elle-même.* — Nous voulons montrer comment l'application de la méthode actuelle permet toujours d'obtenir une fonction  $\Omega_0$  particulière.

Si la condition (59) entre les constantes  $\alpha, \beta, \sigma_0$  se trouve vérifiée d'elle-même, ce qui peut arriver même dans le cas où l'obstacle n'est pas formé de deux segments rectilignes, la fonction  $\Omega_0^1$  construite précédemment répond à la question.

Supposons que la relation (59) ne soit pas vérifiée d'elle-même.

Nous aurons besoin, dans les calculs qui vont suivre, d'utiliser une fonction ayant la même expression littérale que  $\Omega_0^1$ , les constantes  $\alpha, \beta, \sigma_0$  étant maintenant quelconques. Cette fonction sera certainement continue dans les mêmes conditions que  $\Omega_0^1$ , car dans la démonstration de ce fait, relativement à  $\Omega_0^1$ , il n'a été tenu aucun compte de la relation (59).

Cela étant, revenons toujours à l'équation (57)

$$\Theta'_0 = \Sigma A_n \operatorname{sh}(n \log q) \cos n \sigma,$$

qui donne les valeurs prises par  $\Theta_0$  sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ . Il va être possible de déterminer les  $A_n$  pour que le second membre représente le développement d'une fonction  $\Phi(\sigma)$  satisfaisant à (58) et tendant vers  $\delta \pm \alpha$  quand  $\sigma$  tend vers  $\sigma_0$ .

Essayons si l'on peut prendre pour  $\Phi(\sigma)$  une fonction de la forme

$$(75) \quad \Phi(\sigma) = \begin{cases} \delta - \alpha + P(\sigma - \sigma_0) & (0 < \sigma < \sigma_0), \\ \delta + \alpha + P(\sigma - \sigma_0) & (\sigma_0 < \sigma < \pi), \end{cases}$$

où  $P$  soit une constante, à déterminer de manière que l'équation (58)

$$\int_0^\pi \Phi(\sigma) d\sigma = 0$$

soit satisfaite.

Un calcul immédiat conduit à la condition

$$(76) \quad (\delta - \alpha)\sigma_0 + (\delta + \alpha)(\pi - \sigma_0) - P\pi\left(\sigma_0 - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

*Cas où  $\sigma_0 \neq \frac{\pi}{2}$ .* — Donc, si  $\sigma_0$  est différent de  $\frac{\pi}{2}$ , et si l'on peut déterminer les coefficients  $A_n$  de manière que le développement de  $\Theta'_0$  soit celui de la fonction  $\Phi(\sigma)$  (75) précédente, on en conclura une fonction  $\Omega_0$  particulière répondant à la question proposée.

Or, les coefficients  $A_n$  sont déterminés par des équations telles que la suivante

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} A_n \operatorname{sh}(n \log q) = & \int_0^{\sigma_0} [\delta - \alpha + P(\sigma - \sigma_0)] \cos n \sigma d\sigma \\ & + \int_{\sigma_0}^{\pi} [\delta + \alpha + P(\sigma - \sigma_0)] \cos n \sigma d\sigma. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\int_0^{\sigma_0} \cos n \sigma d\sigma + \int_{\sigma_0}^{\pi} \cos n \sigma d\sigma = \int_0^{\pi} \cos n \sigma d\sigma = 0$$

et que

$$\begin{aligned} \int_0^{\sigma_0} \sigma \cos n \sigma d\sigma + \int_{\sigma_0}^{\pi} \sigma \cos n \sigma d\sigma &= \int_0^{\pi} \sigma \cos n \sigma d\sigma \\ &= \left( \frac{\sigma \sin n \sigma}{n} \right)_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin n \sigma}{n} d\sigma \\ &= \left( \frac{\cos n \sigma}{n^2} \right)_0^{\pi} \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{2}{n^2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

De sorte qu'on a

$$\frac{\pi}{2} A_n \operatorname{sh}(n \log q) = -\frac{2\alpha}{n} \sin n \sigma_0 + \begin{cases} 0 & (n \text{ pair}), \\ -\frac{2P}{n^2} & (n \text{ impair}), \end{cases}$$

et

$$(77) \quad A_n = -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n \sigma_0}{n \operatorname{sh}(n \log q)} + \begin{cases} 0 & (n \text{ pair}), \\ -\frac{4P}{\pi} \frac{1}{n^2 \operatorname{sh}(n \log q)} & (n \text{ impair}). \end{cases}$$

Si l'on remarque que  $A_n$  se compose de deux parties, dont la première est justement la valeur littérale du coefficient  $A_n$  qui convenait à la fonction  $\Omega_0^1$  étudiée antérieurement, on en conclura de suite que la fonction actuelle  $\Omega_0$  peut se mettre sous la forme

$$\Omega_0 = \Omega_0^1 + \Omega_0^2,$$

en posant [c/. l'équation (74)] ( $n = 2K + 1$ )

$$\begin{aligned} \Omega_0^2 &= -\frac{4P}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2K+1)^2 \operatorname{sh}[(2K+1) \log q]} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \operatorname{sh} \left[ (2K+1) \log \frac{q}{\rho} \right] \cos(2K+1)\sigma \\ -i \operatorname{ch} \left[ (2K+1) \log \frac{q}{\rho} \right] \sin(2K+1)\sigma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cette fonction  $\Omega_0$  ainsi déterminée satisfait à toutes les conditions imposées. En effet,  $\Omega_0^1$  est bien, comme il a été déjà démontré, continue dans toute la couronne, limites comprises, à l'exception des deux points signalés, et la fonction  $\Omega_0^2$  est partout convergente et continue, sans aucune restriction; ce dernier point tient à la présence,

au dénominateur de chaque coefficient de  $\Omega_0^2$ , du facteur  $(2K+1)^2$ ; il nous paraît inutile d'y insister.

*Cas où  $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$ .* — Dans le cas où  $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$ , l'équation (76) ne détermine plus la constante P, et la forme (75) de  $\Phi(\sigma)$  n'est pas acceptable.

Nous essaierons alors pour  $\Phi(\sigma)$  une expression de la forme

$$(78) \quad \Phi(\sigma) = \begin{cases} \delta - \alpha + P' \left( \sigma - \frac{\pi}{2} \right)^2 & \text{pour } 0 < \sigma < \sigma_0, \\ \delta + \alpha + P' \left( \sigma - \frac{\pi}{2} \right)^2 & \text{pour } \sigma_0 < \sigma < \pi, \end{cases}$$

où P' est une constante à choisir. Voyons si l'on peut alors vérifier la condition (58); cette condition s'écrit ici

$$(79) \quad \int_0^\pi \Phi(\sigma) d\sigma = (\delta - \alpha) \sigma_0 + (\delta + \alpha) (\pi - \sigma_0) + P' \frac{\pi^3}{12} = 0$$

et elle détermine bien P'.

Reste à calculer les coefficients  $A_n$ . On a de suite, en utilisant des calculs antérieurs,

$$\frac{\pi}{2} A_n \operatorname{sh}(n \log q) = -\frac{2\alpha}{n} \sin n \sigma_0 + P' \int_0^\pi \left( \sigma - \frac{\pi}{2} \right)^2 \cos n \sigma d\sigma.$$

Puis :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos n \sigma d\sigma &= 0, \\ \int_0^\pi \sigma \cos n \sigma d\sigma &= \begin{cases} 0 & (n \text{ pair}), \\ -\frac{2}{n^2} & (n \text{ impair}), \end{cases} \\ \int_0^\pi \sigma^2 \cos n \sigma d\sigma &= \left( \frac{\sigma^2 \sin n \sigma}{n} \right)_0^\pi - 2 \int_0^\pi \frac{\sigma \sin n \sigma}{n} d\sigma \\ &= -\frac{2}{n} \left\{ \left( \frac{-\sigma \cos n \sigma}{n} \right)_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos n \sigma}{n} d\sigma \right\} = \frac{2\pi}{n^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\pi}{2} A_n \operatorname{sh}(n \log q) = -\frac{2\alpha}{n} \sin n \sigma_0 + P' \left\{ (-1)^n \frac{2\pi}{n^2} + \pi \frac{[1 - (-1)^n]}{n^2} \right\}.$$



D'où enfin

$$(80) \quad A_n = -\frac{i\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n \operatorname{sh}(n \log q)} + \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ impair,} \\ \frac{iP'}{n^2 \operatorname{sh}(n \log q)}, & \text{si } n \text{ pair,} \end{cases}$$

en remarquant que le coefficient de  $P'$  est nul pour  $n$  impair.

On possède maintenant une fonction  $\Omega_0$  sous la forme

$$\Omega_0 = \Omega_0^1 + \Omega_0^3$$

en posant ( $n = 2K$ ),

$$(81) \quad \Omega_0^3 = iP' \sum_1^{\infty} \frac{1}{4K^2 \operatorname{sh}(2K \log q)} \begin{pmatrix} \operatorname{sh}\left(2K \log \frac{q}{\rho}\right) \cos 2K\sigma \\ -i \operatorname{ch}\left(2K \log \frac{q}{\rho}\right) \sin 2K\sigma \end{pmatrix}.$$

Cette fonction  $\Omega_0$  répond bien à toutes les conditions exigées; car  $\Omega_0^1$  est partout continue dans la couronne, sauf toujours aux deux points exclus; et  $\Omega_0^3$  est partout convergente et continue sans exception dans la couronne, fait qui tient encore à la présence du facteur  $K^2$  au dénominateur de tous ses coefficients.

CONCLUSION GÉNÉRALE. — *Dans tous les cas, nous avons construit une fonction  $\Omega_0$  particulière répondant à la question, c'est-à-dire vérifiant toutes les conditions  $a, b, c, d, e$ , auxquelles elle était assujettie.*

Nous avons donc résolu le problème suivant :

*Trouver la forme générale de la fonction  $\Omega$  correspondant à une forme d'obstacle quelconque.*

D'après l'équation (50) démontrée antérieurement, la fonction  $\Omega$  sera nécessairement de la forme

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + \sum_1^{\infty} c_n \left( \zeta^n - q^{2n} \frac{1}{\zeta^n} \right), \\ &= \Omega_0 + R + iS \quad (R \text{ et } S \text{ réels}) \end{aligned}$$

avec la condition

$$\sum_1^{\infty} c_n (1 - q^{2n}) \cos n\sigma_0 = 0$$

entre les constantes réelles  $c_n$ .

La fonction arbitraire qui subsiste est donc  $R + iS$  ; à chaque forme de cette fonction correspond une forme d'obstacle bien déterminée et un mouvement déterminé. Inversement, en gardant momentanément cette fonction arbitraire, on peut écrire facilement l'équation qui, théoriquement, doit permettre de déterminer  $R + iS$  pour une forme d'obstacle donnée à l'avance : il suffit d'opérer comme l'a fait M. Levi-Civita dans le problème du fluide indéfini.

Si l'on remarque que le rayon de courbure  $r$  de la paroi est une fonction connue de l'inclinaison  $\Theta$  de la tangente sur  $Ox$ , et même une fonction continue, également connue, de  $\Theta - \Theta_0 = R$  [soit  $r(R)$  cette fonction], on en conclura, d'après l'équation (36), que la relation suivante doit avoir lieu sur toute la demi-circonférence supérieure  $|\zeta| = 1$

$$r(R) = - \frac{A \omega (e_3 - e_1) (e_3 - e_2)^2}{\pi \left[ p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right) - e_3 \right]} \frac{e^{-T_0 - S} \left[ p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \right] p' \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) d\sigma}{\left[ p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - e_2 \right] \left[ p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - e_3 \right]^2 (d\Theta_0 + dR)}$$

relation de la forme

$$(82) \quad r(R) \frac{d\Theta_0 + dR}{d\sigma} = \chi(\sigma) e^{-S}$$

où  $\chi(\sigma)$  est une fonction connue de  $\sigma$ , que je me dispense d'écrire.

J'insiste d'autant moins sur cette équation, que je reviendrai ultérieurement, dans la dernière Partie de ce travail, sur l'introduction, en place de  $R + iT$ , d'une autre fonction arbitraire, qui permettra de poser autrement la recherche de la fonction arbitraire correspondant à un obstacle dont le contour présente une allure donnée à l'avance. (Voir, en outre, mon Mémoire déjà cité du *Journal de Mathématiques*. Dans un autre Mémoire, je montrerai comment on peut résoudre complètement le problème traité actuellement *lorsque la paroi fixe*, au lieu d'être rectiligne, a *une forme donnée quelconque*.)

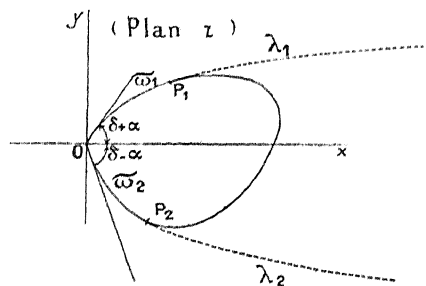
## DEUXIÈME PARTIE.

SUR LE MOUVEMENT D'UN FLUIDE INDÉFINI AUTOUR D'UN OBSTACLE DE FORME DONNÉE.

On sait que M. Levi-Civita, dans un Mémoire fondamental, *Scie e Leggi di Resistenza* (*Circolo mat. di Palermo*, 1907), est parvenu à déterminer l'intégrale générale des mouvements plans permanents, avec sillage, d'un fluide autour d'un obstacle fixe. Sa solution comporte une fonction arbitraire, sous forme d'une série entière dont les coefficients réels sont assujettis à une condition qu'il a donnée dans son Mémoire, et à diverses relations et inégalités, récemment mises en évidence par M. M. Brillouin (Cf. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 21 novembre 1910).

Si l'on se donne *a priori* la fonction arbitraire en question, le profil de l'obstacle correspondant et tous les éléments du mouvement, en

Fig. 12.



particulier la résistance de l'obstacle, sont déterminés par les équations suivantes (Voir le Mémoire de M. Levi-Civita) :

Parois  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  de l'obstacle :

$$(83) \quad z = x + iy = -2a^2 \int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{i\omega} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \sin \sigma \, d\sigma.$$

Élément d'arc d'une paroi :

$$(84) \quad d\varpi = -2a^2 e^{-\tau} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \sin \sigma \, d\sigma.$$

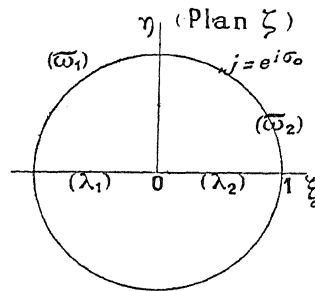
Résistance de l'obstacle ( $P_x$ ,  $P_y$ ) :

$$(85) \quad P_x + iP_y = \frac{\pi a^2}{4} \omega'^2(0) + i \frac{\pi a^2}{2} \left\{ 2 \cos \sigma_0 \omega'(0) - \frac{1}{2} \omega''(0) \right\}.$$

Dans ces équations,  $\sigma$  représente l'argument (entre 0 et  $\pi$ ) du point correspondant à  $z$  dans un plan auxiliaire  $\zeta$ , dans lequel le domaine occupé par le fluide en mouvement est représenté sur le demi-cercle supérieur  $|\zeta| = 1$ .  $\sigma_0$  est l'argument du point qui correspond à l'origine du plan  $z$ , c'est-à-dire au point de l'obstacle où le courant se divise.

$\omega = \theta + i\tau$  est une fonction de  $\zeta$ , régulière dans tout le cercle  $|\zeta| = 1$ , limites comprises, sauf aux points  $e^{i\sigma_0}$  et  $e^{-i\sigma_0}$ .  $\theta$  représente l'angle de

Fig. 13.



la vitesse d'une particule fluide, avec  $Ox$ , et  $e^\tau$  est la vitesse elle-même. C'est dans cette fonction  $\omega$  qu'intervient la série arbitraire dont on a parlé. On a en effet ( $j = e^{i\sigma_0}$ )

$$(86) \quad \omega = \delta + \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{-ij + i\zeta}{1 - j\zeta} - (c_0 + c_1\zeta + \dots + c_n\zeta^n + \dots),$$

Tout ceci étant rappelé, il est clair que le problème pratique véritable relatif à la résistance des fluides consiste, *étant donné à l'avance un profil d'obstacle*, à déterminer le mouvement correspondant, et particulièrement la résistance. Ce qui revient ici à trouver la fonction  $\omega$  qui correspond à ce profil. « C'est là, écrit M. Levi-Civita, un problème fonctionnel du type le plus élevé ». La méthode que nous lui devons ne permet jusqu'ici que de mesurer la difficulté de la question, sans fournir aucun procédé pratique pour l'aborder.

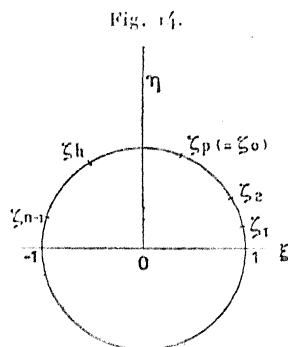
Dans ce qui va suivre, je vais exposer comment je suis parvenu à remplacer la fonction arbitraire de M. Levi-Civita par une autre fonction arbitraire tout à fait différente, et liée d'une façon à la fois intime et évidente à la forme de l'obstacle. Il devient alors possible de déterminer cette nouvelle fonction arbitraire, de manière à obtenir la solution complète du problème, pour un obstacle possédant un profil

d'allure donnée à l'avance, et tout particulièrement pour des obstacles ayant la forme de proue de navire.

