ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LUCIEN BÖTTCHER

Nouvelle méthode d'intégration d'un système de n équations fonctionnelles linéaires du premier ordre de la forme $U_i(z) = \sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}(z) U_j F(z)$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 26 (1909), p. 519-543
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__519_0>

NOUVELLE MÉTHODE D'INTÉGRATION

D'UN

SYSTÈME DE n ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

DE LA FORME

$$U_i(z) = \sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}(z)\, U_j f(z);$$

PAR M. LUCIEN BÖTTCHER,

Docteur ès Sciences, Assistant de la Chaire de Mathématiques
à l'École Polytechnique à Lemberg.

Introduction.

Le but du travail présent est la solution générale d'un système de n équations fonctionnelles, linéaires, homogènes, d'ordre premier, dans lequel interviennent n fonctions inconnues

$$U_1(z), \quad U_2(z), \quad \ldots, \quad U_n(z),$$

donc de la forme

$$U_i(z) = \sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}(z)\, U_j[f(z)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et cela dans le cas favorable de la connaissance d'une solution particulière quelconque de l'équation fonctionnelle élémentaire

$$\mathrm{B}f(z) = h\,\mathrm{B}(z),$$

dans laquelle h possède une valeur arbitraire de module moindre que l'unité

$$|h| < 1.$$

Nous pouvons faire ici la remarque que la région d'applicabilité des règles que nous exposerons dans la suite grandit au fur et à mesure de l'extension de nos connaissances concernant les équations fonctionnelles élémentaires

$$\mathrm{C}f(z) = \mathrm{C}(z), \tag{1}$$
$$\mathrm{B}f(z) = h\,\mathrm{B}(z), \tag{2}$$
$$\mathrm{A}f(z) = \mathrm{A}(z) + a, \tag{3}$$
$$\mathrm{D}f(z) = [\mathrm{D}(z)]^m, \tag{4}$$

et surtout de la seconde d'elles, et qu'elle comprend aujourd'hui, sans aucune restriction, les cas

$$f(z) = \mathrm{A}z + \mathrm{B}, \qquad f(z) = \frac{\mathrm{A}z + \mathrm{B}}{\mathrm{C}z + \mathrm{D}}, \qquad f(z) = \mathrm{A}z^r,$$
$$f(z) = \varphi[\mathrm{A}\varphi_{-1}(z) + \mathrm{B}], \qquad f(z) = \varphi[\mathrm{A}\varphi_{-1}^r(z)], \qquad \ldots,$$

où φ est une fonction arbitraire de forme connue.

Cette région comprend même les autres cas, sous certaines conditions bien connues, des travaux de Kœnigs, Grévy, Leméray, Léau et que nous avons sommairement exposées dans notre étude intitulée : *Bases du calcul itéraire* (*Prace matematyczno-fizyczne;* Varsovie, Red. S. Dickstein, t. XII, 1901, p. 97, § 2; p. 98, § 4, art. 2; p. 100, § 5, art. 2; t. XIII, 1902, p. 368, théorème V).

On y a fourni les éléments nécessaires à la construction de la fonction $\mathrm{B}(z)$ sous la forme d'une équation fonctionnelle

$$\Xi f(z) + 1 = \Xi(z).$$

Avant d'aborder l'exposition de notre méthode, nous introduirons les abréviations suivantes, souvent en usage dans la suite.

Nous écrirons

$$\begin{array}{lll} z_1 & \text{au lieu de} & f(z), \\ z_2 & \text{»} & ff(z) = f_2(z), \\ z_3 & \text{»} & fff(z) = ff_2(z) = f_3(z), \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Nous admettons encore que le déterminant

$$A(z) = \sum \pm A_{11}(z) A_{22}(z) \ldots A_{nn}(z)$$

n'est pas identiquement nul.

1. Déduction des formules

$$U_i(z) = \sum_{j=1}^{j=n} A_{ijr}(z) U_j(z_r)$$

$$(r = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \infty; i = 1, 2, \ldots, n).$$

Au système donné de n équations fonctionnelles

$$(1) \qquad U_i(z) = \sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}(z) U_j(z_1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

correspond un système inverse de la même quantité d'équations fonctionnelles, représentable par

$$(2) \qquad U_i(z) = \sum_{j=1}^{j=n} L_{ij}(z) U_j(z_{-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et qu'on peut trouver de la manière suivante :

Désignons par $d_{ij}(z)$ le mineur de l'élément $A_{ij}(z)$ de la matrice

$$\begin{array}{lll} A_{11}(z), & \ldots, & A_{1n}(z), \\ \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ A_{n1}(z), & \ldots, & A_{nn}(z). \end{array}$$

Résolvant le système (1) par rapport aux $U_i(z)$, nous obtiendrons alors

$$\mathrm{U}_i(z_1) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{d_{ji}(z)}{\mathrm{A}(z)} \mathrm{U}_j(z), \tag{2'}$$

d'où

$$\mathrm{U}_i(z) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{d_{ji}(z_{-1})}{\mathrm{A}(z_{-1})} \mathrm{U}_j(z_{-1}), \tag{2''}$$

donc

$$\mathrm{L}_{ij}(z) = \frac{d_{ji}(z_{-1})}{\mathrm{A}(z_{-1})}.$$

Nous concluons des formules (1) que

$$\mathrm{U}_i(z) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, j}^{1, 2, \ldots, n} \mathrm{A}_{ij_1}(z)\, \mathrm{A}_{j_1 j_2}(z_1) \ldots \mathrm{A}_{j_{r-1} j}(z_{r-1})\, \mathrm{U}_j(z_r). \tag{3}$$

Des formules (2) nous concluons que

$$\mathrm{U}_i(z) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, j}^{1, 2, \ldots, n} \mathrm{L}_{ij_1}(z)\, \mathrm{L}_{j_1 j_2}(z_{-1}) \ldots \mathrm{L}_{j_{r-1} j}(z_{-r+1})\, \mathrm{U}_j(z_{-r}). \tag{4}$$

