ÉMILE PICARD

# Sur une équation aux dérivées partielles du second ordre relative à une surface fermée, correspondant à un équilibre calorifique

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 26 (1909), p. 9-17

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__9_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

# SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE, RELATIVE A UNE SURFACE FERMÉE, CORRESPONDANT A UN ÉQUILIBRE CALORIFIQUE;

PAR M. ÉMILE PICARD.

On sait que Beltrami a généralisé l'équation de Laplace en considérant sur une surface fermée dont l'élément linéaire est donné par

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$$

l'équation

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} - \mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} + \mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}\right) = 0, \tag{1}$$

et cette équation est invariante pour un changement de variables fait sur $u$ et $v$. On a considéré d'une manière plus générale l'équation

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\dfrac{\partial V}{\partial u}-F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-F\dfrac{\partial V}{\partial u}+E\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)=c(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,V.$$

Cette équation correspond, pour $c(u, v)$ toujours positif, *au problème d'équilibre calorifique avec rayonnement de la surface*, V désignant la température (1).

Ayant repris l'année dernière, dans mon Cours, l'étude de cette équation en la rattachant à l'équation fonctionnelle de Fredholm, je me propose d'indiquer ici les points principaux de cette étude (2).

1. Désignons par $\Delta V$ le premier membre de l'équation de Beltrami. On démontre d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse trouver une fonction V satisfaisant à l'équation

$$\Delta V = f(u,v)\sqrt{EG-F^2},$$

$f(u, v)$ étant une fonction donnée, est exprimée pour celle-ci par

$$\int\!\!\int f(u,v)\,d\sigma = 0,$$

où $d\sigma$ représente l'élément de surface, c'est-à-dire

$$du\,dv\sqrt{EG-F^2}.$$

On établit ensuite qu'il existe une solution de l'équation (2), uniforme et continue sur toute la surface, sauf en un point qui correspond à une source avec un flux donné. En supposant le flux égal à $2\pi$, et en désignant par $(u', v')$ le point singulier, nous désignerons cette solution par

$$U(u, v;\, u', v').$$

On voit aisément que U est symétrique en $(u, v)$ et $(u', v')$.

(1) Je me suis, en particulier, occupé de l'équation précédente dans ma Note : *Sur l'équilibre calorifique d'une surface fermée rayonnant au dehors* (*Comptes rendus*, 5 juin 1900).

(2) *Voir* aussi *Comptes rendus*, juin 1908.

2. Envisageons maintenant l'équation

$$(3)\qquad \Delta V = \lambda c \sqrt{EG - F^2}\, V,$$

$\lambda$ étant un paramètre constant, et $c$ une fonction du point $(u, v)$ de la surface qui n'est pas nécessairement de signe constant.

Nous allons chercher s'il existe une intégrale de l'équation (3) partout continue sur la surface.

Nous considérerons, à cet effet, une autre équation

$$(4)\qquad \Delta U = c_1 \sqrt{EG - F^2}\, U,$$

mais où $c_1$ est une fonction toujours positive; soit

$$U(u, v;\, u', v')$$

la solution de cette équation analogue à la solution de (2), que nous indiquions plus haut par la même notation.

Soit V une intégrale de (3) partout continue; on appliquera la formule de Green étendue à une surface fermée quelconque rendue simplement connexe comme dans la théorie des surfaces de Riemann au moyen d'un contour K. Évitant alors le point $(u', v')$ par un petit contour $\gamma$, la formule de Green donne

$$\int_\gamma \left( U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) ds + \int\int (U\,\Delta V - V\,\Delta U)\, du\, dv = 0,$$

d'où se déduit

$$(\alpha)\qquad 2\pi V(u', v') + \int\int (\lambda c - c_1)\, U(u, v;\, u', v')\, V(u, v)\, d\sigma = 0,$$

et cette équation fonctionnelle par rapport à V est du type de l'équation de Fredholm, un peu étendu.