Je prendrai mon point de départ dans ce fait, que l'on connaît la fonction  $\omega$  de M. Levi-Civita qui correspond à un contour polygonal [Cf. U. GIROTTI, *Vene fluenti* (*Circolo mat. di Palermo*, 1908, p. 166)].

Du point de vue hydrodynamique, cette solution peut n'avoir du reste aucun sens; nous l'utilisons ici simplement à titre d'*intermédiaire analytique*.

En désignant par  $\zeta_1 = e^{i\sigma_1}$ ,  $\zeta_2 = e^{i\sigma_2}$ , ...,  $\zeta_{n-1} = e^{i\sigma_{n-1}}$ , les points de la demi-circonférence  $|\zeta| = 1$ , qui correspondent aux sommets du



contour polygonal ( $\zeta_p = \zeta_0$  correspondant au point de l'obstacle où le courant se divise), et en désignant par  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  les angles que font avec  $Ox$  les côtés successifs de la ligne ( $\theta_h$  est relatif à l'arc  $\zeta_{h-1}\zeta_h$ ), la fonction  $\omega$  en question est la suivante :

$$(87) \quad \omega(\zeta) = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_n) + \frac{i}{\pi} \left[ (\theta_2 - \theta_1) \log i \frac{\zeta - \zeta_1}{1 - \bar{\zeta}\zeta_1} + (\theta_3 - \theta_2) \log i \frac{\zeta - \zeta_2}{1 - \bar{\zeta}\zeta_2} + \dots \right. \\ \left. + (\theta_n - \theta_{n-1}) \log i \frac{\zeta - \zeta_{n-1}}{1 - \bar{\zeta}\zeta_{n-1}} \right]$$

avec la condition

$$(88) \quad \theta_n = \frac{1}{\pi} [(\theta_2 - \theta_1)\sigma_1 + (\theta_3 - \theta_2)\sigma_2 + \dots + (\theta_n - \theta_{n-1})\sigma_{n-1}]$$

qui exprime que  $\omega$  est nul pour  $\zeta = 0$ .

La détermination de  $\log i \frac{\zeta - \zeta_h}{1 - \bar{\zeta}\zeta_h}$  est celle qui pour  $\zeta = 0$  se réduit à  $\frac{\pi}{2i} \left( 1 - 2 \frac{\sigma_h}{\pi} \right) = -i \frac{\pi}{2} + i \sigma_h$ .

Il est à remarquer que cette fonction  $\omega$  possède comme points singuliers tous les points  $\zeta = e^{i\sigma_h} = \zeta_h$  et aussi tous les points conjugués des précédents. Ce fait est dû à la présence des angles sur la paroi de l'obstacle.

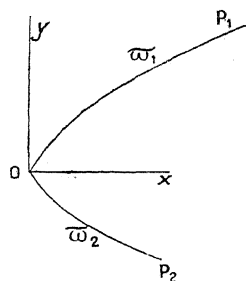
La longueur du côté du polygone, qui correspond à l'arc  $\zeta_h \zeta_{h+1}$ , a pour expression, d'après une formule rappelée ci-dessus,

$$\text{arc } \zeta_h \zeta_{h+1} = -2\alpha^2 \int_{\sigma_h}^{\sigma_{h+1}} e^{-\tau} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \sin \sigma d\sigma.$$

Enfin, la condition (88) impose au polygone une restriction sur laquelle nous reviendrons plus tard. Dans le raisonnement qui va suivre, nous supposerons que les polygones dont il est question satisfassent à cette restriction; la légitimité des opérations ainsi effectuées sera démontrée ensuite.

Ceci posé, imaginons qu'on parte d'un polygone tel que les précédents, et qu'on fasse croître indéfiniment le nombre des côtés de cette ligne, la longueur de chacun d'eux tendant vers zéro, de façon que, à la limite, la ligne polygonale tende vers une certaine courbe. Par exemple, imaginons que les polygones successifs soient tous circonscrits à la courbe finale  $P_1 O P_2$ . Dans ces conditions, les points de

Fig. 15.



subdivision  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}$ , de la demi-circonférence  $|\zeta| = 1$ , correspondant aux sommets du polygone, deviendront en nombre infini, et la distance de deux points  $\zeta_i$  consécutifs tendra vers zéro. En même temps la succession des valeurs  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  deviendra une succession continue, avec peut-être une discontinuité à la proue O.

Soient alors  $\Omega(\zeta)$  la fonction limite de  $\omega(\zeta)$  et  $T$ , de même, la limite de la fonction  $\tau$ .  $\omega$  et  $\tau$ , sont la fonction (87) pour un des polygones ci-dessus, et le coefficient de  $i$  dans celle-ci. L'existence des limites sera légitimée plus loin. L'élément d'arc de la courbe  $P_1OP_2$  est alors

$$2a^2 e^{-T} |\cos \sigma - \cos s_0| \sin \sigma d\sigma,$$

en désignant par  $s_0$  la limite de l'argument  $\sigma_0$  (qui correspond toujours à la proue de l'obstacle).

Or, supposons un instant connue la relation qui existe entre l'inclinaison  $\Theta$  de la tangente à la paroi (dans le sens de la vitesse du fluide), et l'argument  $\sigma$  du point  $e^{i\sigma}$  de la demi-circonférence  $|\zeta| = 1$  qui correspond au point de la paroi considéré. Posons alors

$$(89) \quad \Theta = \Phi(\sigma),$$

$\Phi(\sigma)$  étant une fonction de  $\sigma$ , que nous supposerons continue entre 0 et  $\pi$ , sauf peut-être à la proue ( $\sigma = s_0$ ) et possédant une dérivée continue, sauf peut-être encore au même point. Enfin nous appellerons  $\Phi(s_0 + 0)$  et  $\Phi(s_0 - 0)$  les valeurs vers lesquelles tend  $\Phi(\sigma)$  lorsque  $\sigma$  tend vers  $s_0$ , en lui restant supérieur ou inférieur. Ces hypothèses reviennent à supposer le profil  $OP_1P_2$  de l'obstacle continu, doué d'une tangente en chaque point, cette tangente variant d'une façon continue ainsi que la courbure du profil. Les quantités  $\Phi(s_0 + 0)$  et  $\Phi(s_0 - 0)$  sont les valeurs des angles que font avec  $Ox$  les tangentes en  $O$  aux deux portions  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  du profil.

Dans ces conditions, le rayon de courbure en un point de la paroi aura pour expression

$$R = \frac{2a^2 e^{-T} |\cos \sigma - \cos s_0| \sin \sigma d\sigma}{d\Theta},$$

c'est-à-dire

$$R = \frac{2a^2 e^{-T} |\cos \sigma - \cos s_0| \sin \sigma}{\Phi'(\sigma)}.$$

Or il est clair que, si l'obstacle est donné, le rayon de courbure est une fonction connue de l'angle  $\Theta$  (la donnée de cette fonction détermine d'ailleurs complètement la forme du profil). Soit donc

$$(90) \quad R = R(\Theta)$$

cette fonction. Nous en concluons que  $\Phi(\sigma)$  doit vérifier la relation suivante, pour  $\sigma$  entre 0 et  $\pi$  :

$$(91) \quad R[\Phi(\sigma)] \Phi'(\sigma) = 2\alpha^2 e^{-T} |\cos \sigma - \cos s_0| \sin \sigma.$$

*C'est cette fonction  $\Phi(\sigma)$  qui sera la fonction arbitraire que nous choisirons.*

Elle doit déjà satisfaire à la relation (91), dans laquelle nous allons rechercher l'expression de T, ou plus précisément la valeur [T, que prend T sur la circonférence de rayon 1.

*Calcul de T<sub>1</sub>.* — Un calcul élémentaire (Cf. LEVI-CIVITA, CISOTTI, loc. cit.) montre qu'on a, sur la demi-circonférence supérieure ( $0 < \sigma < \pi$ ),

$$(92) \quad \log i \frac{\zeta - \zeta_h}{1 - \bar{\zeta} \bar{\zeta}_h} = \log \frac{\sin \left| \frac{\sigma_h - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\sigma_h + \sigma}{2}} + \begin{cases} -\frac{i\pi}{2} & (\sigma > \sigma_h) \quad (1) \\ +\frac{i\pi}{2} & (\sigma < \sigma_h) \quad (2). \end{cases}$$

Par suite le coefficient de  $i$  dans l'expression (87) de  $\omega$  est

$$(93) \quad \frac{1}{\pi} \left[ (\theta_2 - \theta_1) \log \frac{\sin \left| \frac{\sigma_1 - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}} + \dots + (\theta_{h+1} - \theta_h) \log \frac{\sin \left| \frac{\sigma_h - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\sigma_h + \sigma}{2}} + \dots \right. \\ \left. + (\theta_n - \theta_{n-1}) \log \frac{\sin \left| \frac{\sigma_{n-1} - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\sigma_{n-1} + \sigma}{2}} \right].$$

Or, considérons notre polygone, circonscrit par exemple à la courbe  $P_1 O P_2$ . Soient  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_h, \dots$  les valeurs de  $\sigma$  qui correspondent aux points de contact *dans la représentation conforme qui convient à la courbe continue*, et  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_h, \dots$  les valeurs de  $\sigma$  qui correspondent aux sommets du polygone *dans la représentation conforme qui convient au polygone*. Dans cette dernière représentation, tout le long de l'arc

(1) Plus généralement, lorsque le point  $e^{i\sigma}$  tombe à gauche de l'ordonnée de  $e^{i\sigma_h}$ .

(2) Ou lorsque le point  $e^{i\sigma}$  tombe à droite de l'ordonnée du point  $e^{i\sigma_h}$ .



$\zeta_h, \zeta_{h+1}, \theta$  a une valeur constante

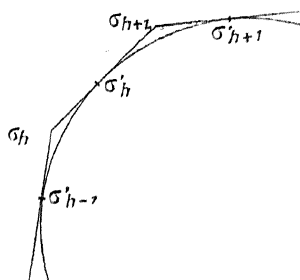
$$\theta_{h+1} = \Phi(\sigma'_h).$$

Donc on a

$$\theta_{h+1} - \theta_h = \Phi(\sigma'_h) - \Phi(\sigma'_{h-1}).$$

En outre, il est *raisonnable* que  $\sigma'_h$  et  $\sigma'_{h-1}$  ont à la limite la même valeur que  $\sigma_h$ . Sans nous arrêter pour l'instant à cette difficulté, et en admettant ce point, nous remarquerons maintenant que toutes les différences  $\theta_{h+1} - \theta_h$  dans la somme (93) tendront vers zéro, sauf celle

Fig. 16.



qui correspond aux deux valeurs de  $\theta$  convenant au voisinage de la proue, de part et d'autre. En mettant à part cette dernière différence, et en nous rappelant que les valeurs de  $\theta$  des deux côtés de la proue sont  $\Phi(s_0 + 0)$  et  $\Phi(s_0 - 0)$ , nous sommes ainsi conduits à penser que la valeur limite de  $\tau$  est

$$(94) \quad T_1 = \frac{1}{\pi} \left\{ [\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0)] \log \frac{\sin \left| \frac{s_0 - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{s_0 + \sigma}{2}} + \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} d\varepsilon \right\}.$$

Un raisonnement analogue nous fournira à la limite, au lieu de la condition (88), la condition suivante :

$$(95) \quad \begin{aligned} &[\theta_n \text{ tend vers } \Phi(\pi) \quad \text{et} \quad \theta_1 \text{ vers } \Phi(0)], \\ \pi \Phi(\pi) &= s_0 [\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0)] + \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon. \end{aligned}$$

Et enfin l'expression (87) de  $\omega$  deviendra

$$(96) \quad \Omega(\zeta) = \left\{ \frac{1}{2} [\Phi(0) + \Phi(\pi)] + \frac{i}{\pi} [\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0)] \log i \frac{\zeta - e^{is_0}}{1 - \zeta e^{is_0}} \right. \\ \left. + \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} d\varepsilon \right\}.$$

REMARQUE. — Il y a dans le raisonnement précédent un point faible que j'ai signalé. Qu'on veuille bien regarder momentanément ces considérations, seulement comme un moyen d'apparence logique, pour nous conduire à un ensemble de formules que je légitimerai ensuite. La marche suivie sera légitimée lorsque j'aurai fait voir que la fonction  $\Omega(\zeta)$ , à laquelle je suis parvenu, satisfait bien à toutes les conditions que la théorie lui impose, notamment à la condition de prendre sur la demi-circonférence  $|\zeta| = 1$  la suite de valeurs  $\theta = \Phi(\sigma)$  donnée.

*Transformation de l'expression de  $T_1$ .* — Considérons tout d'abord la valeur (94) obtenue pour  $T_1$ . Sauf pour  $\sigma = \pm s_0$ , cette valeur est finie. En effet, l'intégrale qui figure dans  $T_1$  reste finie puisque au voisinage de  $\varepsilon = \sigma$  (par exemple) elle se comporte comme

$$\int \log |\varepsilon - \sigma| d\varepsilon = (\varepsilon - \sigma) \log |\varepsilon - \sigma| - (\varepsilon - \sigma),$$

et qu'on sait bien que  $\iota \log |\iota|$  tend vers zéro avec  $\iota$ .

Ceci étant, on peut écrire  $T_1$  sous une forme plus condensée. Observons à cet effet qu'une intégration par parties nous donne

$$\int_0^{s_0-0} \Phi'(\varepsilon) \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} d\varepsilon = \left\{ [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma)] \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} \right\}_0^{s_0-0} \\ - \int_0^{s_0-0} [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma)] \frac{d}{d\varepsilon} \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} d\varepsilon,$$

ou encore

$$\int_0^{s_0+0} \Phi'(\varepsilon) \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} d\varepsilon = [\Phi(s_0+0) - \Phi(\sigma)] \log \frac{\sin \left| \frac{s_0 - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{s_0 + \sigma}{2}} \\ - \int_0^{s_0+0} [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma)] \frac{d}{d\varepsilon} \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} d\varepsilon,$$

en remarquant que la partie tout intégrée s'annule pour  $\varepsilon = 0$ .

De la même manière on obtient

$$\int_{s_0+0}^{\pi} \Phi'(\varepsilon) \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} d\varepsilon = -[\Phi(s_0+0) - \Phi(\sigma)] \log \frac{\sin \left| \frac{s_0 - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{s_0 + \sigma}{2}} \\ - \int_{s_0+0}^{\pi} [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma)] \frac{d}{d\varepsilon} \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} d\varepsilon.$$

D'où, par une simple substitution,

$$(97) \quad T_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma)] \frac{d}{d\varepsilon} \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} d\varepsilon.$$

D'ailleurs on s'assure facilement que

$$(98) \quad \frac{d}{d\varepsilon} \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} = \frac{\sin \sigma}{2 \sin \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}}.$$

*Continuité de la fonction  $T_1$ .* — Je dis maintenant que  $T_1$  est une fonction continue de  $\sigma$  sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ , exception faite, naturellement, pour les deux points  $e^{\pm i s_0}$ .

Prenant  $T_1$  sous sa première forme (94) et négligeant une partie visiblement continue, nous sommes ramenés à faire voir que la différence

$$(99) \quad I = \int_0^{\pi} \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon - \int_0^{\pi} \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma_1}{2} \right|}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma_1}{2}} \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon$$

tend vers zéro avec  $\sigma - \sigma_1$ ,  $\sigma_1$  étant supposé fixe et non égal à l'une des deux valeurs exceptées.

On peut tout d'abord écrire

$$I = \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \log \sin \left( \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma_1}{2} \right|} \frac{\sin \frac{\varepsilon + \sigma_1}{2}}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} \right) d\varepsilon.$$

Supposons, pour fixer les idées, que le point  $e^{i\sigma}$  soit situé sur la demi-circonférence positive. Appelons  $\mathfrak{N}$  un nombre supérieur aux valeurs absolues de  $\Phi'(\varepsilon)$  au voisinage de  $\sigma_1$ ; et isolons autour du point  $e^{i\sigma}$  un arc AB ayant ce point pour centre et de longueur  $2k$ . Le point  $e^{i\sigma}$  finira par être contenu dans cet arc.

Ceci posé, considérons l'expression

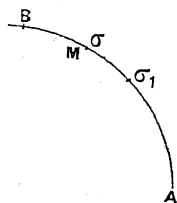
$$J = \int_{AB} \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma_1}{2} \right|} \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon.$$

On a facilement

$$\int \log \sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right| d\varepsilon = (\varepsilon - \sigma) \log \sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right| - \int \frac{\frac{\varepsilon - \sigma}{2}}{\tan \frac{\varepsilon - \sigma}{2}} d\varepsilon.$$

De là nous tirons, en observant que  $x|\log x|$  est une fonction

Fig. 17.



croissante pour  $x = 0$ , et d'autre part que

$$\frac{\frac{\varepsilon - \sigma}{2}}{\tan \frac{\varepsilon - \sigma}{2}} < 1 \quad \text{pour} \quad \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right| \text{ inférieur à } \frac{\pi}{2},$$

$$\left| \int_{\text{arc MB}} \log \sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right| \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon \right| < \mathfrak{N} \left( \text{MB} \left| \log \sin \frac{\text{MB}}{2} \right| + \text{MB} \right),$$

et l'on a de même

$$\left| \int_{\text{AM}} \log \sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right| \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon \right| < \Re \left( \text{AM} \left| \log \sin \frac{\text{AM}}{2} \right| + \text{AM} \right).$$

On a encore des inégalités analogues en remplaçant  $\sigma$  par  $\sigma_1$ .