Nous combinons ces deux expressions sous la forme

$$\mathrm{U}_{ij}(z) = \sum_{j=1}^{j=n} \mathrm{A}_{ijr}(z)\, \mathrm{U}_j(z_r)$$

dans laquelle r accepte soit les valeurs positives 1, 2, 3, ..., alors

$$\mathrm{A}_{i,j,+r}(z) = \sum_{j_1, \ldots, j_{r-1}}^{1, \ldots, n} \mathrm{A}_{ij_1}(z)\, \mathrm{A}_{j_1 j_2}(z_1) \ldots \mathrm{A}_{j_{r-1} j}(z_{r-1});$$

soit la valeur 0, alors

$$\mathrm{A}_{i,j,0}(z) = \begin{cases} 1 & \text{quand } i = j, \\ 0 & \text{quand } i > j \text{ ou } i < j; \end{cases}$$

soit les valeurs négatives -1, -2, -3, ..., alors

$$\mathrm{A}_{i,j,-r}(z) = \sum^{1, \ldots, n} \mathrm{L}_{ij_1}(z)\, \mathrm{L}_{j_1 j_2}(z_{-1}) \ldots \mathrm{L}_{j_{r-1} j}(z_{-r+1}).$$

2. Théorème fondamental. Démonstration formelle.

Supposons que nous avons déjà résolu l'équation fonctionnelle

$$B(z_1) = h\,B(z), \qquad |h| < 1, \qquad z_1 = f(z).$$

Cet algorithme $B(z)$ nous permettra précisément de résoudre notre système d'équations, et cela au moyen du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si la fonction* $B(z)$ *satisfait à l'équation fonctionnelle*

$$B(z_1) = h\,B(z),$$

les fonctions

$$U_{ik}(z) = \frac{\displaystyle\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr} A_{ikr}(z)[B(z)]^{2r}}{\displaystyle\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}[B(z)]^{2r}} = \frac{\Xi_{ik}(z)}{\Xi(z)},$$

l étant une constante arbitraire,

$$i = 1, 2, \ldots, n, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

fournissent n solutions indépendantes de notre système d'équations fonctionnelles

$$U_i(z) = \sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}(z)\,U_j(z_1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

DÉMONSTRATION FORMELLE. — 1. *Discussion des numérateurs.* — Analysons l'expression

$$\Xi_{i,k}(z) = \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr} A_{ikr}(z)[B(z)]^{2r}. \tag{1}$$

Déterminons dans ce but l'expression

$$H_{i,k}(z) = \sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}(z)\,\Xi_{jk}(z_1) = \sum_{j=1,\ldots,n}^{r=-\infty+\ldots+\infty} h^{r^2+2lr} A_{ij}(z)\,A_{jkr}(z_1)[B(z_1)]^{2r}. \tag{2}$$

Puisque $B(z_1) = hB(z)$, nous en obtenons

$$(3)\qquad H_{i,k}(z) = \sum_{j=1,2,\ldots,n}^{r=-\infty+\ldots+\infty} h^{r^2+2lr}\,h^{2r}\,A_{ij}(z)\,A_{jkr}(z_1)\,[B(z)]^{2r}.$$

Cherchons la signification du terme

$$(4)\qquad \sum_{=1}^{j=n} A_{ij}(z)\,A_{jkr}(z_1).$$

La substitution de z_1 à z dans

$$U_i(z) = \sum_{j=1}^{j=n} A_{ijr}(z)\,U_j(z_r)$$

nous donne

$$(5)\qquad U_i(z_1) = \sum_{j=1}^{j=n} A_{ijr}(z_1)\,U_j(z_{r+1}),$$

qui, introduites dans

$$(6)\qquad U_i(z) = \sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}(z)\,U_j(z_1),$$

fournissent

$$(7)\qquad U_i(z) = \sum_{j,k}^{1,\ldots,n} A_{ij}(z)\,A_{jkr}(z_1)\,U_k(z_{r+1}).$$

D'autre part, nous avons aussi

$$U_i(z) = \sum_{k=1}^{k=n} A_{i,k,r+1}(z)\,U_k(z_{r+1}),$$

donc

$$(9)\qquad \sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}(z)\,A_{jkr}(z_1) = A_{i,k,r+1}(z).$$

La formule (3) est susceptible donc de prendre la forme

$$(10)\quad \begin{aligned} H_{i,k}(z) &= \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr} h^{2r} A_{i,k,r+1}(z)[B(z)]^{2r} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr+2r} A_{i,k,r+1}(z)[B(z)]^{2r} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{(r+1)^2+2l(r+1)} h^{-1-2l} A_{i,k,r+1}(z)[B(z)]^{2(r+1)}[B(z)]^{-2} \\ &= [B(z)]^{-2} h^{-1-2l} \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{(r+1)^2+2l(r+1)} A_{i,k,r+1}(z)[B(z)]^{2(r+1)} \\ &= [B(z)]^{-2} h^{-1-2l} \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr} A_{i,k,r}(z)[B(z)]^{2r}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$(11)\quad \begin{aligned} H_{ik}(z) &= [B(z)]^{-2} h^{-1-2l} \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr} A_{ikr}(z)[B(z)]^{2r} \\ &= [B(z)]^{-2} h^{-1-2l} \Xi_{ik}(z) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}(z)\,\Xi_{jk}(z_1) = H_{ik}(z) = [B(z)]^{-2} h^{-1-2l} \Xi_{ik}(z),$$

et en dernier lieu

$$(12)\quad \sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}(z)\,\Xi_{jk}(z_1) = [B(z)]^{-2} h^{-1-2l} \Xi_{ik}(z),$$

qui est la propriété fondamentale des numérateurs

$$\Xi_{ik}(z) \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, n).$$

2. *Discussion du dénominateur commun.* — Examinons l'expression

$$(13)\quad \Xi(z) = \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}[B(z)]^{2r},$$

