

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JULES HAAG

Familles de Lamé de surfaces égales. Généralisation et applications

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 27 (1910), p. 257-337

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1910_3_27__257_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FAMILLES DE LAMÉ COMPOSÉES DE SURFACES ÉGALES.

GÉNÉRALISATIONS. APPLICATIONS.

PAR M. J. HAAG,

Ancien élève de l'École Normale supérieure.



INTRODUCTION.

L'origine du travail que je vais avoir l'honneur d'exposer remonte à l'étude de certains mouvements remarquables, auquel j'ai été conduit incidemment, il y a 2 ans, à la suite de considérations géométriques sur les surfaces réglées. J'ai fait de ces mouvements une étude approfondie, qui m'a donné des résultats très intéressants. Mais, bien que ceux-ci soient prêts à la publication, je ne puis ici que les résumer brièvement, à seule fin de faciliter la compréhension de certaines parties des Chapitres qui vont suivre, tout en me réservant d'en développer autre part l'exposition détaillée. Je rappelle d'abord que tout mouvement continu peut être réalisé par la *viration* d'une surface réglée (Σ) sur une autre surface réglée (Σ') . J'ai, d'autre part, donné des formules simples qui permettent de déterminer, par des quadratures, la surface (Σ') la plus générale sur laquelle peut *virer* une surface (Σ) donnée, *suivant un pas également donné* [C. R. ⁽¹⁾, 24 août 1908]. Voici maintenant comment on peut définir les mouvements remarquables auxquels nous venons de faire allusion. Soit un trièdre mobile $Oxyz$, dont la position dans l'espace absolu dépend

⁽¹⁾ Nous désignerons par cette abréviation les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

d'un certain paramètre t . Supposons que les rotations et translations $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ de ce trièdre soient liées par $6 - n$ relations linéaires et homogènes distinctes. Nous dirons alors que le mouvement du trièdre est un mouvement (G_n) . Tous les mouvements dont les rotations et translations vérifient les mêmes équations constituent ce que nous appellerons un groupe (g_n) . Les quantités $p, q, \dots$ correspondantes sont évidemment des formes linéaires à coefficients constants relativement à n fonctions arbitraires de $t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Si l'on donne à ces fonctions des valeurs constantes quelconques, on obtient les *mouvements hélicoïdaux du groupe*. Parmi ceux-ci, il y a lieu de distinguer ce que nous appelons les *mouvements de base* : ce sont ceux que l'on obtient en donnant la valeur 1 à l'un des λ_i et en annulant tous les autres. Comme mouvements de base, on peut prendre n mouvements hélicoïdaux quelconques du groupe, à condition qu'ils soient *linéairement indépendants*, c'est-à-dire qu'ils ne fassent pas partie d'un même groupe (g_{n-1}) .

Suivant la valeur de n , les propriétés des mouvements (G_n) sont très différentes. Pour $n = 1$, on a évidemment le mouvement hélicoïdal et ses dégénérescences (rotation et translation). Pour $n = 2$, on a des mouvements très intéressants, dont le plus général peut être engendré par le *glissement d'une surface gauche de révolution sur une quelconque de ses déformées par flexion* (voir notre Note du 10 août 1908 dans les *C. R.*), ou bien par la *viration d'un conoïde de Plücker* (voir notre Note du 24 août 1908). Il existe en outre des dégénérescences très importantes, mais dont nous ne pouvons rien dire ici.

Pour $n = 3$, tout mouvement du groupe peut s'obtenir par la viration d'une surface réglée (Σ) dont les génératrices peuvent être choisies arbitrairement parmi les droites d'une congruence, le pas relatif à chacune de ces droites étant en outre déterminé. L'étude de cette congruence et des diverses dégénérescences est du plus haut intérêt et permet, comme d'ailleurs pour les groupes (g_2) , d'établir une classification naturelle des divers groupes (g_3) .

Quant aux cas où n prend une valeur supérieure à 3, ils se déduisent très simplement des précédents par la considération de ce que j'ai appelé le *groupe complémentaire d'un groupe donné*.

L'importance des mouvements (G) résulte de ce qu'ils s'introduisent

nécessairement dans toute question où, ayant fait usage d'un trièdre mobile à un paramètre ⁽¹⁾, on arrive, pour exprimer certaines conditions, à une ou plusieurs relations linéaires en $p, q, \dots, \zeta$, dont les coefficients sont, soit des constantes, soit des fonctions d'un ou plusieurs arguments autres que z . J'en ai signalé, dans plusieurs Notes aux *C. R.*, diverses applications géométriques (*C. R.*, 3 et 10 août, 9 et 23 novembre 1908). La plus importante est celle qui est relative aux *familles de Lamé composées de surfaces égales*. Au moment où j'ai obtenus les résultats qui sont contenus dans ma Note du 3 août 1908, j'ignorais entièrement que cette question eût été étudiée. Ce n'est qu'un peu plus tard que je me suis aperçu que je n'avais fait que donner des formes nouvelles et, dans certains cas, plus élégantes, à des propriétés déjà établies par divers géomètres. Néanmoins, comme j'étais en possession d'une méthode qui ne me semblait avoir été utilisée par personne, je me suis mis à poursuivre mes recherches dans cette voie, espérant apporter quelques contributions nouvelles à l'étude d'un problème dont s'étaient occupés de nombreux géomètres, dont quelques-uns des plus illustres. Je n'y ai pas réussi autant que je l'avais espéré tout d'abord. Par contre, j'ai été conduit, au cours de mes déductions, à imaginer certaines généralisations qui m'ont semblé dignes d'intérêt et dont quelques-unes m'ont permis d'obtenir la solution de certains problèmes non encore résolus.

Mon travail se divise en quatre Chapitres :

Dans le premier, je m'occupe des *familles de Lamé composées de surfaces égales*. Je n'y établis guère de résultats essentiellement nouveaux. Néanmoins, la méthode que j'ai employée m'a paru digne d'être exposée parce qu'elle permet d'obtenir très rapidement tous les résultats connus jusqu'à présent et en outre parce qu'elle donne le moyen de déterminer d'une façon commode les systèmes triples orthogonaux dont elle démontre l'existence.

Le second Chapitre est une généralisation du précédent. Je me propose d'y déterminer toutes les *familles de Lamé dont les différentes surfaces ont des représentations sphériques égales*. Je suis arrivé à des

(¹) On pourrait peut-être faire une étude analogue pour les mouvements à plusieurs paramètres.

résultats d'une forme assez élégante, qui permettent d'attaquer par une nouvelle voie le problème qui fait l'objet du premier Chapitre.

Dans le troisième Chapitre, je me pose la question suivante : *Peut-on trouver deux familles de Lamé composées de surfaces deux à deux égales, mais placées dans des positions relatives différentes ?* Cette question est intimement liée à celle des familles de Lamé composées de surfaces égales et peut donner naissance à d'intéressantes applications. C'est ainsi, par exemple, qu'elle m'a permis de déterminer *toutes les familles de Lamé composées d'hélicoïdes*, ainsi que *celles dont les différentes surfaces admettent chacune un plan de symétrie*, variable d'une surface à la suivante.

Enfin, le dernier Chapitre généralise le troisième, comme le second généralise le premier, c'est-à-dire que je me pose encore la question précédente, mais en supposant simplement que ce sont *les représentations sphériques qui, deux à deux, sont égales*.

J'aurais voulu développer, dans un cinquième Chapitre, l'application à différents cas particuliers très intéressants des théories exposées dans les quatre autres. Mais j'ai dû me borner, pour ne pas allonger outre mesure ce travail, à indiquer sommairement les résultats obtenus et ceux que j'espère obtenir.

Il me reste à adresser maintenant mes bien sincères remerciements à M. Darboux, pour le bienveillant accueil qu'il a constamment réservé à mes recherches, ainsi que pour les conseils dont il a bien voulu m'éclairer dans le cours de ma rédaction.

CHAPITRE PREMIER.

FAMILLES DE LAMÉ COMPOSÉES DE SURFACES ÉGALES.

1. La recherche des familles de Lamé composées de surfaces égales constitue un problème qui a été posé pour la première fois par M. Darboux et qui a fait depuis l'objet d'un assez grand nombre de travaux. Dans ses *Leçons sur les systèmes orthogonaux* ⁽¹⁾ (n^{os} 50 à 53),

(1) Dorénavant nous désignerons cet Ouvrage, dont nous aurons fréquemment l'occasion de parler, par l'abréviation (*S. T.*).

l'éminent géomètre donne une solution qui repose sur la forme particulière donnée par M. Maurice Levy à l'équation du troisième ordre dont dépend la famille de Lamé la plus générale. Il indique en même temps les résultats obtenus par divers auteurs, pour lesquels nous nous contenterons de renvoyer le lecteur à l'Ouvrage cité. Depuis, la question a été reprise par M. Medolaghi (*Accademia dei Lincei*, 1899), qui a considéré seulement deux cas particuliers, et surtout par M. Demoulin (*C. R.*, 22 juin 1903), qui, après avoir donné une démonstration géométrique d'un élégant théorème de M. Pétot, en a déduit toutes les solutions connues jusqu'aujourd'hui.

Nous allons ici suivre une méthode différente, qui s'appuie uniquement sur le théorème de Dupin et sur la réciproque qu'en a donnée M. Darboux.

2. Imaginons un trièdre mobile $Oxyz$, ou (T), dépendant d'un paramètre t . Désignons, suivant les notations habituelles, par $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ ses rotations et translations. Supposons, d'autre part, que ce trièdre entraîne avec lui une surface (S) invariable de forme. Proposons-nous de chercher quelles doivent être la nature du mouvement du trièdre, ainsi que la nature de la surface pour que les différentes positions de celle-ci constituent une famille de Lamé.

Soient x, y, z les coordonnées relatives d'un point quelconque M de (S), supposées exprimées en fonction des paramètres u et v des lignes de courbure, et, ce qui est évidemment permis, indépendantes de t . Écrivons le théorème de Dupin pour les lignes (v) par exemple. Il faut pouvoir associer ces lignes en surfaces orthogonales à (S) le long de chacune d'elles. On sait d'ailleurs, grâce à la réciproque de M. Darboux, que cette condition est suffisante. Or, rien n'est plus facile que de la traduire analytiquement. Il suffit de supposer que v est fonction de t et d'écrire que le déplacement élémentaire du point M est perpendiculaire à la tangente à la ligne (u) qui passe en ce point, ce qui donne immédiatement

$$(1) \quad G dv + A dt = 0,$$

en posant

$$(2) \quad G = \mathbf{S} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2, \quad A = \mathbf{S} \frac{\partial x}{\partial v} (\xi + qz - ry).$$

De là résulte la condition nécessaire

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{A}{G} \right) = 0,$$

qui doit être évidemment vérifiée quels que soient u, v, t . S'il en est ainsi, $\frac{A}{G}$ sera une fonction des seules variables v et t , et l'équation (1) deviendra une équation différentielle du premier ordre entre ces variables, dont l'intégration donnera les surfaces de la seconde famille du système triple orthogonal.

L'unique condition du problème est donc l'équation (3), sans oublier toutefois que les lignes (u) et (v) doivent être les lignes de courbure de (S). En raisonnant sur les lignes (u) comme sur les lignes (v), on arriverait à une condition analogue

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{B}{E} \right) = 0$$

avec

$$(5) \quad E = S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2, \quad B = S \frac{\partial x}{\partial u} (z + qz - ry);$$

et l'on ramènerait la détermination des surfaces de la troisième famille à l'intégration de l'équation différentielle

$$(6) \quad E du + B dt = 0.$$

Cette nouvelle condition (4) doit *a priori* équivaleir à (3), si l'on admet que les lignes (u) et (v) sont lignes de courbure. La vérification directe n'offre aucune difficulté. Si, au contraire, on suppose simplement des lignes (u) et (v) qu'elles sont orthogonales, les équations simultanées (3) et (4) entraînent, pour ces lignes, la condition d'être lignes de courbure, et cela grâce au théorème de Dupin. C'est ce qu'il est également facile de contrôler par un calcul direct. On pourra enfin vérifier que, les lignes (u) et (v) étant supposées lignes de courbure, l'une ou l'autre des équations (3) et (4) est la traduction analytique de l'élégant théorème de M. Petot : *La droite qui joint les centres de courbure géodésique des deux lignes de courbure qui se*

croisent en M appartient au complexe linéaire attaché au mouvement hélicoïdal instantané $(p, q, r, \xi, \eta, \zeta)$.

3. Maintenant que nous avons vu d'une façon bien nette quelles étaient les conditions analytiques du problème, nous allons étudier celles-ci d'une manière approfondie. Nous pouvons évidemment nous borner à nous occuper de l'équation (3), car des résultats obtenus nous déduirons par symétrie ceux qui sont relatifs à l'équation (4).

L'équation (3) rentre dans le type de celles que nous avons signalées à la page 259 et qui conduisent aux mouvements (G); de sorte que nous pouvons, dès maintenant, énoncer la proposition suivante :

Si, en se déplaçant, une surface (S) engendre une famille de Lamé, ce déplacement ne peut être qu'un mouvement (G), auquel cas la même surface engendre aussi des familles de Lamé dans tous les mouvements (G) qui font partie du même groupe que le précédent. En particulier, si n mouvements hélicoïdaux linéairement indépendants répondent à la question, il en est de même de tous les mouvements du groupe (g_n) qui admet ces mouvements hélicoïdaux comme mouvements de base.

Maintenant que nous avons déterminé la nature du mouvement que doit prendre le trièdre (T), il s'agit de voir quelles doivent être les équations de la surface (S) par rapport à ce trièdre. Nous avons évidemment à distinguer plusieurs cas suivant la valeur du nombre n précédent.

4. PREMIER CAS : $n = 1$. — *La surface (S) ne peut engendrer une famille de Lamé que dans un seul mouvement, qui est un mouvement hélicoïdal (H).* Nous désignerons désormais, par abréviation, toutes les surfaces de cette nature sous le nom de *surfaces de la première catégorie*. Voyons à quoi se ramène leur détermination. Tout d'abord, nous pouvons évidemment supposer le mouvement (H) uniforme, c'est-à-dire les quantités $p, q, \dots, \xi$ constantes. L'équation (3) équivaut alors à la suivante :

$$(7) \quad A = GV,$$

en appelant V une fonction de la seule variable v .

Supposons d'abord $V \neq 0$. Si l'on remarque qu'à la suite du changement de v en $f(v)$, les quantités G et A sont divisées respectivement par $[f'(v)]^2$ et par $f'(v)$, on voit qu'on peut, sans diminuer la généralité, réduire V à l'unité. Mais alors la variable v sera parfaitement déterminée, pour une vitesse donnée du mouvement uniforme (H), en négligeant du moins une constante additive. Nous lui donnerons le nom de *variable canonique*. Avec une telle variable, nous avons

$$(8) \quad A = G;$$

par suite, l'équation (1) se réduit à

$$dv + dt = 0,$$

ce qui nous donne l'énoncé suivant :

Pour avoir une surface (ρ) de la seconde famille, il suffit d'imprimer à chaque ligne (v) de (S) un déplacement hélicoïdal compris dans (H), d'amplitude ⁽¹⁾ égale à $\rho - v$, ρ désignant une constante, qui est le paramètre de la surface (ρ) .

Ceci nous donne une interprétation géométrique élégante de la variable canonique v et nous montre en même temps que *toutes les surfaces (ρ) se déduisent de l'une d'elles par le mouvement (H)*.

Si l'on écarte le cas où B serait nul, on a de même une *variable canonique u* , telle que

$$(9) \quad B = E.$$

ce qui donne, pour la génération des surfaces (ρ_1) de la troisième famille, un énoncé tout à fait analogue au précédent. Si donc nous connaissons une surface (S) satisfaisant aux équations (8) et (9), nous pourrions, par de simples calculs algébriques, en déduire un système triple orthogonal dont les surfaces (ρ_2) seront les différentes positions que prend (S) dans le mouvement (H).

⁽¹⁾ L'amplitude est l'angle dont tourne la ligne (v) , si l'on a affaire à un véritable mouvement hélicoïdal ou à une rotation, et si la vitesse angulaire constante a été choisie égale à 1. Si l'on a affaire à une translation, dont la vitesse soit également l'unité, l'amplitude mesure le déplacement de chaque point.

5. La détermination des surfaces (S) répondant aux conditions précédentes constitue un problème très ardu.

On peut le ramener, de différentes façons, à *l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre à deux variables indépendantes*. Citons par exemple l'équation indiquée par M. Darboux (*S. T.*, t. I, n° 51), qui détermine z en fonction de x et y . Il y a aussi, *pour le cas particulier d'une translation*, l'équation de M. P. Adam (*C. R.*, t. CXXI, p. 812), qui conduit à l'équation tangentielle de la surface en variables symétriques, ou l'équation donnée par M. Darboux dans sa Thèse de Doctorat (*Annales de l'École Normale*, 1866, p. 123), qui permet d'obtenir les β_{ik} du système triple. En se plaçant toujours dans l'hypothèse d'une translation, et partant simplement des équations (8) et (9), on peut en obtenir très rapidement une autre, que nous croyons nouvelle. Si l'on prend l'axe des z parallèle à la translation, on voit de suite que le problème se ramène à la recherche des surfaces dont l'élément linéaire est de la forme

$$(10) \quad ds^2 = \frac{\partial z}{\partial u} du^2 + \frac{\partial z}{\partial v} dv^2,$$

ce qui, en vertu d'une remarque faite plus haut (n° 2), entraîne la condition que les lignes (u) et (v) soient lignes de courbure. Or, l'équation (10) s'écrit

$$(11) \quad dx^2 + dy^2 = \frac{\partial z}{\partial u} du^2 + \frac{\partial z}{\partial v} dv^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right)^2.$$

Il nous suffit donc d'écrire que la courbure totale du second membre est nulle (¹), ce qui donne l'équation

$$(12) \quad 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \log p}{\partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \log q}{\partial u} - \frac{\frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}}{\theta} = 0,$$

où l'on a posé

$$p = \frac{\partial z}{\partial u}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \theta = p + q - 1.$$

(¹) Cet artifice nous a été indiqué par la méthode de formation de l'équation des surfaces applicables sur une surface donnée, découverte par M. Darboux en 1872 (*voir* par exemple, *T. S.*, t. III, p. 253). Nous désignerons dorénavant par l'abréviation (*T. S.*) l'Ouvrage de M. Darboux sur la *Théorie des surfaces*.

Ayant ε , on aura α et γ par l'équation (11), c'est-à-dire en somme par la recherche des lignes de longueur nulle de l'élément linéaire du second membre.

On peut suivre une marche analogue dans les cas d'une rotation autour de $O\varepsilon$. Si l'on passe en coordonnées semi-polaires, on est ramené à l'équation

$$ds^2 = \rho^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \omega}{\partial v} dv^2 \right)$$

ou

$$(13) \quad \frac{d\rho^2 + d\varepsilon^2}{\rho^2} = \frac{\partial \omega}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \omega}{\partial v} dv^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} du + \frac{\partial \omega}{\partial v} dv \right)^2.$$

Il suffit alors d'écrire que le second membre a une courbure totale égale à moins 1, ce qui conduit à l'équation

$$(14) \quad 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \log p}{\partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \log q}{\partial u} - \frac{\frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}}{\theta} + 4pq\theta = 0,$$

avec

$$p = \frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad q = \frac{\partial \omega}{\partial v}, \quad \theta = p + q - 1.$$

Ayant ω , on aura ρ et ε par la recherche des lignes de longueur nulle du second membre de (13).

Si l'on a affaire à un véritable mouvement hélicoïdal, on ne voit pas le moyen d'imaginer une méthode analogue aux précédentes; mais cela a peu d'importance, car nous verrons, au Chapitre suivant, que ce cas se ramène à celui de la rotation et à des quadratures.

Si l'on ne tient pas à réduire le problème à l'intégration d'une équation unique, ce qui ne présente d'ailleurs guère qu'un intérêt théorique, on peut encore suivre d'autres voies. L'une d'elles consiste à rechercher la surface (S) par la méthode du trièdre mobile MXYZ relatif au système des lignes de courbures, en partant des équations (8) et (9). Il suffit de remarquer que l'équation (8), par exemple, exprime que la translation de ce trièdre relative à MY et à v variable est égale au moment par rapport à MY du système de vecteurs qui donne la distribution des vitesses du mouvement (H).

En introduisant les coordonnées de ce système de vecteurs par rap-

port au trièdre mobile, cette condition s'exprime très simplement. Il faut lui adjoindre les équations qui expriment que le système de vecteurs en question demeure, quand u et v varient, équivalent à un système fixe de l'espace. En partant de là, on arrive à une méthode nouvelle de détermination des surfaces (S) cherchées. Mais nous ne la développerons pas, car elle revient au fond aux méthodes générales qui seront exposées dans le Chapitre suivant, si l'on se place du moins à l'unique point de vue des équations auxquelles on est ramené en dernier lieu. Quelle que soit la façon d'attaquer le problème, on ne saurait songer à le résoudre dans toute sa généralité. Tout ce que l'on peut faire, c'est d'en chercher des solutions particulières. En voici quelques-unes, qui ne sont d'ailleurs pas nouvelles. Citons d'abord les surfaces qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{qx - py - K}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \alpha_0(x^2 + y^2 + z^2) + \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3z + \alpha_4,$$

qui engendrent une famille de Lamé dans le mouvement hélicoïdal d'axe Oz et de pas K , et qui ont été signalées par M. Darboux (*S. T.*, t. I, p. 86). On peut les caractériser par la propriété suivante, à condition d'y joindre les surfaces analogues relatives à la translation : *Pour chacune d'elles, il existe une sphère telle qu'en la prenant pour sphère principale dans une transformation infinitésimale de Ribaucour* ⁽¹⁾, *la surface se transforme en une surface égale.*

Dans le cas particulier, où la constante α_4 seule est différente de zéro, on obtient des surfaces que M. Darboux a caractérisées par la propriété d'être superposables aux surfaces qui leur sont parallèles, et dont il a intégré l'équation. On peut aussi remarquer, ce qui évite toute intégration, que ces surfaces admettent deux hélicoïdes d'axe Oz et de pas K pour nappes de leur développée. Pour les obtenir, il suffit de partir d'un hélicoïde quelconque, sur lequel on prend une famille de géodésiques égales autres que les trajectoires orthogonales des hélices ⁽²⁾. Les tangentes à ces géodésiques sont les normales de la surface cherchée.