Il résulte de là que si, étant donné un nombre  $\gamma$  arbitrairement petit, nous choisissons  $k$  fixe de manière qu'il satisfasse à l'inégalité

$$\Re(2k |\log \sin k| + 2k) < \gamma$$

(ce qui est possible, puisque la fonction de  $k$  écrite tend vers zéro avec  $k$ ), on aura, puisque les arcs AM et MB ne sauraient dépasser  $2k$ ,

$$|J| < 4\gamma.$$

Considérons maintenant, d'autre part, les deux intégrales

$$\int_0^\pi \log \frac{\sin \frac{\varepsilon + \sigma_1}{2}}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$\int_{\frac{1}{2} \text{circonf.} - \text{arc AB}} \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma_1}{2} \right|} \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon.$$

On peut choisir  $|\sigma - \sigma_1|$  assez petit pour que, quel que soit  $\varepsilon$  entre 0 et  $\pi$  dans la première intégrale, et quel que soit  $\varepsilon$  (entre 0 et  $\pi$ ) extérieur à l'intervalle qui correspond à l'arc AB dans la seconde, les expressions

$$\left| \log \frac{\sin \frac{\varepsilon + \sigma_1}{2}}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} \right| \quad \text{et} \quad \left| \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma_1}{2} \right|} \right|$$

soient moindres que  $\frac{\gamma}{\Re' \pi}$ , en désignant par  $\Re'$  le module maximum de  $\Phi'(\varepsilon)$ .

$|\sigma - \sigma_1|$  étant ainsi choisi, les deux intégrales ci-dessus seront en module inférieures à  $\frac{\gamma}{\Re' \pi} \Re' \pi = \gamma$ .

De là résulte évidemment que,  $|\sigma - \sigma_1|$  étant ainsi choisi, on aura

$$|I| < 6\gamma,$$

et par suite la fonction  $T$  est bien continue sur la circonférence, comme nous l'avions annoncé (sauf aux deux points signalés).

Avec une modification insignifiante, on s'assure immédiatement que le raisonnement précédent est encore valable pour  $\sigma_1 = 0$  ou  $\sigma_1 = \pi$ .

#### Étude de la fonction $\Omega(\zeta)$ .

Je me propose de faire voir que la fonction  $\Omega$  définie par la formule (96) est une fonction de  $\zeta$  analytique régulière, finie et continue pour  $|\zeta| \leq 1$ , exception faite toujours des deux mêmes points  $e^{\pm i s_0}$ . Je dis en outre que la partie réelle  $\Theta$  de  $\Omega$  prend sur la demi-circonférence supérieure  $|\zeta| = 1$  la succession de valeurs donnée  $\Phi(\sigma)$  (et sur la demi-circonférence inférieure les mêmes valeurs aux points symétriques).

Tout d'abord, j'effectuerai sur  $\Omega$  une transformation valable dans le cercle de rayon 1, et qui nous sera très commode.

*Transformation de  $\Omega$  dans le cercle  $|\zeta| = 1$ .* — En observant l'égalité facile à vérifier

$$(100) \quad \frac{d}{d\varepsilon} \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} = \frac{i(1 - \zeta^2)}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2},$$

une intégration par partie nous donne immédiatement

$$(101) \quad \int_0^{s_0-0} \Phi'(\varepsilon) \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} d\varepsilon = \left[ \Phi(\varepsilon) \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} \right]_0^{s_0-0} - \int_0^{s_0-0} \Phi(\varepsilon) \frac{i(1 - \zeta^2)}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} d\varepsilon,$$

et l'on a de même

$$(102) \quad \int_{s_0+0}^{\pi} \Phi'(\varepsilon) \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} d\varepsilon = \left[ \Phi(\varepsilon) \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} \right]_{s_0+0}^{\pi} - \int_{s_0+0}^{\pi} \Phi(\varepsilon) \frac{i(1 - \zeta^2)}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} d\varepsilon,$$

et par suite  $\Omega$  prend la forme

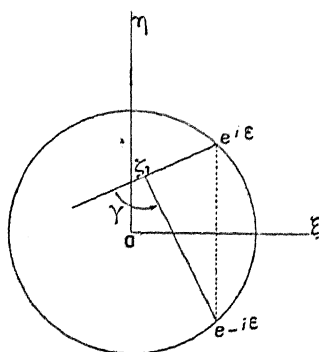
$$\begin{aligned} \Omega(\zeta) = & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} d\varepsilon + \frac{1}{2} [\Phi(0) + \Phi(\pi)] \\ & + [\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0)] \log i \frac{\zeta - e^{is_0}}{1 - \zeta e^{is_0}} \\ & + \frac{i}{\pi} \left\{ \Phi(s_0 - 0) \log i \frac{\zeta - e^{is_0}}{1 - \zeta e^{is_0}} - \Phi(0) \left( \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} \right)_{\varepsilon=0} \right. \\ & \left. + \Phi(\pi) \left( \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} \right)_{\varepsilon=\pi} - \Phi(s_0 + 0) \log i \frac{\zeta - e^{is_0}}{1 - \zeta e^{is_0}} \right\}. \end{aligned}$$

Or la détermination choisie pour  $\log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}}$  est celle qui, pour  $\zeta = 0$ , se réduit à  $i\left(\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right)$  <sup>(1)</sup>. De là on conclut sans peine que le coefficient de  $i$  dans  $\log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}}$  est égal à

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon - \gamma,$$

$\gamma$  désignant l'angle indiqué sur la figure, supposé nul lorsque  $\zeta$  est

Fig. 18.



situé sur l'ordonnée du point  $e^{i\varepsilon}$ . On vérifie bien que, pour  $\zeta = 0$ ,  $\gamma$  se réduit à  $\pi - 2\varepsilon$  et l'on retrouve bien pour coefficient de  $i$  :  $\varepsilon - \frac{\pi}{2}$ .

---

<sup>(1)</sup> Cf. LEVI-CIVITA (§ 40).

Cela étant, pour  $\varepsilon = 0$ , on a  $\gamma = \pi$ ; alors il vient

$$\left( \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} \right)_{\varepsilon=0} = -i \frac{\pi}{2},$$

et pour  $\varepsilon = \pi$ , on a  $\gamma = -\pi$ , et il vient

$$\left( \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} \right)_{\varepsilon=\pi} = i \frac{\pi}{2}.$$

De là nous concluons la formule

$$(103) \quad \Omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} d\varepsilon,$$

qui n'est valable que *dans* le cercle de rayon 1, car sans cette hypothèse, la partie tout intégrée dans les formules (102), (103) posséderait une discontinuité entre les limites considérées, et nos raisonnements ne seraient pas légitimes.

De la formule que nous venons de démontrer il résulte qu'on a, dans le cercle considéré,

$$\Omega'(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \frac{(1 + \zeta^2) \cos \varepsilon - 2\zeta}{(1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2)^2} d\varepsilon$$

et

$$\Omega''(\zeta) = -\frac{4}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \frac{(1 - \zeta^2) \sin^2 \varepsilon}{(1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2)^3} d\varepsilon.$$

Retenons particulièrement de ceci les valeurs suivantes de  $\Omega$  et de ses deux premières dérivées, pour  $\zeta = 0$  :

$$(104) \quad \Omega(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$(105) \quad \Omega'(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \cos \varepsilon d\varepsilon,$$

$$(106) \quad \Omega''(0) = -\frac{4}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \sin^2 \varepsilon d\varepsilon.$$

*Valeurs de  $\Omega = \Theta + iT$  sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ .* — D'après la manière même dont nous avons opéré, il est évident que la partie ima-



ginaire  $iT$  de  $\Omega$  se réduit, pour  $\zeta = e^{i\sigma_1}$ , à la fonction que nous avons appelée  $iT_1$  (en y remplaçant  $\sigma$  par  $\sigma_1$ ). Occupons-nous maintenant de  $\Theta$ , qui est la partie réelle de l'expression (96), laquelle expression, pour  $\zeta = \zeta_1 = e^{i\sigma_1}$ , est égale à

$$(107) \quad \Omega(\zeta_1) = \Omega(e^{i\sigma_1}) = \frac{1}{2} [\Phi(0) + \Phi(\pi)] \\ + \frac{i}{\pi} [\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0)] \log i \frac{e^{i\sigma_1} - e^{is_0}}{1 - e^{i\sigma_1} e^{is_0}} \\ + \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \log i \frac{e^{i\sigma_1} - e^{i\varepsilon}}{1 - e^{i\sigma_1} e^{i\varepsilon}} d\varepsilon.$$

Comme  $\Omega$  prend des valeurs conjuguées en deux points  $\zeta$  conjugués, ce qui tient à ce que la chose est vraie pour la fonction  $i \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}}$  (Cf. par exemple LEVI-CIVITA, *loc. cit.*, § 10), il suffira de considérer un point  $\zeta_1$  sur la demi-circonférence supérieure, et nous pourrons supposer  $\sigma_1$  compris entre 0 et  $\pi$ .

Dans ces conditions, on a déjà rappelé la formule suivante [formule (92)]:

$$\log i \frac{e^{i\sigma_1} - e^{i\varepsilon}}{1 - e^{i\sigma_1} e^{i\varepsilon}} = \log \frac{\sin \left| \frac{\sigma_1 - \varepsilon}{2} \right|}{\sin \frac{\sigma_1 + \varepsilon}{2}} + \begin{cases} -\frac{i\pi}{2} & \text{si } \sigma_1 > \varepsilon, \\ +\frac{i\pi}{2} & \text{si } \sigma_1 < \varepsilon. \end{cases}$$

Alors, en supposant pour fixer les idées  $\sigma_1 < s_0$ , nous aurons immédiatement:

$$\text{Partie imaginaire de } \int_0^{s_0-0} \Phi'(\varepsilon) \log i \frac{e^{i\sigma_1} - e^{i\varepsilon}}{1 - e^{i\sigma_1} e^{i\varepsilon}} d\varepsilon = \text{part. im. } \int_0^{\sigma_1} \Phi'(\varepsilon) \log i \frac{e^{i\sigma_1} - e^{i\varepsilon}}{1 - e^{i\sigma_1} e^{i\varepsilon}} d\varepsilon \\ + \text{part. im. } \int_{\sigma_1}^{s_0-0} \Phi'(\varepsilon) \log i \frac{e^{i\sigma_1} - e^{i\varepsilon}}{1 - e^{i\sigma_1} e^{i\varepsilon}} d\varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\text{part. im. } \int_0^{s_0-0} \Phi'(\varepsilon) \log i \frac{e^{i\sigma_1} - e^{i\varepsilon}}{1 - e^{i\sigma_1} e^{i\varepsilon}} d\varepsilon = -\frac{i\pi}{2} [\Phi(\sigma_1) - \Phi(0)] + \frac{i\pi}{2} [\Phi(s_0 - 0) - \Phi(\sigma_1)].$$

Puis nous aurons de même,

$$\text{part. im. } \int_{s_0+0}^\pi \Phi'(\varepsilon) \log i \frac{e^{i\sigma_1} - e^{i\varepsilon}}{1 - e^{i\sigma_1} e^{i\varepsilon}} d\varepsilon = \frac{i\pi}{2} [\Phi(\pi) - \Phi(s_0 + 0)].$$

Revenant à  $\Omega(\zeta_1)$ , nous en pouvons maintenant écrire la partie réelle sous la forme

$$\Theta_{\zeta_1} = \frac{1}{2} [\Phi(0) + \Phi(\pi)] + \frac{i}{\pi} [\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0)] \left\{ \frac{i\pi}{2} + \frac{i}{\pi} \left[ -\frac{i\pi}{2} [\Phi(\sigma_1) - \Phi(0)] + \frac{i\pi}{2} [\Phi(s_0 - 0) - \Phi(\sigma_1)] + \frac{i\pi}{2} [\Phi(\pi) - \Phi(s_0 + 0)] \right] \right\}$$

c'est-à-dire

$$\Theta_{\zeta_1} = \Phi(\sigma_1).$$

La même marche réussit de même pour  $\sigma_1 > s_0$ .

Donc la partie réelle de la fonction  $\Omega$  que nous avons construite au moyen de la formule (96) prend bien, pour  $\zeta = e^{i\sigma}$ , la valeur  $\Phi(\sigma)$ .

Ce point fondamental éclairci, nous allons montrer que la fonction  $\Omega(\zeta)$  est continue dans tout le domaine  $|\zeta| \leq 1$ , exception faite des deux points  $\zeta = e^{\pm i\sigma_0}$ .

*Continuité de la fonction  $\Omega$ .* — Je dis tout d'abord que  $\Omega$  est continue dans le cercle de rayon 1.

Prenons  $\Omega$  sous sa forme (103), et soit  $\zeta'$  un point fixe intérieur au cercle. Considérons alors la différence

$$\Omega(\zeta) - \Omega(\zeta') = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \left( \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} - \frac{1 - \zeta'^2}{1 - 2\zeta' \cos \varepsilon + \zeta'^2} \right) d\varepsilon.$$

Par un calcul élémentaire, on la mettra sous la forme

$$\Omega(\zeta) - \Omega(\zeta') = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \frac{\zeta + \zeta' - (1 + \zeta\zeta') \cos \varepsilon}{(1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2)(1 - 2\zeta' \cos \varepsilon + \zeta'^2)} (\zeta - \zeta') d\varepsilon.$$

Du point  $\zeta'$  comme centre, décrivons une petite circonférence n'ayant aucun point commun avec la circonférence qui limite notre domaine, et appelons  $d$  la plus courte distance de la petite à la grande circonférence. Il est clair alors que nous pourrions écrire, dès que le point  $\zeta$  sera intérieur à la petite circonférence (à cause de :  $|\zeta| < 1, |\zeta'| < 1$ ,

$$|1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2| > d^2, \dots)$$

$$|\Omega(\zeta) - \Omega(\zeta')| < \frac{8}{\pi} |\zeta - \zeta'| \int_0^\pi \frac{|\Phi(\varepsilon)|}{d^2} d\varepsilon.$$

De sorte que, si  $\mathfrak{K}$  est le module maximum de  $\Phi(\varepsilon)$  de 0 à  $\pi$ , on aura l'inégalité :

$$|\Omega(\zeta) - \Omega(\zeta')| < \frac{8\mathfrak{K}}{d^2} |\zeta - \zeta'|.$$

Ceci démontre que la fonction  $\Omega$  est continue pour  $\zeta'$ , puisque le second membre sera aussi petit qu'on le voudra, dès que  $|\zeta - \zeta'|$  sera suffisamment petit.

La continuité est donc assurée dans le cercle  $|\zeta| = 1$ .

Je vais faire voir ensuite que, si le point  $\zeta$  tend vers un point  $\zeta_1 = e^{i\sigma_1}$  de la circonférence  $|\zeta| = 1$ , autre qu'un des deux points exclus, en suivant à l'intérieur de la circonférence un chemin qui n'arrive pas au point  $\zeta_1$  tangentiellement à celle-ci, la fonction  $\Omega(\zeta)$  tend alors vers  $\Omega(\zeta_1)$ .

Pour le démontrer, je prendrai cette fois  $\Omega$  sous sa forme (96), de sorte qu'aux deux points  $\zeta$  et  $\zeta_1 = e^{i\sigma_1}$  ( $\sigma_1 \neq \sigma_0$ , en supposant pour fixer les idées le point  $\zeta_1$  sur la demi-circonférence supérieure) on a les deux relations

$$\begin{aligned} \Omega(\zeta) &= \frac{i}{2} [\Phi(0) + \Phi(\pi)] + \frac{i}{\pi} [\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0)] \log i \frac{\zeta - e^{is_0}}{1 - \zeta e^{is_0}} \\ &\quad + \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} d\varepsilon, \\ \Omega(\zeta_1) &= \frac{i}{2} [\Phi(0) + \Phi(\pi)] + \frac{i}{\pi} [\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0)] \log i \frac{\zeta_1 - e^{is_0}}{1 - \zeta_1 e^{is_0}} \\ &\quad + \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \log i \frac{\zeta_1 - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta_1 e^{i\varepsilon}} d\varepsilon. \end{aligned}$$

Pour démontrer la continuité, il suffit de faire voir que la différence

$$(108) \quad J = \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \left( \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} - \log i \frac{\zeta_1 - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta_1 e^{i\varepsilon}} \right) d\varepsilon$$

tend vers zéro avec  $\zeta - \zeta_1$ ; la partie négligée dans  $\Omega(\zeta)$  tendant visible-

ment vers la partie correspondante de  $\Omega(\zeta_1)$ , dans les mêmes conditions.

On peut écrire

$$J = \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \log \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{\zeta_1 - e^{i\varepsilon}} \frac{1 - \zeta_1 e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} d\varepsilon.$$

Supposons momentanément  $\zeta_1$  différent de  $\pm 1$ .

Ceci posé, autour du point  $\zeta_1$  de la circonférence, isolons un arc AB de longueur  $2k$ , ayant ce point pour centre. Appelons  $J_{AB}$  et  $J'$  les deux parties de l'intégrale  $J$ , relatives à cet arc AB, et au reste de la demi-circonférence (l'arc AB étant intérieur à celle-ci).