qui nous donne

$$(14)\quad \Xi(z_1) = \sum^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}[B(z_1)]^{2r}$$

et

$$(15)\qquad \begin{aligned}\Xi(z_1) &= \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}[h\,\mathrm{B}(z)]^{2r}\\ &= \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr+2r}[\mathrm{B}(z)]^{2r}\\ &= \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{(r+1)^2+2l(r+1)}\,h^{-1-2l}[\mathrm{B}(z)]^{2(r+1)}[\mathrm{B}(z)]^{-2}\\ &= [\mathrm{B}(z)]^{-2}\,h^{-1-2l}\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{(r+1)^2+2l(r+1)}[\mathrm{B}(z)]^{2(r+1)}\\ &= [\mathrm{B}(z)]^{-2}\,h^{-1-2l}\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}[\mathrm{B}(z)]^{2r},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(16)\qquad \Xi(z_1) = [\mathrm{B}(z)]^{-2}\,h^{-1-2l}\,\Xi(z),$$

propriété fondamentale du commun dénominateur.

3. *Conclusions définitives et démonstration du théorème fondamental.* — Vu les formules (12) et (16)

$$\sum_{j=1}^{j=n} \mathrm{A}_{ij}(z)\,\Xi_{jk}(z_1) = [\mathrm{B}(z)]^{-2}h^{-1-2l}\,\Xi_{ik}(z), \qquad \Xi(z_1) = [\mathrm{B}(z)]^{-2}h^{-1-2l}\,\Xi(z),$$

nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{j=n} \mathrm{A}_{ij}(z)\frac{\Xi_{jk}(z_1)}{\Xi(z_1)} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{j=n}\mathrm{A}_{ij}(z)\,\Xi_{jk}(z_1)}{\Xi(z_1)} = \frac{[\mathrm{B}(z)]^{-2}\,h^{-1-2l}\,\Xi_{ik}(z)}{[\mathrm{B}(z)]^{-2}\,h^{-1-2l}\,\Xi(z)},$$

ou bien

$$\sum_{j=1}^{j=n} \mathrm{A}_{ij}(z)\frac{\Xi_{jk}(z_1)}{\Xi(z_1)} = \frac{\Xi_{ik}(z)}{\Xi(z)},$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} \mathrm{A}_{ij}(z)\,\mathrm{U}_{jk}(z_1) = \mathrm{U}_{ik}(z), \qquad \mathrm{U}_{ik}(z) = \sum_{j=1}^{j=n} \mathrm{A}_{ij}(z)\,\mathrm{U}_{jk}(z_1); \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

3. Discussion au point de vue de la théorie des fonctions du théorème fondamental. Problème de la convergence des séries intervenant dans le théorème fondamental.

1. *Convergence en un point arbitrairement choisi :* $z = \zeta$. — Admettons que pour une certaine valeur de $z = \zeta$ correspond une telle série de valeurs

$$\zeta \quad \begin{matrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \dots \\ \zeta_{-1} & \zeta_{-2} & \zeta_{-3} & \dots \end{matrix} \qquad \zeta_r = f_r(\zeta),$$

qu'aucun des nombres $A_{ij}(\zeta_r)$ ne soit infiniment grand, ni qu'aucun des nombres $A(\zeta_r)$ ne soit nul.

Remarque. — La première condition doit avoir lieu pour les valeurs $r = -\infty, \dots, -1, 0, +1, \dots, +\infty$, la seconde seulement pour $r = -\infty, \dots, -1$.

La première de ces conditions, eu égard à l'équation (2″), à l'article premier et aux remarques qui le précèdent, nous garantit que les expressions

$$A(\zeta_r), \quad d_{ij}(\zeta_r) \quad (r = -\infty, \dots, -1, 0, +1, \dots, +\infty)$$

sont finies; la seconde, que le même cas a lieu en ce qui concerne les expressions

$$\frac{d_{ij}(\zeta_r)}{A(\zeta_r)} \qquad (r = -\infty, \dots, -1);$$

ensemble donc elles nous donnent la garantie que les expressions

$$A_{ij}(z_r), \quad L_{ij}(z_{-r}) \qquad (r = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

sont finies.

Il en résulte l'existence d'un nombre $M(\zeta)$ différent évidemment pour chaque valeur ζ, tel que le plus grand des nombres $|A_{ij}(\zeta_r)|$, $|L_{ij}(\zeta_r)|$ sera au plus égal à $M(\zeta)$. Écrivons pour simplifier

$$M(\zeta) = M.$$

L'expression

$$\mathrm{A}_{ijr}(z) = \sum_{j_1 j_2, \ldots, j_{r-1} j}^{1, \ldots, n} \mathrm{A}_{ij_1}(z)\,\mathrm{A}_{j_1 j_2}(z_1)\,\mathrm{A}_{j_2 j_3}(z_2) \ldots \mathrm{A}_{j_{r-1} j}(z_{r-1}),$$

comprenant n^r termes, nous apprend que $|\mathrm{A}_{ijr}(z)| < (\mathrm{M}n)^r$, de même que l'expression

$$\mathrm{A}_{i,j,-r}(z) = \sum_{j_1, j_2, \ldots j_{r-1}, j}^{1, \ldots, n} \mathrm{L}_{ij_1}(z)\,\mathrm{L}_{j_1 j_2}(z_{-1})\,\mathrm{L}_{j_2 j_3}(z_{-2}) \ldots \mathrm{L}_{j_{r-1} j}(z_{-r+1})$$

contient la même quantité n^r de termes et sera

$$|\mathrm{A}_{i,j,-r}(z)| < (\mathrm{M}n)^r.$$

La série

$$\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}[\mathrm{B}(z)]^{2r}$$

du dénominateur est, ainsi que nous l'apprend l'analyse, convergente. En effet, faisant usage du premier critère de Cauchy dans les deux parties de cette série

$$\sum_{r=0}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}[\mathrm{B}(z)]^{2r} + \sum_{r=1}^{r=\infty} h^{r^2-2lr}[\mathrm{B}(z)]^{-2r},$$

nous obtenons de la première partie

$$\lim_{r=\infty} \sqrt[r]{|h|^{r^2+2lr}|\mathrm{B}(z)|^{2r}} = |\mathrm{B}(z)|^2 \lim_{r=\infty} |h|^{r+2l} = 0.$$