Réciproquement d'ailleurs, si V satisfait à l'équation $(\alpha)$, en étant continue sur toute la surface, on aura une solution cherchée de l'équation (3); c'est ce qu'on voit facilement.

Si $c$ est toujours positif, on pourra prendre $c_1 = c$, et l'équation à envisager est du type ordinaire de Fredholm

$$(\beta)\qquad 2\pi V(u', v') + (\lambda - 1) \int\int c(u, v)\, U(u, v;\, u', v')\, V(u, v)\, d\sigma = 0;$$

on est de plus dans le cas très simple d'un noyau se ramenant de suite à un noyau symétrique à cause de la symétrie de $U(u, v; u', v')$.

**3.** Dans le cas où $c$ est positif, l'équation ($\beta$) rentre dans un type d'équations de Fredholm pour lequel on sait qu'il y a une infinité de valeurs singulières; elles sont négatives et $\lambda = 0$ est la première d'entre elles. La même propriété (quant au nombre infini des racines) subsiste pour l'équation (3), quel que soit le signe de $c$; c'est ce qui résulte d'une étude faite par M. Sanielevici, et qu'on trouvera dans un Mémoire faisant suite à cet article. Nous allons nous borner dans la suite au cas où $c$ est toujours positif, cas le plus intéressant pour la Physique mathématique.

Soit $\lambda_0$ une valeur *singulière* pour laquelle l'équation

$$\text{(E)} \qquad \Delta V = \lambda_0 c \sqrt{EG - F^2}\, V \qquad (c > 0)$$

admet *une ou plusieurs intégrales continues sur toute la surface*, linéairement indépendantes. Nous nous proposons le problème suivant :

*Soient n points sur la surface*

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \ldots, \quad (a_n, b_n)$$

*et les coefficients respectifs*

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n.$$

*Existe-t-il une intégrale de l'équation*

$$(5) \qquad \Delta U = \lambda_0 c \sqrt{EG - E^2}\, U$$

*ayant les points singuliers* $(a_i, b_i)$, *du type des sources de chaleur, avec le flux* $A_i$.

La réponse à cette question sera fournie par le théorème suivant :

*Supposons qu'il existe, pour* (E), $\nu$ *solutions partout continues*

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_\nu;$$

*les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème proposé soit* *susceptible d'une solution sont exprimées par les* $\nu$ *relations*

$$\text{(C)} \quad A_1 V_i(a_1, b_1) + A_2 V_i(a_2, b_2) + \ldots + A_n V_i(a_n, b_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

4. Traitons d'abord une question préliminaire. Soit l'équation

$$(\alpha) \qquad \Delta H = \lambda_0 c \sqrt{EG - F^2}\, H + \varphi(u, v) \sqrt{EG - F^2}.$$

Si $\varphi(u, v)$ est une fonction, continue sur toute la surface, prise arbitrairement, cette équation en H n'aura pas de solution continue sur toute la surface. En nous reportant à ce que nous avons vu plus haut, on voit de suite que l'équation ($\alpha$) équivaut à l'équation de Fredholm

$$2\pi H(u', v') + (\lambda_0 - 1) \int\!\!\int c(u, v)\, U(u, v; u', v')\, H(u, v)\, d\sigma = \Phi(u', v'),$$

en posant

$$\Phi(u', v') = -\int\!\!\int U(u, v; u', v')\, \varphi(u, v)\, d\sigma.$$

Cette équation de Fredholm a un second membre et est relative à une valeur singulière. Appliquons la théorie générale; il faut envisager l'équation associée, qui est ici

$$2\pi K(u', v') + (\lambda_0 - 1) \int\!\!\int c(u', v')\, U(u', v'; u, v)\, K(u, v)\, d\sigma = 0.$$