Observons encore, avant d'aller plus loin, que d'après ce qui a été dit antérieurement sur le coefficient de  $i$  dans  $\log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}}$  (cf. page 268), ce coefficient ne saurait dans aucun cas dépasser  $2\pi$ , en valeur absolue. Donc la partie imaginaire de l'expression

$$\log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} - \log i \frac{\zeta_1 - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta_1 e^{i\varepsilon}}$$

est toujours en module inférieure à  $4\pi$ . Il en est donc de même de l'argument du quotient

$$\frac{(\zeta - e^{i\varepsilon})(1 - \zeta_1 e^{i\varepsilon})}{(\zeta_1 - e^{i\varepsilon})(1 - \zeta e^{i\varepsilon})} = \frac{(\zeta - e^{i\varepsilon})(\zeta_1 - e^{-i\varepsilon})}{(\zeta_1 - e^{i\varepsilon})(\zeta - e^{-i\varepsilon})}.$$

Considérons la portion  $J_{AB}$  de  $J$ , sous la forme

$$J_{AB} = \int_{\sigma_1 - k}^{\sigma_1 + k} \Phi'(\varepsilon) \log \frac{(\zeta - e^{i\varepsilon})(\zeta_1 - e^{-i\varepsilon})}{(\zeta_1 - e^{i\varepsilon})(\zeta - e^{-i\varepsilon})} d\varepsilon.$$

On peut écrire au moyen d'une intégration par parties

$$\begin{aligned} J_{AB} = & \left\{ [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma_1)] \log \frac{(\zeta - e^{i\varepsilon})(\zeta_1 - e^{-i\varepsilon})}{(\zeta_1 - e^{i\varepsilon})(\zeta - e^{-i\varepsilon})} \right\}_{\sigma_1 - k}^{\sigma_1 + k} \\ & - \int_{\sigma_1 - k}^{\sigma_1 + k} [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma_1)] \left\{ \frac{-ie^{i\varepsilon}}{\zeta - e^{i\varepsilon}} + \frac{ie^{i\varepsilon}}{\zeta_1 - e^{i\varepsilon}} + \frac{ie^{-i\varepsilon}}{\zeta_1 - e^{-i\varepsilon}} - \frac{ie^{-i\varepsilon}}{\zeta - e^{-i\varepsilon}} \right\} d\varepsilon. \end{aligned}$$

Nous envisagerons séparément la partie intégrée et l'intégrale restante.

*Partie tout intégrée.* — D'après la remarque faite il y a un instant, dans cette partie intégrée, l'argument de la quantité sous le signe  $\log$  ne dépasse jamais  $4\pi$ . Donc, en désignant par  $\Re$  un nombre fixe supérieur à la valeur absolue du quotient  $\frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma_1)}{\varepsilon - \sigma_1}$  lorsque  $e^{i\varepsilon}$  se déplace dans un arc de longueur  $2h$ , du centre  $\zeta_1$ , et auquel l'arc  $2k$  sera assujéti à être intérieur, la portion de l'expression considérée, provenant de l'argument qu'on vient de dire, sera inférieure à  $8\Re k\pi$ . Si alors  $\mu$  est un nombre positif arbitrairement petit, l'inégalité

$$8\Re k\pi < \mu, \quad \text{ou} \quad k < \frac{\mu}{8\Re\pi} = \alpha_1$$

entraînera que le module de cette portion soit  $< \mu$ .

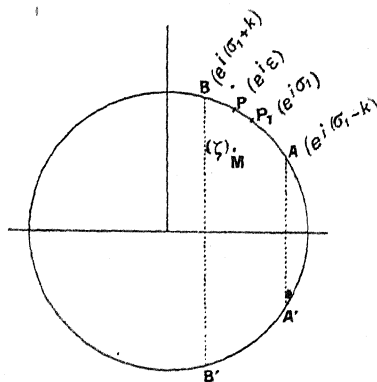
La portion restante sera alors inférieure

$$\Re k \left| \log \left| \frac{(\zeta - e^{i(\sigma_1+h)}) (\zeta_1 - e^{-i(\sigma_1+h)})}{(\zeta_1 - e^{i(\sigma_1+h)}) (\zeta - e^{-i(\sigma_1+h)})} \right| \right| + \Re k \left| \log \left| \frac{(\zeta - e^{i(\sigma_1-h)}) (\zeta_1 - e^{-i(\sigma_1-h)})}{(\zeta_1 - e^{i(\sigma_1-h)}) (\zeta - e^{-i(\sigma_1-h)})} \right| \right|,$$

ce qui peut s'écrire, d'après la figure,

$$\Re k \left\{ \left| \log \frac{MB \cdot P_1 B'}{P_1 B \cdot MB'} \right| + \left| \log \frac{MA \cdot P_1 A'}{P_1 A \cdot MA'} \right| \right\}.$$

Fig. 19.



La quantité entre crochets est égale, suivant les cas, à

$$\left| \log \frac{MB \cdot MA \cdot P_1 B' \cdot P_1 A'}{MB' \cdot MA' \cdot P_1 B \cdot P_1 A} \right| \quad \text{ou à} \quad \left| \log \frac{MB \cdot MA' \cdot P_1 B' \cdot P_1 A}{MB' \cdot MA \cdot P_1 B \cdot P_1 A'} \right|.$$

*Premier cas.* — Pour  $k < \alpha_2$ , nombre qu'on peut déterminer, on aura

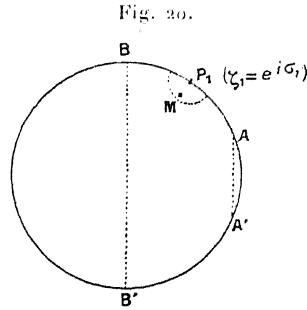
$$\Re k \left| \log \frac{P_1 B' \cdot P_1 A'}{M B' \cdot M A' \cdot P_1 B \cdot P_1 A} \right| < \mu,$$

car la seule quantité variable sous le signe log est ici  $MA' \cdot MB'$ , qui est comprise entre deux quantités fixes positives et non nulles, si l'on assujettit le point  $\zeta$  à être à une distance de  $\zeta_1$  au plus égale à  $\frac{k}{4}$  (condition à laquelle nous serons amenés dans un instant).

Reste la quantité

$$\Re k \left| \log MA \cdot MB \right|.$$

Or si, comme nous venons de le dire, nous assujettissons la distance  $MP_1$



à être inférieure à  $\frac{k}{4}$ ,  $MA$  et  $MB$  seront assurément chacun plus grands que  $\frac{k}{2}$ ; et par suite, si nous déterminons un nombre  $\alpha_3$  positif vérifiant l'inégalité

$$(109) \quad \Re \alpha_3 \left| \log \frac{\alpha_3^2}{4} \right| < \mu,$$

nous serons assurés qu'on a

$$\Re k \left| \log MA \cdot MB \right| < \mu.$$

Dans ces conditions, nous aurons

$$\Re k \left| \log \frac{MB \cdot MA \cdot P_1 B' \cdot P_1 A'}{M B' \cdot M A' \cdot P_1 B \cdot P_1 A} \right| < 2\mu.$$

*Second cas.* — La quantité à envisager dans la partie intégrée de  $J_{AB}$  est alors

$$\Re k \left| \log \frac{MB \cdot MA' \cdot P_1 B' \cdot P_1 A}{MB' \cdot MA \cdot P_1 B \cdot P_1 A'} \right|,$$

elle est inférieure à

$$\Re k |\log MB \cdot P_1 A| + \Re k |\log MA \cdot P_1 B| + \Re k \left| \log \frac{MA' \cdot P_1 B'}{MB' \cdot P_1 A'} \right|.$$

Comme  $MB$ ,  $MA$ ,  $P_1 B$ ,  $P_1 A$  sont tous supérieurs à  $\frac{k}{2}$ , l'inégalité (109) entraîne

$$\Re k |\log MB \cdot P_1 A| + \Re k |\log MA \cdot P_1 B| < 2\mu.$$

Enfin, comme  $MA' \cdot P_1 B$ ,  $MB' \cdot P_1 A'$  sont compris entre deux limites fixes non nulles, l'inégalité

$$k < \alpha_4,$$

où  $\alpha_4$  est un nombre qu'on peut déterminer, entraînera

$$\Re k \left| \log \frac{MA' \cdot P_1 B'}{MB' \cdot P_1 A'} \right| < \mu.$$

En résumé, on aura dans les conditions susdites

$$\Re k \left| \log \frac{MB \cdot MA' \cdot P_1 B' \cdot P_1 A}{MB' \cdot MA \cdot P_1 B \cdot P_1 A'} \right| < 3\mu.$$

Et, par suite, la partie intégrée de  $J_{AB}$  sera inférieure, en valeur absolue, à  $3\mu$  ou à  $4\mu$  suivant les cas ; ou, si l'on veut, à  $4\mu$  dans tous les cas.

*Partie non intégrée de  $J_{AB}$ .* — Cette partie non intégrée peut s'écrire par un calcul évident

$$i \int_{\sigma_1 - k}^{\sigma_1 + k} [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma_1)] (\zeta_1 - \zeta) \left[ \frac{e^{i\varepsilon}}{(\zeta - e^{i\varepsilon})(\zeta_1 - e^{i\varepsilon})} + \frac{e^{-i\varepsilon}}{(\zeta - e^{-i\varepsilon})(\zeta_1 - e^{-i\varepsilon})} \right] d\varepsilon.$$

Le module des quantités  $\zeta - e^{i\varepsilon}$ ,  $\zeta_1 - e^{i\varepsilon}$  ayant un minimum non nul lorsque le point  $\zeta$  est supposé à une distance de  $\zeta_1$  inférieure à  $\frac{k}{2}$ , on voit qu'il est possible de choisir  $|\zeta - \zeta_1|$  assez petit pour qu'on ait

l'inégalité

$$\left| \int_{\sigma_1-k}^{\sigma_1+k} [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma_1)] (\zeta_1 - \zeta) \frac{e^{-i\varepsilon}}{(\zeta - e^{-i\varepsilon})(\zeta_1 - e^{-i\varepsilon})} d\varepsilon \right| < \mu.$$

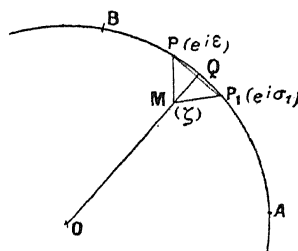
Reste à considérer l'expression

$$i \int_{\sigma_1-k}^{\sigma_1+k} [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma_1)] (\zeta_1 - \zeta) \frac{e^{i\varepsilon}}{(\zeta - e^{i\varepsilon})(\zeta_1 - e^{i\varepsilon})} d\varepsilon$$

dont le module est inférieur, avec les notations déjà introduites, à

$$R = \Re |\zeta_1 - \zeta| \int_{AB} \left| \frac{(\varepsilon - \sigma_1) d\varepsilon}{(\zeta - e^{i\varepsilon})(\zeta_1 - e^{i\varepsilon})} \right| = \Re |\zeta_1 - \zeta| \int_{AB} \frac{|\varepsilon - \sigma_1| d\varepsilon}{MP \cdot P_1 P}.$$

Fig. 21.



Or, si l'arc AB est petit, ce qu'on suppose, on a assurément

$$P_1 P > \frac{1}{2} \text{arc } P_1 P = \frac{1}{2} |\varepsilon - \sigma_1|$$

ou

$$\frac{1}{P_1 P} < \frac{2}{|\varepsilon - \sigma_1|}$$

et par suite

$$R < 2 \Re \int_{AB} \frac{MP_1}{MP} d\varepsilon.$$

Or, si P décrit l'arc AB, on a constamment

$$MP \geq MQ,$$

MQ désignant la plus courte distance du point M à la circonférence, et l'on a encore

$$R < 2 \Re \int_{AB} \frac{MP_1}{MQ} d\varepsilon < 2 \Re \int_{AB} \frac{MP_2}{MQ} d\varepsilon$$



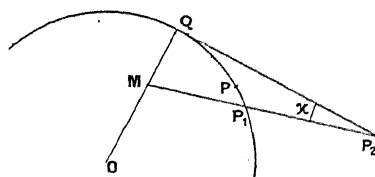
en appelant  $P_2$  le point de rencontre de  $MP_1$  avec la tangente en  $Q$  au cercle. Maintenant il est clair que

$$\frac{MP_2}{MQ} = \frac{1}{\sin \gamma},$$

$\gamma$  étant l'angle  $MP_2Q$  de la figure (voir *fig. 22*).

Si alors nous supposons que le point  $M$  ( $\zeta$ ) tende vers le point  $P_1$  en suivant la droite  $MP_1$  faisant avec la circonférence un angle non nul, il sera possible de restreindre suffisamment l'arc  $AB$  pour que, quand

Fig. 22.



$M$  décrit  $MP_1$ , l'angle  $\gamma$  ait un minimum non nul  $\gamma'$  (il suffira que sur l'arc  $AB$  il n'y ait aucune tangente parallèle à  $MP_1$ ). Dans ces conditions, nous pourrons écrire, quel que soit  $M$  sur la droite signalée (et au voisinage de  $P_1$ ),

$$R < \frac{2 \partial \mathcal{R}}{\sin \gamma'} \times 2k,$$

et cette dernière expression sera inférieure à  $\mu$  si l'on prend

$$k < \frac{\sin \gamma'}{4 \partial \mathcal{R}} = \alpha_5.$$

De tout ceci résulte qu'en choisissant pour  $k$  une valeur fixe égale au plus petit des nombres  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ , on aura l'inégalité

$$|J_{AB}| < 6\mu.$$

Considérons maintenant la seconde partie  $J'$  de l'expression  $J$ . Nous avons

$$J' = \int_{\frac{1}{2} \text{circonf.} - \text{arc } AB} \Phi'(\varepsilon) \log \frac{(\zeta - e^{i\varepsilon})(\zeta_1 - e^{-i\varepsilon})}{(\zeta_1 - e^{i\varepsilon})(\zeta - e^{-i\varepsilon})} d\varepsilon.$$

Or,  $\mathfrak{M}'$  étant le module maximum de  $\Phi'(\varepsilon)$  sur toute la circonférence  $|\zeta| = 1$ , on peut choisir  $|\zeta - \zeta_1|$  assez petit pour que, quel que soit  $\varepsilon$  entre 0 et  $\pi$  (exception faite de l'intervalle qui correspond à AB), on ait

$$\left| \log \frac{(\zeta - e^{i\varepsilon})(\zeta_1 - e^{-i\varepsilon})}{(\zeta_1 - e^{i\varepsilon})(\zeta - e^{-i\varepsilon})} \right| < \frac{\mu}{\pi \mathfrak{M}'}$$

Alors on aura

$$|J'| < \mu$$

et par suite

$$|J| < |J_{AB}| + |J'| < 7\mu.$$

Donc, pour  $|\zeta - \zeta_1|$  suffisamment petit,  $J$  sera aussi petit qu'on voudra, puisque  $\mu$  est un nombre arbitrairement petit. Ceci démontre la continuité de  $\Omega(\zeta)$ , dès que  $\zeta$  tend vers  $\zeta_1$  ( $\neq e^{\pm i\varepsilon_0}$  et de  $\pm 1$ ), en suivant un chemin qui n'arrive pas tangentiellement à la circonférence au point  $\zeta_1$ .

Comme la continuité de  $T$  a été démontrée sur la circonférence, et que celle de  $\Theta$  y est vraie par hypothèse (sauf toujours pour  $\zeta = e^{\pm i\varepsilon_0}$ ), il en résulte facilement que la restriction faite peut être levée et que, quel que soit le chemin, intérieur à la circonférence, suivi par le point  $\zeta$ ,  $\Omega(\zeta)$  tend vers  $\Omega(\zeta_1)$  lorsque  $\zeta$  tend vers  $\zeta_1$  (exception faite pour  $\zeta_1 = e^{\pm i\varepsilon_0}$  et momentanément encore pour  $\zeta_1 = \pm 1$ ).

*Cas où  $\zeta_1 = \pm 1$ .* — Reste le cas où  $\zeta_1 = \pm 1$ , que nous avons exclu au début du raisonnement précédent : il serait en effet alors impossible de choisir un arc AB entourant le point  $\zeta_1$ , et entièrement situé sur la demi-circonférence supérieure (condition essentielle dans le raisonnement, par exemple pour l'existence d'un minimum non nul pour le produit  $MA' \cdot MB'$ ).

Prenons par exemple  $\zeta_1 = +1$ . Le cas  $\zeta_1 = -1$  se traiterait de même.

Observons qu'alors  $\Omega(\zeta_1)$  est réel et se réduit à  $\Phi(0)$ . Supposons ensuite que le point  $\zeta$  tende vers 1 en suivant le rayon. Prenons ici  $\Omega(\zeta)$  sous sa forme (103) démontrée plus haut, soit

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} d\varepsilon$$

où tout est réel et où  $\zeta$  réel tend vers 1.

Il suffit alors de reprendre un raisonnement de Schwartz <sup>(1)</sup>, pour s'assurer que  $\Omega(\zeta)$  tend vers  $\Phi(0)$  quand  $\zeta$  tend vers 1.

Partant de là et du fait que la fonction  $\Omega(\zeta)$  est continue sur tous les rayons voisins, extrémités comprises, ainsi que sur l'arc de la circonférence limite voisin du point 1, on en conclura, par un raisonnement analogue à celui qu'on a donné dans la première Partie (Cf. p. 245), que la fonction  $\Omega(\zeta)$  est continue au voisinage du point  $\zeta = 1$ , sans aucune restriction.

Des considérations analogues sont valables pour  $\zeta = -1$ .

*La continuité de  $\Omega(\zeta)$  est donc bien démontrée dans tout le domaine  $|\zeta| \leq 1$ , limites comprises, exception faite des deux points  $\zeta = e^{\pm is_0}$ .*

On peut en outre étudier d'un peu plus près comment se comporte  $\Omega(\zeta)$  lorsque le point  $\zeta = \xi + i\eta$  tend vers un des deux points exclus, par exemple vers le point  $\zeta_0 = e^{is_0} = \xi_0 + i\eta_0$ .