De la seconde

$$\lim_{r=\infty} \sqrt[r]{|h|^{r^2-2lr}|\mathrm{B}(z)|^{-2r}} = |\mathrm{B}(z)|^{-2} \lim_{r=\infty} |h^{r-2l}| = 0.$$

Au numérateur nous avons la série

$$\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}\mathrm{A}_{ijr}(z)\,[\mathrm{B}(z)]^{2r}$$

$$= \sum_{r=0}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}\mathrm{A}_{ijr}(z)\,[\mathrm{B}(z)]^{2r} + \sum_{r=1}^{r=\infty} h^{r^2-2lr}\mathrm{A}_{i,j,-r}(z)\,[\mathrm{B}(z)]^{-2r}.$$

Les termes de la première partie ont des valeurs absolues moindres que

$$|h|^{r^2+2/r}(\mathrm{M}n)^r\,|\mathrm{B}(z)|^{2r},$$

ceux de la seconde des valeurs moindres que

$$|h|^{r^2-2/r}(\mathrm{M}n)^r\,|\mathrm{B}(z)|^{-2r}.$$

Ces deux séries formées par les valeurs absolues de termes supérieurs à ceux des séries examinées sont convergentes, leur somme *eo ipso* le sera de même, donc la série du numérateur est absolument convergente.

2. *Convergence à l'intérieur d'un domaine défini dans le plan de la variable complexe.* — Supposons que la variable z prenne toutes les valeurs possibles remplissant d'une manière continue l'aire d'un certain champ fermé T_0; les éléments correspondants Z_r rempliront certaines diversités (*Mannigfaltigkeit*) $\mathrm{T}_r(r=-\infty, \ldots, +\infty)$.

Admettons que le champ fermé T_0, ainsi que les diversités

$$\ldots,\quad \mathrm{T}_{-3},\quad \mathrm{T}_{-2},\quad \mathrm{T}_{-1},\quad \mathrm{T}_0,\quad \mathrm{T}_{+1},\quad \mathrm{T}_{+2},\quad \mathrm{T}_{+3},\quad \ldots,$$

ne sortent point au delà d'un certain domaine fermé Θ. Ce fait est susceptible à notre imagination sur la sphère de Neumann.

Si, à l'intérieur du champ Θ, $\mathrm{A}_{ij}(z)$ est fini, et que $\mathrm{A}(z)$ diffère de zéro, il existe un tel nombre M dépendant évidemment de Θ, que

$$|\mathrm{A}_{ij}(z_r)|<\mathrm{M}(\theta),\qquad |\mathrm{L}_{ij}(z_r)|<\mathrm{M}(\theta).$$

Si cette condition n'était pas réalisée, nous décririons des cercles de rayons suffisamment petits autour des pôles des fonctions $\mathrm{A}_{ij}(z)$ situés à l'intérieur du champ Θ ainsi qu'autour des points zéros de la fonction $\mathrm{A}(z)$, de même qu'autour de toutes les itérations positives ou négatives à exposant entier de la base $f(z)$. Si nous désignons par ξ', ξ'', ... les points critiques de première espèce [pôles des fonctions $\mathrm{A}_{ij}(z)$], par η', η'', ... les points critiques de seconde espèce [points zéros de la fonction $\mathrm{A}(z)$], il nous faudra alors décrire des cercles de rayon ρ suffisamment petit, bien que fini, des points

$$\xi'_r,\quad \xi''_r,\quad \ldots;\quad \eta'_r,\quad \eta''_r,\quad \ldots \qquad (r=-\infty,\ \ldots,+\infty)$$

comme centre.

Si nous parvenons de la sorte à éliminer du champ θ *une certaine diversité* θ_1 *alors, à l'intérieur de cette dernière, notre condition serait remplie* (*réalisable*).

Si un point ζ appartient à la diversité θ_1, nous sommes alors en état de trouver un rayon R, tel que le cercle de ce rayon, décrit du point ζ comme centre, ne contient pas dans son étendue de points n'appartenant pas à la diversité θ_1, et que cela ne peut avoir lieu que tout au plus sur la circonférence. Si le rayon maximum correspondant R diffère de zéro, nous obtiendrons de cette façon un champ circulaire, continu, de convergence des expressions contenues dans le théorème fondamental. Si la valeur maximum R était zéro, le point ζ pourrait être un point singulier des expressions intervenant dans la formule fondamentale, et pour sûr il en serait un, si nous voulions développer ces expressions en séries ordonnées suivant les puissances entières positives de $(z-\zeta)$, ce que nous ne désirons pas ici, nous satisfaisant de la convergence absolue des développements de la formule fondamentale.

La seule difficulté qui résulterait en un tel point ζ de la supposition $R_{\max}=0$ consisterait dans l'impossibilité de décrire, du point ζ comme centre, un cercle de rayon fini limitant la convergence uniforme des séries intervenant dans le théorème fondamental.

Il nous faut observer de suite que la construction des champs de convergence continue des expressions du théorème fondamental est jointe à de grandes difficultés et, en général, n'est point encore résoluble avec les moyens dont la Science dispose actuellement, en ce qui concerne la convergence des itérations. La difficulté principale consiste en l'impossibilité de constater, *a priori*, s'il nous est possible de déduire d'un champ continu θ une diversité continue (*Mannigfaltigkeit*) par la méthode exposée d'exclusion de ce domaine, ou bien est-ce qu'une telle construction (un tel procédé) est impossible.