(1) DARBOUX, *S. T.*, n° 43.

(2) Dans ce cas, on obtiendrait comme surface (S) un hélicoïde, lequel glisserait sur

On peut aussi, avec M. Demoulin (*C. R.*, 22 juin 1903), chercher les *périssphères qui engendrent une famille de Lamé dans un mouvement hélicoïdal* (H). L'application du théorème de M. Petot montre de suite que si S désigne le sommet du cône circonscrit le long d'une ligne de courbure circulaire, il faut et suffit que le plan polaire de ce point par rapport au complexe (C) attaché au mouvement (H) passe par la caractéristique (D) du plan (II) de la ligne de courbure correspondante. Cette proposition permet de retrouver facilement les périssphères de M. Lucien Lévy (*Journal de Liouville*, 1892), qui sont relatifs à la translation. On peut aussi en déduire tous les périssphères qui correspondent à une rotation, et cela par des quadratures (1).

Nous verrons, dans le Chapitre suivant, le moyen d'obtenir un grand nombre de surfaces nouvelles répondant aux conditions du problème. Pour l'instant, nous allons reprendre notre discussion.

6. Revenons à l'équation (7) pour examiner le cas particulier où la fonction V serait nulle, et par suite aussi A. Les surfaces (S) correspondantes, que nous appellerons *surfaces singulières de la première catégorie*, sont caractérisées par la propriété suivante : *Les tangentes aux lignes (u) appartiennent toutes au complexe linéaire (C)*. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, l'équation (1) se réduit à $d\nu = 0$, ce qui signifie que *les surfaces (ρ) de la seconde famille sont des hélicoïdes engendrés par les différentes lignes (ν) dans le mouvement (H)* (2).

lui-même dans le mouvement (H) et ne donnerait pas par conséquent une famille de Lamé. Ce cas est celui où la constante a_4 serait nulle.

(1) Si le point S n'est pas sur l'axe Oz de rotation (cas qui correspondrait à des surfaces de Joachimstal d'axe Oz; M. Carrus a donné un mode de génération élégant de ces surfaces particulières : *Journal de l'École Polytechnique*, 1908, p. 85), il faut que le plan (S, D) passe par Oz. On en déduit d'abord que D doit passer par un point fixe de Oz et par suite que *les périssphères sont annallagmatiques par rapport à une sphère de centre sur Oz*. Par une inversion, on peut alors se ramener au cas où la déférente se trouve dans le plan des xy et l'on n'a plus qu'à résoudre un simple problème de géométrie plane. On verra facilement qu'on peut se donner arbitrairement le rayon de la sphère en fonction de l'arc de déférente, celle-ci se détermine alors par des quadratures.

(2) On peut démontrer ceci géométriquement d'une manière très simple, en remarquant que, pour que la ligne (ν) qui passe par un point donné M de (S) engendre dans le mouvement (H) un hélicoïde orthogonal en ce point à la surface (S), il faut et suffit que la

Quant aux surfaces (ρ_1) , elles seront obtenues, comme au n° 4, au moyen de la variable canonique u . Il est en effet impossible que les tangentes aux lignes (ρ) appartiennent, en même temps que les précédentes, au complexe (C) , car il en serait de même de toutes les tangentes à la surface. La détermination de toutes ces surfaces singulières est aisée dans les cas particuliers de la translation et de la rotation. Ce sont en effet les *surfaces moulures* de noyau parallèle à Oz , pour une translation suivant Oz , et les *surfaces de Joachimstal* d'axe Oz , pour une rotation autour de Oz . On retombe sur des systèmes triples orthogonaux évidents et bien connus. Mais il n'en va pas de même lorsqu'on a affaire à un véritable mouvement hélicoïdal. Nous verrons, au Chapitre suivant, que *la détermination des surfaces correspondantes équivaut au problème de la déformation de la sphère*, ce qui constitue un lien très curieux entre deux questions qui semblent *a priori* entièrement différentes ⁽¹⁾.

7. DEUXIÈME CAS : $n = 2$. — *La surface (S) peut engendrer une famille de Lamé dans tous les mouvements d'un groupe (g_2) et dans ceux-là seulement.* Les surfaces de cette nature seront appelées *surfaces de la seconde catégorie*. Si nous désignons par A_1 et A_2 les expressions obtenues en remplaçant dans A les $p, q, \dots$ par les $p_1, q_1, \dots$ et $p_2, q_2, \dots$, coordonnées constantes de deux mouvements de base du groupe, nous devons avoir

$$(15) \quad A_1 = V_1 G, \quad A_2 = V_2 G,$$

où V_1 et V_2 sont deux fonctions de la seule variable ρ . Ces deux équations expriment, si l'on veut, que *la droite de M. Petot engendre une congruence linéaire*, intersection des complexes linéaires (C_1) et (C_2) relatifs aux deux mouvements de base (H_1) et (H_2) . On peut dé-

vitesse de M soit perpendiculaire à la tangente à la ligne (u) , ou, ce qui revient au même, que cette tangente appartienne au complexe (C) .

⁽¹⁾ M. Guichard a montré récemment (*C. R.*, 6 décembre 1909) qu'on retombait encore sur la déformation de la sphère en cherchant *les surfaces dont les premières tangentes principales sont tangentes à une quadrique*. Il y aurait peut-être lieu de chercher un rapprochement entre cet énoncé et le nôtre. Cela conduirait peut-être à la véritable origine de la connexité qui existe entre ces différents problèmes.

duire de là certaines surfaces particulières de la seconde catégorie. C'est ce qu'a fait M. Demoulin (*C. R.*, 22 juin 1903). Ce géomètre a signalé d'abord les *surfaces développables* dont l'arête de rebroussement est telle que la normale principale (qui n'est autre que la droite de M. Petot) appartient constamment à la congruence (C_1, C_2) . Mais il est clair que la recherche de ces surfaces revient à celle des surfaces, autres que les hélicoïdes, qui admettent une famille de géodésiques égales, problème qui a été résolu par M. Hazzidakis ⁽¹⁾ (*Journal de Crelle*, 1883). M. Demoulin a indiqué aussi quels sont les *périsphères* qui répondent à la question. Ce sont les périsphères de la page 12 pour lesquels le point S décrit une droite Δ , c'est-à-dire qui sont en même temps des surfaces de Joachimstal. Si l'on remarque que la déférente est dans ce cas située dans un plan (P) qui contient Δ , on voit qu'il est nécessaire que la droite Δ' , conjuguée de Δ par rapport à (C), autour de laquelle doit pivoter le plan (S, D), soit perpendiculaire à (P). Comme Δ et Δ' sont les directrices du mouvement (G_2) auquel on doit soumettre la surface pour obtenir une famille de Lamé, *ce mouvement sera obtenu en considérant le cercle tangent à Δ' et d'axe Δ et en supposant que ce cercle vient coïncider successivement avec tous les cercles de courbure d'une courbe à courbure constante* ⁽²⁾; à moins que Δ' ne soit à l'infini, auquel cas on obtient soit un mouvement de verrou, soit un autre mouvement susceptible d'une définition élégante.

Nous avons pu déterminer, sans aucune intégration ni quadrature, toutes les surfaces répondant aux conditions précédentes. Parmi elles, citons la *cyclide de Dupin* dont les points doubles sont respectivement sur Δ et Δ' (cas signalé pour la première fois par M. Cosserat : *C. R.*, juin 1897). Les périsphères précédents sont aussi les seules surfaces de Joachimstal capables d'engendrer une famille de Lamé dans un mouvement autre qu'une rotation autour de leur axe, exception

⁽¹⁾ Dans une Note aux *Comptes rendus* (9 novembre 1908), nous avons généralisé ce problème et montré comment il se rattache étroitement à la théorie des mouvements (G), ce que M. Hazzidakis ne semble pas avoir vu de façon nette. Cela met en évidence la concordance absolue qui existe entre les deux manières de traiter la question des familles de Lamé composées de développables égales.

⁽²⁾ Voir J. HAAG, *C. R.*, 10 août 1908, p. 345.

faite pour celles qu'on obtient en animant une tractrice d'un mouvement de verrou autour de sa base (').

8. Revenons aux équations (15). Si, entre elles, nous éliminons G , nous obtenons

$$(16) \quad A_1 V_2 - A_2 V_1 = 0.$$

Cette équation exprime que *les tangentes aux lignes (u) en leurs points de rencontre avec une même ligne (v) appartiennent toutes à un même complexe linéaire faisant partie du système à deux termes (C_1, C_2)*. Cette propriété, qui est une conséquence analytique du théorème de M. Petot, peut aussi s'en déduire par un raisonnement géométrique fort simple, que nous laisserons au lecteur le soin de faire. Mais il faut bien remarquer qu'elle ne renferme pas à elle seule toutes les conditions du problème, car si les équations (15) sont à la fois nécessaires et suffisantes, il n'en est évidemment pas de même de la seule équation (16). Il n'en va plus ainsi si l'on remarque que *la propriété précédente doit s'appliquer encore si l'on échange les deux systèmes de lignes de courbure*. L'ensemble de ces deux conditions est alors suffisant. Voici comment on peut le voir. Soient M un point quelconque de la surface, MT et MT' les tangentes en ce point aux lignes (u) et (v) correspondantes, C et C' les centres de courbure géodésique respectifs des lignes (v) et (u).

La tangente MT appartient à un certain complexe (C) du système (C_1, C_2); d'après l'hypothèse et en vertu du théorème de M. Appell, le pôle du plan TMT' par rapport à ce complexe est le point C . De même, MT' appartient à un autre (') complexe (C') du système (C_1, C_2), par rapport auquel le point C' est le pôle du plan TMT' . Il suit de là que la

(') Plus généralement, imaginons une famille de Lamé composée de surfaces (S) dont les lignes de première courbure (u) sont des cercles géodésiques. On sait que chacune de ces lignes se trouve sur une sphère (U) orthogonale à (S) le long de (u). Il peut arriver d'abord que les sphères (U) constituent une des familles complémentaires du système triple, ce qui donne des systèmes étudiés en détail par M. Darboux (*S. T.*, t. I, Chap. II). S'il n'en est pas ainsi, lorsque (u) engendre une surface de la seconde famille, la sphère (U) doit nécessairement admettre cette ligne pour caractéristique. *Les surfaces (S) sont par suite des périssphères*. Si l'on applique ceci aux surfaces de Joachimstal, on obtient les conclusions énoncées dans le texte.

droite CC' fait partie à la fois de (C) et de (C') , donc de la congruence linéaire (C_1, C_2) . Or, nous savons que c'est là une condition suffisante.

Nous avions espéré que la proposition précédente nous permettrait de déterminer toutes les surfaces de la seconde catégorie. Malheureusement, malgré la diversité des méthodes que nous avons employées, nous nous sommes heurté à des difficultés de calcul qui nous ont paru insurmontables et nous ont contraint à abandonner la question. Il est d'ailleurs peu probable qu'elle admette des solutions bien étendues, car le nombre de conditions imposées est surabondant. En dehors des surfaces signalées par M. Demoulin et que nous avons énumérées plus haut, nous n'avons pu trouver que *les hélicoïdes à courbure totale constante*. Et encore ces hélicoïdes conduisent-ils à des systèmes triples orthogonaux déjà connus (DARBOUX, *S. T.*, t. I, p. 323). Néanmoins, la façon simple dont nous sommes arrivé à les déterminer et la forme élégante sous laquelle nous avons pu mettre leurs équations méritent, croyons-nous, d'être signalées ici, d'autant plus que les résultats auxquels nous allons être conduits trouveront, dans le Chapitre III, une application très intéressante.

9. Nous nous sommes proposé de rechercher les surfaces (S) pour lesquelles les premières tangentes principales appartiennent toutes au même complexe linéaire (C_1) , les secondes tangentes principales, faisant également partie d'un même complexe linéaire (C_2) , différent de (C_1) . A la suite de calculs compliqués que nous ne reproduirons pas ici, nous avons constaté que, la cyclide de Dupin mise à part, il était nécessaire que les deux complexes eussent même axe central Oz , la surface (S) étant un hélicoïde à courbure totale constante d'axe Oz . Voici maintenant comment on peut retrouver directement ces hélicoïdes :

Imaginons, d'une façon plus générale, *une famille de Lamé composée d'hélicoïdes égaux et de même axe Oz* . Tous ces hélicoïdes peuvent

(¹) Le raisonnement serait en défaut si (C') coïncidait constamment avec (C) . Mais alors il est facile de voir que la surface serait nécessairement un plan, le complexe (C) étant spécial et ayant sa directrice dans ce plan.

évidemment se déduire de l'un d'eux (S) par le mouvement de verrou le plus général autour de Oz . Donc, si nous considérons une ligne de courbure (ρ) de (S), les tangentes aux lignes (u) en leurs points de rencontre avec cette ligne (ρ) appartiennent toutes, en vertu du n° 8, à un certain complexe linéaire (C') d'axe central Oz ; d'où il résulte visiblement que toutes les tangentes aux lignes (u) appartiennent à ce complexe (C'). De même, les tangentes aux lignes (ρ) font toutes partie d'un même complexe (C) [nécessairement différent de (C')] d'axe central Oz . Appelons p et p' les pas respectifs de (C) et de (C'). Il résulte du n° 6 que les surfaces (ρ) sont les hélicoïdes *égaux* engendrés par les différentes lignes (u) dans le mouvement hélicoïdal (H) d'axe Oz et de pas p . De même, les surfaces (ρ_1) sont les hélicoïdes *égaux* engendrés par les lignes (ρ) dans le mouvement (H') d'axe Oz et de pas p' . Enfin, les surfaces (ρ_2) sont les surfaces (S), c'est-à-dire encore des hélicoïdes *égaux* d'axe Oz et dont nous appellerons le pas commun p'' . Nous avons donc un système remarquable dans lequel, non seulement les surfaces coordonnées de chaque famille sont égales, mais aussi toutes les courbes trajectoires orthogonales de ces surfaces. Au reste, il est très facile de déterminer *a priori* ces courbes. Désignons par (γ), (γ'), (γ'') les trajectoires respectives des surfaces (ρ), (ρ_1), (ρ_2). Soit M un point quelconque de l'espace. Construisons les vecteurs $M\Gamma$, $M\Gamma'$, $M\Gamma''$, qui sont les moments résultants par rapport au point M de trois torseurs ayant pour axe central Oz et pour pas respectifs p , p' , p'' . Ces vecteurs sont tangents respectivement aux surfaces (ρ), (ρ_1), (ρ_2) qui passent par M. Donc la tangente MT en M à la courbe (γ) issue de ce point doit être perpendiculaire à $M\Gamma$ et telle que les deux plans $TM\Gamma'$ et $TM\Gamma''$ soient rectangulaires. Il y a deux droites répondant à la question. On détermine de même deux tangentes MT' et deux tangentes MT'' relatives aux courbes (γ') et (γ''). En outre, on vérifiera sans peine qu'à chacune des deux droites MT correspond un trièdre trirectangle unique formé par cette droite, par une tangente MT' et par une tangente MT'' .

D'après le théorème fondamental des équations différentielles, nous sommes donc assurés que par chaque point M de l'espace passent deux courbes de chaque famille, dont les tangentes en M forment, comme il vient d'être expliqué, deux trièdres trirectangles, lesquels sont évi-

demment symétriques l'un de l'autre par rapport au plan qui contient MF, MF', MF'' .

Cherchons maintenant les équations des courbes (γ) , par exemple. Les projections du vecteur MF sur les axes de coordonnées sont $-y, x, p$, en appelant x, y, z les coordonnées du point M . On en déduit immédiatement les deux conditions

$$\begin{aligned} x dy - y dx + p dz &= 0, \\ (x dz - p' dy)(x dz - p'' dy) \\ + (y dz + p' dx)(y dz + p'' dx) + (x dx + y dy)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Introduisons les coordonnées semi-polaires r, ω, z ; nos équations deviennent

$$(17) \quad \begin{cases} r^2 d\omega + p dz = 0, \\ r^2 dz^2 + p' p'' (dr^2 + r^2 d\omega^2) - (p' + p'') dz r^2 d\omega + r^2 dr^2 = 0. \end{cases}$$

On en tire, sans aucune difficulté,

$$\begin{aligned} \frac{2\omega}{p} &= - \int \frac{u + p' p''}{u} \frac{du}{\sqrt{-f(u)}}, \\ 2z &= \int \frac{(u + p' p'') du}{\sqrt{-f(u)}}, \end{aligned}$$

en posant

$$r^2 = u, \quad f(u) = (u + p' p'')(u + p'' p)(u + p p').$$

Les radicaux doivent être pris avec le même signe dans les deux équations, ce qui montre que le double signe donnerait deux courbes (γ) issues du même point et à tangentes symétriques par rapport au plan tangent au cylindre de révolution d'axe Oz . On étudiera sans peine, sur les équations précédentes, les diverses formes que peuvent prendre la courbe (γ) , ainsi que les courbes (γ') et (γ'') , dont les équations se déduisent de celles de (γ) par permutations circulaires sur p, p', p'' .

Pour arriver à des calculs plus élégants, introduisons la variable auxiliaire

$$\alpha = \int \frac{du}{2\sqrt{-f(u)}}.$$

Nous avons alors

$$(18) \quad \begin{cases} \omega = -p z - p p' p'' \int \frac{dz}{u} + \omega_0 \\ z = p' p'' z + \int u dz + z_0 \end{cases} \quad (\omega_0, z_0 = \text{const.}).$$

Il nous est facile à présent de calculer les équations du système triple orthogonal. Nous savons en effet que la surface (ρ) par exemple est obtenue en animant d'un mouvement hélicoïdal d'axe Oz et de pas p , soit une courbe (γ') , soit une courbe (γ'') ; les surfaces (ρ_1) et (ρ_2) ont un mode de génération analogue. En partant de là, on trouve sans peine qu'avec un choix convenable des arguments ρ, ρ_1, ρ_2 , on peut prendre comme équations du système

$$(19) \quad \begin{cases} r = \sqrt{u}, \\ \omega = -p p' p'' \int \frac{dz}{u} - (p \rho + p' \rho_1 + p'' \rho_2), \\ z = \int u dz + (p' p'' \rho + p'' p \rho_1 + p p' \rho_2), \end{cases}$$

sachant que

$$\alpha = \rho + \rho_1 + \rho_2.$$

Si l'on veut introduire les fonctions elliptiques, on peut prendre

$$(20) \quad \begin{cases} u = h + p(i\alpha) \\ \int \frac{d\alpha}{u} = -\frac{i}{p'(i\alpha_0)} \log \frac{\sigma[i(\alpha_0 - \alpha)]}{\sigma[i(\alpha_0 + \alpha)]} \\ \int u d\alpha = h\alpha + i\zeta(i\alpha) \end{cases} \quad [p(i\alpha_0) + h = 0],$$

les lettres p, ζ, σ désignant les fonctions bien connues de Weierstrass, et h une constante égale à $-\frac{p'p'' + p'p + pp'}{3}$. Les racines e_1, e_2, e_3 relatives à la fonction p sont

$$(21) \quad e_1 = -(h + p'p'), \quad e_2 = -(h + p''p), \quad e_3 = -(h + pp').$$

On peut se les donner arbitrairement (à condition bien entendu que leur somme soit nulle), ainsi que la constante h , car les équations (21)

donneront alors les produits $p'p''$, $p''p$, pp' , d'où l'on déduira les nombres p , p' , p'' . Il faut toutefois, pour la réalité, que le produit $(e_1 + h)(e_2 + h)(e_3 + h)$ soit négatif.

Calculons encore l'élément linéaire de l'espace en fonction de $d\xi$, $d\rho_1$, $d\rho_2$. Pour cela, nous calculons l'arc infiniment petit $d\sigma$ de la courbe (γ) qui correspond à l'accroissement $d\rho$. En se servant de la formule

$$(22) \quad d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + dz^2,$$

et tenant compte des équations (17) et (18), on trouve

$$d\sigma^2 = (p - p')(p - p'')(u + p'p'')d\rho^2.$$

En ajoutant à $d\sigma^2$ les quantités analogues relatives à (γ') et (γ'') , on a l'élément linéaire cherché

$$(23) \quad ds^2 = (p - p')(p' - p'')(p'' - p) \\ \times \left[\frac{u + p'p''}{p'' - p'} d\rho^2 + \frac{u + p''p}{p - p''} d\rho_1^2 + \frac{u + pp'}{p' - p} d\rho_2^2 \right].$$

On peut aussi le calculer, à titre de vérification, en appliquant directement la formule (22) aux valeurs (19) de r , ω , z . Connaissant les fonctions de Lamé H , H_1 , H_2 , on sait en déduire les rayons de courbure principaux des surfaces coordonnées et par suite leurs courbures totales. On a (DARBOUX, *S. T.*, t. I, p. 190)

$$R_{01}R_{02} = \frac{H_1H_2}{\beta_{01}\beta_{02}} = \frac{H_1H_2H^2}{H_1'H_2'} = 4 \frac{(HH_1H_2)^2}{(H_1'^2)(H_2'^2)} = (p - p'')(p' - p).$$

Nos hélicoïdes ont donc chacun leur courbure totale constante.

Du reste, il est facile, en partant de (23), de retrouver l'élément linéaire que M. Darboux donne de ces systèmes dans l'Ouvrage déjà souvent cité [*S. T.*, t. I, p. 322, éq. (62)]. Introduisons la fonction u dont le module est donné par

$$k^2 = \frac{p''(p' - p)}{p'(p'' - p)},$$

ainsi que les nouvelles variables

$$\rho' = m\rho, \quad \rho'_1 = m\rho_1, \quad \rho'_2 = m\rho_2 + \Omega_1$$

où Ω_i désigne, suivant la notation habituelle, un pôle de la fonction sn , et m une constante égale à $\sqrt{p'(p-p'')}$. Faisons enfin une homothétie

de rapport $\frac{\sqrt{-\frac{p'}{p''}}}{p-p'}$; notre ds^2 devient

$$ds^2 = \text{sn}^2 \alpha' d\rho'^2 + \frac{\text{cn}^2 \alpha'}{\sin^2 \xi} d\rho_1'^2 + \frac{\text{dn}^2 \alpha'}{k^2 \cos^2 \xi} d\rho_2'^2,$$

en posant

$$\alpha' = \rho' + \rho'_1 + \rho'_2, \\ \sin^2 \xi = \frac{p'' - p}{p'' - p'}, \quad \cos^2 \xi = \frac{p' - p}{p' - p''}.$$

En supprimant les accents, on retombe bien sur l'élément linéaire que donne M. Darboux.