Elle peut s'écrire

$$2\pi \frac{K(u', v')}{c(u', v')} + (\lambda_0 - 1) \int\!\!\int c(u, v)\, U(u, v; u', v') \frac{K(u, v)}{c(u, v)}\, d\sigma = 0.$$

Par conséquent, l'équation associée a les $\nu$ solutions distinctes

$$K(u, v) = c(u, v)\, V_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Nous aurons donc les conditions

$$(\varepsilon) \qquad \int\!\!\int \Phi(u, v)\, c(u, v)\, V_i(u, v)\, d\sigma = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Ces conditions peuvent être transformées. Nous écrirons

$$\Phi(u, v) = -\int\!\!\int U(u_1, v_1; u, v)\, \varphi(u_1, v_1)\, d\sigma_1.$$

L'équation ci-dessus peut donc s'écrire

$$\iiiint c(u, v)\, V_i(u, v)\, U(u_1, v_1; u, v)\, \varphi(u_1, v_1)\, d\sigma\, d\sigma_1 = 0;$$

mais on a

$$2\pi V_i(u', v') + (\lambda_0 - 1) \iint c(u, v)\, U(u, v; u', v')\, V_i(u, v)\, d\sigma = 0,$$

d'où nous tirons

$$\iint c(u, v)\, V_i(u, v)\, U(u_1, v_1; u, v)\, d\sigma = -\frac{2\pi}{\lambda_0 - 1} V_i(u_1, v_1).$$

*Les conditions* ($\varepsilon$) *deviennent donc*

$$\iint V_i(u_1, v_1)\, \varphi(u_1, v_1)\, d\sigma_1 = 0;$$

*elles sont nécessaires et suffisantes.*

5. Nous pouvons traiter maintenant le problème posé au paragraphe 3.

Supposons d'abord qu'il existe une intégrale de l'équation

$$\Delta U = \lambda_0 c \sqrt{EG - F^2}\, U$$

ayant les points singuliers logarithmiques $(a_i, b_i)$ avec le flux $A_i$.

Je dis d'abord que les conditions (C) du paragraphe 3 *sont nécessaires*. A cet effet, appliquons la formule de Green à la fonction U, possédant les propriétés indiquées et dont nous supposons l'existence. Elle se réduit à

$$\int \left( U \frac{dV_i}{dn} - V \frac{dU_i}{dn} \right) ds = 0,$$

le contour d'intégration étant, bien entendu, formé par les rétrosections jointes en chaîne comme dans la théorie des surfaces de Riemann, et par des petits contours entourant les points singuliers. Les rétrosections donnent manifestement zéro, et l'on obtient de suite

$$A_1 V_i(a_1, b_1) + A_2 V_i(a_2, b_2) + \ldots + A_n V_i(a_n, b_n) = 0.$$

Les conditions (C) sont donc *nécessaires*.

6. Montrons maintenant qu'*elles sont suffisantes*. On peut toujours trouver une fonction $\varphi(u, v)$, intégrale de l'équation

$$\Delta\varphi = c\sqrt{EG - F^2}\,\varphi$$

et ayant les singularités indiquées; il suffit de faire la somme de $n$ solutions ayant chacune un seul point singulier. Posons alors

$$U = \varphi + H,$$

il vient

$$\Delta H = \lambda_0 c\sqrt{EG - F^2}\,H + (\lambda_0 - 1)c\sqrt{EG - F^2}\,\varphi.$$