Dans le cas où nous nous contentons du postulat d'une convergence absolue des développements connus, c'est-à-dire dans le cas où nous n'exigeons pas leur convergence uniforme, nous pouvons utiliser de la manière suivante les propriétés connues de la fonction

$$B(z) = \operatorname{mod} B(z)\, e^{i \arg B(z)}.$$

Résolvons l'équation $A_{ij}(z) = \infty$ et désignons par ξ'_{ij}, ξ''_{ij}, ξ'''_{ij}, ... ses racines; de même désignons par η', η'', η''', ... les points correspondant aux solutions de l'équation $A(z) = 0$.

Résolvons l'équation fonctionnelle

$$B f(z) = h B(z)$$

en admettant pour h une valeur réelle, positive, moindre que l'unité. Traçons les courbes

$$\begin{aligned}
&\arg B(z) = \arg B(\xi'_{ij}),\\
&\arg B(z) = \arg B(\xi''_{ij}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\arg B(z) = \arg B(\eta'),\\
&\arg B(z) = \arg B(\eta''),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Comme nous obtenons la formule

$$B f(z) = h B(z),$$
$$B f_n(z) = h^n B(z) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

donc puisque h est réel

$$\arg B f_n(z) = \arg B(z),$$

et si le point z n'appartient à aucune des courbes définies plus haut, nous n'aurons, pour aucune valeur entière de n,

$$f_n(z) = \xi \qquad \text{ou} \qquad f_n(z) = \eta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots);$$

donc $A_{ij}(z_n)$, $A(z_n)$ seront finis

Ces courbes, passant par les points ξ'_{ij}, ξ''_{ij}, ..., η', η'', ..., et par toutes leurs itérations à exposants entiers, diviseront le plan numéral, ou bien une certaine partie de ce plan, en rubans curvilignes ne contenant plus de points critiques de l'espèce ξ ni de l'espèce η. Si ces courbes ne se succèdent pas à des distances infiniment petites, il est possible de trouver une certaine quantité de tels rubans, que nous pourrons inscrire en leur intérieur des cercles à rayons finis. L'aire d'un tel cercle constituera un champ continu du plan numéral possédant la propriété que pour chaque point ζ de cette aire nous avons la certitude que

$$\left.\begin{array}{l} |A_{ij}(z_r)| \\ |A(z_r)|^{-1} \end{array}\right\} < \text{qu'un certain nombre fini } \mathbf{H}.$$

Ce nombre H peut croître infiniment seulement en même temps que le rayon r du cercle au centre au point ζ croît jusqu'au contact avec la plus proche des courbes que nous venons de définir,

$$\arg B(z) = \arg B(\xi),$$

ou bien

$$\arg B(z) = \arg B(\eta).$$

Ce champ sera aussi *eo ipso* un des champs continus, de convergence absolue, des développements intervenant dans le théorème fondamental.

Lorsque les fonctions $A_{ij}(z)$ et ce qui s'ensuit de la fonction $A(z)$ sont des fonctions algébriques de la variable z, alors les équations $A_{ij}(z) = \infty$, ainsi que $A(z) = 0$, ont une quantité finie de solutions ξ_{ij} et η; cette éventualité est *eo ipso* assurée.

Lorsque $f(z) = az$, la fonction $B(z) = z^b$ résout l'équation fonctionnelle

$$B(z_1) = h\,B(z), \qquad a^b = h,$$

car alors effectivement

$$B(z_1) = (az)^b = a^b z^b = hz^b = h\,B(z). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si nous avons aux points $\xi'_{ij}, \xi''_{ij}, \ldots; \eta', \eta'', \ldots,$

$$|\xi| = R(\xi), \qquad \arg(\xi) = \varphi(\xi), \qquad |\eta| = R(\eta), \qquad \arg(\eta) = \varphi(\eta),$$
$$|z| = R, \qquad \arg(z) = \varphi,$$

explicitement

$$\xi = R(\xi)\, e^{i\varphi(\xi)}, \qquad \eta = R(\eta)\, e^{i\varphi(\eta)}, \qquad z = R\, e^{\varphi i},$$
$$\xi = \xi'_{ij},\ \xi''_{ij},\ \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\eta = \eta',\ \eta'',\ \ldots, \qquad b = a_1 + a_2 i,$$
$$B(z) = z^b = (R\, e^{\varphi i})^{a_1 + a_2 i} = (R^{a_1} e^{-a_2\varphi})\, e^{(a_2 \log R + a_1 \varphi) i},$$

les courbes cherchées adopteront la forme

$$a_2 \log R + a_1 \varphi = a_2 \log R(\xi) + a_1 \varphi(\xi), \qquad \xi = \xi'_{ij},\ \xi''_{ij},\ \ldots,$$
$$a_2 \log R + a_1 \varphi = a_2 \log R(\eta) + a_1 \varphi(\eta), \qquad \eta = \eta',\ \eta'',\ \ldots.$$

Ce seront des spirales logarithmiques passant par les points

$$\xi'_{ij},\quad \xi''_{ij},\quad \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n), \qquad \eta',\quad \eta'',\quad \ldots.$$

S'il existe une quantité finie de points $\xi'_{ij}, \xi''_{ij}, \ldots; \eta', \eta'', \ldots$, ce qui est possible, par exemple, avec des fonctions algébriques pour $A_{ij}(z)$, $A(z)$, ou bien dans le cas que ces points composent une diversité (*Mannigfaltigkeit*) discontinue, ce qui de nouveau a lieu dans le cas des fonctions transcendantes connues (fonctions analytiques), sauf certaines fonctions transcendantes singulières, les courbes obtenues ferment une certaine quantité de rubans curvilignes examinés plus haut.

Dans le cas que la fonction

$$f(z) = a z^b,$$

où b est un nombre réel, positif, supérieur de l'unité et que les fonctions $A_{ij}(z) A^{-1}(z)$ ne possèdent pas de pôles à l'intérieur du champ $|z| < 1$, dans ce cas, sans aucune discussion, l'aire $|z| < 1$ constitue le champ de convergence, aussi bien absolue que continue, des développements du théorème fondamental.