Disons un mot, pour terminer ce paragraphe, des *cas de dégénérescence* des systèmes précédents. Nous avons vu, à la page 273, que les trois pas sont nécessairement différents. Il ne peut donc y avoir dégénérescence pour la fonction u que si l'un de ces pas devient nul ou infini.

Si p'' est nul, on a

$$u = - \frac{pp'}{\cos^2(\alpha \sqrt{pp'})}.$$

Par une homothétie convenable, on peut supposer $pp' = -1$. Les équations (19) deviennent alors

$$r = \frac{1}{\cos i \alpha}, \quad \omega = -(\rho \rho + p' \rho_1), \quad z = -\rho_2 - i \tanh i \alpha,$$

et montrent que la surface (ρ_2) est une sphère de rayon 1 et dont le centre, situé sur Oz , a pour cote $-\rho_2$. Quant aux surfaces (ρ) et (ρ_1) , ce sont des hélicoïdes de pas p et p' engendrés par une tractrice de base Oz (voir la fin du n° 7). Si p'' est infini, il faut remonter aux équations (17). Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que les surfaces (ρ_2) sont les plans tangents au cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon $\sqrt{-pp'}$; les surfaces (ρ) et (ρ_1) sont des hélicoïdes développables ayant leurs arêtes de rebroussement sur ce cylindre.

10. Revenons à la recherche des surfaces de la seconde catégorie pour démontrer une propriété établie pour la première fois par M. Demoulin (*loc. cit.*) : *Si l'on excepte les cônes, le cyclide de Dupin à trois plans de symétrie est la seule surface qui puisse engendrer une famille de Lamé en tournant successivement autour de deux axes situés dans un même plan.* En effet, on sait que tous les complexes du système à deux termes (C_1, C_2) sont, dans cette hypothèse, des complexes spéciaux dont les directrices forment un faisceau plan (F, Φ) . Si l'on applique le théorème du n° 8, on voit que les tangentes aux lignes (u) en leurs points de rencontre avec une même ligne (v) doivent, ou bien être dans un plan passant par F , ce qui conduit à un cône de sommet F , ou bien concourir en un point de Φ . Si donc on excepte les cônes de sommet F , il faut que toutes les lignes de courbure de la surface (S) soient des cercles géodésiques ayant leurs centres de courbure géodésique dans le plan Φ . La considération des sphères orthogonales à la surface le long de ces lignes montre ensuite que ces centres de courbure géodésiques doivent décrire nécessairement deux droites rectangulaires du plan Φ , ce qui n'est possible que pour une cyclide de Dupin ayant ses quatre points doubles dans ce plan.

La démonstration précédente nous montre que la position du point F dans le plan Φ est indifférente; d'où il résulte que *notre cyclide engendrera une famille de Lamé dans le roulement sans glissement du plan Φ sur une développable quelconque.*

Le cas que nous venons d'examiner est le seul jusqu'à présent pour lequel on puisse résoudre complètement le problème de la détermination des surfaces de la seconde catégorie correspondant à un groupe (g_2) donné. Disons un mot, pour terminer ce qui a trait à ces surfaces, sur le *calcul effectif des systèmes triples orthogonaux* auxquels elles donnent naissance. L'équation (1) est de la forme

$$\frac{de}{dt} + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 = 0.$$

On ne peut dire, *a priori*, si elle sera intégrable, car elle ne peut l'être que pour des valeurs particulières des fonctions λ_1, λ_2 ou V_1, V_2 . On verra facilement que les variables ne sont séparées que lorsque les

tangentes aux lignes (u) appartiennent toutes au même complexe linéaire. Tout ceci s'applique naturellement à l'équation (6). En particulier, on peut affirmer que *dans le cas de la cyclide de Dupin, on aura les trois familles du système triple orthogonal par des quadratures*, car les équations (1) et (6) ont alors leurs variables séparées.

11. TROISIÈME CAS : $n = 3$. — Ce cas et les suivants ont été complètement élucidés par M. Demoulin (*loc. cit.*). Aussi nous y attardons-nous le moins possible. En employant les mêmes notations qu'au début du n° 7, nous avons les trois conditions

$$A_1 = V_1 G, \quad A_2 = V_2 G, \quad A_3 = V_3 G;$$

d'où l'on tire

$$\frac{A_1}{V_1} = \frac{A_2}{V_2} = \frac{A_3}{V_3},$$

équation qui exprime que les tangentes MT aux lignes (u) aux points où celles-ci coupent une même ligne (v) appartiennent à une congruence linéaire. Si cette congruence ne se réduit pas à un hyperfaisceau, il faut que la surface (S) soit développable. Une discussion facile montre qu'il ne peut alors se présenter que deux cas :

1° Pivotement d'un cône quelconque autour de son sommet;

2° Déplacement d'un cône de révolution tel que le sommet décrive une courbe continuellement tangente à l'axe du cône. Ces deux solutions sont évidentes et sans intérêt. Si la congruence se réduit constamment à un hyperfaisceau, il faut que toutes les lignes de courbure soient des cercles géodésiques. Si l'on écarte le cas du pivotement d'un cône, et si l'on s'appuie sur la théorie des mouvements (G_3) , on constate que les centres de courbure géodésique de ces lignes doivent décrire des lignes situées dans un même plan Φ . Le raisonnement fait au n° 10 nous montre alors que la surface (S) doit être une cyclide de Dupin ayant ses quatre points doubles dans ce plan. Si l'on examine ensuite les cas où n est supérieur à 3, on constate, en s'appuyant sur ce qui vient d'être dit, qu'à part la sphère et le plan il n'y a que les cônes de révolution qui puissent engendrer une famille de Lamé dans plus de trois mouvements hélicoïdaux linéairement indépen-

dants. Un tel cône peut donner naissance à une famille de Lamé dans tout mouvement hélicoïdal résultant de la composition d'une translation uniforme parallèle à son axe et d'une rotation uniforme autour d'une droite quelconque passant par son sommet, ce qui donne un groupe (g_i) . Mais cela est évidemment peu intéressant.

En résumé, le problème des familles de Lamé composées de surfaces égales se ramène à la détermination des surfaces de la première et de la seconde catégories. Nous avons vu quel était le degré de difficulté de cette détermination, sur laquelle nous aurons d'ailleurs l'occasion de revenir dans le prochain Chapitre.

CHAPITRE II.

FAMILLES DE LAMÉ COMPOSÉES DE SURFACES AYANT DES REPRÉSENTATIONS SPHÉRIQUES ÉGALES.

12. Avant d'aborder la question qui doit faire l'objet de ce Chapitre, il nous est nécessaire de rappeler brièvement quelques points principaux de la théorie générale des systèmes triples orthogonaux.

Soit MXYZ le trièdre formé par les normales aux surfaces (ρ) , (ρ_1) , (ρ_2) qui passent par M. Pour les accroissements $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$, ce trièdre prend un déplacement infiniment petit, dont les rotations et translations sont ⁽¹⁾

$$(1) \quad \begin{cases} -\beta_{21} d\rho_1 + \beta_{12} d\rho_2, & \beta_{20} d\rho - \beta_{02} d\rho_2, & -\beta_{10} d\rho + \beta_{01} d\rho_1, \\ \mathbf{H} d\rho, & \mathbf{H}_1 d\rho_1, & \mathbf{H}_2 d\rho_2. \end{cases}$$

Les β_{ik} et les $\mathbf{H}_i$ satisfont aux équations suivantes :

$$(2) \quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \rho_l} = \beta_{il} \beta_{lk}, \quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial \rho_k} + \beta_{il} \beta_{lk} = 0 \quad (i \neq k \neq l),$$

$$(3) \quad \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial \rho_i} = \mathbf{H}_i \beta_{ik}.$$

⁽¹⁾ Voir, ainsi que pour ce qui suit, DARBOUX, *S. T.*, n° 106 et suiv.

Soient $X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2$ les cosinus directeurs respectifs de MX, MY, MZ par rapport à des axes fixes $Oxyz$, et x, y, z les coordonnées de M par rapport aux mêmes axes. On a la formule

$$(4) \quad u = \int HU \, d\rho + H_1 U_1 \, d\rho_1 + H_2 U_2 \, d\rho_2,$$

où u désigne une quelconque des quantités x, y, z , et U, U_1, U_2 les cosinus de même nom.

Il y a lieu d'introduire aussi les projections du vecteur (OM) sur MX, MY, MZ , soient P, P_1, P_2 . Ces quantités vérifient les équations

$$(5) \quad \frac{\partial P_i}{\partial \rho_k} = P_k \beta_{ik},$$

et l'on a les formules

$$(6) \quad u = UP + U_1 P_1 + U_2 P_2,$$

$$(7) \quad H_i = \frac{\partial P_i}{\partial \rho_i} + \beta_{ki} P_k + \beta_{li} P_l.$$

Dès que l'on connaît un système de β_{ik} vérifiant (2) et les cosinus correspondants (qui sont donnés par l'intégration d'un système complet bien connu, que nous n'avons pas écrit), on peut trouver une infinité de systèmes triples orthogonaux *parallèles*, en intégrant l'un ou l'autre des systèmes (3) et (5), pour appliquer ensuite l'une ou l'autre des formules (4) et (6). Il existe différentes méthodes pour obtenir les systèmes parallèles à un système donné, pour lesquelles nous renverrons aux deux Ouvrages déjà cités de M. Darboux.

Nous nous arrêterons seulement un instant sur la *composition géométrique des systèmes parallèles* pour établir quelques propriétés, d'ailleurs presque évidentes, dont nous aurons à faire dans la suite un usage assez fréquent : Imaginons p systèmes parallèles $(S_1), (S_2), \dots, (S_p)$; et soient $M_1, M_2, \dots, M_p, p$ points homologues. Soient O un point fixe et $m_1, m_2, \dots, m_p, p$ nombres algébriques quelconques. L'égalité vectorielle

$$(8) \quad (OM) = m_1(OM_1) + m_2(OM_2) + \dots + m_p(OM_p)$$

définit un point M , qui décrit un système (S) parallèle aux proposés,

ainsi que le montrent, avec une égale facilité, la Géométrie et l'Analyse. Ce système ne dépend, à une translation et à une homothétie près, que de $p - 1$ paramètres, qui sont les rapports des m_i à l'un d'entre eux. Si le point O est pris pour origine des coordonnées, les quantités x, y, z, H_i, P_i relatives à (S) sont données, en fonction des quantités correspondantes des systèmes proposés, par la formule unique

$$(9) \quad \theta = m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2 + \dots + m_p \theta_p;$$

de sorte que la composition géométrique de plusieurs systèmes parallèles revient en somme à une combinaison linéaire à coefficients constants effectuée sur plusieurs solutions de l'un ou l'autre des systèmes d'équations linéaires auxquels se ramène la recherche des systèmes triples parallèles à un système donné.

Aux transformations que nous venons d'indiquer se rattachent aussi les suivantes. Imaginons une infinité de systèmes parallèles dépendant d'un paramètre α . Appliquons aux x, y, z, H_i, P_i l'un ou l'autre des formules

$$(10) \quad \theta' = \frac{\partial}{\partial \alpha} [\theta f(\alpha)],$$

$$(11) \quad \theta'' = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \theta f(\alpha) d\alpha,$$

où $f(\alpha)$ désigne une fonction arbitraire de α , et α_0 et α_1 deux constantes quelconques. Il est facile de vérifier analytiquement que les nouvelles quantités ainsi calculées sont propres à définir un système triple parallèle aux proposés. Au reste, il est évident que les formules (10) et (11) sont comprises comme cas limite dans la formule (9); de sorte que les nouvelles transformations que nous venons de définir apparaissent comme cas particuliers de la composition géométrique. On pourrait d'ailleurs les étendre au cas d'un système dépendant de plusieurs constantes arbitraires; mais nous nous en tiendrons là.

13. Nous arrivons maintenant au problème qui doit faire l'objet de ce Chapitre :

Trouver toutes les familles de Lamé dont les différentes surfaces admet-

lent pour représentations sphériques de leurs lignes de courbure des réseaux sphériques égaux.

Nous avons d'abord essayé de le résoudre par une méthode directe consistant à exprimer que le groupe doublement infini des trièdres OXYZ parallèles aux trièdres MXYZ relatifs aux différents points M d'une surface (ρ_2) conserve une configuration invariable quand ρ_2 varie. Mais, les calculs et les raisonnements sont plus simples et l'on arrive, pour certains cas particuliers, à des résultats plus complets, si l'on suit une autre marche, que nous allons maintenant exposer et qui repose sur l'emploi d'un théorème général, qui nous a été communiqué dernièrement par M. Petot ⁽¹⁾.

Voilà tout d'abord en quoi consiste ce théorème. Imaginons, sur la sphère de rayon 1, des réseaux sphériques (ϖ) dépendant d'un paramètre variable ϖ , et proposons-nous de chercher à *quelles conditions doivent satisfaire ces réseaux pour qu'ils puissent servir de représentations sphériques aux surfaces d'une famille de Lamé.* (Nous dirons dorénavant, pour abréger le langage, qu'une telle famille de réseaux est *une famille sphérique de Lamé.*)

M. Petot est arrivé à une condition nécessaire et suffisante s'exprimant de façon fort simple, à la suite d'une étude directe des systèmes triples orthogonaux, reposant uniquement sur le théorème de Dupin et la réciproque de M. Darboux. Nous allons arriver au même résultat d'une manière beaucoup plus rapide en nous appuyant sur les principes qui ont été rappelés au début de ce Chapitre.

Supposons qu'il existe un système triple orthogonal dont les surfaces (ρ_2) admettent les réseaux (ϖ) pour représentations sphériques, ce qui nous permet de prendre ρ_2 égal à ϖ . Sur chacune de ces surfaces, les lignes de paramètre ρ correspondent à des lignes du réseau (ϖ) , dont nous désignerons le paramètre par la lettre u . Il est évident que ρ doit être une fonction de u et ϖ . De même, ρ_1 doit être une fonction de ϖ et du paramètre v relatif à la seconde famille de chaque réseau (ϖ) . Ceci étant, considérons le trièdre OXYZ déjà défini. Sa

⁽¹⁾ Dans les notes qu'il nous a transmises, ce géomètre indiquait d'ailleurs le problème qui fait l'objet de ce Chapitre comme susceptible d'être traité par l'application de son théorème.

position dépend des trois paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 , ou bien encore des trois paramètres u, v, w . A des accroissements infiniment petits de ces paramètres, correspondent des rotations élémentaires qui peuvent indifféremment se mettre sous la forme (1) ou bien sous la forme suivante :

$$(12) \quad p_1 dv + p_2 dw, \quad q du + q_2 dw, \quad r du + r_1 dv + r_2 dw.$$

En identifiant, nous obtenons

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \beta_{21} = -\frac{p_1}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}}, & \beta_{12} = p_2 + \beta_{21} \frac{\partial \rho_1}{\partial w}, \\ \beta_{20} = \frac{q}{\frac{\partial \rho}{\partial u}}, & \beta_{02} = -q_2 + \beta_{20} \frac{\partial \rho}{\partial w}, \\ \beta_{10} = -\frac{r}{\frac{\partial \rho}{\partial u}}, & \beta_{01} = \frac{r_1}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}}, \end{array} \right.$$

avec la condition supplémentaire

$$(14) \quad r_2 = rA + r_1B,$$

où l'on a posé

$$(15) \quad A = \frac{\frac{\partial \rho}{\partial w}}{\frac{\partial \rho}{\partial u}}, \quad B = \frac{\frac{\partial \rho_1}{\partial w}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial v}}.$$

Réciproquement, supposons qu'on puisse trouver une fonction A de u et w et une fonction B de v et w telles que l'équation (14) soit identiquement vérifiée. Déterminons ρ et ρ_1 par les équations linéaires (15). Si nous prenons en outre $w = \rho_2$, nous pouvons exprimer u, v, w en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2 . Le Tableau (13) nous donnera ensuite un système de β_{ik} parfaitement déterminé.

Ce système satisfera nécessairement aux relations (2), qui ne sont autres que celles que vérifient *a priori* les fonctions $p_1, p_2, q, \dots$ de u, v, w , du fait que ces fonctions sont les rotations du trièdre OXYZ. Ayant les β_{ik} , nous savons qu'il leur correspond une infinité de sys-

tèmes triples orthogonaux, lesquels admettront tous les réseaux (ω) pour représentations sphériques des lignes de courbure de leurs surfaces (ρ_2).

Nous pouvons donc, avec M. Petot, énoncer la proposition suivante :

Pour que les réseaux (ω) forment une famille sphérique de Lamé, il faut et suffit que l'on puisse trouver une fonction A de u et ω et une fonction B de v et ω telles que l'équation (14) devienne une identité.

Il est évident que ce théorème ne contient au fond aucune propriété nouvelle. Il ne fait que mettre sous une autre forme, provenant d'un simple changement de variables, la condition, évidente sur les formules (1), d'après laquelle, lorsque ρ_2 seul varie, l'axe instantané du trièdre OXYZ doit se trouver dans le plan XOY.

Néanmoins, il peut rendre des services dans l'étude de certaines questions, telles que celle qui va nous occuper tout à l'heure.

Revenons un peu sur la *détermination effective des systèmes triples* qui correspondent à une famille donnée de réseaux (ω), pour laquelle l'équation (14) est satisfaite. Une première méthode consiste à calculer u , v , ω en fonction de ρ , ρ_1 , ρ_2 , à former ensuite les β_{ik} par le moyen du Tableau (13), pour appliquer enfin l'une des diverses méthodes qui ont été rappelées au n° 12. Cette méthode peut être avantageuse dans certains cas; mais elle offre l'inconvénient d'exiger l'intégration des équations (15) ou, ce qui revient au même, des équations différentielles

$$(16) \quad \frac{du}{d\omega} + A = 0, \quad \frac{dv}{d\omega} + B = 0.$$

En voici une autre qui permet d'obtenir tout au moins les surfaces (ρ_2) sans être obligé d'effectuer l'intégration précédente. Si l'on conserve les paramètres u , v , ω , les translations élémentaires du trièdre MXYZ sont de la forme

$$\xi du + \xi_2 dv, \quad \eta_1 dv + \eta_2 d\omega, \quad \zeta_2 d\omega;$$

et il suffit d'avoir les fonctions ξ , ξ_2 , ... de u , v , ω , pour en déduire

par des quadratures les coordonnées de M en fonction de u, v, w . Or, si nous comparons les translations précédentes avec celles que donnent les formules (1), nous trouvons :

$$(17) \quad \xi = H \frac{\partial \rho}{\partial u}, \quad \eta_1 = H_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial v}, \quad \zeta_2 = H_2;$$

$$(18) \quad \xi_2 = A \xi, \quad \eta_2 = B \eta_1.$$

Donc, en dehors des relations classiques que doivent vérifier les translations de tout trièdre dépendant de trois paramètres, nous n'avons que les deux équations (18).

14. Nous allons maintenant appliquer ce qui précède au cas où les réseaux (w) sont tous égaux entre eux. A cet effet, imaginons un trièdre $Oxyz$ dont la position par rapport à un trièdre fixe $Ox_1y_1z_1$ dépend d'un paramètre variable w . Supposons qu'il entraîne dans son mouvement un réseau sphérique déterminé (s) , dont les positions successives constitueront les réseaux (w) de tout à l'heure. Il s'agit de voir ce que devient l'équation (14).

Appelons $a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''$, les cosinus directeurs respectifs de OX, OY, OZ par rapport à $Oxyz$. Ce sont des fonctions de u et v , que nous avons le droit de supposer indépendantes de w . Soient p_1, q, r, r_1 les rotations du trièdre $OXYZ$ par rapport à $Oxyz$; ce sont aussi des fonctions des seules variables u et v . De plus, on sait que $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ constituent trois groupes de solutions du système suivant

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial u} = \beta r - \gamma q, & \frac{\partial a}{\partial v} = \beta r_1, \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} = -\alpha r, & \frac{\partial \beta}{\partial v} = \gamma p_1 - \alpha r_1, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u} = \alpha q, & \frac{\partial \gamma}{\partial v} = -\beta p_1; \end{cases}$$

les fonctions p_1, q, r, r_1 satisfaisant elles-mêmes aux équations

$$(20) \quad \frac{\partial p_1}{\partial u} = -qr_1, \quad \frac{\partial q}{\partial v} = rp_1, \quad \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = -qp_1.$$

Appelons enfin λ, μ, ν les rotations du trièdre $Oxyz$ relatives à son mouvement par rapport à $Ox_1y_1z_1$. De toutes ces quantités, il est facile de déduire les rotations de $OXYZ$ relatives à son mouvement par rapport à $Ox_1y_1z_1$. Il suffit de considérer ce mouvement comme la résultante du mouvement de $OXYZ$ par rapport à $Oxyz$, et du mouvement de $Oxyz$ par rapport à $Ox_1y_1z_1$. Les quantités p_1, q, r, r_1 qui figurent dans (12) sont évidemment les mêmes que celles que nous venons d'introduire à l'instant. Quant aux quantités p_2, q_2, r_2 , on les obtient en projetant le vecteur (λ, μ, ν) successivement sur OX, OY, OZ , ce qui donne

$$(21) \quad p_2 = a\lambda + a'\mu + a''\nu, \quad q_2 = b\lambda + b'\mu + b''\nu, \quad r_2 = c\lambda + c'\mu + c''\nu.$$

Par conséquent, l'équation (14) s'écrit

$$(22) \quad c\lambda + c'\mu + c''\nu = rA + r_1B.$$

Si elle est satisfaite, nous savons, d'après ce qui a été dit à la fin du n° 13, comment on aura tous les systèmes triples orthogonaux correspondants. Ici se pose la question suivante : *Chercher parmi ces systèmes ceux pour lesquels les surfaces (ρ_2) sont égales.* Ceci nous donnera évidemment une nouvelle solution du problème étudié dans le Chapitre I. Voici comment on peut procéder. Imaginons un trièdre $O'x'y'z'$ constamment parallèle au trièdre $Oxyz$, mais dont l'origine peut varier arbitrairement, de telle sorte que, tout en ayant, dans son mouvement par rapport à $Ox_1y_1z_1$, les rotations λ, μ, ν , il possède en outre trois translations λ_0, μ_0, ν_0 , fonctions de φ . Soit une surface (S) qui demeure invariablement liée à ce trièdre et admet en outre pour représentation sphérique de ses lignes de courbure le réseau (s) .