Observons qu'on a l'égalité

$$\frac{1}{i} \log(\zeta - \zeta_0) = \arctan \frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0} - \frac{i}{2} \log [(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2].$$

Considérons alors la fonction

$$\Omega_1(\zeta) = \Omega(\zeta) + \frac{\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0)}{i\pi} \log(\zeta - \zeta_0)$$

qui est bien déterminée et uniforme dans tout le cercle de rayon 1, dès qu'on a précisé en un point particulier la détermination choisie pour le logarithme. Cette fonction prend sur la circonférence  $|\zeta| = 1$  une succession de valeurs *continue au point  $\zeta_0$* . Donc  $\Omega_1(\zeta)$  sera continue au voisinage de ce point, d'après les démonstrations que précèdent. J'en conclus tout de suite que la partie imaginaire de  $\Omega(\zeta)$  devient infinie en ce point. Puis, en appelant  $\Theta_1(\zeta_0)$  la valeur que prend la partie réelle de  $\Omega_1(\zeta)$ , pour  $\zeta = \zeta_0$ , et  $\Xi_\lambda$  la valeur que prend la partie réelle de  $\Omega(\zeta)$  lorsque le point  $\zeta$  tend vers le point  $\zeta_0$  en suivant un chemin qui fasse avec la circonférence un angle  $\lambda$ , on aura par

---

<sup>(1)</sup> SCHWARTZ, *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung  $\Delta u = 0$  für die Fläche eines Kreises* (Gesammelte Math. Abhandlungen, zweiter Band.). — E. PICARD, *Analyse*, t. I, p. 250.

un calcul immédiat

$$\Theta_1(\zeta_0) = \mathfrak{S}_1 + \frac{\Phi(s_0 + o) - \Phi(s_0 - o)}{\pi} \left( s_0 - \frac{\pi}{2} - \lambda \right).$$

Pour  $\lambda = o$ , et  $\lambda = \pi$ , on sait qu'on a  $\mathfrak{S}_0 = \Phi(s_0 - o)$  et  $\mathfrak{S}_\pi = \Phi(s_0 + o)$ . D'où les deux relations compatibles :

$$\begin{aligned} \Theta_1(\zeta_0) &= \Phi(s_0 - o) + \frac{\Phi(s_0 + o) - \Phi(s_0 - o)}{\pi} \left( s_0 - \frac{\pi}{2} \right), \\ \Theta_1(\zeta_0) &= \Phi(s_0 + o) + \frac{\Phi(s_0 + o) - \Phi(s_0 - o)}{\pi} \left( s_0 - \frac{\pi}{2} - \pi \right); \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire finalement

$$\mathfrak{S}_\lambda = \Phi(s_0 - o) + \frac{\Phi(s_0 + o) - \Phi(s_0 - o)}{\pi} \lambda.$$

On en conclut que  $\mathfrak{S}_\lambda$  prend toutes les valeurs intermédiaires entre  $\Phi(s_0 - o)$  et  $\Phi(s_0 + o)$ , selon le chemin suivi par le point  $\zeta$  tendant vers  $\zeta_0$ . En particulier, si  $\zeta$  tend vers  $\zeta_0$  en suivant le rayon, la valeur limite de la partie réelle de  $\Omega(\zeta)$  est

$$\mathfrak{S}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} [\Phi(s_0 + o) + \Phi(s_0 - o)] \quad (1).$$

*Transformation de la condition (95) relative à la fonction  $\Phi(\varepsilon)$ .* — Revenons maintenant à la condition (95) relative à la fonction  $\Phi$ , et que nous avons obtenue au début, à savoir

$$\pi \Phi(\pi) = s_0 [\Phi(s_0 + o) - \Phi(s_0 - o)] + \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon.$$

Comme on a immédiatement

$$\int_0^{s_0 - o} \Phi'(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = [\varepsilon \Phi(\varepsilon)]_0^{s_0 - o} - \int_0^{s_0 - o} \Phi(\varepsilon) d\varepsilon$$

et

$$\int_{s_0 + o}^\pi \Phi'(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = [\varepsilon \Phi(\varepsilon)]_{s_0 + o}^\pi - \int_{s_0 + o}^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon,$$

(1) Voir PICARD, *Analyse*, t. I, p. 252.

on voit de suite que la relation précédente se réduit à

$$(110) \quad \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = 0.$$

Or, comme la partie réelle  $\Theta$  de  $\Omega$  est sur la demi-circonférence limite égale à  $\Phi(\varepsilon)$  pour  $\zeta = e^{i\varepsilon}$ , il se trouve que l'équation (110) est justement celle dont M. Levi-Civita a démontré la nécessité, et qui exprime, ce qui ne doit pas nous surprendre, que la fonction  $\Omega(\zeta)$  est nulle pour  $\zeta = 0$ . [Cf. d'ailleurs, l'équation (104)]. L'équation (39) du Mémoire de M. Levi-Civita peut en effet s'écrire, avec nos notations actuelles,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\Theta_0(\varepsilon) - \Theta(\varepsilon)] d\varepsilon = \delta - \frac{2\alpha}{\pi} \left( s_0 - \frac{\pi}{2} \right),$$

$\Phi_0(\varepsilon)$  étant une fonction égale à

$$\begin{array}{ll} \delta - \alpha & \text{pour} \quad 0 < \varepsilon < s_0. \\ \delta + \alpha & \text{pour} \quad s_0 < \varepsilon < \pi. \end{array}$$

De sorte que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Theta_0(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{\pi} [(\delta - \alpha)s_0 + (\delta + \alpha)(\pi - s_0)] = \delta - \frac{2\alpha}{\pi} \left( s_0 - \frac{\pi}{2} \right),$$

et que la relation de M. Levi-Civita se réduit bien à la nôtre

$$\int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = 0.$$

Donc cette condition (110) n'apporte à la forme du profil de l'obstacle aucune restriction qui ne soit pas dans la nature des choses, malgré ce qu'on aurait pu penser au début.

Donc enfin, la fonction  $\Omega$  déterminée par nos équations satisfait à toutes les conditions : elle est analytique, régulière dans le cercle  $|\zeta| = 1$  limites comprises, sauf aux deux points exclus ; elle prend des valeurs conjuguées en deux points  $\zeta$  conjugués ; elle est réelle sur l'axe réel, nulle pour  $\zeta = 0$  ; et enfin elle prend sur la circonférence de rayon 1 les valeurs données. *C'est donc l'intégrale générale, au sens*

de M. Levi-Civita, du mouvement d'un fluide indéfini autour d'un solide quelconque.

En outre, la fonction arbitraire dont dépend la solution est ici  $\Phi(\varepsilon)$ , assujettie seulement à la condition (110).

*Cas d'un obstacle symétrique par rapport à Ox.* — Dans le cas d'un obstacle symétrique par rapport à Ox, c'est-à-dire par rapport à une parallèle au courant général, les polygones qui nous ont servi au début peuvent aussi être choisis symétriques par rapport à Ox. Alors on a constamment

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \partial = 0,$$

et par suite aussi

$$s_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Puis les valeurs  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ , des arguments qui correspondent aux sommets, et les valeurs  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , des inclinaisons correspondantes satisfont à (Cf. CISOTTI, *loc. cit.*)

$$\begin{aligned} \sigma_{n-h} &= \pi - \sigma_h & (h = 1, 2, \dots, n-1), \\ \theta_j + \theta_{n-j+1} &= 0 & (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

De là on tirera immédiatement

$$(111) \quad \Phi(\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon),$$

qui aussi bien était évidente.

On voit alors que la condition (110) est vérifiée d'elle-même; la solution la plus générale dans ce cas s'obtiendra donc en choisissant pour  $\Phi(\varepsilon)$  une fonction quelconque continue dans le premier quadrant; l'équation (111) donnera sa valeur dans le second, et la symétrie par rapport à l'axe réel définit enfin sa valeur dans les deux autres.

Enfin, on a évidemment, dans le cas actuel,

$$\Phi(s_0 - 0) = -\Phi(s_0 + 0) \quad \left(s_0 = \frac{\pi}{2}\right)$$

et

$$\Phi(0) + \Phi(\pi) = 0.$$

La fonction  $\Omega$  prend donc la forme, tirée de la formule (96),

$$(112) \quad \Omega(\zeta) = -\frac{2i}{\pi} \Phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \log \frac{1+i\zeta}{1-i\zeta} + \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} d\varepsilon,$$

ou, dans le cercle de rayon 1,

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} d\varepsilon.$$

*Sur la condition qui détermine  $\Phi(\sigma)$  pour un contour donné.* — Reportons-nous à l'équation (91) qui fournissait le rayon de courbure de la paroi de l'obstacle; en y remplaçant  $T$  par la valeur  $T_1$  qu'elle prend sur la paroi ( $\zeta = e^{i\sigma}$ ), et qui est donnée par la formule (97),

$$T_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma)] \frac{d}{d\varepsilon} \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} d\varepsilon,$$

on en conclut que, si le profil est donné, la fonction  $\Phi$  doit vérifier, outre (110), l'équation

$$(113) \quad \Re[\Phi(\sigma)]\Phi'(\sigma) = 2a^2 e^{-\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma)] \frac{d}{d\varepsilon} \log \frac{\sin \left| \frac{\varepsilon - \sigma}{2} \right|}{\sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}} d\varepsilon} \propto |\cos \sigma - \cos \sigma_0| \sin \sigma,$$

pour toute valeur de  $\sigma$  entre 0 et  $\pi$ .

Pour un profil symétrique, il suffit de vérifier cette équation entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  (et l'on a  $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$ ).

Bien entendu, cette équation (113) n'est pas susceptible d'être résolue complètement dans le cas général, quoiqu'elle soit déjà beaucoup plus simple que le système de relations correspondantes qu'a obtenues M. Levi-Civita en considérant deux fonctions inconnues ne différant pas au fond de  $\Theta$  et  $T$ . (Cf. § 13 de son Mémoire.)

Mais ce qui fait l'intérêt pratique des résultats exposés ci-dessus, c'est que la nature de la fonction arbitraire est reliée d'une façon tout à fait intime et évidente à la forme du profil de l'obstacle. Il suffit, pour s'en rendre compte, d'observer que, lorsque le point  $\zeta$  décrit la

demi-circonférence supérieure  $|\zeta| = 1$  du point 1 au point  $-1$ , le point  $z$  correspondant décrit le profil de l'obstacle toujours dans le même sens, sans arrêt ni recul, du point  $P_2$  au point  $P_1$ . Alors la manière dont varie  $\Phi(\sigma)$  est connue; l'allure de cette fonction est connue.

Il est par suite possible de choisir cette fonction arbitraire, de manière à obtenir un profil d'obstacle dont l'allure générale soit donnée à l'avance. On peut en former autant d'exemples qu'on veut, pour lesquels les intégrations puissent être poussées jusqu'au bout (condition qui n'est d'ailleurs pas indispensable pour les applications pratiques). Je vais développer un peu plus loin quelques exemples, particulièrement dans le cas où le profil de l'obstacle a la forme d'une proue de navire, cas spécialement intéressant, et qui constituait le véritable but de la théorie.

*Observation sur la méthode introduite.* — Au fond, la méthode que nous venons d'exposer, dans ce qui précède, revient à déterminer la fonction  $\Omega$  par la connaissance des valeurs que sa partie réelle  $\Phi$  prend sur le contour du cercle de rayon 1. Or on sait qu'une formule, tirée de l'application du principe de Dirichlet, fournit sous forme d'intégrale définie la valeur de  $\Phi$  dans le cercle; la fonction harmonique associée  $T$  se calcule ensuite par quadratures.

Ce qu'il y a d'intéressant dans le procédé que nous avons employé, c'est qu'il nous fait connaître par une seule quadrature les deux fonctions  $\Theta$  et  $T$ , ou plutôt la fonction  $\Omega$ , et cela sous une forme éminemment simple, qu'il est peu vraisemblable qu'on eût pu obtenir en partant directement de  $\Theta$  et  $T$ . La formule qui nous a donné  $\Omega$  dans le cercle nous paraît constituer la généralisation, dans le domaine complexe, d'une célèbre intégrale due à Poisson <sup>(1)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> Je montre, dans un article : *Quelques vues nouvelles sur le problème de Dirichlet relatif au cercle* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, fascicule 3, 1911), la véritable raison de l'analogie remarquable entre la formule de Poisson et notre formule (163).



## Étude de quelques exemples.

Nous nous proposons, dans ce Chapitre, d'exposer en détail quelques exemples, que nous prendrons dans le cas d'un obstacle symétrique. Nous supposerons donc

$$s_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \partial = 0.$$

Nous utiliserons la remarque suivante :

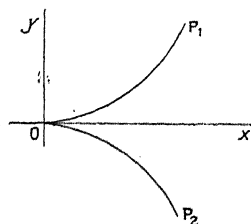
L'expression (103) de  $\Omega$

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} d\varepsilon$$

a été démontrée être valable à l'intérieur du cercle de rayon 1; si alors nous parvenons à tirer de cette formule une expression en termes finis représentant une fonction continue dans et sur la circonférence, sauf aux deux points déjà tant de fois signalés, cette fonction sera égale à  $\Omega(\zeta)$  dans et sur la circonférence, à cause de la continuité, qu'on a démontrée, de  $\Omega$  jusqu'aux limites du domaine  $|\zeta| \leq 1$ . Ceci nous dispensera généralement d'avoir recours à la formule (96), qui est moins maniable.

*Premier exemple.* — Proposons-nous de déterminer la fonction arbitraire de façon à obtenir un profil d'obstacle analogue à celui qu'in-

Fig. 23.



dique le dessin, l'obstacle présentant à l'avant une pointe avec la tangente  $Ox$ , et la concavité étant dans le sens contraire de  $Ox$ .

Il suffira de prendre pour  $\Phi(\sigma)$  une fonction négative de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ , et croissant depuis une valeur comprise entre  $-\frac{\pi}{2}$  et 0, jusqu'à la

valeur 0. Par exemple ces conditions sont satisfaites par

$$\Phi(\sigma) = -P \cos \sigma \quad (P \text{ constant}),$$

avec

$$0 < P < \frac{\pi}{2}.$$

La fonction  $\Omega(\zeta)$  correspondante est alors visiblement, sans aucun calcul, égale à

$$\Omega(\zeta) = -P\zeta.$$

Il est d'ailleurs facile de vérifier que l'emploi de la formule (103) conduit au même résultat. Il nous paraît inutile de reproduire le détail de ce calcul.

Dans le cas actuel, le coefficient de  $i$  dans  $\Omega$  est  $-P\eta$ ; sa valeur sur la circonférence de rayon 1 ( $\zeta = e^{i\sigma}$ ) est

$$T_1 = -P \sin \sigma.$$

On en conclut donc, par l'application des formules (83), les équations suivantes qui déterminent exactement le profil de l'obstacle

$$x + iy = -2a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} e^{i(\Theta + iT)} \cos \sigma \sin \sigma d\sigma,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x &= -2a^2 \int_{\sigma}^{\frac{\pi}{2}} e^{P \sin \sigma} \cos(P \sin \sigma) \cos \sigma \sin \sigma d\sigma, \\ y &= -2a^2 \int_{\sigma}^{\frac{\pi}{2}} e^{P \sin \sigma} \sin(P \sin \sigma) \cos \sigma \sin \sigma d\sigma. \end{aligned}$$

On s'assure aisément que ces quadratures s'effectuent exactement, et qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2}{P^2} \left\{ e^{P \sin \sigma} \left\{ \sin(P \sin \sigma) - P \sin \sigma [\cos(P \sin \sigma) + \sin(P \sin \sigma)] \right\} \right. \\ &\quad \left. + e^P [P \cos P - (1 - P) \sin P] \right\}, \\ y &= \frac{a^2}{P^2} \left\{ e^{P \sin \sigma} \left\{ \cos(P \sin \sigma) - P \sin \sigma [\cos(P \sin \sigma) - \sin(P \sin \sigma)] \right\} \right. \\ &\quad \left. - e^P [P \sin P + (1 - P) \cos P] \right\}. \end{aligned}$$

On observera que, dans tout le demi-cercle supérieur  $|\zeta| \leq 1$ , qui correspond par la représentation conforme au domaine occupé par le fluide en mouvement, le coefficient  $T$  de  $i$  dans  $\Omega$  est négatif. Par

suite dans tout le fluide, la vitesse  $V = e^T$  est inférieure à 1, valeur qu'elle possède à l'infini. Ce résultat montre que la réalisation du mouvement précédent est possible. [Cf. les récents résultats obtenus par M. M. Brillouin (*Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, 21 nov. 1910).]

La résistance du profil est ici [Cf. formule (85)]

$$P_x = \frac{\pi a^2}{4} \Omega'^2(0) = \frac{\pi a^2}{4} P^2.$$

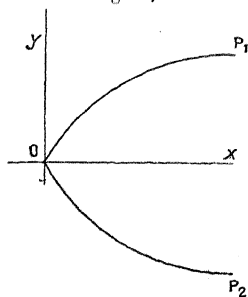
Nous n'écrirons pas les autres éléments du mouvement.

La fonction particulière que M. Levi-Civita nomme  $\omega_0$  est ici nulle ( $\alpha = \delta = 0$ ). Le cas actuel rentre donc comme cas particulier dans celui, étudié en détail par M. Brillouin, où la série entière de M. Levi-Civita se réduit à son premier terme.

Les exemples suivants sont au contraire essentiellement nouveaux.

*Deuxième exemple.* — Proposons-nous de déterminer la fonction arbitraire de manière qu'elle convienne à une courbe obstacle analogue à la figure ci-dessous. Il suffira pour cela que  $\Phi(\sigma)$  soit négative pour  $\sigma$  variant de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ , et qu'elle décroisse constamment de 0 à une valeur  $-P$  comprise entre 0 et  $-\frac{\pi}{2}$ . Bien entendu, la valeur de  $\Phi(\sigma)$  dans le second quadrant se déduit par la formule (111) de sa valeur dans le premier.