4. Rôle de l'indice arbitraire k dans le théorème fondamental. Construction des solutions.

1. *Déterminant de la matrice de systèmes de n solutions générales.* — Analysons maintenant le rôle que jouent les indices k dans les expres-

sions

$$U_{ik}(z)=\frac{\sum\limits_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}\,A_{ikr}(z)\,[B(z)]^{2r}}{\sum\limits_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}\,[B(z)]^{2r}},$$

$$|U_{ik}(z)|=\sum \pm U_{11}(z)\,U_{22}(z)\,U_{33}(z)\ldots U_{nn}(z).$$

Le déterminant $|U_{ik}(z)|$ diffère de zéro.

Dans le cas contraire, on peut trouver de telles expressions $E_k(z)$ que

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} E_k(z)\,U_{ik}(z)=0 \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

mais cette somme a la valeur

$$\frac{\sum\limits_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}[B(z)]^{2r}\sum\limits_{k=1}^{k=n} A_{ikr}(z)\,E_k(z)}{\sum\limits_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}[B(z)]^{2r}}.$$

D'autre part, nous savons que les déterminants

$$|A_{ik}(z)|,\quad |L_{ik}(z)|$$

diffèrent de zéro, et que des équations

$$A_{i,k,1}(z)=A_{i,k}(z) \qquad A_{i,k,-1}(z)=L_{i,k}(z)$$

$$A_{i,k,2}(z)=\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} A_{i,\sigma,1}(z)\,A_{\sigma,k}(z_1) \qquad A_{i,k,-2}(z)=\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} A_{i,\sigma,-1}(z)\,L_{\sigma,k}(z_{-1})$$

$$A_{i,k,3}(z)=\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} A_{i,\sigma,2}(z)\,A_{\sigma,k}(z_2) \qquad A_{i,k,-3}(z)=\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} A_{i,\sigma,-2}(z)\,L_{\sigma,k}(z_{-2})$$

$$A_{i,k,4}(z)=\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} A_{i,\sigma,3}(z)\,A_{\sigma,k}(z_3) \qquad A_{i,k,-4}(z)=\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} A_{i,\sigma,-3}(z)\,L_{\sigma,k}(z_{-3})$$

découlent les relations entre déterminants

$$\begin{aligned}|A_{i,k,r}(z)| &= |A_{ij}(z)|\,|A_{ij}(z_1)|\,|A_{ij}(z_2)|\ldots|A_{ij}(z_{r-1})|,\\ |A_{i,k,-r}(z)| &= |L_{ij}(z)|\,|L_{ij}(z_{-1})|\,|L_{ij}(z_{-2})|\ldots|L_{ij}(z_{-r+1})|.\end{aligned}$$

Le déterminant $|A_{i,k,r}(z)|$ ne peut pas donc identiquement disparaître; donc toutes les expressions

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_{ikr}(z)\,E_k(z) \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ r=-\infty, \ldots, +\infty)$$

ne peuvent disparaître simultanément, de quoi découle en dernier lieu que tous les termes

$$\sum_{k=1}^{k=n} E_k(z)\,U_{ik}(z)$$

ne peuvent s'annuler simultanément.

La matrice obtenue de n solutions est donc complète, c'est-à-dire nous fournit la possibilité de la déduction d'un système général de n solutions.

2. *Loi fondamentale :*

Théorème. — *Afin de construire une solution complète et générale du système de n équations fonctionnelles, linéaires,*

$$U_i(z) = \sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}(z)\,U_j(z_1) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

nous lui ajoutons le système réciproque

$$U_i(z_1) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{d_{ji}(z)}{A(z)}\,U_j(z) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

dans lequel $A(z)$ *représente le déterminant*

$$|A_{ij}(z)| = \sum \pm A_{11}(z)\,A_{22}(z)\ldots A_{nn}(z),$$

$d_{ji}(z)$ *le mineur du membre* $A_{ji}(z)$; *dans ce déterminant l'introduction*

$$L_{ij}(z) = \frac{d_{ji}(z_{-1})}{A(z_{-1})}$$

nous permet d'écrire le système réciproque sous la forme

$$U_i(z) = \sum_{j=1}^{j=n} L_{ij}(z)\, U_j(z_{-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Puis nous formons les deux tables de formules

$$A_{i,j,0}(z) = \begin{cases} 1, & \text{quand } i = j, \\ 0, & \text{quand } i > j \text{ ou } i < j, \end{cases} \qquad A_{i,j,1}(z) = A_{ij}(z), \quad A_{i,j,-1}(z) = L_{ij}(z),$$

$$A_{i,j,+r}(z) = \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-1}}^{1,\ldots,n} A_{i,\sigma_1}(z) A_{\sigma_1,\sigma_2}(z_1)\, A_{\sigma_2,\sigma_3}(z_2) \ldots A_{\sigma_{r-2},\sigma_{r-1}}(z_{r-2})\, A_{\sigma_{r-1}j}(z_{r-1}),$$

$$A_{i,j,-r}(z) = \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-1}}^{1,\ldots,n} L_{i,\sigma_1}(z)\, L_{\sigma_1,\sigma_2}(z_{-1}) L_{\sigma_2,\sigma_3}(z_{-2}) \ldots L_{\sigma_{r-2},\sigma_{r-1}}(z_{-r+2})\, L_{\sigma_{r-1}j}(z_{-r+1}).$$

Nous introduisons n fonctions automorphes envers le groupe d'itérations à exposant entier de la fonction $f(z)$, *choisies de la façon la plus arbitraire,*

$$C_1(z), \quad C_2(z), \quad C_3(z), \quad \ldots, \quad C_n(z).$$

Enfin nous introduisons la fonction $B(z)$ *assujettie à la condition*

$$B(z_1) = h\,B(z) \qquad (0 < |h| < 1).$$

Nous obtenons la solution complète cherchée sous la forme

$$U_i(z) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\sum\limits_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr} A_{ijr}(z)\, [B(z)]^{2r}}{\sum\limits_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr} [B(z)]^{2r}}\, C_j(z);$$

l est une quantité arbitraire.