Cherchons à quelles conditions cette surface engendrera une famille de Lamé. Pour cela, il nous suffit d'écrire les équations (18). Soient x', y', z' les coordonnées relatives à $O'x'y'z'$ d'un point quelconque M de (S) , exprimées en fonction des paramètres u et v des lignes de courbure. Appelons ξ et η_1 les translations de $MXYZ$ par rapport à $O'x'y'z'$.

Ces translations, de même que x', y', z' , sont des fonctions des seules variables u et v . Elles satisfont, comme on sait, aux deux équations

tions

$$(23) \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = -r\eta_1, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = r_1\xi;$$

et l'on a en outre

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{\partial x'}{\partial u} = \xi a, & \frac{\partial y'}{\partial u} = \xi a', & \frac{\partial z'}{\partial u} = \xi a'', \\ \frac{\partial x'}{\partial v} = \eta_1 b, & \frac{\partial y'}{\partial v} = \eta_1 b', & \frac{\partial z'}{\partial v} = \eta_1 b''. \end{cases}$$

Ces quantités ξ et η_1 que nous venons d'introduire sont évidemment les mêmes que celles qui figurent dans les équations (17) et (18). Quant aux quantités ξ_2 , η_2 , ζ_2 , on les obtient en projetant successivement sur OX, OY, OZ le vecteur vitesse du point M considéré comme invariablement lié à $O'x'y'z'$, ce qui donne

$$(25) \quad \xi_2 = a(\lambda_0 + \mu z' - \nu y') + a'(\mu_0 + \nu x' - \lambda z') + a''(\nu_0 + \lambda y' - \mu x'),$$

η_2 et ζ_2 s'en déduisant par le changement de a, a', a'' en b, b', b'' et c, c', c'' . En portant les valeurs de ξ_2 et η_2 dans les équations (18), on obtiendra deux équations qui, jointes à (23) et à (24), détermineront, si cela est possible, les fonctions inconnues $x', y', z', \xi, \eta_1, \lambda_0, \mu_0, \nu_0$.

15. Revenons maintenant à l'équation (22). Si l'on y remplace successivement ω par différentes valeurs numériques, on voit que *notre réseau (s) est caractérisé par un certain nombre de relations de la forme*

$$(26) \quad lc + mc' + nc'' = Ur + Vr_1,$$

où l, m, n désignent des constantes et U et V des fonctions ne dépendant respectivement que de u et v . Telle est la forme simple à laquelle se ramène maintenant notre problème.

Il s'agit à présent d'établir une classification des réseaux qui remplissent la condition précédente, de les déterminer, si possible, et d'étudier les systèmes triples orthogonaux correspondants. C'est ce que nous allons essayer de faire, en prenant comme base de notre

classification le nombre m de relations distinctes de la forme (26) auxquelles doit satisfaire le réseau (s).

Nous commençons par écarter le cas, sans intérêt, où m est nul, c'est-à-dire où λ, μ, ν, A, B se réduisent à zéro, car ce cas conduit visiblement au système triple le plus général comprenant une famille de surfaces parallèles.

Nous ne nous occuperons pas non plus des réseaux pour lesquels une des fonctions r et r_1 serait nulle, car un tel réseau comprendrait une famille de grands cercles et nous conduirait à des systèmes comprenant une famille de plans, lesquels ont été étudiés d'une façon détaillée par M. Darboux. Nous arrivons donc au cas, qui est de beaucoup le plus important, où m est égal à 1.

16. RÉSEAUX DE LA PREMIÈRE CATÉGORIE. — Nous donnerons aux réseaux correspondants le nom de *réseaux de la première catégorie*. Ces réseaux se divisent eux-mêmes en plusieurs classes, suivant la forme de la relation (26).

Réseaux (σ). — Supposons d'abord que les trois constantes l, m, n soient nulles. Par un choix convenable des arguments u et v , qui deviennent alors *variables canoniques*, on peut ramener l'équation (26) à la forme canonique ζ

$$(27) \quad r + r_1 = 0.$$

Nous appellerons *réseaux* (σ) tous les réseaux qui satisfont à cette condition. On peut aussi, comme l'ont fait Ribaucour (*Journal de Liouville*, 1891) et M. Petot (*C. R.*, 22 juin 1891), les caractériser par l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

1° Leur élément linéaire peut se mettre sous la forme

$$d\sigma^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv^2;$$

2° Ce sont les représentations sphériques des surfaces qui, rapportées à leurs lignes de courbure, ont aussi un élément linéaire pouvant se mettre sous la forme précédente.

Ces deux propositions équivalent chacune à l'équation (27), suivant qu'on tient compte de (20) ou de (23).

Nous ne nous occuperons pas ici de la détermination des réseaux (7), qui constitue, comme nous le verrons, un problème fort difficile, et nous arrivons de suite à l'étude des systèmes triples orthogonaux correspondants, que nous appellerons *systèmes* (Σ).

La comparaison des équations (22) et (27) nous montre que les fonctions λ , μ , ν doivent être nulles, les fonctions A et B étant d'autre part égales entre elles et se réduisant par suite à une même fonction de ϖ , que, par un choix convenable de cette variable, on peut supposer égale à l'unité. Nous pouvons alors prendre

$$(28) \quad u = \rho - \rho_2, \quad v = \rho_1 - \rho_2,$$

et par suite, d'après le Tableau (13),

$$(29) \quad \beta_{21} = \beta_{12} = -\rho_1, \quad \beta_{02} = \beta_{20} = q, \quad \beta_{10} = \beta_{01} = -r = r_1.$$

De plus, le fait que les fonctions λ , μ , ν sont nulles nous prouve que le trièdre $Oxyz$ demeure immobile et par suite *toutes les surfaces* (ρ_2) *ont des représentations sphériques non seulement égales, mais confondues*.

Il en est évidemment de même pour les surfaces (ρ) et pour les surfaces (ρ_1).

Nous retrouvons ainsi des systèmes signalés pour la première fois par M. Darboux dans sa Thèse de Doctorat (*Annales de l'École normale*, 1866) qui a montré qu'ils étaient caractérisés par la condition (1)

$$(30) \quad \beta_{01}\beta_{12}\beta_{20} = \beta_{10}\beta_{02}\beta_{21}.$$

Ils ont été étudiés depuis par divers géomètres, entre autres Ribaucour et M. Petot (*loc. cit.*), et plus récemment par MM. Fouché (*C. R.*, 17 janvier 1898 et 26 novembre 1900), Egorow (*C. R.*, 22 octobre 1900 et 14 janvier 1901) et Guichard (*Sur les systèmes triplement indéterminés*, p. 86; Gauthier-Villars, 1905), qui en ont découvert des pro-

(1) Cette condition équivalant à la suivante, signalée par M. Demoulin (*C. R.*, 22 juin 1903).

$$R_{01}R_{12}R_{20} = R_{10}R_{02}R_{21}.$$

priétés très intéressantes, dont nous allons établir rapidement les plus importantes.

17. La propriété fondamentale de ces systèmes consiste en ce que, pour eux et pour eux seulement, les équations (3) et (5) sont identiques. Il en résulte que de toute solution de ces équations on peut tirer deux systèmes (Σ) parallèles, suivant que les fonctions qui constituent cette solution sont considérées comme des H_i ou comme des P_i . Si l'on désigne par des lettres sans accents tout ce qui est relatif au premier système et par des lettres accentuées ce qui est relatif au second, on vérifie sans peine les relations

$$(31) \quad x' = \partial x, \quad y' = \partial y, \quad z' = \partial z, \quad H'_i = \partial H_i, \quad P'_i = \partial P_i = H_i,$$

en désignant par δ le symbole opératoire $\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \rho_1} + \frac{\partial}{\partial \rho_2}$.

Ces formules définissent deux transformations des systèmes (Σ) en systèmes parallèles. La première, que nous appellerons *la transformation* (θ_+) , transforme un système (Σ) en un nouveau système (Σ_+) , dont les P_i sont les H_i de (Σ) , et qui s'obtient par de simples différentiations, à savoir celles qui, dans les formules (31), donnent x', y', z' , connaissant x, y, z . Il est évident qu'elle est, à une translation près, indépendante de la position de l'origine O des coordonnées par rapport à (Σ) . Remarquons aussi qu'elle est sans influence sur la composition géométrique d'origine O , c'est-à-dire que si (Σ'') est la résultante de (Σ) et (Σ') , (Σ''_+) sera la résultante de (Σ_+) et (Σ'_+) .

La seconde transformation, que nous appellerons *la transformation* (θ_-) , est l'inverse de la précédente. Elle transforme un système (Σ) donné en un système (Σ_-) , dont les H_i sont les P_i de (Σ) , et dont la détermination exige par suite des quadratures. De plus, si l'on observe que les P_i relatifs à un système (Σ) donné dépendent essentiellement de la position de l'origine O des coordonnées par rapport à ce système, on voit que *la transformation* (θ_-) *ne sera exactement définie qu'autant qu'on se fixera le point* O . Il en résulte que tous les systèmes (Σ_-) qu'on peut déduire d'un même système (Σ) dépendent de trois constantes arbitraires. Nous verrons tout à l'heure en quoi ils diffèrent les uns des autres. Comme la transformation (θ_+) ,

la transformation (θ_{-1}) par rapport à un point O déterminé est sans influence sur la composition géométrique d'origine O.

On peut donner de la transformation (θ_1) une interprétation géométrique qui nous semble intéressante et qui permet d'établir simplement certaines des propriétés découvertes par MM. Fouché et Egorov. Imaginons un système triple orthogonal quelconque (S). A tout point M de l'espace, on peut attacher le vecteur (M Γ) dont les projections sur MX, MY, MZ sont H, H₁, H₂, et que l'on peut considérer comme le vecteur vitesse du point M dans un mouvement qui serait défini par les équations

$$(32) \quad \rho = t + \rho', \quad \rho_1 = t + \rho'_1, \quad \rho_2 = t + \rho'_2,$$

où ρ' , ρ'_1 , ρ'_2 désignent des constantes et t le temps. On peut démontrer que *pour que le point Γ décrive un système triple orthogonal dont les surfaces coordonnées correspondent à celles de (S), il faut et suffit que (S) soit un système (Σ) , à condition toutefois de se borner aux systèmes réels.* Si nous supposons qu'il en est ainsi, et si nous menons, à partir d'une origine fixe O, le vecteur $(OM_1) = (M\Gamma)$, le point M₁ décrit précisément le système (Σ_1) dérivé de (Σ) par la transformation (θ_1) . Quant au point Γ , il décrit évidemment un système parallèle à (Σ) , somme géométrique de (Σ) et (Σ_1) .

Telle est l'interprétation géométrique que nous avons en vue. Elle nous conduit à introduire, avec MM. Fouché et Egorov, les courbes (C) que décrivent les différents points M de l'espace quand on les soumet au mouvement (32) et qui ne sont autres que les courbes joignant les points pour lesquels le trièdre des normales garde une orientation invariable. Il est clair que les courbes (C_1) qui en résultent par la transformation (θ_1) ne sont autres que les hodographes des courbes (C) correspondantes.

Proposons-nous maintenant de voir en quoi diffèrent les systèmes (Σ_{-1}) et (Σ'_{-1}) déduits d'un même système (Σ) par la transformation (θ_{-1}) effectuée relativement à deux points différents O et O'. Introduisons le système (T) différence géométrique, prise avec l'origine O, de (Σ_{-1}) et de (Σ'_{-1}) . Si l'on fait la transformation (θ_1) par rapport au point O, ce système (T) se transforme en la différence géométrique de (Σ) et du système déduit de (Σ) par la translation (O'O), c'est-à-

dire en le point O' . Le système (T) dérive donc du point O' par la transformation (θ_{-1}) effectuée relativement au point O . Par suite, pour un tel système, le mouvement (32) est un mouvement rectiligne et uniforme dont le vecteur vitesse est (OO') . Il en résulte que l'on passe de la surface (ρ_i) à la surface $(\rho_i + t)$ par la translation $t(OO')$. Nous retrouvons donc les systèmes, considérés au premier Chapitre, dont les surfaces de chaque famille se déduisent de l'une d'elles par translation. Nous désignerons ces systèmes sous le nom général de *systèmes* (T) . Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante :

Le système dérivé de (Σ) par la transformation (θ_{-1}) effectuée relativement au point O' s'obtient en retranchant du système dérivé de (Σ) par rapport au point O le système (T) qui correspond à la translation (OO') .

Nous obtenons du même coup le moyen de calculer le système (T) qui correspond à une direction de translation quelconque. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de cette direction relatifs à $Oxyz$. On peut, à une homothétie près, les considérer comme les coordonnées du point O' précédent. Les H_i du système (T) cherché sont alors

$$(33) \quad H = \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \quad H_1 = \alpha X_1 + \beta Y_1 + \gamma Z_1, \quad H_2 = \alpha X_2 + \beta Y_2 + \gamma Z_2,$$

car ce sont les projections de (OO') sur OX, OY, OZ ⁽¹⁾. On peut obtenir la transformation (θ_1) comme cas limite d'une transformation plus générale, qu'on peut définir de la manière suivante. M. Egorov a montré qu'une propriété caractéristique des systèmes (Σ) est d'admettre un groupe continu de transformations de Combescure. Effectivement, si dans les équations (32) nous considérons t comme une constante, nous obtenons bien une transformation de Combescure qui laisse invariante chaque famille du système (Σ) . Soient maintenant M et M' les deux points dont les coordonnées respectives sont ρ, ρ_1, ρ_2 et ρ', ρ'_1, ρ'_2 . Si nous considérons le point M'' déduit de M et M' par composition géométrique, ce point décrit un système (Σ'') parallèle à (Σ) . Comme la composition géométrique introduit une constante arbi-

(1) On en déduit que tout système (T) peut se déduire par composition géométrique des systèmes (T) relatifs à trois directions particulières quelconques non parallèles à un même plan.

traire, nous obtenons une *transformation nouvelle des systèmes* (Σ) , qui dépend de deux constantes arbitraires, et qu'il serait facile d'interpréter analytiquement. Si en particulier nous supposons le point M'' défini par l'égalité vectorielle

$$(OM'') = \frac{(MM')}{t},$$

et si nous supposons que t tende vers zéro, nous retomberons évidemment à la limite sur la transformation (θ_1) . On pourrait aussi obtenir des transformations nouvelles par l'application des formules (11), où α serait le paramètre précédent. Mais nous n'insistons pas davantage là-dessus, et nous nous contenterons d'avoir montré que *toutes les transformations des systèmes* (Σ) *reviennent en somme à une suite de compositions géométriques, dont la véritable origine est la propriété que possèdent ces systèmes d'admettre un groupe continu de transformations de Combescure.*

Nous ne nous attarderons pas non plus sur l'étude des systèmes, dépendant d'un nombre illimité de constantes, qu'on peut obtenir par l'application indéfiniment répétée de toutes ces transformations, et nous renverrons pour cela aux Notes de MM. Fouché et Egorow. Nous allons seulement, pour terminer ce paragraphe, résoudre un problème dont se sont également occupés avec succès les géomètres précédents. Ce problème est le suivant : *Trouver tous les systèmes* (Σ) *pour lesquels les courbes* (C) *sont des droites.*

Pour que les lignes (C) de (Σ) soient des droites, il faut et suffit que les lignes (C_1) de (Σ_1) soient des droites issues du point O . Cela suffirait pour montrer que le système (Σ_1) ou bien se réduit à un point, ou bien se compose pour chaque famille, de surfaces homothétiques par rapport au point O . [Nous désignerons ces derniers systèmes sous le nom de *systèmes* (H) .] Mais nous allons arriver à ce résultat en poursuivant analytiquement la question. Pour que les lignes (C_1) soient des droites issues de O , il faut et suffit que leurs tangentes passent toutes par O , ce qui se traduit par

$$\frac{H'}{H} = \frac{H'_1}{H_1} = \frac{H'_2}{H_2} = \sigma,$$

σ étant une quantité auxiliaire. Si nous tirons de là les H'_i et si nous

portons dans les équations (3), nous trouvons que les trois dérivées de σ doivent être nulles. Donc σ est une constante.

Si σ est nul, (Σ_1) est un point, donc (Σ) est un système (T). Si σ est différent de zéro, on a, à une translation près effectuée sur (Σ) ,

$$x' = \sigma x, \quad y' = \sigma y, \quad z' = \sigma z, \quad H'_i = \sigma H_i, \quad P'_i = \sigma P_i;$$

d'où, en vertu des équations (31),

$$\delta u = \sigma u, \quad \delta H_i = \sigma H_i, \quad \delta P_i = \sigma P_i.$$

On en conclut manifestement que toutes les fonctions x, y, z, H_i, P_i sont à la fois des trois formes $e^{\sigma u} f(u, v)$, $e^{\sigma u} f_1(u, v)$, $e^{\sigma u} f_2(u, v)$, ce qui prouve que l'on a affaire à un système (H).

Il resterait toutefois à démontrer l'existence de ces systèmes. On peut le faire en remarquant que les P_i , par exemple, doivent satisfaire à un système complet et en constatant, ce qui n'offre aucune difficulté, que ce système complet est complètement intégrable, ce qui permet d'affirmer qu'il existe un système (H), et un seul, correspondant à des β_{ik} et à un nombre σ donnés, et tel que la surface d'une des trois familles qui passe par un point donné admette en ce point un plan tangent donné; et aussi que tous les systèmes (H) de mêmes β_{ik} et de même nombre σ se déduisent par composition géométrique de trois quelconques d'entre eux, pourvu que les points homologues de ceux-ci ne soient pas dans un même plan avec O.

Si l'on connaît un système (H) pour chaque valeur de σ , on peut en déduire une infinité de systèmes (Σ) par des compositions géométriques variées; en particulier, l'application des formules (11) conduit aux équations (9) signalées par M. Egorov dans sa Note du 22 octobre 1900.

Il existe encore d'autres propriétés des systèmes (Σ) pour lesquelles nous renverrons le lecteur aux différents travaux cités. Nous revenons maintenant à la classification de nos réseaux (s).

18. RÉSEAUX (σ_1) . — Supposons maintenant que les constantes l, m, n ne soient pas toutes nulles. Par un choix convenable de Oz , nous pouvons réduire à c'' le premier membre de (26). Nous allons consi-

dérer d'abord le cas particulier où l'une des fonctions U et V , par exemple V , est nulle. Par un *choix convenable de la variable u* , nous pouvons ramener notre relation à la forme canonique

$$(34) \quad c'' = r.$$

Nous appellerons *reseaux* (σ_i) tous les réseaux pour lesquels cette équation est vérifiée. Comparée à celle des autres réseaux, leur détermination est relativement simple ; c'est pourquoi nous allons nous en occuper de suite. Il existe différentes manières d'arriver au résultat. Celle que nous allons indiquer n'est pas très intuitive et nous n'y avons été conduit qu'après avoir obtenu autrement la solution. Néanmoins, c'est elle que nous préférons exposer ici, parce qu'elle est à la fois la plus élégante et la plus rapide, et en outre parce qu'on peut l'appliquer, quoique avec moins de succès, à la recherche des autres réseaux.

Imaginons, sur la sphère de rayon 1, un système de coordonnées géographiques (θ, φ) , l'angle θ étant compté comme d'habitude à partir de Oz et l'angle φ à partir du demi-plan zOx . A tout point de la sphère, on peut faire correspondre un trièdre $OX_1Y_1Z_1$, dont les trois axes percent la sphère en des points dont les coordonnées géographiques sont respectivement $(\theta + \frac{\pi}{2}, \varphi)$, $(0, \varphi + \frac{\pi}{2})$ et (θ, φ) . Pour les accroissements $d\theta, d\varphi$, les rotations élémentaires de ce trièdre sont $-\sin\theta d\varphi, d\theta, \cos\theta d\varphi$.

Introduisons maintenant le trièdre $OX'Y'Z'$ déduit du précédent par une rotation de l'angle Φ autour de OZ_1 . Ses rotations élémentaires sont évidemment

$$(35) \quad \sin\Phi d\theta - \sin\theta \cos\Phi d\varphi, \quad \cos\Phi d\theta + \sin\theta \sin\Phi d\varphi, \quad d\Phi + \cos\theta d\varphi.$$

Si l'on a maintenant un trièdre $OXYZ$ dépendant de deux paramètres u et v , on peut supposer qu'on prenne pour $OX'Y'Z'$ l'un des trois trièdres $OXYZ, OYZX, OZXY$. Les angles θ, φ, Φ seront alors des fonctions parfaitement déterminées de u et v et l'on pourra calculer les rotations du trièdre $OXYZ$ au moyen de ces angles et de leurs dérivées par rapport à u et à v . Si l'on a alors à exprimer une condition quelconque à laquelle doivent satisfaire ces rotations, cette condition

se traduira par une équation aux dérivées partielles entre θ , φ , Φ , u , v . On conçoit dès lors qu'on puisse appliquer cette méthode à la détermination des différents réseaux qui se présentent dans ce Chapitre (1).