Fig. 24.



Toutes les conditions susdites sont réalisées en prenant

$$\Phi(\sigma) = \begin{cases} -P \sin \sigma & \text{pour } 0 < \sigma < \frac{\pi}{2} \\ +P \sin \sigma & \text{pour } \frac{\pi}{2} < \sigma < \pi \end{cases} \quad \left( 0 < P < \frac{\pi}{2} \right).$$

*Calcul de  $\Omega$ .* — Calculons alors  $\Omega$ . On a dans le cercle  $|\zeta| = 1$  selon la formule (103)

$$\Omega(\zeta) = -\frac{P}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varepsilon (1 - \zeta^2)}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} d\varepsilon + \frac{P}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin \varepsilon (1 - \zeta^2)}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} d\varepsilon.$$

Or, on a

$$\int \frac{2\zeta \sin \varepsilon}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} d\varepsilon = \log(1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2) = F(\varepsilon),$$

et par suite immédiatement

$$\Omega(\zeta) = -\frac{P}{\pi} \frac{1 - \zeta^2}{2\zeta} \left[ 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) - F(\pi) \right],$$

c'est-à-dire

$$\Omega(\zeta) = -\frac{P}{\pi} \frac{1 - \zeta^2}{2\zeta} [2 \log(1 + \zeta^2) - \log(1 - \zeta)^2 - \log(1 + \zeta)^2]$$

ou enfin

$$\Omega = -\frac{P}{\pi} \frac{1 - \zeta^2}{\zeta} \log \frac{1 + \zeta^2}{1 - \zeta^2}.$$

On constate immédiatement que cette fonction (qui, bien entendu, convient dans tout le domaine  $|\zeta| \leq 1$ ) n'y possède que les points singuliers  $\zeta = \pm i$ ; les points  $\zeta = 0$  et  $\zeta = \pm 1$  ne sont singuliers qu'en apparence. Cela est évident pour  $\zeta = 0$ , car au voisinage de ce point on a

$$\Omega = -\frac{P}{\pi} \frac{1 - \zeta^2}{\zeta} \left( 2\zeta^2 + \frac{2\zeta^6}{3} + \dots \right) = -\frac{2P}{\pi} (1 - \zeta^2) \left( \zeta + \frac{\zeta^5}{3} + \dots \right)$$

(le log considéré est celui qui s'annule pour  $\zeta = 0$ , comme cela résulte sans peine de l'intégration faite ci-dessus). Quant aux points  $\zeta = \pm 1$ , ils ne sont pas singuliers, à cause de ce fait que  $(1 - \zeta^2) \log(1 - \zeta^2)$  tend vers zéro en même temps que  $1 - \zeta^2$ .

Y a-t-il besoin de dire que la fonction  $\Omega$  obtenue est impaire en  $\zeta$ .

Calculons les valeurs de  $\Omega$  sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ , c'est-à-dire pour  $\zeta = e^{i\sigma}$ .

On a pour  $\sigma < \frac{\pi}{2}$  la valeur

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \Theta_1 + iT_1 &= -\frac{P}{\pi} (e^{-i\sigma} - e^{i\sigma}) \log \frac{1 + e^{2i\sigma}}{1 - e^{2i\sigma}} \\ &= \frac{2iP}{\pi} \sin \sigma \log \left( \frac{\cos \sigma}{-i \sin \sigma} \right), \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\Theta_1 + iT_1 &= 2i \frac{P}{\pi} \sin \sigma \log(i \cot \sigma) = 2i \frac{P}{\pi} \sin \sigma \left( \frac{i\pi}{2} + \log \cot \sigma \right) \\ &= -P \sin \sigma + 2i \frac{P}{\pi} \sin \sigma \log(\cot \sigma).\end{aligned}$$

Et pour  $\sigma > \frac{\pi}{2}$ , il vient de même

$$\begin{aligned}\Theta_1 + iT_1 &= 2i \frac{P}{\pi} \sin \sigma \log[-i(-\cot \sigma)] = 2i \frac{P}{\pi} \sin \sigma \left[ -\frac{i\pi}{2} + \log(-\cot \sigma) \right] \\ &= P \sin \sigma + 2i \frac{P}{\pi} \sin \sigma \log(-\cot \sigma).\end{aligned}$$

Nous retrouvons donc bien pour  $\Theta_1$  les valeurs dont nous étions partis, et nous voyons que  $T_1$  prend sur la demi-circonférence supérieure les valeurs

$$T_1 = \frac{2P}{\pi} \sin \sigma \log |\cot \sigma|.$$

*Parois de l'obstacle.* — En appliquant la formule (83) nous trouvons, pour  $\varpi_1(OP_1)$  par exemple,

$$\begin{aligned}x &= 2a^2 \int_{\sigma}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2P}{\pi} \sin \sigma \log |\cot \sigma|} \cos(P \sin \sigma) \cos \sigma \sin \sigma d\sigma, \\ y &= 2a^2 \int_{\sigma}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2P}{\pi} \sin \sigma \log |\cot \sigma|} \sin(P \sin \sigma) \cos \sigma \sin \sigma d\sigma.\end{aligned}$$

*Résistance correspondante.* — Elle est égale à

$$P_x = \frac{\pi a^2}{4} \Omega'(0).$$

Le plus simple pour avoir  $\Omega'(0)$  est de se servir du développement en série dont on a écrit les premiers termes au voisinage de  $\zeta = 0$ , ce qui fournit de suite

$$\Omega'(0) = -\frac{2P}{\pi}$$

et

$$P_x = \frac{a^2 P^2}{\pi}.$$

*Vérification.* — Il est intéressant de vérifier que, suivant un théorème de M. Levi-Civita, la différence  $\Omega - \omega_0$  dans laquelle  $\omega_0$  représente la fonction (28) de son Mémoire (celle qui correspond à l'obstacle formé de deux lames), est une fonction analytique, sans points singuliers sur la circonférence de rayon 1, et par suite développable en série entière pour  $\zeta$  inférieur *ou égal* à 1.

La fonction  $\omega_0$  de M. Levi-Civita est ici ( $\partial = 0$ ,  $\alpha = P$ )

$$\omega_0 = \frac{2Pi}{\pi} \log \frac{1+i\zeta}{1-i\zeta} = \frac{2Pi}{\pi} \log \left( \frac{\zeta-i}{-\zeta-i} \right),$$

et par suite la différence  $\Omega - \omega_0$  :

$$\Omega - \omega_0 = -\frac{P}{\pi} \left( \frac{1-\zeta^2}{\zeta} \log \frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2} + 2i \log \frac{\zeta-i}{-\zeta-i} \right).$$

Les seuls points singuliers possibles sur la circonférence susdite sont visiblement  $\zeta = \pm i$ . Or, au voisinage de  $\zeta = i$  par exemple, la seule partie du crochet qui puisse n'être pas régulière est

$$\frac{1-\zeta^2}{\zeta} \log(\zeta-i) + 2i \log(\zeta-i),$$

et cette quantité se met sans difficulté sous la forme

$$-\frac{1}{\zeta} (\zeta-i)^2 \log(\zeta-i),$$

qui tend vers zéro lorsque  $\zeta$  tend vers  $i$ .

Un calcul analogue est valable pour  $\zeta = -i$ .

REMARQUE. — La présence sur la paroi de l'obstacle de deux points  $P_1$  et  $P_2$ , où la tangente est horizontale, donne lieu à une difficulté qui n'est d'ailleurs pas nouvelle. Il arrive que, du point de vue physique, une portion de la paroi n'est pas acceptable, la vitesse le long de cette portion dépassant la vitesse maxima 1 permise par les hypothèses hydrodynamiques (*Cf.* M. BRILLOUIN, *Comptes rendus*, 21 novembre 1910). On a en effet ici, sur la paroi,

$$V = e^{\tau_1} = e^{\frac{2P}{\pi} \sin \sigma \log |\cot \sigma|}$$

et l'on voit que cette vitesse est plus grande que 1 dès que  $\sigma$  sort de l'intervalle  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ .

*Troisième exemple.* — Proposons-nous d'obtenir une forme d'obstacle *en forme de proue de navire*, comme cela était déjà le cas dans l'exemple précédent, mais les tangentes aux points O et P, ayant sur Ox des inclinaisons quelconques. Il suffira pour cela de choisir pour  $\Phi(\sigma)$  une fonction qui, lorsque  $\sigma$  croît de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ , varie en décroissant constamment, les deux valeurs extrêmes ayant toutes deux leur module inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ .

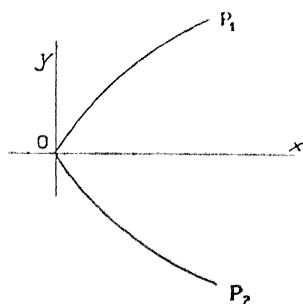
Toutes ces conditions sont réalisées si l'on choisit

$$\Phi(\sigma) = \begin{cases} -P \operatorname{tang} \left[ a_1 + a_2 \left( \frac{\pi}{2} - \sigma \right) \right] & \text{pour } 0 < \sigma < \frac{\pi}{2}, \\ +P \operatorname{tang} \left[ a_1 - a_2 \left( \frac{\pi}{2} - \sigma \right) \right] & \text{pour } \frac{\pi}{2} < \sigma < \pi \end{cases}$$

$$\left[ a_1, a_2 > 0; \quad a_1 + a_2 \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < P < \frac{\pi}{2 \operatorname{tang} \left( a_1 + a_2 \frac{\pi}{2} \right)} \right],$$

$a_1, a_2$  et P étant trois constantes vérifiant les inégalités que je viens d'écrire.

Fig. 25.



Je vais développer les calculs dans l'hypothèse

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

et, par suite,

$$\alpha_1 < \frac{\pi}{4}.$$

*Calcul de  $\Omega$ .* — D'après la formule (103), nous aurons

$$\Omega(\zeta) = -\frac{P}{\pi}(1 - \zeta^2) \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} d\varepsilon - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\operatorname{tang}\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} d\varepsilon \right\}$$

ou, en posant

$$\operatorname{tang}\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{4}\right) = \beta (> 1), \quad \operatorname{tang}\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{4}\right) = \beta_1,$$

$$\Omega(\zeta) = -\frac{P}{\pi}(1 - \zeta^2) \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} \frac{\beta - \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2}}{1 + \beta \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2}} d\varepsilon - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} \frac{\beta_1 + \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2}}{1 - \beta_1 \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2}} d\varepsilon \right\}$$

Remarquons la relation élémentaire, déduite de ce que

$$\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \left(\alpha_1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2},$$

entre  $\beta$  et  $\beta_1$  ; cette relation est

$$\beta\beta_1 + 1 = 0.$$

Cela étant, il nous faut calculer les deux intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\beta - \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2}}{(1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2) \left(1 + \beta \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2}\right)} d\varepsilon$$



et

$$I' = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\beta_1 + \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2}}{(1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2) \left(1 - \beta_1 \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2}\right)} d\varepsilon.$$

D'ailleurs la seconde se ramène à la première. En posant

$$\varepsilon = \pi - \varepsilon_1,$$

on constate en effet sans peine que

$$I' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\beta_1 + \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{\varepsilon_1}{2}}}{(1 + 2\zeta \cos \varepsilon_1 + \zeta^2) \left(1 - \frac{\beta_1}{\operatorname{tang} \frac{\varepsilon_1}{2}}\right)} d\varepsilon_1,$$

c'est-à-dire, à cause de  $\beta_1 = -\frac{1}{\beta}$ ,

$$I' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\beta - \operatorname{tang} \frac{\varepsilon_1}{2}\right)}{(1 + 2\zeta \cos \varepsilon_1 + \zeta^2) \left(1 + \beta \operatorname{tang} \frac{\varepsilon_1}{2}\right)} d\varepsilon_1.$$

On déduira donc  $I'$  de  $I$  en changeant le signe de  $\zeta$ .

Ceci posé, faisons dans  $I$  le changement de variable

$$\operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2} = t;$$

il vient

$$I = \int_0^1 \frac{2(\beta - t) dt}{(1 + \beta t) [(1 + \zeta)^2 t^2 + (1 - \zeta)^2]}.$$

Or on vérifie facilement l'identité suivante

$$\frac{\beta - t}{\left(t + \frac{1}{\beta}\right) [(1 + \zeta)^2 t^2 + (1 - \zeta)^2]} = \frac{A}{t + \frac{1}{\beta}} + \frac{Bt + C}{(1 + \zeta)^2 t^2 + (1 - \zeta)^2}$$

avec

$$A = \frac{\beta + \frac{1}{\beta}}{(1+\zeta)^2 \frac{1}{\beta^2} + (1-\zeta)^2}, \quad B = -A(1+\zeta)^2, \quad C = -1 - \frac{A}{\beta}(1+\zeta)^2.$$

De sorte qu'on a pour I

$$I = \frac{2}{\beta} \left\{ A \log \left( t + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{B}{2(1+\zeta)^2} \log [(1+\zeta)^2 t^2 + (1-\zeta)^2] + \frac{C}{1-\zeta^2} \arctan \frac{1+\zeta}{1-\zeta} t \right\}_0^1,$$

c'est-à-dire, après des simplifications évidentes,

$$I = \frac{1+\beta^2}{(1+\zeta)^2 + \beta^2(1-\zeta)^2} \log \frac{(1+\beta)^2(1-\zeta)^2}{2(1+\zeta^2)} + \frac{8\beta\zeta}{1-\zeta^2} \frac{\frac{\pi}{4} + \arctan \zeta}{(1+\zeta)^2 + \beta^2(1-\zeta)^2}.$$

On a, par suite, en changeant  $\zeta$  en  $-\zeta$ ,

$$I' = \frac{1+\beta^2}{(1-\zeta)^2 + \beta^2(1+\zeta)^2} \log \frac{(1+\beta)^2(1+\zeta)^2}{2(1+\zeta^2)} - \frac{8\beta\zeta}{1-\zeta^2} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan \zeta}{(1-\zeta)^2 + \beta^2(1+\zeta)^2},$$

et enfin

$$(114) \quad \Omega(\zeta) = -\frac{P}{\pi} \left[ \begin{aligned} & \frac{(1+\beta^2)(1-\zeta^2)}{(1+\zeta)^2 + \beta^2(1-\zeta)^2} \log \frac{(1+\beta)^2(1-\zeta)^2}{2(1+\zeta^2)} \\ & + \frac{8\beta\zeta}{(1+\zeta)^2 + \beta^2(1-\zeta)^2} \left( \frac{\pi}{4} + \arctan \zeta \right) \\ & - \frac{(1+\beta^2)(1-\zeta^2)}{(1-\zeta)^2 + \beta^2(1+\zeta)^2} \log \frac{(1+\beta)^2(1+\zeta)^2}{2(1+\zeta^2)} \\ & + \frac{8\beta\zeta}{(1-\zeta)^2 + \beta^2(1+\zeta)^2} \left( \frac{\pi}{4} - \arctan \zeta \right) \end{aligned} \right]$$

qui est bien une fonction impaire de  $\zeta$ .

*Développement de  $\Omega$  au voisinage de  $\zeta = 0$ .* — En observant que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+\zeta)^2 + \beta^2(1-\zeta)^2} &= \frac{1}{1+\beta^2+2\zeta(1-\beta^2)+\zeta^2(1+\beta^2)} \\ &= \frac{1}{1+\beta^2} \left( 1 - 2\zeta \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

et en utilisant des formules connues, on peut écrire, au voisinage de  $\zeta=0$ ,

$$\begin{aligned} -\frac{\pi\Omega}{P} = & (1-\zeta^2)\left(1-2\zeta\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\dots\right)\left[2\log(1+\beta)-2\left(\zeta+\frac{\zeta^2}{2}\dots\right)-\log 2-(\zeta^2-\dots)\right] \\ & -(1-\zeta^2)\left(1+2\zeta\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\dots\right)\left[2\log(1+\beta)+2\left(\zeta-\frac{\zeta^2}{2}\dots\right)-\log 2-(\zeta^2-\dots)\right] \\ & +\frac{8\beta\zeta}{1+\beta^2}\left(1-2\zeta\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\dots\right)\left(\frac{\pi}{4}+\zeta-\frac{\zeta^3}{3}\dots\right) \\ & +\frac{8\beta\zeta}{1+\beta^2}\left(1+2\zeta\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\dots\right)\left(\frac{\pi}{4}-\zeta+\frac{\zeta^3}{3}\dots\right) \end{aligned}$$

et, par suite, le développement en série de  $\Omega$  commence par le terme

$$\frac{4P}{\pi}\left[\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\log\frac{(1+\beta)^2}{2}+1-\frac{\beta\pi}{1+\beta^2}\right]\zeta,$$

dont le coefficient est par conséquent égal à la quantité  $\Omega'(0)$  dont nous aurons besoin plus loin.