5. Discussion de la loi fondamentale, envisagée du point de vue de la théorie des fonctions. Problème des points singuliers.

Le théorème fondamental nous a fourni une série de fonctions transcendantes résolvant le système d'équations fonctionnelles donné. Après avoir constaté la convergence des développements trouvés, la discussion au point de vue de la théorie des fonctions des solutions obtenues s'impose en première place, savoir la recherche :

1° Des points zéros;
2° Des points non essentiellement singuliers;
3° Des points essentiellement singuliers;
4° Des points de ramification (*Verzweigungspunkte*), c'est-à-dire de points déterminant un changement de valeur des fonctions du théorème fondamental, lorsque la variable z tourne autour d'eux.

1. Le premier de ces problèmes concernant les fonctions

$$U_{ij}(z) = \frac{\sum\limits_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr} A_{ijr}(z)\,[B(z)]^{2r}}{\sum\limits_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}[B(z)]^{2r}}$$

est, avec les moyens dont nous disposons à cette heure, irrésoluble.

Il n'existe pas de points zéros dépendant de

$$\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}\,[B(z)]^{2r} = \infty,$$

car une telle relation est impossible, autre part qu'aux points essentiellement singuliers des numérateurs comme du dénominateur, compris dans les formules

$$B(z) = 0 \qquad \text{ou bien} \qquad B(z) = \infty.$$

Il faut donc rechercher de tels points de l'équation

$$\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr} A_{ijr}(z)[B(z)]^{2r} = 0.$$

Mais nous ne savons pas résoudre une telle équation dans le cas général de fonctions $A_{ij}(z)$, $f(z)$ arbitraires.

2. Nous sommes, par contre, à même de résoudre complètement le second problème, sous la condition d'une certaine extension du concept de la singularité non essentielle, concernant de tels points de la fonction $U_i(z)$. Analysons l'équation

$$\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr} A_{ijr}(z)[B(z)]^{2r} = \infty.$$

Il est facile de remarquer que cette équation peut avoir lieu, par exemple, dans le cas de la divergence de la série du côté gauche. Cette dernière cependant est exclue lorsque

$$A_{ij}(z_m) \qquad (m = -\infty, \ldots, +\infty)$$

est fini, de même que

$$A^{-1}(z_m) \qquad (m = -\infty, \ldots, -1).$$

L'éventualité discutée est possible seulement lorsque $A_{ij}(\zeta_m) = \infty$, ou bien $A(\eta_m) = 0$, pour au moins un des indices

$$\left.\begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}\right\} \qquad m = -\infty, \ldots, +\infty, \qquad \text{resp.} \qquad m = -\infty, \ldots, -1.$$

3. *Construction d'un facteur complémentaire.* — Supposons que, dans la série de valeurs $\zeta_{-\infty}, \ldots, \zeta_{+\infty}$, nous n'avons que des points non essentiellement singuliers $\zeta_{\mu_1}, \ldots, \zeta_{\mu_r}$ des fonctions $A_{ij}(z)$; comprenant cette singularité non essentielle de la manière généralisée suivante, que nous admettons l'existence d'une telle fonction préalablement choisie

$$R_1(z) = p_1(z - \zeta_{\mu_1}) p_2(z - \zeta_{\mu_2}) \ldots p_r(z - \zeta_{\mu_r}),$$

produit des facteurs de la forme $p(z-\zeta_\mu)$ disparaissant tour à tour aux points $\zeta_{\mu_1}, \ldots, \zeta_{\mu_r}$, mais, outre cela, en aucun autre point de la série $\zeta_{-\infty}, \ldots, \zeta_{+\infty}$, et qui sont finis en tous ces points. Cette fonction $R_1(z)$ jouit de la propriété que les produits $R_1(z)A_{ij}(z)$ seront finis en tout point de la série $\zeta_{-\infty}, \ldots, \zeta_{+\infty}$ et surtout que les nombres

$$R_1(\zeta_\mu)A_{ij}(\zeta_\mu)$$

correspondant aux équations $A_{ij}(z_\mu)=\infty$ différeront de zéro.

Nous admettons de même que, parmi les valeurs $\zeta_{-\infty}, \ldots, \zeta_{-1}$, nous n'avons que des points non essentiellement singuliers $\zeta_{\nu_1}, \ldots, \zeta_{\nu_\rho}$ de la fonction $A^{-1}(z)$ comprenant d'une manière analogue que plus haut cette singularité non essentielle, c'est-à-dire nous admettons l'existence d'un facteur

$$R_2(z)=q_1(z-\zeta_{\nu_1})\ldots q_\rho(z-\zeta_{\nu_\rho}),$$

jouant le même rôle envers la fonction $A^{-1}(z)$ que le facteur $R_1(z)$ envers la fonction $A_{ij}(z)$.

Remarque. — Nous adoptons d'une manière générale le facteur qui nous donne $p(\zeta)=0$ au lieu de $(z-\zeta)^\alpha$, par exemple, pour ne pas trop limiter le libre choix des fonctions $A_{ij}(z)$, ce qui nous semble d'autant plus indiqué que nous ne pouvons pas, jusqu'à maintenant, envisager la fonction $B(z)$ comme appartenant au groupe de fonctions nommées *analytiques*. Nous nous résignons donc d'intégrales analytiques et nous nous contentons de solutions calculables; c'est pourquoi nous rejetons toutes les restrictions qui, n'étant pas utiles, ne sont point indispensables.