19. Supposons que le trièdre OXYZ soit celui qui est attaché, comme il a été expliqué plus haut, à un réseau (σ_1) . Si nous le prenons pour trièdre OY'Z'X', ses rotations nous sont immédiatement données par les formules (35), exprimées en fonction de du et dv . Or, nous avons ici les trois conditions nécessaires et suffisantes :

$$p = 0, \quad q_1 = 0, \quad c'' = r.$$

Elles nous donnent

$$(36) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = -\cot \Phi \frac{\partial \theta}{\sin \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \Phi}{\cos \theta},$$

$$(37) \quad -\sin \theta \cos \Phi = \sin \Phi \frac{\partial \theta}{\partial u} - \sin \theta \cos \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

En portant la première (36) dans (37), nous obtenons

$$(38) \quad \frac{\partial \theta}{\partial u} = -\sin \theta \sin \Phi \cos \Phi,$$

moyennant quoi, la première (36) devient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \cos^2 \Phi.$$

Écrivons maintenant la condition d'intégrabilité relative à φ , en y remplaçant $\sin \Phi \cos \Phi$ par $-\frac{\partial \theta}{\sin \theta}$; nous obtenons une équation qui peut

(1) Cette méthode revient au fond à prendre pour variables les angles d'Euler du trièdre OX'Y'Z', car si l'on désigne ceux-ci, suivant la notation habituelle, par θ' , φ' , ψ , on a les formules

$$\theta' = \theta, \quad \varphi' = \Phi - \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

se mettre sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\log \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\log \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right);$$

d'où, en intégrant et désignant par V une fonction arbitraire de v ,

$$(39) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = V \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}.$$

Ici se présentent deux cas, suivant que V est ou n'est pas nul.

Si V est nul, Φ ne dépend que de u , et par suite aussi φ . D'où il résulte que, lorsque u demeure constant, OZ décrit un cône de révolution dont l'axe a pour coordonnées géographiques $\left(\frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ et dont l'angle au sommet est $\pi - 2\Phi$. Par conséquent, *le réseau (σ_1) correspondant est le plus général pour lequel les lignes (u) sont des cercles de plans parallèles à Oz .*

Supposons maintenant $V \neq 0$. Par un choix convenable de l'argument v , nous pouvons supposer $V = -1$, et par suite

$$(40) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

Dans ce cas, nous aurons notre réseau de la façon suivante. Nous intégrerons le système (38), (40); puis nous calculerons φ par la formule

$$(41) \quad \varphi = \int \cos^2 \Phi \, du + \frac{dv}{\sin^2 \theta}.$$

Un calcul élémentaire nous donnera ensuite les neuf cosinus $\alpha, \alpha', \dots$. Quant aux rotations p_1, q, r, r_1 , elles sont données par les formules (35); on trouve ainsi, en tenant compte de (38), (40), (41),

$$(42) \quad \begin{cases} p_1 = \cos \Phi \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\sin \Phi}{\sin \theta}, & q = \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \cos \theta \cos^2 \Phi, \\ r = -\sin \theta \cos \Phi, & r_1 = \sin \Phi \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\cos \Phi}{\sin \theta}. \end{cases}$$

Toute la difficulté du problème réside donc dans l'intégration du

système (38), (40). Or, si l'on fait le changement de variables

$$(43) \quad \sin \theta = \frac{1}{\cos \frac{\tau - \omega}{2}}, \quad \cos \theta = i \tanh \frac{\tau - \omega}{2}, \quad \Phi = \frac{\tau + \omega}{2},$$

ce système devient

$$(44) \quad \begin{cases} \frac{\partial(\tau + \omega)}{\partial v} = -i \sin(\tau - \omega), \\ \frac{\partial(\tau - \omega)}{\partial u} = -i \sin(\tau + \omega). \end{cases}$$

On reconnaît le système classique dont dépend la détermination des surfaces à courbure totale constante. Donc *la recherche des réseaux* (σ_1) *équivaut au problème de la déformation de la sphère.*

20. Supposons maintenant que nous soyons en possession d'un réseau (σ_1) et occupons-nous des systèmes triples orthogonaux correspondants, auxquels nous donnerons le nom de *systèmes* (Σ_1) . La comparaison des équations (22) et (34) nous donne

$$\lambda = \mu = 0, \quad \nu = A = 1, \quad B = 0,$$

puis

$$(45) \quad u = \rho - \rho_2, \quad v = \rho_1.$$

Ceci nous montre que *la représentation sphérique de la surface* (ρ_2) *s'obtient en faisant tourner le réseau* (σ_1) *de l'angle* ρ_2 *autour de* Oz . *Celle de la surface* (ρ_1) *(¹) est engendrée par une rotation continue de la courbe* $(v = \rho_1)$ *autour de* Oz . *Quant à celle de la surface* (ρ) , on l'obtient

(¹) A vrai dire, on n'obtient pas de cette façon la représentation sphérique des lignes de courbure de la surface (ρ_1) , au sens qu'on attache ordinairement à cette expression. Il faudrait, pour avoir celle-ci, faire tourner autour de Oz la courbe décrite par le point directeur de OY quand le point directeur de OZ décrit (v) [c'est-à-dire une des deux courbes polaires de (v)]; puis adjoindre aux courbes ainsi obtenues leurs trajectoires orthogonales. Il nous arrivera encore dans la suite d'employer, par abréviation, le terme de représentation sphérique d'une surface (ρ_i) pour désigner l'une quelconque des six familles de courbes que décrivent les points directeurs des trois axes de $OXYZ$, quand le point M de l'espace décrit successivement sur la surface (ρ_i) les deux familles de lignes de courbure. Il sera toujours facile d'en déduire la représentation sphérique au sens véritable du mot.

en faisant tourner chaque courbe (u) du réseau (σ_1) de l'angle $\rho - u$ autour de Oz ⁽¹⁾; on peut donc la déduire, par une rotation de l'angle ρ , de la représentation sphérique de la surface ($\rho = 0$). Il est élémentaire de calculer les cosinus X_i, Y_i, Z_i en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2 , puisque l'on connaît les $a, a', \dots$. Quant aux β_{ik} , ils sont donnés par (13), (21) et (42). La méthode qui semble donc indiquée pour la recherche des systèmes (Σ_1) correspondant à un réseau (σ_1) donné est une de celles du n° 12. Bornons-nous ici à *rechercher ceux de ces systèmes pour lesquels les surfaces (ρ_2) sont égales*. Employons à cet effet la méthode décrite à la fin du n° 14. Les conditions (18) deviennent

$$(46) \quad \begin{cases} \lambda_0 a + \mu_0 a' + \nu_0 a'' = \xi + a y' - a' x', \\ \lambda_0 b + \mu_0 b' + \nu_0 b'' = b y' - b' x'. \end{cases}$$

Si l'on donne à u et v toutes les valeurs numériques possibles, on obtient un certain nombre d'équations linéaires en λ_0, μ_0, ν_0 . Si la surface (S) n'est ni une développable isotrope, ni un plan, il est facile de constater que, parmi ces équations, il y en a au moins trois pour lesquelles le déterminant des inconnues est différent de zéro. D'où il suit que λ_0, μ_0, ν_0 se réduisent à des constantes et par suite que *le mouvement de $O'x'y'z'$ est hélicoïdal et uniforme*. Prenant $O'z'$ et Oz , suivant l'axe de ce mouvement et désignant le pas par la lettre k , nous avons

$$(47) \quad ka'' = \xi + a y' - a' x', \quad kb'' = b y' - b' x'.$$

A ces conditions il faut joindre les équations (23) et (24). Pour écrire celles-ci, nous différencions (47) successivement par rapport à u et à v ; il vient, en tenant compte de (47), (19), (23) et (24), les deux conditions

$$(48) \quad \xi(a''p_1 + c''r_1) = kp_1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{q}{c''}(a''\xi - k).$$

Or, si l'on se reporte au numéro précédent, on calcule aisément l'expression $a''p_1 + c''r_1$ et on la trouve égale à $-V$.

Examinons d'abord le *cas où V est nul*. La première équation (48)

(1) Cela nous donne une interprétation géométrique élégante de la variable canonique u tout à fait analogue à celle que nous avons indiquée à la page 264.

nous montre que k doit être nul. *Le mouvement est donc une rotation.* D'autre part, il résulte des équations (45) que la surface (S) est nécessairement une surface singulière de la première catégorie (n° 6); *c'est donc une surface de Joachimstal d'axe Oz.* Nous retombons sur des systèmes déjà rencontrés et qui auraient d'ailleurs pu nous permettre de prévoir la solution singulière fournie par l'hypothèse $V=0$ dans le numéro précédent.

Supposons maintenant $V=-1$. Nous avons alors

$$\xi = kp_1.$$

Le pas ne pouvant être nul, nous pouvons, par une homothétie, le ramener à être égal à 1. Nous avons, dans ces conditions, en tenant compte de ce que $(a''p_1 + c''r_1)$ est égal à 1,

$$\xi = p_1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = -qr_1.$$

La seconde de ces équations n'est autre que la première (20). De la première (23) nous tirons ensuite η_1 et, en portant dans la seconde, nous obtenons une identité. Finalement, nous voyons *qu'à une homothétie près il correspond à tout réseau (σ_1) un seul système pour lequel les surfaces (ρ_2) sont égales et ce système est un de ceux qui ont été considérés au n° 6.*

Il n'y a plus maintenant aucune difficulté à obtenir les équations de ce système, car nous avons x' et y' par (47), puis z' par la quadrature

$$z' = \int a'' \xi du + b'' \eta_1 dv.$$

On trouve ainsi, en désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées relatives au trièdre $O.x_1y_1z_1$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial \theta}{\partial v} \cos(\varphi + \rho_2) - \cot \theta \sin(\varphi + \rho_2), \\ y_1 &= \frac{\partial \theta}{\partial v} \sin(\varphi + \rho_2) + \cot \theta \cos(\varphi + \rho_2), \\ z_1 &= \rho_2 + \int \left(\sin^2 \Phi + \sin \Phi \cos \Phi \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) du + \left(\cot \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \right) dv \\ &= \varphi + \rho_2 + \cot \theta \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\int -\cos 2 \Phi du + \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] dv}{\sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

Quant aux H_i , ils sont donnés par les formules

$$H = \xi, \quad H_1 = \eta_1, \quad H_2 = \frac{\frac{\partial H}{\partial \rho_2}}{\beta_{20}},$$

ou

$$H = -\beta_{21}, \quad H_1 = \frac{1}{Z_2} \frac{\partial \beta_{21}}{\partial v}, \quad H_2 = \beta_{01}.$$

Si l'on veut introduire les angles τ et ω définis par les équations (44), on a

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= i \frac{-e^{i\mu} \frac{\partial \tau}{\partial v} + e^{-i\mu} \frac{\partial \omega}{\partial v}}{2 \cos \frac{\tau - \omega}{2}}, \\ y_1 &= \frac{-e^{i\mu} \frac{\partial \tau}{\partial v} - e^{-i\mu} \frac{\partial \omega}{\partial v}}{2 \cos \frac{\tau - \omega}{2}}, \\ z_1 &= \rho + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{\tau - \omega}{2} \frac{\partial(\tau - \omega)}{\partial v} - \frac{1}{2} \int \left[\cos^2 \tau \, du + \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} \right)^2 dv \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \left[\cos^2 \omega \, du + \left(\frac{\partial \omega}{\partial v} \right)^2 dv \right], \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$\mu = \varphi + \rho_2 = \frac{1}{2} \left[\rho + \rho_1 + \rho_2 + \int \cos(\tau + \omega) \, du + \cos(\tau - \omega) \, dv \right].$$

Les quantités qui figurent sous les deux signes $\int$ de z_1 sont des différentielles exactes parce que τ et ω vérifient tous deux l'équation

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = -\sin \lambda \cos \lambda.$$

On pourrait aussi former les expressions des β_{ik} et des H_i en fonction des angles τ et ω et de leurs dérivées; mais cela présente peu d'intérêt.

21. Il est évident que nous venons de résoudre, autant qu'il peut l'être actuellement, le problème de la détermination des surfaces que

nous avons appelées, dans le premier Chapitre, les *surfaces singulières de la première catégorie*; et nous avons justifié l'affirmation faite à la fin du n° 6. Nous observerons, pour terminer, que la connaissance d'un des systèmes triples précédents permet d'obtenir une infinité d'autres systèmes analogues. On sait en effet que de toute solution du système (44), on peut déduire une infinité de solutions nouvelles, grâce aux transformations de Lie et de Bäcklund. Il est peut-être possible de trouver, relativement à nos systèmes orthogonaux, ou encore relativement aux réseaux (σ_1) , une interprétation géométrique de ces transformations analytiques. Malheureusement, nous n'avons pu rien découvrir dans cette voie, pas plus que nous n'avons pu trouver la véritable origine du lien qui unit la théorie des surfaces à courbure totale constante avec celle des réseaux (σ_1) ou des surfaces dont les premières tangentes principales font partie d'un complexe linéaire.

Parmi les transformations dont il vient d'être parlé, en voici une qui est particulièrement simple. De toute solution du système (44), on peut en déduire une autre en changeant ω en $-\omega$, u en v et v en u . Cette solution, appliquée à la théorie des surfaces à courbure totale constante, serait sans intérêt, car elle redonnerait la surface primitive. Transportée dans les équations (49), elle donnera au contraire un système triple entièrement différent du premier, car u et v jouent, dans ces équations, un rôle tout à fait dissymétrique.

On peut songer à appliquer tout ce qui précède en prenant comme surface à courbure constante initiale un hélicoïde à courbure totale constante. Cela revient, comme on sait, à partir des solutions du système (44) qui ne renferment u et v que par la combinaison $au + bv = \alpha$, a et b étant des constantes. Ces solutions se calculent aisément et introduisent les fonctions elliptiques. Malheureusement, elles ne peuvent *a priori* que nous faire retomber sur les systèmes composés uniquement d'hélicoïdes, car les H_i ne dépendent que d'une seule variable α (DARBOUX, *S. T.*, p. 320). Comme nous avons étudié ces systèmes en détail dans le premier Chapitre (n° 9), il est inutile d'y revenir (1). Quant à ceux qu'on pourrait en déduire par les transfor-

(1) Cela ne peut présenter de l'intérêt que dans le but d'avoir une vérification de nos

mations de Lie et de Bäcklund, ils sont donnés par des quadratures trop compliquées.

22. RÉSEAUX (σ_2). — Revenons maintenant à l'étude de l'équation (26). Supposons encore l et m nuls et n égal à 1; mais cette fois les fonctions U et V seront supposées toutes deux différentes de zéro. Par un choix convenable des variables u et v , qui deviennent alors *variables canoniques*, nous pouvons ramener notre relation à la forme canonique

$$(50) \quad c'' = r + r_1.$$

Nous appellerons *réseaux* (σ_2) tous les réseaux pour lesquels cette équation est vérifiée. Leur détermination est loin d'être aussi simple que celle des réseaux (σ_1). On peut essayer de leur appliquer la méthode exposée au n° 18. Si, pour conserver la symétrie des variables u et v , on prend $OX'Y'Z'$ suivant $OXYZ$, on trouve que θ et Φ doivent satisfaire aux équations

$$(51) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \cot \theta \left[\cot \Phi \frac{\partial \theta}{\partial v} - \tan \Phi \frac{\partial \theta}{\partial u} \right] + \cos \theta, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \cot \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \cot \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \tan \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u}. \end{cases}$$

Ayant θ et Φ , on a φ par la quadrature ⁽¹⁾

$$\varphi = \int \frac{\tan \Phi \frac{\partial \theta}{\partial u} du - \cot \Phi \frac{\partial \theta}{\partial v} dv}{\sin \theta}.$$

Le système (51) est beaucoup trop compliqué pour qu'on puisse essayer de l'intégrer. Aussi, nous arrivons de suite à l'étude des systèmes triples orthogonaux, qui correspondent à un réseau (σ_2) donné et que nous appellerons *systèmes* (Σ_2).

La comparaison des équations (22) et (50) nous montre que A et B

théories. Et l'on constate effectivement, en développant les calculs, qu'il y a concordance complète entre les deux façons d'opérer.

(1) On pourrait appliquer la même méthode à la recherche des réseaux (σ). La seule différence avec le cas actuel consisterait en ce qu'il n'y aurait pas de terme en $\cos \theta$ au second membre de la première équation (51).

sont tous deux égaux à l'unité et qu'on peut prendre par conséquent

$$u = \rho - \rho_2, \quad v = \rho_1 - \rho_2;$$

tandis que λ et μ sont encore nuls et ν égal à 1. On conclut de là un énoncé analogue à celui du n° 20, avec cette différence que les surfaces (ρ_1) ont, elles aussi, des représentations sphériques égales. Ici encore, on calculera sans difficulté les X_i , Y_i , Z_i et β_{ik} en fonction de ρ , ρ_1 , ρ_2 et l'on appliquera la méthode classique pour la recherche des systèmes (Σ_2) . Comme tout à l'heure, nous allons nous borner à ceux pour lesquels les surfaces (ρ_2) sont égales.

Les conditions (18) sont, dans le cas actuel, analogues aux équations (46) et n'en diffèrent que parce qu'il faut ajouter η_1 au second membre de la seconde. Les raisonnements faits au n° 20 s'appliquent encore et l'on peut affirmer que *le mouvement de $O'x'y'z'$ est nécessairement hélicoïdal et uniforme*. En prenant $O'z'$ et Oz_1 suivant l'axe de ce mouvement et désignant le pas par k , on a

$$(52) \quad ka'' = \xi + ay' - a'x', \quad kb'' = \eta_1 + by' - b'x'.$$

On pourrait, comme au n° 20, en déduire les conditions auxquelles doivent satisfaire ξ et η_1 ; en les joignant à (23) on obtiendrait un système complet et complètement intégrable. Voici une autre manière de procéder. Les quantités x' et y' doivent vérifier le système complet

$$(53) \quad \begin{cases} \frac{\partial x'}{\partial u} = a(a'x' - ay' + ka''), & \frac{\partial x'}{\partial v} = b(b'x' - by' + kb''), \\ \frac{\partial y'}{\partial u} = a'(a'x' - ay' + ka''), & \frac{\partial y'}{\partial v} = b'(b'x' - by' + kb''), \end{cases}$$

dont les conditions d'intégrabilité sont les équations (23) et sont, comme on le constate aisément, satisfaites identiquement.

Ayant x' et y' , on aura ξ et η_1 par (52), puis z' par une quadrature de différentielle totale, et enfin x_1, y_1, z_1 en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2 . Quant aux H_i , ils seront donnés par les formules (17), qui prennent la forme élégante (1)

$$H_i = kZ_i + x_1Y_i - y_1X_i.$$

(1) Ces formules nous ont été communiquées par M. Darboux. On peut aussi les déduire très facilement des équations (8) et (9) du Chapitre I.

Le système (53) nous permet d'énoncer sous une forme simple le degré de généralité de la solution : *Parmi les systèmes de pas donné, il y en a un et un seul pour lequel un trièdre MXYZ est donné.* On peut aussi en déduire la proposition suivante : *Soient p systèmes de pas $K_1, K_2, \dots, K_p$. Affectons-les de coefficients arbitraires $m_1, m_2, \dots, m_p$ et composons-les géométriquement par rapport à un point quelconque de Oz. Nous obtiendrons un nouveau système de pas $\sum_i m_i K_i$.* Ceci peut aussi se démontrer géométriquement de la façon suivante : Soient $M_1, M_2, \dots, M_p$ p points homologues de coordonnées communes ρ, ρ_1, ρ_2 . Si l'on accroît chacune de celles-ci de la même quantité t , le point M_i tourne de l'angle t autour de Oz et s'élève de $K_i t$; donc le point résultant M tourne du même angle et s'élève de $\sum_i K_i t = t \sum_i K_i$, ce qui démontre le théorème.

Si p est égal à trois, on pourra obtenir, par l'application de ce théorème, le système le plus général, à condition toutefois que les extrémités des vecteurs $\frac{(OM_1)}{K_1}, \frac{(OM_2)}{K_2}, \frac{(OM_3)}{K_3}$ ne soient pas constamment dans un plan parallèle à Oz. Ceci peut se démontrer en déterminant m_1, m_2, m_3 de façon que le point M vienne occuper une position initiale arbitrairement choisie, le pas K prenant en même temps une valeur donnée à l'avance. Cela résulte aussi de ce que la solution générale de (53) peut s'obtenir en ajoutant à une solution particulière la solution générale des équations rendues homogènes par l'évanouissement de k , laquelle est, comme on sait, une combinaison linéaire à coefficients constants de deux solutions particulières distinctes. Si l'on connaît seulement cette solution, relative à k nul, on aura celles qui correspondent aux autres valeurs de k par deux quadratures de différentielles totales, grâce à la méthode de la variation des constantes. Enfin, si l'on connaît une seule solution de pas nul (ou, ce qui revient au même, deux solutions non homothétiques de pas non nuls), on aura toutes les autres par deux quadratures de différentielles totales, en appliquant la méthode classique d'abaissement des systèmes d'équations linéaires. En résumé, nous voyons qu'il suffit, pour avoir par des quadratures tous les systèmes cherchés, de connaître un seul d'entre eux si son pas est nul, ou bien deux systèmes non homothétiques l'un de

de l'autre si leurs pas sont différents de zéro. Ainsi se trouve justifiée une affirmation faite au n° 5 d'après laquelle *la recherche des surfaces capables d'engendrer une famille de Lamé dans un véritable mouvement hélicoïdal d'axe Oz se ramène, à des quadratures près, à la recherche des surfaces capables d'engendrer une famille de Lamé dans une rotation autour de Oz.*

23. RÉSEAUX DE LA SECONDE CATÉGORIE. — Nous avons examiné tous les réseaux pour lesquels il existe une seule relation de la forme (26). Supposons maintenant qu'il en existe deux. Nous appellerons les réseaux correspondants *réseaux de la seconde catégorie*. On peut prévoir qu'ils doivent être en nombre relativement limité, car ils sont soumis à des conditions surabondantes ⁽¹⁾. Si nous n'en connaissons pas des exemples, nous ne pourrions même pas affirmer leur existence. Il serait intéressant de déterminer exactement tous ces réseaux; malheureusement nous n'avons pu y arriver. C'est pourquoi nous nous contenterons de les passer très rapidement en revue.