Nous sommes dans le cas de l'équation ($\alpha$) du paragraphe précédent, sauf que $\varphi$ devient infini. Mais, comme les infinis sont logarithmiques, toutes les conclusions du paragraphe cité subsistent. Il arrive seulement qu'aux points singuliers H et ses dérivées premières sont continues, tandis qu'il n'en est pas de même des dérivées secondes. Pour que l'équation en H ait une solution partout continue, nous avons les conditions

$$\int\!\!\int c\,\varphi\,V_i(u, v)\,d\sigma = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

qui peuvent s'écrire

$$\int\!\!\int V_i\,\Delta\varphi\,du\,dv = 0.$$

Or cette dernière expression se transforme immédiatement, en se servant de la formule de Green appliquée à la surface entière limitée par l'ensemble des rétrosections et des petits contours autour des points singuliers. On a ainsi

$$\int\!\!\int (V_i\,\Delta\varphi - \varphi\,\Delta V_i)\,du\,dv + \int\left(V_i\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{dV_i}{dn}\right)ds = 0,$$

ou encore

$$(1 - \lambda_0)\int\!\!\int c\,V_i\,\varphi\,d\sigma + \int\left(V_i\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{dV_i}{dn}\right)ds = 0.$$

L'intégrale double qui forme le premier terme du premier membre sera nulle, si l'on a

$$\int \left( V_i \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{dV_i}{dn} \right) ds = 0.$$

La partie de l'intégrale relative aux rétrosections est nulle, et l'équation précédente se réduit à

$$A_1 V_i(a_1, b_1) + A_2 V_i(a_2, b_2) + \ldots + A_n V_i(a_n, b_n) = 0.$$

Il résulte donc de cette analyse que, si ces conditions sont remplies ($i = 1, 2, \ldots, \nu$), nous pourrons trouver une fonction H partout continue; la fonction U donnée par

$$U = \varphi + H$$

sera une solution cherchée de l'équation

$$\Delta U = \lambda_0 c \sqrt{EG - F^2}\, U.$$

Il est clair d'ailleurs que cette solution n'est pas unique, et qu'on peut ajouter à une première solution une expression linéaire et homogène en $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$ à coefficients constants.

7. En particulier, pour la solution

$$\lambda_0 = 0,$$

on a

$$\nu = 1,$$

et V se réduit à une constante; d'où la condition connue

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 0$$

qui exprime que le flux total de chaleur est nul, l'équation différentielle concernant alors l'équilibre de température sans rayonnement extérieur.

8. Une application extrêmement simple est relative à la sphère de rayon *un*, en prenant $c = 1$. L'équation (2) est alors

$$\cos\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \sin\theta \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = \lambda \sin\theta\, V,$$

en se servant des coordonnées polaires $\theta$ et $\psi$ sur la sphère, et l'on a depuis longtemps remarqué que pour

$$\lambda = -n(n+1) \qquad (n \text{ entier positif}),$$

elle se confondait avec l'équation relative aux fonctions $Y_n$ de Laplace. Il n'y a pas d'autres valeurs singulières, comme le montrent immédiatement le développement de V en fonctions de Laplace, et l'application des propriétés élémentaires de ces développements. On a d'ailleurs pour

$$\lambda_0 = -n(n+1)$$

le nombre $\nu$ de plus haut égal à $2n+1$, qui correspond aux $2n+1$ fonctions $Y_n$ de Laplace.

Le cas du tore est à examiner, après celui de la sphère. Je ne sais si le problème qui nous occupe a été approfondi dans ce cas (en faisant toujours $c = 1$) et si la question se ramène à quelques transcendantes du type des fonctions de Bessel ou de fonctions analogues. En désignant par $r$ le rayon du cercle méridien, et R la distance de son centre à l'axe $(R > r)$, l'équation est ici

$$\frac{1}{r}(R - r\cos\varphi)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \sin\varphi (R - r\cos\varphi) \frac{\partial V}{\partial \varphi} + r \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = \lambda (R - r\cos\varphi) r V,$$

en désignant par $\varphi$ et $\psi$ deux angles dont la signification est immédiate et qui varient de $0$ à $2\pi$.

Les valeurs singulières de $\lambda_0$ sont celles pour lesquelles l'équation précédente admet une solution continue de période $2\pi$ par rapport à $\varphi$ et à $\psi$; il est vraisemblable que le produit $\lambda_0 r$ est une transcendante assez simple du quotient $\frac{r}{R}$.