*Calcul de  $\Omega$  sur la circonférence  $|\zeta|=1$ .* — Dans l'expression (114) de  $\Omega$ , valable encore sur la circonférence limite, faisons  $\zeta=e^{i\sigma}$  et remarquons les formules faciles à démontrer :

$$\begin{aligned} \frac{1-e^{2i\sigma}}{(1+e^{i\sigma})^2+\beta^2(1-e^{i\sigma})^2} &= \frac{-i\sin\sigma}{(1+\beta^2)\cos\sigma+(1-\beta^2)}, \\ \frac{(1-e^{i\sigma})^2}{1+e^{2i\sigma}} &= \frac{1-\cos\sigma}{-\cos\sigma}, \\ \frac{e^{i\sigma}}{(1+e^{i\sigma})^2+\beta^2(1-e^{i\sigma})^2} &= \frac{1}{2(1+\beta^2)\cos\sigma+2(1-\beta^2)}, \\ \operatorname{arc tang} e^{i\sigma} &= \frac{1}{2i}\begin{cases} i\frac{\pi}{2}+\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma}{2}\right) & (0<\sigma<\frac{\pi}{2}), \\ -i\frac{\pi}{2}+\log\operatorname{tang}\left(\left|\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma}{2}\right|\right) & (\frac{\pi}{2}<\sigma<\pi), \end{cases} \end{aligned}$$

et d'autres analogues. Nous en déduisons que  $\Omega$  prend sur la circonférence limite la valeur

$$\Omega_1=\Theta_1+iT_1$$

donnée par l'équation

$$\begin{aligned}
 = & (1 + \beta^2) \frac{-i \sin \sigma}{(1 + \beta^2) \cos \sigma + (1 - \beta^2)} \left[ \log \frac{(1 + \beta)^2}{2} + \begin{cases} i\pi + \log \frac{1 - \cos \sigma}{\cos \sigma}, & (0 < \sigma < \frac{\pi}{2}) \\ \log \frac{1 - \cos \sigma}{-\cos \sigma}, & (\frac{\pi}{2} < \sigma < \pi) \end{cases} \right] \\
 & + (1 + \beta^2) \frac{i \sin \sigma}{(1 + \beta^2) \cos \sigma - (1 - \beta^2)} \left[ \log \frac{(1 + \beta)^2}{2} + \begin{cases} \log \frac{1 + \cos \sigma}{\cos \sigma}, & (0 < \sigma < \frac{\pi}{2}) \\ i\pi + \log \frac{1 + \cos \sigma}{-\cos \sigma}, & (\frac{\pi}{2} < \sigma < \pi) \end{cases} \right] \\
 & + \frac{4\beta}{(1 + \beta^2) \cos \sigma + (1 - \beta^2)} \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2i} \begin{cases} i\frac{\pi}{2} + \log \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right), & (0 < \sigma < \frac{\pi}{2}) \\ -i\frac{\pi}{2} + \log \tan \left| \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right|, & (\frac{\pi}{2} < \sigma < \pi) \end{cases} \right] \\
 & + \frac{4\beta}{(1 + \beta^2) \cos \sigma - (1 - \beta^2)} \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2i} \begin{cases} i\frac{\pi}{2} + \log \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right), & (0 < \sigma < \frac{\pi}{2}) \\ -i\frac{\pi}{2} + \log \tan \left| \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right|, & (\frac{\pi}{2} < \sigma < \pi) \end{cases} \right].
 \end{aligned}$$

Comme vérification, la partie réelle  $\Theta_1$  sera, en supposant pour fixer les idées  $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$ ,

$$-\frac{\pi \Theta_1}{P} = \frac{\pi[(1 + \beta^2) \sin \sigma + 2\beta]}{(1 + \beta^2) \cos \sigma + (1 - \beta^2)},$$

c'est-à-dire, en se souvenant que

$$\begin{aligned}
 \beta &= \tan \left( a_1 + \frac{\pi}{4} \right), \\
 \Theta_1 &= -P \frac{\sin \sigma + \sin 2 \left( a_1 + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \sigma + \cos 2 \left( a_1 + \frac{\pi}{4} \right)},
 \end{aligned}$$

ou enfin

$$\Theta_1 = -P \tan \left( a_1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right).$$

C'est bien la valeur dont nous étions partis.

Quant au coefficient  $T_1$  de  $i$ , sa valeur sera la suivante, en supposant

$\frac{\pi}{2} < \sigma < \pi$ , ce qui correspond à la paroi  $OP_1$  :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\pi}{P} T_1 = & -\frac{(1+\beta^2)\sin\sigma}{(1+\beta^2)\cos\sigma+(1-\beta^2)} \left[ \log \frac{(1+\beta)^2}{2} + \log \frac{1-\cos\sigma}{-\cos\sigma} \right] \\
 & + \frac{(1+\beta^2)\sin\sigma}{(1+\beta^2)\cos\sigma-(1-\beta^2)} \left[ \log \frac{(1+\beta)^2}{2} + \log \frac{1+\cos\sigma}{-\cos\sigma} \right] \\
 & + \frac{4\beta(1-\beta^2)\log\tan\left|\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma}{2}\right|}{(1+\beta^2)^2\cos^2\sigma-(1-\beta^2)^2}.
 \end{aligned}$$

En transportant  $\Theta_1$  et  $T_1$  dans l'équation (83), nous aurons les équations de la paroi  $OP_1$ .

*Résistance de l'obstacle.* — La résistance est donnée par la formule

$$P_x = \frac{\pi a^2}{4} \Omega'^2(o),$$

où  $\Omega'(o)$  a la valeur calculée il y a un instant (*cf.* p. 94).

*Vérification.* — Je vais vérifier rapidement que la fonction  $\Omega$ , que j'ai construite précédemment, ne possède, pour  $|\zeta|$  inférieur ou égal à 1, que les points singuliers  $\zeta = \pm i$  (c'est-à-dire les points  $e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$  de la théorie générale).

Les points  $\zeta = \pm 1$  n'introduisent pas de difficultés, car la présence du facteur  $1 - \zeta^2$  devant  $\log(1 + \zeta)$  ou  $\log(1 - \zeta)$  entraîne que la portion correspondante de  $\Omega$  tende vers zéro.

Il reste à s'assurer que les points  $\zeta$  racines des deux dénominateurs

$$(1 + \zeta)^2 + \beta^2(1 - \zeta)^2$$

ou

$$(1 - \zeta)^2 + \beta^2(1 + \zeta)^2$$

ne sont pas des points singuliers.

Prenons par exemple le point

$$\zeta_1 = \frac{\beta i - 1}{\beta i + 1},$$

racine du premier dénominateur. En posant

$$\zeta = \zeta_1 + h,$$

on s'aperçoit sans difficulté que, au voisinage du point  $\zeta_1$ ,  $\Omega$  se présente sous forme d'une série en  $h$ , augmenté d'un terme en  $\frac{1}{h}$ . Le coefficient de ce dernier est, comme il est facile de s'en assurer,

$$-\frac{P}{\pi} \times \left\{ \begin{aligned} & \frac{(1+\beta^2)(1-\zeta_1^2)}{1+\zeta_1-\beta^2(1-\zeta_1)} \frac{1}{2} \log(1+\beta)^2 \frac{(1-\zeta_1)^2}{2(1+\zeta_1^2)} \\ & + \frac{2\beta\zeta_1}{1+\zeta_1-\beta^2(1-\zeta_1)} \frac{1}{i} \log \frac{1-\zeta_1+i(1+\zeta_1)}{1-\zeta_1-i(1+\zeta_1)}. \end{aligned} \right.$$

Or on a

$$\begin{aligned} 1+\zeta_1-\beta^2(1-\zeta_1) &= 2\beta i, & 1-\zeta_1 &= \frac{2}{1+\beta i}, \\ 1-\zeta_1^2 &= \frac{4\beta i}{1+\beta^2+2\beta i}, \\ 1+\zeta_1^2 &= \frac{2(1-\beta^2)}{1-\beta^2+2\beta i}, \\ \frac{1-\zeta_1+i(1+\zeta_1)}{1-\zeta_1-i(1+\zeta_1)} &= \frac{1-\beta}{1+\beta}, \end{aligned}$$

et par suite le coefficient de  $\frac{1}{h}$  se réduit à

$$-\frac{P}{\pi} \left[ \frac{1+\beta^2}{(1+\beta i)^2} \log \frac{(1+\beta)^2}{1-\beta^2} + \frac{1}{i} \frac{\beta i-1}{\beta i+1} \log \frac{1-\beta}{1+\beta} \right],$$

et comme on a

$$\frac{1+\beta^2}{(1+\beta i)^2} = \frac{1-\beta i}{1+\beta i}, \quad \frac{(1+\beta)^2}{1-\beta^2} = \frac{1+\beta}{1-\beta},$$

ce coefficient est nul et le point  $\zeta_1$  n'est pas singulier.

Enfin, je vais faire voir que, selon le théorème de M. Levi-Civita, la différence  $\Omega - \omega_0$  n'a aucun point singulier sur la circonférence de rayon 1. On a ici

$$\begin{aligned} & \left( \partial = 0, \alpha = P \tan \alpha_1 = P \frac{\beta-1}{\beta+1} \right), \\ \omega_0(\zeta) &= \frac{2Pi}{\pi} \frac{\beta-1}{\beta+1} \log \frac{1+i\zeta}{1-i\zeta} = \frac{2Pi}{\pi} \frac{\beta-1}{\beta+1} \log \frac{\zeta-i}{-\zeta-i}. \end{aligned}$$

Dans la différence  $\Omega - \omega_0$ , les seules singularités apparentes sont  $\zeta = \pm i$ . Prenons par exemple le point  $\zeta = i$ . Au voisinage de ce point,

les seuls termes de la différence, à considérer, sont

$$\begin{aligned} & \frac{P}{\pi} (1 + \beta^2) \frac{1 - \zeta^2}{(1 + \zeta)^2 + \beta^2 (1 - \zeta)^2} \log(\zeta - i) - \frac{4P\beta\zeta}{\pi i} \frac{1}{(1 + \zeta)^2 + \beta^2 (1 - \zeta)^2} \log(\zeta - i) \\ & - \frac{P}{\pi} (1 + \beta^2) \frac{1 - \zeta^2}{(1 - \zeta)^2 + \beta^2 (1 + \zeta)^2} \log(\zeta - i) + \frac{4P\beta\zeta}{\pi i} \frac{1}{(1 - \zeta)^2 + \beta^2 (1 + \zeta)^2} \log(\zeta - i) \\ & - \frac{2P}{\pi} \frac{i}{\beta + 1} \log(\zeta - i), \end{aligned}$$

en se souvenant que

$$\operatorname{arc} \operatorname{tang} \zeta = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta} = \frac{1}{2i} \log \frac{\zeta - i}{-\zeta - i}.$$

Or on s'assure maintenant immédiatement que le coefficient de  $\log(\zeta - i)$ , dans l'expression qu'on vient d'écrire, est une fraction rationnelle en  $\zeta$ , qui s'annule pour  $\zeta = i$  et qui par suite contient  $\zeta - i$  en facteur. Il en résulte que le produit par  $\log(\zeta - i)$  tend vers zéro quand  $\zeta$  tend vers  $i$ . Le point  $\zeta = i$  n'est donc pas singulier, ce que nous voulions démontrer.

Comme l'exige un théorème fondamental de M. Levi-Civita, nous voyons qu'alors la fonction  $\Omega - \omega_0$  est développable en série entière suivant les puissances (d'ailleurs impaires) de  $\zeta$ , le développement étant valable dans la circonférence de rayon 1.

*Autres exemples.* — Il serait facile de former autant d'autres exemples qu'on voudrait, donnant naissance à des profils d'obstacle ayant la forme d'une proue de navire. On en obtiendrait, avec un nombre quelconque de paramètres arbitraires, en faisant la somme d'un nombre quelconque de fonctions  $\Phi(\sigma)$  ayant la forme décrite dans les deux exemples ci-dessus, après les avoir multipliées par des facteurs constants positifs; ces facteurs devant seulement satisfaire à cette restriction, que la somme décroissante obtenue varie, lorsque  $\sigma$  croît de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ , dans des limites comprises entre 0 et  $-\frac{\pi}{2}$ . On aperçoit même là un moyen d'introduire une infinité de quantités arbitraires, dont on pourra profiter pour que la courbe profil soit aussi approchée que possible d'une courbe donnée graphiquement à l'avance.

On pourrait de même utiliser pour  $\Phi(\sigma)$  un polynôme entier constamment décroissant lorsque  $\sigma$  croît de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ , et profiter de l'indétermination des coefficients dans le même but que je viens de dire. Mais nous n'insisterons pas ici davantage sur ce sujet.

Il nous suffira d'avoir mis en évidence la possibilité pratique d'obtenir un profil d'obstacle de forme donnée à l'avance, et d'avoir traité en détail la forme assurément la plus intéressante pour la pratique.

Des obstacles ayant la forme de coupes à rebords enroulés en spirales (tels que ceux qu'a rencontrés M. Brillouin dans l'étude approfondie du cas où  $\Omega = \omega_0$  se réduit à  $c\zeta$ ) pourraient *a priori* s'obtenir en prenant pour  $\Phi(\sigma)$  une fonction décroissante dans l'intervalle 0,  $\frac{\pi}{2}$ , le maximum ou le minimum, dans cet intervalle, n'étant plus compris entre 0 et  $-\frac{\pi}{2}$ .

**Sur l'extension de la méthode précédente au cas du fluide limité par une paroi fixe.**

Je vais faire voir que la méthode employée avec succès dans le cas du fluide indéfini réussit aussi bien pour résoudre le problème de la résistance, dans le cas d'un fluide limité par une paroi fixe rectiligne indéfinie, lorsqu'on se donne à l'avance la forme de l'obstacle qui y est immergé.

Je commencerai par rappeler que, dans tous les cas possibles, nous sommes parvenus (sans rien supposer sur la forme de l'obstacle) à déterminer une fonction particulière  $\Omega_0$ , au moyen de laquelle la valeur générale de  $\Omega$  pouvait s'exprimer par l'introduction d'une certaine série de Laurent. Cette fonction  $\Omega_0$  particulière avait [Cf. équation (56)] la forme suivante :

$$(115) \quad \Omega_0 = \sum_1^{\infty} A_n \operatorname{sh} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right) \cos n\sigma - i \sum_1^{\infty} A_n \operatorname{ch} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right) \sin n\sigma,$$

où les  $A_n$  représentaient certaines constantes.



Nous avons reconnu que, pour  $\zeta = e^{i\sigma}$ , la partie réelle  $\Theta_0$  de cette expression prenait la forme

$$(116) \quad \Theta'_0 = \sum_1^{\infty} A_n \operatorname{sh}(n \log q) \cos n \sigma.$$

Ceci posé, nous allons démontrer que *la forme (115) convient à la fonction  $\Omega$  correspondant à un obstacle de forme quelconque donnée à l'avance, moyennant un choix convenable des coefficients, ce choix étant d'ailleurs facile à faire a priori lorsque la forme de l'obstacle est connue.*

A cet effet, rappelons-nous encore que les valeurs  $\Theta'$  de  $\Theta$  pour  $\zeta = e^{i\sigma}$  (nous considérerons seulement  $0 < \sigma < \pi$ , à cause de la symétrie connue) sont les valeurs de l'inclinaison, sur  $Ox$ , de la tangente à la paroi de l'obstacle (dans le sens du courant). Si le profil de l'obstacle est donné, comme ce profil est parcouru d'une manière continue sans arrêt ni recul lorsque le point  $e^{i\sigma}$  décrit la demi-circonférence supérieure  $|\zeta| = 1$ , la valeur de cette inclinaison est une fonction  $\Phi(\sigma)$  de  $\sigma$  continue, sauf peut-être pour  $\sigma = \sigma_0$  (qui correspond au point de la paroi où le courant se divise). Et l'allure générale de cette fonction  $\Phi(\sigma)$  est évidente à l'avance si le profil est donné. Enfin, si nous supposons que la courbure du profil varie d'une façon continue (sauf peut-être au point  $O$ ), la fonction  $\Phi(\sigma)$  possédera une dérivée  $\Phi'(\sigma)$  continue, sauf peut-être toujours au même point.

Je dis maintenant que cette fonction  $\Phi(\sigma)$  doit vérifier, quel que soit le contour, la relation nécessaire

$$(117) \quad \int_0^{\pi} \Phi(\sigma) d\sigma = 0.$$

En effet, dans la première Partie de ce travail, nous avons appris à former, dans tous les cas, au moins une fonction  $\Omega_0$  dont la partie réelle  $\Theta_0$  tende vers  $\delta \pm \alpha$  lorsque le point  $e^{i\sigma}$  tend vers le point  $e^{i\sigma_0}$  (ou  $e^{-i\sigma_0}$ ) d'un côté ou de l'autre, et  $\delta \pm \alpha$  représentant les angles avec  $Ox$  des deux tangentes au profil au point  $O$ .

Il en résulte que, si  $\Omega$  est la fonction cherchée correspondant au

profil donné, la différence

$$\Omega(\zeta) - \Omega_0(\zeta) = \Theta - \Theta_0 + i(T - T_0)$$

est une fonction de  $\zeta$  analytique, régulière, finie et continue partout dans la couronne,

$$q \leq |\zeta| \leq 1,$$

limites comprises sans aucune exception.