Appelons *réseau* (σ_{ik}) tout réseau qui est à la fois (σ_i) et (σ_k) , si $i \neq k$, et (σ_i) de deux manières différentes, si $i = k$. Il est évident que tout réseau de la seconde catégorie est un réseau (σ_{ik}) , ce qui va nous permettre d'établir une classification de ces réseaux.

Réseaux (σ_{0i}) ⁽²⁾. — Il n'y a pas de réseau (σ_{00}) , car si un réseau est doublement (σ) , les rotations r et r_1 sont nulles. Il faut donc supposer que i est égal à 1 ou à 2. Quelle que soit l'hypothèse faite, si l'on prend les variables canoniques relatives au réseau (σ) , notre réseau (σ_{0i}) sera caractérisé par les deux conditions

$$r + r_1 = 0, \quad c'' = (U - V)r.$$

L'équation (22) nous donne alors

$$\lambda = \mu = 0, \quad \nu = 1, \quad A = U + W, \quad B = V + W,$$

(1) Un réseau sphérique quelconque peut en effet être déterminé par une seule fonction de deux variables. Or, pour un réseau de la seconde catégorie, cette fonction doit satisfaire à deux équations aux dérivées partielles, dont il faudrait chercher les solutions communes.

(2) Les réseaux (σ_0) seront les réseaux (σ) .

W désignant une fonction arbitraire de ϖ . Le calcul de ρ et ρ_1 est, dans ce cas, subordonné à l'intégration des équations différentielles

$$\frac{du}{d\varpi} + U + W = 0, \quad \frac{dv}{d\varpi} + V + W = 0.$$

Si la fonction W est quelconque, les variables ne seront séparées pour l'une de ces équations que si l'une des fonctions U et V se réduit à une constante, c'est-à-dire si l'on a un réseau (σ_{01}) . Comme nous ne connaissons rien de ces fonctions U et V, nous n'en dirons pas davantage sur ces réseaux.

Réseaux $(\sigma_{11}), (\sigma_{12}), (\sigma_{22})$. — L'un quelconque de ces trois types de réseaux est (σ_1) ou (σ_2) par rapport à deux directions *différentes* (sans quoi l'on retomberait sur les réseaux précédents) et par suite par rapport à toutes les directions qui sont avec elles dans un même plan. Si l'on prend ce plan pour plan xOy , on aura donc

$$c = Ur + Vr_1, \quad c' = U_1r + V_1r_1;$$

les fonctions U, V, U_1 , V_1 pouvant d'ailleurs être simplifiées en partie par un choix convenable des variables u et v . Nous ne voulons pas faire cette simplification, qui exigerait une discussion longue et peut-être inutile, d'autant plus qu'il sera toujours temps de la faire dès qu'on aura obtenu un réseau particulier satisfaisant aux conditions précédentes.

Si nous portons les valeurs ci-dessus de c et de c' dans l'équation (22), nous obtenons

$$\nu = 0, \quad A = \lambda U + \mu U_1, \quad B = \lambda V + \mu V_1,$$

λ et μ demeurant des fonctions arbitraires de ϖ . Ceci nous montre que *le mouvement le plus général du trièdre Oxyz est, dans ce cas, celui qui est engendré par le roulement sans glissement du plan xOy sur un cône quelconque de sommet O*. Quant aux variables ρ et ρ_1 , elles sont déterminées par l'intégration des équations différentielles

$$\frac{du}{d\varpi} + \lambda U + \mu U_1 = 0, \quad \frac{dv}{d\varpi} + \lambda V + \mu V_1 = 0,$$

à propos desquelles nous ne pouvons que répéter ce qui a été dit sur l'équation de la page 22.

24. APPLICATION A LA RECHERCHE DES SURFACES DE LA SECONDE CATÉGORIE. —

Il est évident que toute surface de la seconde catégorie admet pour représentation sphérique un réseau de la seconde catégorie. Inversement, on peut se demander si à tout réseau de la seconde catégorie on ne peut pas faire correspondre une surface de la seconde catégorie l'admettant pour représentation sphérique. Pour étudier cette question, il suffit de suivre la même marche que pour la première catégorie. Nous ne voulons pas reproduire la longue discussion qui en résulte et nous nous contenterons d'en indiquer la conclusion. Quel que soit le réseau dont on part, on trouve toujours qu'il doit exister entre les neuf cosinus $\alpha, \alpha', \dots$ et les rotations q et p , deux relations supplémentaires, autres que celles qui résultent immédiatement des équations (19), (20) et des équations spéciales qui caractérisent le réseau considéré. Dans le cas des réseaux (σ_{0i}) , ces relations sont assez simples ; malgré cela nous n'avons pu voir si elles étaient nécessairement vérifiées. Si elles le sont, il y a alors une surface et une seule (à une homothétie près) qui répond à la question. Pour les autres réseaux, les relations supplémentaires sont beaucoup plus compliquées et nous n'avons pas poussé les calculs jusqu'au bout.

25. Nous ne nous occuperons pas des *réseaux de la troisième catégorie*, pour lesquels il existe trois conditions de la forme (26), car leur existence est encore bien plus problématique que celle des réseaux de la seconde catégorie. Il en existe cependant au moins un ; c'est celui qui se compose exclusivement de cercles, car ce réseau est à la fois (σ) et (σ_{22}) , comme le montre la considération de la cyclide de Dupin à trois plans de symétrie (Chap. I, n° 11). Mais son étude ne peut trouver place ici.

26. CONCLUSION. — En résumé, le problème que nous nous sommes posé au début de ce Chapitre est subordonné à la détermination de différentes espèces de réseaux sphériques, à savoir les réseaux (σ) , (σ_1) , (σ_2) et (σ_{ik}) . Pour les réseaux (σ_i) seulement, nous avons résolu

la question autant qu'elle peut l'être actuellement, ce qui nous a donné du même coup les surfaces singulières de la première catégorie (Chap. I). La détermination des réseaux (σ) et (σ_2) est au contraire très difficile, malgré la forme simple des équations $(r + r_1 = 0 \text{ ou } c'')$ qui les caractérisent. A chacun d'eux correspondent une infinité de systèmes triples orthogonaux composés de surfaces égales dans chaque famille. On les obtient par des quadratures, dans le cas d'un réseau (σ) , et par l'intégration de deux équations simultanées de Riccati, dans le cas d'un réseau (σ_2) . L'existence de ces systèmes particuliers permet de *déduire de tout réseau (σ) ou (σ_2) une infinité de réseaux analogues*. Pour un réseau (σ) , on peut chercher les systèmes qui correspondent à une translation isotrope (ou encore les systèmes homothétiques), puis les transformer par inversion. On aura un nouveau réseau (σ) formé par la représentation sphérique du système provenant de la transformation. En répétant indéfiniment cette opération, on aura des réseaux (σ) dépendant d'un nombre illimité de constantes arbitraires. Si l'on part d'un réseau (σ_2) , on procédera de même, mais cette fois sur des systèmes correspondant à une rotation autour de Oz et en prenant le pôle d'inversion sur cette droite.

Quant aux réseaux (σ_{ik}) , nous ne pouvons rien en dire, si ce n'est que toute surface de la seconde catégorie donne un tel réseau, sans que nous puissions affirmer la réciproque.

27. Nous nous étions proposé d'étudier, comme application de nos théories, certains réseaux particuliers et les systèmes triples correspondants. Mais cela nous aurait entraîné beaucoup trop loin. Contentons-nous de citer les réseaux que nous avons obtenus.

1° Réseau comprenant une famille quelconque de petits cercles de plans parallèles à Oz . — C'est le réseau (σ) le plus général qui comprenne une famille de petits cercles. C'est aussi un réseau (σ_1) singulier (n° 19), donc un réseau $(\sigma_{0,1})$ ⁽¹⁾.

(1) Voir à ce propos J. HAAG, *C. R.*, 21 mars et 2 mai 1910. On peut généraliser la Note du 2 mai en remarquant que tout système triple (S) dont les surfaces (ρ_2) ont leurs trajectoires orthogonales dans des plans parallèles à Oz est parallèle à l'inverse d'un système triple composé de plans perpendiculaires à Oz et de cylindres parallèles

2° *Réseaux* (σ) *isothermes*. — Nous les avons tous déterminés dans une Note aux *C. R.*, 21 mars 1910.

3° *Réseaux* (σ) *représentations sphériques de surfaces à courbure totale constante* (Même Note que 2°).

On peut aussi obtenir des *réseaux* (σ_2) *composés de petits cercles* en prenant la représentation sphérique d'un périclère de M. Demoulin; d'où l'on déduirait, comme nous le savons, une infinité de surfaces à lignes de première courbure planes capables d'engendrer une famille de Lamé dans un mouvement hélicoïdal de pas arbitraire (n° 22). Y en a-t-il d'autres? Nous n'avons pas encore eu l'occasion de nous en rendre compte.

On pourrait aussi chercher d'autres réseaux (σ_2) comme par exemple les réseaux isothermes. Mais nous ne l'avons pas fait.

CHAPITRE III.

SUR CERTAINS GROUPES DE FAMILLES DE LAMÉ.

28. Nous nous proposons d'étudier, dans ce Chapitre, une question qui est étroitement liée, comme on va le voir, avec celle qui a été traitée dans le Chapitre I.

Cette question peut s'énoncer de la façon suivante :

Peut-on trouver deux familles de Lamé composées respectivement des mêmes surfaces, placées dans des positions relatives différentes pour les deux familles ?

Ce problème peut être résolu par la considération de l'équation du troisième ordre à laquelle doit satisfaire le paramètre d'une surface qui engendre une famille de Lamé, lorsque ce paramètre est considéré comme fonction de x, y, z . Nous préférons suivre une autre marche, qui aura l'avantage de nous donner en même temps les surfaces qui complètent le système triple orthogonal.

à 0 z. D'où il suit que la détermination de tous ces systèmes (S) revient à l'intégration de l'équation de Laplace relative au réseau plan orthogonal le plus général.

Nous allons généraliser les raisonnements du n° 2. Reprenons notre trièdre (T) et la surface (S) qui lui est attachée. Mais, au lieu de supposer que celle-ci est invariable de forme et de position par rapport à (T), supposons au contraire qu'elle peut se modifier arbitrairement quand le trièdre se déplace. Ceci revient évidemment à admettre que x, y, z peuvent dépendre de t en même temps que de u et v ; mais cela ne change en rien notre raisonnement et la famille des surfaces (ρ_1) sera encore donnée par l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dv}{dt} + \frac{A}{G} = 0.$$

avec la condition nécessaire et suffisante

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{A}{G} \right) = 0.$$

Seulement, la quantité A est ici égale à

$$A = S \frac{\partial x}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial t} + \xi + qz - ry \right).$$

On pourrait se servir de l'équation (2) pour la recherche de certaines familles de Lamé composées de surfaces d'une nature particulière; mais tel n'est pas ici notre but. Supposant cette équation satisfaite pour certaines valeurs des fonctions $p, q, \dots$, imaginons qu'elle le soit aussi pour un autre groupe de rotations et translations $p_1, q_1, \dots, \zeta_1$, sans que les fonctions x, y, z aient changé. Il est bien clair que les nouvelles positions des surfaces (S) par rapport au trièdre fixe Ox, y, z , formeront une famille non superposable à la précédente, à la seule condition que les fonctions $p_1, q_1, \dots$ ne soient pas toutes identiques aux fonctions correspondantes $p, q, \dots$. Nous obtiendrons donc deux familles de Lamé différentes et répondant à la condition que nous nous sommes imposée tout à l'heure. Tout couple analogue de familles de Lamé peut être évidemment obtenu de cette manière; il suffit en effet d'adjoindre, suivant une loi arbitraire, un trièdre (T) à chaque surface de la première famille et de supposer que cette surface entraîne avec elle son trièdre lorsqu'elle vient faire partie de la

seconde famille. On voit même qu'il y a indétermination complète dans le choix du premier mouvement auquel est soumis le trièdre (T) par rapport à Ox_1, y_1, z_1 ; nous aurons à faire usage de cette remarque.

Revenons à l'équation (2) et à l'équation analogue relative à la seconde famille de Lamé

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{A_1}{G} \right) = 0.$$

Nous en déduisons, par soustraction,

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{A_0}{G} \right) = 0,$$

en posant

$$(5) \quad A_0 = \sum \frac{\partial x}{\partial v} (\xi_0 + q_0 z - r_0 y),$$

$$(6) \quad p_0 = p_1 - p, \quad q_0 = q_1 - q, \quad \dots, \quad \xi_0 = \xi_1 - \xi.$$

Or, si l'on se place à une époque déterminée t , l'équation (4) exprime, d'après le n° 2, que *la surface (S) de paramètre t engendre une famille de Lamé quand on lui imprime un mouvement hélicoïdal dont les composantes par rapport à (T) sont $p_0, q_0, \dots$* . Réciproquement, si, admettant l'équation (2), on suppose en outre que chaque surface (S) peut engendrer une famille de Lamé dans un mouvement hélicoïdal déterminé, dont les composantes $p_0, q_0, \dots$ relatives au trièdre (T) correspondant sont par conséquent, à un facteur de proportionnalité près, des fonctions déterminées de t , on satisfera à l'équation (3) en prenant

$$(7) \quad p_1 = p + T p_0, \quad q_1 = q + T q_0, \quad \dots, \quad \xi_1 = \xi + T \xi_0;$$

où T désigne une fonction arbitraire de t . Ceci nous montre de suite que *si l'on connaît un couple de familles de Lamé répondant aux conditions que nous nous sommes proposées, on pourra en déduire tout un groupe de familles analogues*, c'est-à-dire composées des mêmes surfaces que les deux premières, mais placées différemment les unes par rapport aux autres. *Ce groupe dépendra d'ailleurs d'une fonction arbitraire d'une variable.*

On arrive à des résultats particulièrement élégants si l'on suppose,

comme on en a le droit, que le premier mouvement du trièdre (T) se réduit au repos, ce qui se traduit par l'évanouissement des fonctions $p, q, \dots$. On peut alors énoncer la proposition suivante, que le lecteur déduira sans peine des considérations qui précèdent :

Soient deux familles de Lamé (F) et (F_1) composées des mêmes surfaces placées dans des positions relatives différentes. Soient (S) et (S') deux surfaces infiniment voisines de (F), (S_1) et (S'_1) les surfaces homologues de (F_1) . Amenons (S) en coïncidence avec (S_1) en entraînant (S'); nous pouvons alors passer de (S') à (S'_1) par un mouvement hélicoïdal infiniment petit, qui est parfaitement déterminé. Si l'on imprime à la surface (S) un mouvement hélicoïdal continu comprenant le précédent, on obtient nécessairement une famille de Lamé.

Réciproquement, supposons que chaque surface (S) d'une famille de Lamé (F) puisse engendrer une autre famille de Lamé dans un mouvement hélicoïdal de pas K autour d'une droite Δ . Soit (Σ) la surface réglée engendrée par les différentes droites Δ . Faisons virer cette surface suivant le pas K sur la surface (Σ') la plus générale qui puisse convenir à cette viration. Si l'on fixe dans l'espace chaque surface (S) au moment où la droite Δ correspondante est axe instantané, les nouvelles positions de ces surfaces constituent une famille de Lamé.

29. Revenons à l'équation (1) qui donne la génération des surfaces (φ_1) du premier système. Les surfaces (φ_1) du second système sont données par une équation analogue, où A est simplement remplacé par A_1 . Pour que les deux équations soient identiques, il faut et suffit que A_0 soit nul. Donc, *pour que les surfaces (φ_1) du second système triple soient engendrées par les mêmes lignes que les surfaces (φ_1) du premier, il faut et il suffit que les tangentes aux lignes (u) de chaque surface (S) appartiennent au complexe linéaire (Δ, K) . Autrement dit, les surfaces (S) doivent être ce que nous avons appelé, au premier Chapitre, des surfaces singulières de la première catégorie. En particulier, si le pas K est constamment nul, chaque surface (S) doit être une surface de Joachimstal d'axe Δ . Nous aurons un peu plus loin à utiliser ces remarques. Pour l'instant, revenons au cas général.*

30. Il n'est pas certain *a priori* qu'il existe des familles de Lamé

telles que (F). Nous pouvons néanmoins l'affirmer, car nous en donnerons plus loin des exemples. Auparavant, nous allons montrer comment on peut ranger toutes les familles de cette nature en groupes tels que deux familles d'un même groupe se composent des mêmes surfaces et que deux familles de groupes différents se composent de surfaces différentes.

Groupes (G_1). — Imaginons une famille de Lamé (F) dont chaque surface (S) puisse engendrer une famille de Lamé *dans un seul mouvement hélicoïdal*, que nous désignons par le symbole (Δ, K) , dont la signification est évidente. Toutes les familles de Lamé composées des mêmes surfaces seront obtenues par la viration la plus générale d'une surface (Σ) parfaitement déterminée, suivant un pas également déterminé. Elles formeront donc un groupe, que nous appellerons *un groupe (G_1)*, qui dépendra d'une fonction arbitraire d'une variable.

Dès que l'on connaîtra une famille du groupe, on aura toutes les autres par quadratures; de sorte qu'il suffira de chercher une famille particulière, satisfaisant à des conditions pouvant simplifier cette recherche. Si l'on se rappelle par exemple qu'il existe une surface (Σ') de cône directeur donné capable de virer sur (Σ) suivant le pas $K^{(1)}$, on voit qu'on pourra toujours supposer que les droites Δ , si elles ne sont pas parallèles entre elles, ont des directions données à l'avance, entre autres celles d'un plan fixe.

Groupes (G_2). — Supposons maintenant une famille (F) composée uniquement de surfaces (S) de la seconde catégorie (Chap. I). A chaque surface (S) correspondent une simple infinité de mouvements hélicoïdaux (Δ, K) . Prenons une surface (Σ) composée de droites Δ choisies suivant une loi arbitraire, ce qui introduit une fonction arbitraire d'une variable. Faisons virer (Σ) de la manière la plus générale suivant le pas K affecté à chaque droite Δ . Nous obtenons de cette façon toutes les familles de Lamé composées des mêmes surfaces que la famille primitive. Ces familles forment *un groupe (G_2)*, dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable. Comme tout à l'heure, il

⁽¹⁾ C. R., 24 août 1908.

suffit de déterminer une famille particulière de chaque groupe pour avoir les autres par des quadratures; et l'on peut encore profiter des deux fonctions arbitraires pour simplifier le problème. C'est ainsi que si l'on voulait chercher toutes les familles de Lamé composées de cyclides de Dupin, on pourrait se borner au cas où la perpendiculaire commune aux deux lignes de points doubles de chaque cyclide a une direction invariable.

Groupes (G_3). — Nous savons qu'à part le cas peu intéressant des cônes, il n'y a que la cyclide de Dupin à trois plans de symétrie qui appartienne à la troisième catégorie. Les familles d'un groupe (G_3) se composent donc uniquement de cyclides de cette nature. La surface (Σ) peut être choisie arbitrairement, à la seule condition d'être tangente à tous les plans (II) qui contiennent les quatre points doubles de chaque cyclide. On doit ensuite déformer cette surface sans déformer ses génératrices, chaque plan (II) entraînant la cyclide correspondante. Cela introduit trois fonctions arbitraires d'une variable. Pour la recherche d'une famille particulière du groupe, on peut supposer que les plans (II) sont tous confondus. Mais nous n'en dirons pas plus long à ce sujet, car nous allons trouver un peu plus loin toutes les familles de Lamé composées de cyclides de Dupin. Quant aux groupes d'ordre plus élevé, nous n'en parlerons pas, puisqu'ils ne comprendraient que des familles de plans ou de sphères.

31. Il peut sembler, au premier abord, que la théorie que nous venons d'exposer ne présente un réel intérêt qu'autant que l'on aura trouvé des familles de Lamé composées exclusivement de surfaces de la première ou de la seconde catégorie. Comme la détermination de ces surfaces constitue un problème très difficile, il paraît peu commode d'entreprendre, dans toute sa généralité, la recherche des groupes (G_1) ou (G_2). Malgré cela, les considérations qui précèdent peuvent être d'une grande utilité lorsqu'on se propose de trouver les familles de Lamé qui satisfont à des conditions spéciales imposées à l'avance. Deux exemples vont le montrer d'une façon très nette.

Familles de Lamé composées d'hélicoïdes. — Proposons-nous d'abord

de rechercher toutes les familles de Lamé composées exclusivement d'hélicoïdes. Nous sommes certains qu'il en existe puisque nous en avons déjà trouvé de très intéressantes aux Chapitres I et II. On peut imaginer des méthodes directes pour résoudre ce problème; mais toutes conduisent à des calculs très longs et très compliqués. Nous allons au contraire arriver tout de suite au résultat en utilisant la théorie précédente.

Soit une famille de Lamé (F) dont chaque surface (S) est un hélicoïde d'axe Oz et de pas k . Faisons subir à la surface (S) de paramètre t un déplacement hélicoïdal d'axe Oz , de pas k et d'amplitude φ , fonction arbitraire de t . Nous obtenons une surface (S_1) qui est évidemment superposée à (S); de sorte que l'ensemble des surfaces (S_1) constitue encore une famille de Lamé. Nous rentrons donc dans la théorie précédente. Prenons pour trièdre (T) attaché à chaque surface (S) un trièdre quelconque dont l'axe Oz soit précisément l'axe de (S). Si $p, q, \dots$ désignent, comme tout à l'heure, les rotations et translations de ce trièdre, les quantités analogues $p_1, q_1, \dots$ relatives au second mouvement se déduisent des précédentes en remarquant que la nouvelle position du trièdre au temps t se déduit de l'ancienne par un déplacement hélicoïdal d'axe Oz , de pas K et d'amplitude φ . Un calcul élémentaire donne

$$\begin{aligned} p_0 &= p_1 - p = -p + p \cos \varphi + q \sin \varphi, \\ q_0 &= q_1 - q = -q - p \sin \varphi + q \cos \varphi, \\ r_0 &= r_1 - r = \frac{d\varphi}{dt}, \\ \xi_0 &= \xi_1 - \xi = -\xi + \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi + k\varphi(-q \cos \varphi - p \sin \varphi), \\ \eta_0 &= \eta_1 - \eta = -\eta - \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi + k\varphi(-q \sin \varphi - p \cos \varphi), \\ \zeta_0 &= \zeta_1 - \zeta = \frac{d(k\varphi)}{dt}. \end{aligned}$$

Il faut que, *quelle que soit la fonction φ* , la surface (S) puisse engendrer une famille de Lamé dans un mouvement hélicoïdal continu dont les composantes seraient $p_0, q_0, \dots$. Or, si un hélicoïde d'axe Oz engendre une famille de Lamé dans un mouvement hélicoïdal d'axe Δ , il en est de même dans tous les mouvements du même pas et d'axes Δ' déduits de Δ par le mouvement qui fait glisser l'hélicoïde sur lui-même. D'après

le Chapitre I, ceci exige, en écartant les cylindres, que Δ soit ou bien à l'infini, ou bien confondu avec Oz . Mais Δ ne peut être à l'infini quel que soit φ , car on peut toujours supposer que $\frac{d\varphi}{dt}$, c'est-à-dire r_0 , n'est pas nul. Reste donc l'hypothèse de Δ confondu avec Oz , qui se traduit par

$$p_0 = q_0 = \xi_0 = \eta_0 = 0.$$

Comme ceci doit avoir lieu quel que soit φ , on en conclut que les quantités p, q, ξ, η doivent être nulles, c'est-à-dire que *l'axe Oz doit rester fixe.*

Ici, il nous faut distinguer deux cas.