Considérons alors l'intégrale

$$\int_{|\zeta|=1} (\Omega - \Omega_0) \frac{d\zeta}{\zeta} - \int_{|\zeta|=q} (\Omega - \Omega_0) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

les deux circonférences étant parcourues toutes deux dans le sens direct. Comme le point  $\zeta = 0$  est extérieur à la couronne, *cette intégrale est nulle*, ce qui donne, en posant

$$\zeta = e^{i\sigma}, \quad \zeta = qe^{i\sigma},$$

sur l'un ou l'autre cercle,

$$(118) \quad \int_0^{2\pi} [\Omega(e^{i\sigma}) - \Omega_0(e^{i\sigma})] d\sigma = \int_0^{2\pi} [\Omega(qe^{i\sigma}) - \Omega_0(qe^{i\sigma})] d\sigma.$$

Or, sur la circonférence  $|\zeta| = q$ , par construction même,  $\Omega$  et  $\Omega_0$  sont imaginaires pures; donc le premier membre de (118) est aussi une imaginaire pure, ce qui entraîne que la partie réelle soit nulle, c'est-à-dire, en désignant par  $\Phi(\sigma)$  et  $\Phi_0(\sigma)$  ce que deviennent  $\Theta$  et  $\Theta_0$  quand on y fait  $\zeta = e^{i\sigma}$ ,

$$\int_0^{2\pi} [\Phi(\sigma) - \Phi_0(\sigma)] d\sigma = 0.$$

Mais à cause de la symétrie on a (ce qui résulte du prolongement analytique indiqué autrefois)

$$\Phi(2\pi - \sigma) = \Phi(\sigma),$$

$$\Phi_0(2\pi - \sigma) = \Phi_0(\sigma),$$

ce qui permet d'écrire l'égalité précédente sous la forme

$$(119) \quad \int_0^\pi [\Phi(\sigma) - \Phi_0(\sigma)] d\sigma = 0.$$

Enfin, rappelons-nous que, dans la construction de la fonction  $\Omega_0$  (*Cf.* la première Partie), nous avons justement fait cette hypothèse, que l'on eût

$$\int_0^\pi \Phi_0(\sigma) d\sigma = 0.$$

Il en résulte donc bien, et de l'égalité (119), la relation (117) nécessaire, que nous voulions établir.

Je déduis de là, et de la manière dont  $\Phi(\sigma)$  se comporte au voisinage de la discontinuité possible  $\sigma = \sigma_0$ , que la fonction  $\Phi(\sigma)$  est certainement développable en série trigonométrique, *sans terme constant*, de la forme

$$\Phi(\sigma) = \sum_1^\infty B_n \cos n\sigma,$$

ou, ce qui revient au même, de la forme (116)

$$(120) \quad \Phi(\sigma) = \sum_1^\infty A_n \operatorname{sh}(n \log q) \cos n\sigma.$$

On peut donc construire une fonction  $\Omega(\zeta)$  ayant l'expression

$$(121) \quad \Omega(\zeta) = \sum_1^\infty A_n \operatorname{sh}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right) \cos n\sigma - i \sum_1^\infty A_n \operatorname{ch}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right) \sin n\sigma,$$

et cette fonction est déterminée complètement par la connaissance de la fonction  $\Phi(\sigma)$ . Les coefficients  $A_n$  ont alors pour valeurs

$$(122) \quad A_n = \frac{2}{\pi \operatorname{sh}(n \log q)} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \cos n\sigma d\sigma.$$

La fonction  $\Omega$  ainsi construite est celle qui répond au problème proposé. Elle constitue l'intégrale générale des mouvements fluides dans le cas étudié où le fluide est limité par une paroi fixe.

Il reste toutefois à démontrer que cette fonction  $\Omega$  est finie et continue dans toute la couronne, limites comprises, exception faite des deux points  $\zeta = e^{\pm i\sigma_0}$ . Cette démonstration est immédiate, si l'on suppose que  $\Phi(\sigma)$  ait ses deux premières dérivées finies entre 0 et  $\pi$ , et si l'on tient compte des résultats démontrés dans notre première Partie.

On peut en effet écrire, à l'aide de deux intégrations par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sigma_0-0} \Phi(\sigma) \cos n\sigma d\sigma &= \left[ \frac{\Phi(\sigma) \sin n\sigma}{n} \right]_0^{\sigma_0-0} - \int_0^{\sigma_0-0} \Phi'(\sigma) \frac{\sin n\sigma}{n} d\sigma, \\ \int_0^{\sigma_0-0} \Phi'(\sigma) \sin n\sigma d\sigma &= \left[ -\frac{\Phi'(\sigma) \cos n\sigma}{n} \right]_0^{\sigma_0-0} + \int_0^{\sigma_0-0} \Phi''(\sigma) \frac{\cos n\sigma}{n} d\sigma;\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_0^{\sigma_0-0} \Phi(\sigma) \cos n\sigma d\sigma &= \frac{\Phi(\sigma_0-0) \sin n\sigma_0}{n} + \frac{\Phi'(\sigma_0-0) \cos n\sigma_0 - \Phi'(0)}{n^2} \\ &\quad - \int_0^{\sigma_0-0} \Phi''(\sigma) \frac{\cos n\sigma}{n^2} d\sigma,\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_0+0}^{\pi} \Phi(\sigma) \cos n\sigma d\sigma &= \frac{-\Phi(\sigma_0+0) \sin n\sigma_0}{n} - \frac{\Phi'(\sigma_0+0) \cos n\sigma_0 - (-1)^n \Phi'(\pi)}{n^2} \\ &\quad - \int_{\sigma_0+0}^{\pi} \Phi''(\sigma) \frac{\cos n\sigma}{n^2} d\sigma.\end{aligned}$$

Par suite on a, pour  $A_n$ ,

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{2}{\pi \operatorname{sh}(n \log q)} [\Phi(\sigma_0-0) - \Phi(\sigma_0+0)] \frac{\sin n\sigma_0}{n} \\ &\quad + \frac{2}{\pi \operatorname{sh}(n \log q)} \left\{ \frac{[\Phi'(\sigma_0-0) - \Phi'(\sigma_0+0)] \cos n\sigma_0 - \Phi'(0) + (-1)^n \Phi'(\pi)}{n^2} \right\} \\ &\quad - \frac{2}{\pi \operatorname{sh}(n \log q)} \int_0^{\pi} \Phi''(\sigma) \frac{\cos n\sigma}{n^2} d\sigma.\end{aligned}$$

Or si, dans l'expression (121) de  $\Omega$ , on remplace d'abord  $A_n$  par

$$\frac{2}{\pi \operatorname{sh}(n \log q)} [\Phi(\sigma_0-0) - \Phi(\sigma_0+0)] \frac{\sin n\sigma_0}{n},$$

la fonction obtenue ne différera que par un facteur constant de la

fonction qui a été étudiée en détail sous le nom de  $\Omega_0^1$  et qui satisfait bien à toutes les conditions de continuité exigées.

En remplaçant ensuite dans (121) les  $A_n$  par la portion restante

$$\frac{2}{\pi \operatorname{sh}(n \log \gamma)} \left[ \frac{1}{n^2} \{ [\Phi'(\sigma_0 - 0) - \Phi'(\sigma_0 + 0)] \cos n \sigma_0 - \Phi'(0) + (-1)^n \Phi'(\pi) \} - \int_0^\pi \Phi''(\sigma) \frac{\cos n \sigma}{n^2} d\sigma \right],$$

la fonction obtenue est finie et continue *partout* dans la couronne, limites comprises, car les termes de l'expression obtenue par le remplacement indiqué sont comparables à  $\frac{1}{n^2}$ , ce qui permet d'affirmer que la série obtenue est uniformément convergente, et l'on en déduit la continuité de la fonction qu'elle représente.

Comme la fonction  $\Omega$  qu'on cherchait est visiblement la somme des deux fonctions que nous venons d'indiquer, le théorème annoncé est bien démontré.

Les mêmes conséquences en résultent, que dans l'étude faite dans la seconde Partie, relative au fluide illimité. Nous possédons l'intégrale générale  $\Omega$  du problème, avec une fonction arbitraire, qui est ici  $\Phi(\sigma)$ , et qui joue exactement le même rôle que la fonction portant le même nom dans cette seconde Partie (1).

*Exemple.* — Pour donner ici au moins un exemple, cherchons à résoudre le problème de la résistance pour un profil d'obstacle analogue à celui qu'indique la figure ci-après. On y parviendra évidemment, comme dans l'exemple analogue de la seconde Partie, en prenant

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{\pi}{2}, & \Phi(\sigma) &= -P \cos \sigma & (P = \text{const.}), \\ \alpha = \hat{\sigma} &= 0, & 0 &< P < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

---

(1) Voir une construction beaucoup plus précise de l'intégrale générale  $\Omega$ , par l'introduction de certaines fonctions elliptiques, et une démonstration générale des propriétés de  $\Omega$ , dans notre Mémoire déjà cité : *Sur le mouvement d'un solide donné...* (*Journal de Mathématiques*, 1911).

A cause de la formule élémentaire

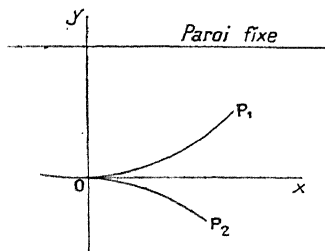
$$\int_0^\pi \cos \sigma \cos n \sigma d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 1, \end{cases}$$

la fonction  $\Omega$  se réduit ici à

$$\Omega = \frac{1}{\text{sh}(\log q)} \left[ \text{sh} \left( \log \frac{q}{\rho} \right) \cos \sigma - i \text{ch} \left( \log \frac{q}{\rho} \right) \sin \sigma \right],$$

et les formules (33), (34), (44), (45) de la première Partie font

Fig. 26.



alors connaître les équations du profil et l'expression de la résistance.

J'exposerai dans des Mémoires ultérieurs, avec les détails nécessaires, un certain nombre d'exemples, ainsi que l'application de la méthode que j'ai introduite, au cas d'un fluide limité par deux parois fixes rectilignes parallèles, au cas d'un fluide s'écoulant par un orifice, d'un vase de forme donnée, et à un grand nombre d'autres questions d'Hydrodynamique. (Cf. *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, 6 février 1911, 13 mars 1911, 24 avril 1911.)

*Observation sur la méthode précédente.* — Au fond, la méthode que nous venons d'exposer pour le fluide limité revient à considérer une fonction analytique  $\Omega(\zeta)$  régulière dans une couronne circulaire (dans les conditions énoncées déjà plus d'une fois) comme entièrement déterminée par la connaissance des valeurs que prend sa partie réelle  $\Theta$  sur les deux circonférences limites : à savoir

$$\Theta = \Phi(\sigma)$$

sur la demi-circonférence supérieure  $|\zeta| = 1$  [avec  $\Phi(2\pi - \sigma) = \Phi(\sigma)$ , pour la demi-circonférence inférieure], et

$$\Theta = 0$$

sur la circonférence  $|\zeta| = q$ .

Ces conditions, d'après le principe de Dirichlet, déterminent en effet théoriquement une fonction harmonique  $\Theta$ , et la fonction associée  $T$  s'en tirerait par quadratures. Mais il est peu vraisemblable que les résultats exposés ci-dessus puissent se retrouver par cette voie (<sup>1</sup>). Au contraire, ce qui précède fournit une indication sur une solution du problème de Dirichlet pour une couronne circulaire, dans le cas où les valeurs de la fonction harmonique sur la circonférence de rayon  $q$  sont constamment nulles et où  $\Theta$  prend la même valeur en deux points conjugués de la circonférence de rayon 1.

En outre, ce procédé a l'avantage de donner en même temps  $\Theta$  et  $T$ .

Il n'est pas indifférent de constater que l'expression (54)

$$(123) \quad \Omega = \sum [\alpha_n \operatorname{ch}(n \log \rho) - \beta_n \operatorname{sh}(n \log \rho)] \cos n\sigma \\ + i \sum [\alpha_n \operatorname{sh}(n \log \rho) - \beta_n \operatorname{ch}(n \log \rho)] \sin n\sigma,$$

donnée à  $\Omega_0$  dans la première Partie, est susceptible de résoudre le problème de Dirichlet pour une couronne circulaire, quelles que soient les valeurs  $\Phi(\sigma)$  et  $\Phi_1(\sigma)$  que prenne  $\Theta$  sur les circonférences limites

$$\begin{aligned} \Theta &= \Phi(\sigma) & \text{pour} & \quad \zeta = e^{i\sigma} & (\rho = 1), \\ \Theta &= \Phi_1(\sigma) & \text{pour} & \quad \zeta = qe^{i\sigma} & (\rho = q), \end{aligned}$$

pourvu que

$$\Phi(2\pi - \sigma) = \Phi(\sigma), \quad \Phi_1(2\pi - \sigma) = \Phi_1(\sigma)$$

et que les deux fonctions  $\Phi$  et  $\Phi_1$  soient développables en séries trigonométriques.

---

(<sup>1</sup>) Du moins en utilisant les méthodes connues. [Voir sur ce sujet une note de l'auteur : *Sur le Problème de Dirichlet relatif à une couronne circulaire* (*Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. CLII, p. 680).]

En effet, la partie réelle dans (123) étant

$$\sum [\alpha_n \operatorname{ch}(n \log \rho) - \delta_n \operatorname{sh}(n \log \rho)] \cos n\sigma,$$

la condition

$$\sum_0^{\infty} \alpha_n \cos n\sigma = \Phi(\sigma),$$

obtenue pour  $\rho = 1$ , donnera les  $\alpha_n$ , et la condition

$$\sum [\alpha_n \operatorname{ch}(n \log q) - \delta_n \operatorname{sh}(n \log q)] \cos n\sigma = \Phi_1(\sigma),$$

obtenue pour  $\rho = q$ , déterminera sans peine les  $\delta_n$ .

Nous nous bornerons pour le moment à ces indications.

D'un certain point de vue, il nous semble que les expressions introduites précédemment, et qui peuvent s'écrire sous la forme

$$(124) \quad \sum_0^{\infty} \alpha_n \cos(in \log \zeta) + i \delta_n \sin(in \log \zeta),$$

constituent une extension, dans le champ complexe, des séries trigonométriques d'une variable réelle.

Sur le problème du fluide indéfini considéré comme cas limite  
du fluide avec paroi.

Il est peut-être intéressant de noter que le cas du fluide indéfini, traité par M. Levi-Civita, peut s'obtenir comme cas limite, en partant de nos équations relatives au cas du fluide limité par une paroi fixe. Il suffit de supposer que cette paroi s'éloigne indéfiniment; dans ces conditions, le rayon  $q$  de la circonférence qui correspond, dans la représentation conforme, à la paroi fixe, tend vers zéro, et l'on retrouve bien le domaine circulaire considéré par M. Levi-Civita. Il serait fastidieux de reproduire la vérification de chaque formule en passant à la limite. Contentons-nous de vérifier le point le plus impor-



tant : à savoir que la fonction  $\Omega_0^1$ , qui nous a permis de résoudre le problème pour un obstacle formé de deux segments rectilignes, devient à la limite justement la fonction  $\omega_0$  de M. Levi-Civita relative au même obstacle en fluide indéfini.

Nous avons en effet

$$\Omega_0^1 = \sum A_n \operatorname{sh} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right) \cos n\sigma - i \sum A_n \operatorname{ch} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right) \sin n\sigma$$

avec

$$A_n = -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n \operatorname{sh}(n \log q)}.$$

Or, on a

$$\frac{\operatorname{sh} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right)}{\operatorname{sh}(n \log q)} = \frac{-\left(\frac{\rho}{q}\right)^n + \left(\frac{q}{\rho}\right)^n}{q^n - \frac{1}{q^n}} = \frac{\frac{q^{2n}}{\rho^n} - \rho^n}{q^{2n} - 1},$$

ce qui tend vers  $\rho^n$  lorsque  $q$  tend vers zéro.

De même

$$\frac{\operatorname{ch} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right)}{\operatorname{sh}(n \log q)} = \frac{\left(\frac{q}{\rho}\right)^n + \left(\frac{\rho}{q}\right)^n}{q^n - \frac{1}{q^n}} = \frac{\frac{q^{2n}}{\rho^n} + \rho^n}{q^{2n} - 1},$$

ce qui tend vers  $-\rho^n$  dans les mêmes conditions.

A la limite, la fonction  $\Omega_0^1$  se présente donc sous la forme

$$\lim \Omega_0^1 = -\frac{4\alpha}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\rho^n \cos n\sigma \sin n\sigma_0}{n} + i \frac{\rho^n \sin n\sigma \sin n\sigma_0}{n},$$

c'est-à-dire

$$\lim \Omega_0^1 = -\frac{4\alpha}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\zeta^n}{n} \sin n\sigma_0.$$

Or la fonction  $\omega_0$  de M. Levi-Civita est [Cf. L.-C., formule (28)]

$$\omega_0 = \delta + \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{-ie^{i\sigma_0} + i\zeta}{1 - e^{i\sigma_0}\zeta},$$

ce qui peut s'écrire

$$\omega_0 = \delta + \frac{2\alpha i}{\pi} [\log(-ie^{i\sigma_0}) + \log(1 - e^{-i\sigma_0}\zeta) - \log(1 - e^{i\sigma_0}\zeta)],$$

ou encore

$$\omega_0 = \partial + \frac{2\alpha i}{\pi} \left[ i \left( \sigma_0 - \frac{\pi}{2} \right) - e^{-i\sigma_0} \zeta - \frac{e^{-2i\sigma_0} \zeta^2}{2} - \dots - \frac{e^{-ni\sigma_0} \zeta^n}{n} - \dots \right. \\ \left. + e^{i\sigma_0} \zeta + \frac{e^{2i\sigma_0} \zeta^2}{2} + \dots + \frac{e^{ni\sigma_0} \zeta^n}{n} + \dots \right].$$

Maintenant la quantité

$$\partial + \alpha - \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}$$

est nulle [équation (29) de M. Levi-Civita], et, par suite, il vient

$$\omega_0 = -\frac{4\alpha}{\pi} \left( \zeta \sin \sigma_0 + \frac{\zeta^2}{2} \sin 2\sigma_0 + \dots + \frac{\zeta^n}{n} \sin n\sigma_0 + \dots \right),$$

ce qui coïncide bien avec l'expression obtenue il y a un instant comme limite de  $\Omega_v^1$ .