Premier cas. — Le mouvement (o, o, r_0, o, o, ξ_0) est celui qui fait glisser l'hélicoïde (S) sur lui-même. On a alors la condition

$$\xi_0 = kr_0,$$

ce qui n'a lieu que si k est indépendant de t . Nous retombons sur les systèmes triples orthogonaux étudiés en détail au n° 20.

Deuxième cas. — Le mouvement (o, o, r_0, o, o, ξ_0) ne fait pas glisser l'hélicoïde (S) sur lui-même. Ceci exige (n° 9) que les *hélicoïdes* (S) soient tous à courbure totale constante. Si l'on a une famille de Lamé composée de semblables surfaces, on aura un groupe (G_1) de familles analogues en imprimant à chaque surface une translation arbitraire suivant son axe.

Nous sommes donc finalement ramenés au problème suivant : *Chercher toutes les familles de Lamé composées d'hélicoïdes à courbure totale constante de même axe.*

C'est ce problème que nous allons maintenant résoudre. On peut y arriver en remarquant que l'on a affaire à des systèmes de M. Bianchi. Si l'on part par exemple des équations (35) de l'Ouvrage de M. Darboux (*Systèmes triples orthogonaux*, p. 312), on trouve qu'on peut prendre

$$\cos \omega = \operatorname{cn}(r + \rho \rho_1 + \rho_2), \quad \sin \omega = \operatorname{sn}(r + \rho \rho_1 + \rho_2),$$

r étant une fonction arbitraire de ρ ('). On peut ensuite obtenir les équations du système triple en termes finis. On a des calculs plus simples et l'on arrive à une interprétation plus élégante des résultats, en adoptant la marche suivante.

32. Si nous annulons ρ dans les équations (19) du Chapitre I, nous obtenons les équations de l'hélicoïde le plus général qui ait sa courbure totale constante et dont l'axe soit Oz. Si nous supposons maintenant que p , p' , p'' soient des fonctions quelconques d'un même paramètre t , et si nous admettons en outre que la quadrature $\int u d\alpha$ renferme implicitement comme constante additive une fonction arbitraire de t , nous aurons évidemment la famille la plus générale composée de tels hélicoïdes.

Nous allons écrire que cette famille est une famille de Lamé. Pour cela, nous allons nous servir de l'équation (2) (n° 28). La fonction G est ici le coefficient de $d\rho_2^2$ dans la formule (23) de la page 276, c'est-à-dire

$$(8) \quad G = q''(u + pp'),$$

en posant, pour abrégé

$$q'' = (p - p'')(p' - p'').$$

Quant à A, c'est le demi-coefficient de $d\rho_2 dt$ dans l'élément linéaire (2)

$$(9) \quad ds^2 = \frac{du^2}{4u} + u d\omega^2 + dz^2,$$

où l'on considère à la fois les accroissements $d\rho_1$, $d\rho_2$, dt . Désignons, pour abrégé, par θ_1 et θ_2 les dérivées par rapport à t et α d'une fonction quelconque θ de ces deux variables. Posons en outre

$$\begin{aligned} \beta &= \int \frac{d\alpha}{u}, & \gamma &= \int u d\alpha, \\ P &= p'_1 \rho_1 + p''_1 \rho_2 + \beta (pp' p'')_1 + pp' p'' \beta_1, \\ Q &= (pp'')_1 \rho_1 + (pp')_1 \rho_2 + \gamma_1; \end{aligned}$$

(1) Le module de la fonction sn est $K^2 = 1 + \frac{m}{\rho^2}$ ($m = \text{const.}$). Il y aurait aussi un cas de dégénérescence correspondant à $K^2 = 1$.

(2) On suppose que p , q , ..., ζ sont nuls, ce qui est permis.

nous avons alors

$$\begin{aligned} du &= u_1 dt + u_2 dz, \\ -d\omega &= \left[pp'p'' \frac{dz}{u} + p' dp_1 + p'' dp_2 \right] + P dt, \\ dz &= u d\alpha + p(p' dp_1 + p'' dp_2) + Q dt, \\ d\alpha &= dp_1 + dp_2. \end{aligned}$$

En portant dans (9), on trouve

$$\Lambda = \frac{u_1 u_2}{4u} + p''(u + pp')P + (u + pp')Q;$$

d'où,

$$\frac{\Lambda}{G} = \frac{1}{q''} \left[\frac{u_1 u_2}{4u(u + pp')} + Pp'' + Q \right].$$

Écrivons l'équation (2), autrement dit, annulons la dérivée de $\frac{\Lambda}{G}$ par rapport à p_1 . Pour faire aisément le calcul, il convient de séparer les termes qui renferment u_1 des autres, car ceux-ci seuls sont des fonctions algébriques de u . A cet effet, on pose

$$U = \frac{u_2}{4(u + pp')u};$$

on remarque ensuite qu'on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial' u_2}{\partial u} u_1 + \frac{\partial' u_2}{\partial t}.$$

On trouve alors comme coefficient de u_1

$$\frac{\partial' (U u_2)}{\partial u} + 1 = \frac{pp'p''}{u^2}.$$

Si l'on se rappelle que

$$u_2^2 = -4f(u) = -4(u + pp')(u + p'p'')(u + pp''),$$

on voit que ce coefficient est identiquement nul. Il nous reste l'équation

$$U \frac{\partial' u_2}{\partial t} + p''p'_1 + (pp'')_1 + \frac{p''(pp'p'')_1}{u} = 0.$$

Or

$$U \frac{\partial' u_2}{\partial t} = \frac{1}{8u(u+pp')} \frac{\partial'}{\partial t} [-4f(u)].$$

L'équation précédente devient donc

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2u} \left[(u+pp'')(p'p'')_1 + (u+p'p'')(pp'')_1 \right. \\ \left. + (pp')_1 \frac{(u+p'p'')(u+pp'')}{u+pp'} \right] \\ + p''p'_1 + (pp'')_1 + \frac{p''(pp'p'')_1}{u} = 0. \end{aligned}$$

Elle doit avoir lieu quels que soient u et t . Comme les trois pas sont nécessairement différents, il faut déjà que $(pp')_1$ soit nul. Par raison de symétrie, il doit en être de même de $(pp'')_1$ (¹). L'équation est alors satisfaite identiquement et nous avons le beau théorème suivant : *Pour que nos hélicoïdes forment une famille de Lamé, il faut et suffit que les deux produits pp' et pp'' soient constants.*

Écartons les cas où p est nul ou infini, qui conduisent à des solutions évidentes (voir les cas de dégénérescence du n° 9). Nous pouvons alors prendre

$$p = \frac{1}{t}, \quad p' = m_1 t, \quad p'' = m_2 t.$$

La quantité h du n° 9 est alors égale à $-\frac{m_1 + m_2 + m_1 m_2 t^2}{3}$.

En outre, nous avons le droit d'ajouter au second membre de la troisième équation (20) du même numéro une fonction arbitraire de t , soit T , ce qui nous donne bien un groupe (G_1) conforme à notre théorie générale.

Il ne nous reste plus qu'à chercher les deux familles complémentaires du système triple orthogonal.

La troisième par exemple nous est donnée par l'équation diffé-

(¹) D'une façon plus précise, cela résulte de ce qu'on a aussi

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_2} \left(\frac{B}{E} \right) = 0.$$

D'ailleurs, on arriverait à la même condition en annulant la somme des termes indépendants de u dans l'équation ci-dessus.

rentielle

$$(10) \quad \frac{d\rho_2}{dt} + \frac{A}{G} = 0.$$

Pour calculer $\frac{A}{G}$, remplaçons-y ρ_1 par $\alpha - \rho_2$; puis faisons $\alpha = 0$, ce qui est permis, puisque $\frac{A}{G}$ ne peut dépendre que de t et ρ_2 . Nous avons à voir ce que devient, pour $\alpha = 0$, l'expression

$$\frac{A}{G} = \frac{1}{(m_1 - m_2)(1 - m_2 t^2)} \left\{ \frac{u_1 u_2}{4u(u + m_1)} + m_2 t[(m_2 - m_1)\rho_2 + m_1 m_2 \beta + m_1 m_2 t \beta_1] + \gamma_1 + T' \right\}.$$

Dans ce but, nous nous servons du développement en série de la fonction p au voisinage de l'origine, ce qui nous donne

$$u = h - \frac{1}{\alpha^2} - c_1 \alpha^2 + c_2 \alpha^4 - \dots,$$

les coefficients $c_1, c_2, \dots$ étant des polynomes en t puisque ce sont, comme on sait, des polynomes par rapport aux invariants g_2, g_3 . Si nous admettons qu'on puisse intégrer et différentier terme à terme, soit par rapport à α , soit par rapport à t , ce développement en série, ainsi que celui de $\frac{1}{u}$ ⁽¹⁾, qui s'en déduit aisément, il n'y a aucune difficulté à calculer la valeur des différents termes de $\frac{A}{G}$. Si l'on prend toujours pour β et γ les valeurs précises définies par les formules (20)

(1) Les développements de u et de $\frac{1}{u}$ sont des séries entières en α , dont les coefficients sont des polynomes en t . Quelle que soit la valeur donnée à t , on peut toujours lui faire correspondre un intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ pour α où ces deux développements soient uniformément convergents. Or, supposons qu'on veuille la valeur de $\frac{A}{G}$ pour $t = t_0$. Considérons un intervalle (t_1, t_2) contenant t_0 . On peut trouver un nombre θ tel que pour $t = \theta$, chacun des polynomes précédents prenne une valeur absolue supérieure à celles qu'il prend dans l'intervalle (t_1, t_2) , car le module d'un polynome en t croît indéfiniment avec t . Si l'on considère l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ qui correspond à $t = \theta$, il est clair que les séries seront uniformément convergentes dans l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ pour α , dans l'intervalle (t_1, t_2) pour t . On pourra donc dans ces intervalles, intégrer et différentier terme à terme, par rapport aux deux variables.

du n° 9, on trouve

$$\frac{A}{G} = \frac{m_2 t}{m_2 t^2 - 1} \rho_2 + \frac{T'}{(m_1 - m_2)(1 - m_2 t^2)}.$$

L'équation (10) est linéaire par rapport à ρ_2 et s'intègre à vue, de sorte que les surfaces de la troisième famille sont données par

$$\rho_2 \sqrt{m_2 t^2 - 1} - \frac{1}{m_1 - m_2} \int \frac{T' dt}{\sqrt{m_2 t^2 - 1}} = \text{const.} = \rho'_2.$$

De même, celles de la seconde famille sont données par

$$\rho_1 \sqrt{m_1 t^2 - 1} - \frac{1}{m_2 - m_1} \int \frac{T' dt}{\sqrt{m_1 t^2 - 1}} = \text{const.} = \rho'_1.$$

Enfin, il n'est pas difficile de calculer l'élément linéaire de l'espace en fonction de $d\rho'_1$, $d\rho'_2$ et dt . Il suffit de partir de la formule (9), en se rappelant que $2A$ est le coefficient de $d\rho_2 dt$. Mais on n'arrive pas à une expression qui semble bien intéressante; c'est pourquoi nous ne l'écrivons pas.

33. FAMILLES DE LAMÉ COMPOSÉES DE SURFACES AYANT UN PLAN DE SYMÉTRIE VARIABLE. — M. Darboux a donné (*Systèmes triples orthogonaux*, p. 110) une *condition nécessaire* pour que des surfaces ayant un plan de symétrie variable puissent engendrer une famille de Lamé. Notre théorie des groupes (G_1) va nous permettre de déterminer toutes ces familles.

Posons-nous la question plus générale suivante : *Étant donnée une famille de Lamé (F), prenons la symétrique (S') de chaque surface (S) de (F) par rapport à un plan (II) variant avec (S). A quelles conditions la famille (F') des surfaces (S') est-elle une nouvelle famille de Lamé?*

Prenons les symétriques (S'') des différentes surfaces (S) par rapport à un même plan (P); nous obtenons évidemment une famille de Lamé (F'') qui sera composée des mêmes surfaces que (F'), mais placées différemment. Nous rentrons donc encore dans notre théorie générale des groupes (G_1). Choisissons le plan (Π) comme plan des xy du trièdre (T) attaché à (S). Soient p , q , ... ses rotations et translations. Soient (T') et (T'') les symétriques de (T) par rapport à (Π) et à (P). Les rotations et translations de (T'') sont évidemment

les mêmes que celles de (T). Quant à celles de (T'), on reconnaîtra sans peine qu'elles sont $-p, -q, r, \xi, \eta, -\zeta$. D'où l'on conclut que la surface (S) doit engendrer une famille de Lamé dans le mouvement hélicoïdal $(2p, 2q, 0, 0, 0, 2\zeta)$. Or, ce mouvement n'est autre qu'une rotation autour de la droite caractéristique du plan (II). Nous avons donc le théorème suivant :

Pour que la famille (F') soit aussi une famille de Lamé, il faut et suffit que chaque surface (S) puisse engendrer une famille de Lamé en tournant autour de la droite (Δ) suivant laquelle le plan (II) touche son enveloppe (Σ).

Si cette condition est remplie, nous obtiendrons *un groupe (G_1) en déformant la surface (Σ) sans déformer ses génératrices et en entraînant chaque surface (S) avec le plan (II) correspondant*. On pourra en particulier *amener tous les plans (II) à coïncider*, et par conséquent se borner à chercher les familles de Lamé dont chaque surface peut engendrer une autre famille de Lamé en tournant autour d'une droite convenablement choisie dans un plan fixe, par exemple dans le plan des xy .

34. Nous allons maintenant supposer, avec M. Darboux (*loc. cit.*) que chaque plan (II) coupe à angle droit la surface (S) correspondante tout le long d'une ligne de courbure (Δ) qui ne soit pas une ligne singulière, ni une ligne d'ombilics. Par chaque point de cette ligne, passe une seule ligne de courbure autre que (Δ); elle admet nécessairement le plan (II) pour plan de symétrie, et par suite, si l'on prend toutes les lignes analogues pour lignes (ν), on se trouve dans les conditions du n° 29. On en conclut que *la surface doit être de Joachimstal relativement à la droite (Δ)*. Écartons le cas peu intéressant où la droite (Δ) est fixe. D'après la Note de la page 271, *la surface doit être en même temps un périsphère*, dont la déferente est nécessairement dans un plan passant par (Δ), plan qui n'est autre que le plan de symétrie. Supposons maintenant que, par déformation de la surface (Σ) on ait ramené tous les plans (II) à coïncider. On retombe alors sur un système cyclique de Ribaucour (*voir* par exemple DARBOUX, *S. T.*, p. 55). Ceci nous permet immédiatement d'énoncer la proposition suivante :

Choisissons arbitrairement une surface (S_1) à lignes de première cour-

bure planes et un plan (Π) . Construisons le péricône surface de Joachimstal (S) engendré par les cercles normaux à (Π) et normaux à (S_1) le long d'une ligne de première courbure, dont le plan coupe (Π) suivant une certaine droite (Δ) . Déformons ensuite le plan (Π) sans déformer les droites (Δ) et supposons que le plan tangent relatif à chaque droite (Δ) entraîne avec lui la surface (S) correspondante. Les nouvelles positions de ces surfaces constituent la famille de Lamé la plus générale composée de surfaces à plan de symétrie variable.

Si l'on se reporte maintenant au n° 29, on voit que les surfaces (ρ_1) , qui sont également des péricônes sont engendrées par les mêmes cercles, quelle que soit la façon de déformer le plan (Π) . Par suite, si l'on revient au cas où ce plan n'a pas été déformé, on voit que la détermination des surfaces (ρ_1) équivaut à celle des lignes de seconde courbure de la surface (S_1) , c'est-à-dire à l'intégration d'une équation de Riccati⁽¹⁾. On peut même se donner la surface (S_1) sous une forme propre à éviter toute intégration et toute quadrature⁽²⁾. Quant aux surfaces (ρ) , on sait, d'après la théorie générale des systèmes cycliques, qu'elles seront, elles aussi, données par une équation de Riccati, ce qu'il ne serait d'ailleurs pas difficile de vérifier directement en formant l'équation analogue à l'équation (1).

35. Nous avons écarté le cas où la ligne (A) est une ligne d'ombilics. S'il en est ainsi, le raisonnement précédent est en défaut, car nous ne sommes plus certains que par chaque point M de (A) passe une ligne de courbure orthogonale à (A) et symétrique par rapport au plan (Π) . Bien au contraire, si l'on applique la méthode indiquée par M. Darboux (*T. S.*, t. IV, Note VII) pour l'étude des lignes de courbure au voisinage d'un ombilic, on reconnaît que par chaque point M de (A) passent, outre (A) , deux lignes de courbure symétriques, inclinées à 45° sur (A) . Il peut donc très bien arriver qu'une surface (ρ) soit formée par certaines de ces lignes sans que les lignes symétriques forment en même temps une trajectoire orthogonale des surfaces (S) . Mais, si

(1) Voir, par exemple, J. HAAG, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4^e série, t. VIII, août 1908.

(2) DARBOUX, *T. S.*, t. IV, n°s 1004 à 1007.

On applique un théorème de M. Lévy sur les lignes ombilicales (*voir* S. T. n° 60), on voit que la surface engendrée par (A) doit être tangente à (H) le long de cette ligne, laquelle ne peut donc être que la droite (Δ), caractéristique du plan (H). Dans ce cas, les points de (A) ne sont plus à proprement parler des ombilics et présentent des singularités qui vont jusqu'au quatrième ordre⁽¹⁾. Il faudrait pousser beaucoup plus loin l'approximation dans l'étude des lignes de courbure au voisinage de ces points pour pouvoir continuer. Aussi, laisserons-nous de côté ce cas particulier, qui est le seul qui nous échappe.

36. Nous ne voulons pas entreprendre l'étude des familles de Lamé dont nous venons de montrer l'existence.

On pourrait en particulier retrouver très simplement tous les résultats établis par M. Darboux dans deux Mémoires récents sur les familles de Lamé composées de cyclides de Dupin. *Si l'on veut en effet que chaque surface (S) soit une cyclide de Dupin, il faut et il suffit que la surface (S₁) de notre théorème général soit un périclisme*, les lignes de courbure circulaires jouant le rôle des lignes de première courbure.

Bornons-nous à faire voir comment on peut déduire de là l'élégant théorème suivant, que M. Darboux a donné dans son second Mémoire :

Pour que des cyclides de Dupin engendrent une famille de Lamé, il faut et suffit que l'un des cercles focaux de chaque cyclide ait une enveloppe à deux branches qu'il touche en deux points a et a' qui soient deux points doubles de la cyclide.

En effet, considérons la sphère (s) dont l'enveloppe est la surface (S₁). Il est aisé de voir que le cercle (K) suivant lequel cette sphère couple le plan (H) est un cercle focal de la cyclide correspondante. Les deux points doubles a et a' qui se trouvent sur ce cercle sont aussi sur le cercle suivant lequel la sphère (s) touche (S₁); ce sont donc les points limites du cercle (K). En outre, ils se trouvent sur la

(1) Si Oz est pris pour droite (Δ) et zOx pour plan (H), l'équation de la surface (S₁) est de la forme

$$x = y^4 f(y^2, z),$$

f étant une fonction régulière en tous les points de Oz.

droite (Δ), de sorte qu'après la déformation du plan (Π), le cercle focal (K) touchera en a et a' la courbe provenant, par déformation, de son ancienne enveloppe, ce qui démontre que la condition donnée par M. Darboux est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de remarquer que les sphères (s) qui passent par le cercle (K) dépendent d'un paramètre, comme les cyclides de Dupin qui admettent ce cercle pour cercle focal et les points a et a' pour points doubles.

Remarquons encore que dans le cas actuel, chaque surface (S) étant de Joachimstal, les surfaces (ρ) et (ρ_1) seront données, en vertu du n° 29, par deux équations qui sont indépendantes de la façon dont on a déformé le plan (Π). Or, lorsque celui-ci n'a pas été déformé, les surfaces (ρ) sont obtenues sans aucune quadrature (règle du rapport anharmonique, *S. T.*, n° 32). D'autre part, si l'on amène les seconds plans de symétrie à coïncider (¹), les surfaces (ρ_1) sont données par une équation de Riccati dont on connaît deux solutions [on ne connaît plus forcément le péricône (S_1)], donc par une quadrature. En résumé, *si l'on a une famille de Lamé quelconque composée de cyclides de Dupin, on est sûr de pouvoir calculer chacune des familles complémentaires par des quadratures.*

37. Pour terminer ce Chapitre, nous signalerons deux propositions analogues à celle du n° 33. Posons-nous la même question qu'à la page 323, mais en remplaçant le plan (Π) soit par un point O , soit par une droite D . En raisonnant tout à fait de la même façon qu'au n° 33, on démontrera les deux théorèmes suivants :

CAS D'UN CENTRE DE SYMÉTRIE. — *Pour que la famille (F') soit une famille de Lamé, il faut et il suffit que chaque surface (S) engendre une famille de Lamé dans une translation parallèle à la tangente en O à la courbe (γ) décrite par ce point.*

Si cette condition est remplie, on aura un groupe (G_1) de familles analogues en remplaçant la courbe (γ) par une courbe quelconque (γ_1) de même cône directeur, et le point O relatif à (S) par le point de (γ_1) où la tangente est parallèle à la tangente en O à (γ).

(¹) Ce qui se fait par la déformation d'une développable, c'est-à-dire par des quadratures.

CAS D'UN AXE DE SYMÉTRIE. — Soit (R) la surface, gauche ou développable, engendrée par (D) . Pour que (F') soit une famille de Lamé, il faut et suffit que chaque surface (S) puisse engendrer une famille de Lamé dans un mouvement hélicoïdal autour de la perpendiculaire au plan asymptote de (R) menée par le point central, avec un pas égal au paramètre de distribution changé de signe.

Nous laisserons au lecteur le soin d'examiner le cas où il y a plusieurs éléments de symétrie et de voir en particulier ce que donnent l'application et la comparaison des théorèmes précédents pour les familles de Lamé composées de cyclides de Dupin à deux ou à trois plans de symétrie.

CHAPITRE IV.

SUR CERTAINS GROUPES DE FAMILLES SPHÉRIQUES DE LAMÉ.

38. De même qu'au Chapitre II, nous avons généralisé le Chapitre I, en nous plaçant uniquement au point de vue de la représentation sphérique, nous allons généraliser le précédent en résolvant la question suivante :

Peut-on trouver deux familles de Lamé composées de surfaces ayant deux à deux pour représentations sphériques des réseaux sphériques superposables, mais placés dans des positions relatives différentes ?

Reprenons les raisonnements faits au n° 14. Seulement, au lieu d'admettre que le réseau (s) qui est entraîné par le trièdre $Oxyz$ est indépendant de ω , supposons au contraire qu'il n'en est pas ainsi.

Dans ces conditions, lorsque ω varie seul, le trièdre $OXYZ$ se déplace par rapport à $Oxyz$ et possède des rotations p_2, q_2, r_2 qui sont des fonctions parfaitement déterminées de u, v, ω , si l'on s'est donné chaque réseau (s) par rapport à la position correspondante de $Oxyz$. La condition (14) de M. Petot s'écrit alors

$$(1) \quad r_2 + c\lambda + c'\mu + c''\nu = rA + r_1B,$$

A et B désignant, comme nous le savons, deux fonctions dépendant

respectivement de (u, ϖ) et de (v, ϖ) . Supposons maintenant qu'on imprime au trièdre $Oxyz$ un autre mouvement dont les rotations soient λ_1, μ_1, ν_1 , mais qu'au trièdre de paramètre ϖ corresponde toujours le même réseau (s) que tout à l'heure. Nous obtenons une nouvelle famille de réseaux, qui sera une famille sphérique de Lamé si l'on a

$$(2) \quad r_2 + c\lambda_1 + c'\mu_1 + c''\nu_1 = rA_1 + r_1B_1,$$

A_1 et B_1 désignant deux nouvelles fonctions de (u, ϖ) et de (v, ϖ) respectivement. Si les relations (1) et (2) sont vérifiées, nous obtiendrons bien deux familles sphériques de Lamé répondant aux conditions que nous nous sommes imposées, et nous aurons le couple le plus général de cette nature, car il suffit, pour le voir, de répéter ce qui a été dit à la page 312, en remarquant en outre qu'on peut choisir arbitrairement le premier mouvement du trièdre $Oxyz$. Cela posé, retranchons (1) de (2), nous obtenons

$$(3) \quad c\lambda_0 + c'\mu_0 + c''\nu_0 = rA_0 + r_1B_0,$$

en posant

$$\lambda_0 = \lambda_1 - \lambda, \quad \mu_0 = \mu_1 - \mu, \quad \nu_0 = \nu_1 - \nu, \quad A_0 = A_1 - A, \quad B_0 = B_1 - B.$$

Nous retrouvons l'équation (22) du Chapitre II. Nous voyons donc qu'il est nécessaire que le réseau (s) de paramètre ϖ engendre une famille de Lamé en tournant autour de la droite dont les cosinus directeurs relatifs à $Oxyz$ sont proportionnels à λ_0, μ_0, ν_0 .

Réciproquement, supposons une famille de réseaux vérifiant la relation (1) et telle en outre que chaque réseau (s) engendre une famille de Lamé en tournant autour d'une droite déterminée Δ . Nous aurons alors une relation de la forme (3), où λ_0, μ_0, ν_0 seront des fonctions de ϖ proportionnelles aux cosinus directeurs de Δ relatifs à $Oxyz$. Par suite, l'équation (2) sera vérifiée, si l'on prend

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda + W\lambda_0, & \mu_1 &= \mu + W\mu_0, & \nu_1 &= \nu + W\nu_0, \\ A_1 &= A + WA_0, & B_1 &= B + WB_0, \end{aligned}$$

W désignant une fonction arbitraire de ϖ . De tout cela on peut

déduire un énoncé complètement analogue à celui de la page 314, que nous laisserons au lecteur le soin de formuler. La seule différence, c'est qu'ici la surface (Σ) lieu de Δ est un cône, que l'on doit faire rouler sans glissement sur le cône le plus général de sommet O ⁽¹⁾. Il faut cependant signaler un cas particulier, qui ne se présentait pas dans le Chapitre précédent. C'est celui où les quantités λ_0, μ_0, ν_0 seraient toutes nulles, sans que A_0 et B_0 le soient. Dans ce cas, la relation (3) nous montre que chaque réseau (s) est un réseau (σ) . Écartant le cas peu intéressant des réseaux qui comprennent une famille de grands cercles, nous pouvons supposer que, pour chaque réseau, les variables u et v sont les variables canoniques, de sorte que les fonctions A_0 et B_0 se réduisent à l'unité. Nous pouvons en outre supposer nulles les quantités λ, μ, ν , et alors l'équation (1) se réduit à la suivante :

$$r_2 = r(A - B).$$

Si elle est vérifiée par les fonctions A et B , elle le sera aussi par les fonctions

$$A_1 = A + W, \quad B_1 = B + W,$$

W désignant une fonction arbitraire de φ .

Il s'agit d'interpréter ceci. Remarquons tout d'abord que nous n'avons plus deux familles de réseaux différentes, comme nous nous l'étions demandé au début de ce Chapitre. Il semble donc à première vue que si l'on veut considérer les familles de Lamé composées de surfaces admettant les réseaux actuels pour représentations sphériques, on doit retomber nécessairement sur la transformation de Combescure. Mais il n'en est rien ; car, si l'on considère deux systèmes triples orthogonaux qui correspondent à des valeurs différentes de la fonction W , pour ces deux systèmes les surfaces (ρ_2) ont bien deux à deux la même représentation sphérique, mais il n'en est pas de même pour les surfaces (ρ) ni pour les surfaces (ρ_1) ⁽²⁾, comme le montrent les équations (16) du

(1) De même qu'au n° 29, pour que l'équation des surfaces (ρ_1) soit indépendante du mouvement de (Σ) , il faut et suffit que B_0 soit nul, autrement dit que le réseau (s) soit (σ_1) relativement à la variable u .

(2) D'une façon générale, étant donnés deux systèmes triples orthogonaux quelconques (S) et (S') , on peut toujours établir entre eux une correspondance telle qu'en deux points

Chapitre II. *On peut choisir pour représentation sphérique ⁽¹⁾ d'une surface (ρ) par exemple une famille de courbes (u) choisies suivant une loi arbitraire parmi les différents réseaux (s) , car cela ne fait que déterminer la fonction W .*

39. On peut, comme dans le Chapitre précédent, définir des groupes de familles sphériques de Lamé tels que deux familles du même groupe se composent des mêmes réseaux, deux familles de groupes différents se composant au contraire de réseaux différents.

Groupes (g_1) . — Supposons une famille sphérique de Lamé (f) se composant exclusivement de réseaux (σ_1) ou (σ_2) . Toutes les familles de Lamé composées des mêmes réseaux s'obtiendront par le roulement sur un cône arbitraire, du cône (Σ) lieu des droites Δ relatives aux divers réseaux (s) de (f) . On pourra en particulier toujours ramener ces droites Δ à être dans un même plan.

Groupes (g_2) . — Supposons maintenant une famille (f) composée uniquement de réseaux (σ_{ik}) , i et k étant différents de zéro. A chacun de ceux-ci correspond un plan (Π) lieu des droites par rapport auxquelles ils sont (σ_1) ou (σ_2) . Prenons deux cônes arbitraires (Σ) et (Σ') , de sommet commun O . Faisons rouler (Σ) sur (Σ') , et imaginons que les réseaux (s) soient entraînés avec (Σ) , mais chacun d'eux restant fixé sur la sphère dès que l'axe instantané de rotation se trouve dans

homologues M et M' , les normales aux surfaces coordonnées soient deux à deux parallèles. Cela résulte de ce que le trièdre que nous appelons $OXYZ$ peut en général prendre toutes les orientations possibles, puisqu'il dépend de trois paramètres. Si (S) et (S') sont quelconques, lorsque M décrit la surface coordonnée normale en M à MX , M' décrit une surface quelconque. Ce qui caractérise la transformation de Combescure, c'est que M' doit au contraire décrire lui aussi la surface coordonnée de (S') qui est normale en M' à $M'X$; ceci ayant lieu également quand on remplace OX par OY et OZ . Autrement dit, la transformation ponctuelle de l'espace définie par la correspondance (M, M') doit transformer les surfaces coordonnées de (S) en les surfaces de même nom de (S') . Ce qui caractérise au contraire le cas examiné dans le texte, c'est que les surfaces (ρ_2) seules se transforment en les surfaces (ρ'_2) . S'il y avait en plus une seule surface (ρ) ou (ρ_1) qui se transformât en une surface (ρ') ou (ρ'_1) , on retomberait sur la transformation de Combescure, car, d'après les équations (16) du Chapitre II, la fonction W serait la même pour (S) et (S') .

⁽¹⁾ Au sens général défini à la page 299.

le plan (II) correspondant. Les nouvelles positions de nos réseaux constitueront une nouvelle famille de Lamé dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable. Toutes les familles ainsi obtenues constituent un groupe (g_2). Pour la détermination de ces groupes, on peut se borner à considérer le cas où les plans (II) sont confondus. Il suffit en effet de prendre pour (Σ') un plan et pour (Σ) le cône inscrit dans les plans (II). Nous ne nous occuperons pas des groupes (g_3), puisque nous ne savons pas s'il existe des réseaux qui sont (σ_1) ou (σ_2) par rapport à trois directions non parallèles à un même plan.

Il serait peut-être intéressant de faire un rapprochement entre les groupes que nous venons de définir et ceux du Chapitre précédent. A tout groupe (G) correspond évidemment un groupe (g). La réciproque est-elle vraie? On pourrait, pour le voir, essayer de généraliser la méthode qui, au Chapitre II, nous servait à trouver les familles de Lamé composées de surfaces égales. Nous n'avons pas eu, jusqu'à présent, le temps de nous livrer à cette recherche.

40. La théorie que nous venons d'exposer donne lieu à des applications tout à fait analogues à celles du Chapitre précédent et que nous allons maintenant développer.

Familles de Lamé composées de surfaces dont la représentation sphérique des lignes de courbure est de révolution. — Ces familles de Lamé sont évidemment la généralisation des familles de Lamé composées d'hélicoïdes. Aussi allons-nous, pour les déterminer, suivre la même méthode qu'au n° 31.

Imaginons une famille sphérique de Lamé (f), dont chaque réseau (s) soit de révolution autour d'une droite que nous prenons pour axe des z de notre trièdre mobile $Oxyz$. En faisant tourner chaque réseau (s), autour de l'axe Oz correspondant, d'un angle φ fonction arbitraire de ω , on retombe sur la même famille, et par conséquent sur une famille de Lamé.

Si nous nous reportons au n° 31, nous voyons que les quantités appelées précédemment λ_0 , μ_0 , ν_0 sont données par les formules

$$\lambda_0 = -\lambda + \lambda \cos \varphi + \mu \sin \varphi, \quad \mu_0 = -\mu - \lambda \sin \varphi + \mu \cos \varphi; \quad \nu_0 = \frac{d\varphi}{d\omega}.$$

Il faut que, quelle que soit la fonction φ , le réseau (s) engendre une famille de Lamé en tournant autour de la droite $\Delta(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$, et par suite aussi en tournant autour d'une quelconque des droites déduites de la précédente par rotation autour de Oz . D'après le Chapitre II, il faut donc, ou bien que Δ coïncide avec Oz , ou bien que Δ soit perpendiculaire à Oz ⁽¹⁾. La seconde hypothèse, qui se traduit par $\nu_0 = 0$, ne peut avoir lieu quelle que soit la fonction φ . Reste donc la première; elle exige que λ et μ soient tous deux nuls, autrement dit que tous les réseaux (s) aient le même axe de révolution. En outre, chacun d'eux doit être (σ_2) ou (σ_1) par rapport à cet axe. Mais un réseau de révolution qui tourne autour de son axe ne cesse pas de coïncider avec lui-même; donc notre réseau doit être en même temps (σ) .

Considérons alors les équations (50) du n° 22, le terme en $\cos \theta$ du second membre de la première étant supposé supprimé, de façon que cette équation exprime que $r + r_1$ est nul et non égal à c'' . Pour que le réseau soit de révolution, il faut et suffit que Φ soit fonction de θ . Avec cette hypothèse, nos deux équations s'écrivent sous la forme

$$A \frac{\partial \theta}{\partial u} + B \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = C \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

A, B, C étant des fonctions de θ . La seconde s'intègre à vue et nous montre que θ doit être une fonction convenablement choisie de $(U + V)$, U et V désignant deux fonctions arbitraires de u et v respectivement. La première devient alors

$$AU' + BV' = 0.$$

Différentions, en supposant $(U + V)$ constant,

$$AU''V' - BV''U' = 0.$$

On constate aisément que A et B ne peuvent être tous deux nuls. On

⁽¹⁾ Nous admettons qu'il n'y a pas de réseau capable d'engendrer une famille sphérique de Lamé en tournant autour d'un diamètre quelconque de la sphère, ce qui est infiniment probable.

doit donc avoir

$$\frac{U''}{U'^2} = -\frac{V''}{V'^2} = \text{const.} = m;$$

d'où

$$\frac{1}{U'} = -mu + n, \quad \frac{1}{V'} = mv + n'.$$

Si $m = 0$, θ est une fonction de $\alpha = au + bv$, a et b désignant deux constantes. La considération du système (T), dont les H_i sont définis par les formules (33) de la page 293, où l'on ferait $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, et sont par conséquent des fonctions de la seule variable α , nous montre que *le réseau est dans ce cas la représentation sphérique d'un hélicoïde à courbure totale constante*, car le système (T) en question est un de ceux qui se composent exclusivement d'hélicoïdes, parce que ses H_i et par suite ses β_{ik} ne dépendent que de α (DARBOUX, *S. T.*, n° 176).

Si $m \neq 0$, on peut supposer

$$U' = -\frac{1}{u}, \quad V' = \frac{1}{v};$$

d'où

$$U + V = \log \frac{v}{u}.$$

Donc θ est dans ce cas une fonction de $\frac{v}{u}$. Si l'on considère, cette fois encore, le système (T) relatif à la direction Oz , on n'obtient plus un système composé uniquement d'hélicoïdes. Donc *le réseau n'est plus la représentation sphérique d'un hélicoïde à courbure totale constante*. Il ne serait pas difficile de former les deux équations différentielles en θ , Φ et $\alpha = \frac{v}{u}$, qui permettraient d'obtenir un tel réseau. Il faudrait ensuite voir si l'on peut disposer des constantes arbitraires dont dépendent ces réseaux, ainsi que les précédents, pour les associer en une famille sphérique de Lamé. La question apparaît donc comme plus compliquée que la question analogue du Chapitre III et, bien qu'elle ne nous paraisse pas insoluble, nous préférons nous en tenir là, par crainte d'allonger par trop notre travail.

41. FAMILLES SPHÉRIQUES DE LAMÉ COMPOSÉES DE RÉSEAUX POSSÉDANT CHACUN UN OU PLUSIEURS ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE. — Nous allons maintenant géné-

raliser les n^{os} 33 à 37. Supposons d'abord que, *partant d'une famille (f) de réseaux (s), on en déduise une autre (f') en prenant la symétrique (s') de chaque réseau (s) par rapport à un plan variable (π)*. La première famille étant une famille de Lamé, que faut-il pour qu'il en soit de même de la seconde? En répétant le raisonnement du n^o 33, on trouverait qu'il faut et il suffit que chaque réseau (s) puisse engendrer une famille de Lamé en tournant autour de la droite δ suivant laquelle le plan (π) touche son enveloppe (σ). Si cette condition est remplie, on pourra, par déformation du cône (σ), amener tous les plans (π) à coïncider, sans cesser d'avoir une famille de Lamé.

Dans le cas particulier où le grand cercle suivant lequel le plan (π) coupe la sphère fait partie du réseau (¹), il est évident que, de même qu'au n^o 34, les lignes (ν) qui sont orthogonales à ce grand cercle et par suite symétriques par rapport à (π) devront être assemblées de la même façon dans (f) et dans (f') pour donner la représentation sphérique d'une surface (σ_1). Il en résulte, d'après la note de la page 330, que le réseau devra être réseau (σ_1) par rapport à (δ) et relativement à la variable u . Or, revenons au n^o 19 et supposons que le réseau (σ_1) qu'on y considère admette le plan zOx pour plan de symétrie, les lignes (u) étant deux à deux symétriques par rapport à ce plan. A tout point $m(u, \nu)$ de la sphère correspond donc un autre point $m'(u', \nu)$ symétrique du premier, dont les angles θ', φ', Φ' sont respectivement égaux à $\theta, -\varphi, -\Phi$. Par suite, si dans l'équation (39) nous changeons u en u' , sans changer ν , nous obtenons

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = V \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta};$$

et cette équation a lieu quels que soient u' et ν , donc aussi quels que soient u et ν . En la comparant avec l'équation (39) elle-même, nous en déduisons que V et $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}$ sont nuls, et par suite que les lignes (u) sont des cercles de plans parallèles à Oz . Mais alors le plan des xy est, lui

(¹) Autrement dit, les surfaces qui admettent ce réseau pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure doivent admettre un plan de section principale parallèle à (π). Bien entendu, nous supposons, ici encore, que cette section n'est pas une ligne d'ombilics.

aussi, un plan de symétrie de la même nature que zOx . Si donc on ne veut pas non plus qu'il demeure fixe, il faut que les lignes (v) soient aussi des cercles. Finalement, *si l'on écarte le cas où tous les réseaux comprennent une famille de petits cercles normaux à x_1Oy_1 , et deux à deux symétriques par rapport à un plan passant par Oz_1 , et variant d'un réseau à l'autre* ⁽¹⁾, *il est nécessaire que chaque réseau se compose uniquement de cercles.*

Plaçons-nous donc dans cette dernière hypothèse. Supposons que zOx et zOy soient les deux plans de symétrie du réseau. Le mouvement du trièdre $Oxyz$ par rapport à $Ox_1y_1z_1$ doit être tel que zOx touche son enveloppe suivant Ox et zOy suivant Oy . (Ces deux conditions rentrent l'une dans l'autre, d'après la théorie des cônes supplémentaires.) D'autre part, chaque réseau (s) est (σ_1) par rapport à Ox et à Oy ; nous pouvons donc déduire un groupe (g_2) de notre famille (f) (n° 39). En particulier, nous pouvons amener tous les plans xOy à être confondus. Mais alors il en sera nécessairement de même de tous les plans zOx et de tous les plans zOy , puisque ces plans doivent admettre respectivement pour caractéristiques Ox et Oy . *Nous arrivons alors à une famille (f_0) parfaitement déterminée : elle comprend tous les réseaux composés uniquement de cercles dont les plans sont respectivement parallèles à Ox et Oy* ⁽²⁾. Cette famille est d'ailleurs une famille sphérique de Lamé, comme on s'en assure en prenant l'inverse du système triple formé par des cylindres admettant pour sections droites les cercles de deux faisceaux [plans orthogonaux et par les plans perpendiculaires aux génératrices. *En faisant rouler le plan xOy sur un cône arbitraire et en fixant à chaque instant sur la sphère, suivant une loi arbitraire, un réseau de (f_0) , on obtiendra la famille sphérique de Lamé la plus générale composée exclusivement de réseaux de cercles.*

⁽¹⁾ D'après la note de la page 310, les systèmes triples correspondants sont parallèles aux inverses par rapport à O des systèmes comprenant une famille de cylindres parallèles à Oz_1 et admettant chacun un plan de symétrie passant par Oz_1 et variable d'un cylindre à l'autre.

⁽²⁾ Ces réseaux ne dépendant que d'un seul paramètre, qui est par exemple la cote de la droite par où passent les plans de cercles parallèles à Ox . Il pourrait arriver aussi que tous les réseaux de (f_0) fussent confondus, car ces réseaux sont (σ_1) ; mais cela ne changerait rien à ce qui va suivre.

Il ne serait pas difficile de montrer, en s'appuyant sur le n° 36, que la famille ainsi obtenue peut servir de représentation sphérique à la famille de Lamé la plus générale composée de cyclides de Dupin, ce qui nous donnerait la démonstration d'une propriété établie récemment par M. Darboux, à savoir que *le système triple le plus général, comprenant une famille de surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes, peut être obtenu comme système parallèle à un système comprenant une famille de cyclides de Dupin.*

On pourrait aussi montrer, d'après ce qui précède, que, pour un tel système, *les surfaces des familles complémentaires se déterminent par des quadratures*, car chaque réseau (s) étant (σ_1) pour les deux variables u et v , les quantités A ou B ne changent pas quand on déforme le cône lieu de Ox ou de Oy . Mais nous ne voulons pas entreprendre ici l'étude de ces systèmes particuliers et nous terminerons là, en même temps que notre travail, l'étude des applications de la théorie exposée dans ce Chapitre.