Écrivons maintenant

$$\overline{U}_i(z)=R_1^{n-1}(z_{\mu_1})\ldots R_1^{n-1}(z_{\mu_r})R_2(z_{\nu_1})\ldots R_2(z_{\nu_\rho})\dot{U}_j(z)$$
$$=\frac{\displaystyle\sum_{\sigma=-\infty}^{\sigma=+\infty} R_1^{n-1}(z_{\mu_1})\ldots R_1^{n-1}(z_{\mu_r})R_2(z_{\nu_1})\ldots R_2(z_{\nu_\rho})h^{\sigma^2+2l\sigma}A_{ij\sigma}(z)[B(z)]^{2\sigma}}{\displaystyle\sum_{\sigma=-\infty}^{\sigma=+\infty} h^{\sigma^2+2l\sigma}[B(z)]^{2\sigma}}.$$

En vertu de

$$A_{i,j,+\sigma} = \sum_{j_1,\dots,j_{\sigma-1}}^{1,\dots,n} A_{ij_1}(z) A_{j_1j_2}(z_1) \dots A_{j_{\sigma-1}j}(z_{\sigma-1}),$$

nous voyons que lorsque $z = \zeta$ l'expression

$$R_1^{n-1}(\zeta_{\mu_1}) \dots R_2(\zeta_{\nu_1}) \dots A_{ij\sigma}(z)$$

s'annulera, car une certaine quantité de facteurs $R_1(z)$ constitueront avec des facteurs respectifs des termes de la somme $A_{ij\sigma}(z)$ des produits finis, tandis que les autres s'annuleront.

Comme

$$A_{i,j,-\sigma}(z) = \sum_{j_1,\dots,j_{\sigma-1}} \frac{d_{j_1 i}(z_{-1}) \dots d_{jj_{\sigma-1}}(z_{-\sigma})}{A(z_{-1}) \dots A(z_{-\sigma})},$$

et comme $d_{\alpha,\beta}(z)$ est le mineur de l'élément $A_{\alpha\beta}(z)$ de la matrice

$$\begin{matrix} A_{11}(z), & \dots, & A_{1n}(z), \\ \dots\dots, & \dots, & \dots\dots, \\ A_{n1}(z), & \dots, & A_{nn}(z), \end{matrix}$$

c'est-à-dire la somme de produits de $(n-1)$ de ces éléments, nous voyons que ce n'est qu'après l'introduction du facteur $R_1^{n-1}(z)$ que nous possédons la garantie d'une valeur soit nulle, soit finie du produit $R_1^{n-1}(z) d_{\alpha\beta}(z)$ en un point singulier.

Donc, lorsque $z = \zeta$, le produit

$$R_1^{n-1}(\zeta_{\mu_1}) \dots R_1^{n-1}(\zeta_{\mu_r}) R_2(\zeta_{\nu_1}) \dots R_2(\zeta_{\nu_\rho}) A_{i,j,-\sigma}(\zeta)$$

sera soit fini, soit s'annulera. Comme les facteurs infinis dépendant de $A_{ij}(\zeta_\mu) = \infty$ forment avec des facteurs respectifs du produit $R_1^{n-1}(\zeta_{\mu_1}) \dots R_r^{n-1}(\zeta_{\mu_r})$ des valeurs soit finies, soit nulles, et que de même les facteurs infiniment grands dérivant de $A(\zeta_\nu) = 0$ se compensent avec les facteurs infiniment petits du produit $R_2(\zeta_{\nu_1}) \dots R_2(\zeta_{\nu_\rho})$, nous voyons donc que l'expression

$$R_1^{n-1}(z_{\mu_1}) \dots R_1^{n-1}(z_{\mu_r}) R_2(z_{\nu_1}) \dots R_2(z_{\nu_\rho}) \sum_{\sigma=-\infty}^{\sigma=+\infty} A_{ij\sigma}(z)\, h^{\sigma^2+2l\sigma} [B(z)]^{2r}$$

sera pour sûr, au point $z = \zeta$, soit finie, soit nulle. Le point ζ ne sera donc pas un point essentiellement singulier de la fonction $U_i(z)$, car le produit

$$\overline{U_i}(z) = R_1^{n-1}(z_{\mu_1}) \ldots R_1^{n-1}(z_{\mu_r}) R_2(z_{\nu_1}) \ldots R_2(z_{\nu_2}) U_i(z)$$

sera, au point $z = \zeta$, soit fini, soit nul.

Ce qui nous donne le théorème :

L'ensemble des lieux non essentiellement singuliers des fonctions

$$U_i(z) = \frac{\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr} A_{ijr}(z)[B(z)]^{2r}}{\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}[B(z)]^{2r}}$$

se compose de trois catégories de points qu'on peut dénombrer de la manière suivante :

a. Les racines de l'équation

$$\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}[B(z)]^{2r} = 0.$$

Nous ne savons rien d'autre sur ces points, sinon qu'ils sont les racines de l'équation

$$B(z) = \delta_{ij} \qquad (i = -\infty, \ldots, +\infty; j = -\infty, \ldots, +\infty),$$

dans laquelle de nouveau δ_i est une des racines en nombre infini de l'équation

$$\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} h^{r^2+2lr}\delta^{2r} = 0.$$

Nous ne développerons pas le calcul des valeurs δ_{ij}, connu du reste de la théorie des fonctions elliptiques θ, et représenté sous la forme

$$\delta_{ij} = AB^i C^j \qquad (i = -\infty, \ldots, +\infty; j = -\infty, \ldots, +\infty).$$

Nous nous bornons à signaler que le point ξ défini par $B(\xi) = \delta_{ij}$

est d'autant *non essentiellement singulier* envers la fonction $U_i(z)$ que, outre $U_i(\xi) = \infty$, nous avons en un tel point

$$z = \xi \lim_{z=\zeta} [B(z) - \delta_{ij}] U_i(z)$$

finie, différente de zéro.

Nous disposons, dans ce cas, du facteur complémentaire $B(z) - \delta_{ij}$.

b. Tous les nombres ζ *choisis de sorte que le déterminant*

$$A(\xi_\nu) = \begin{vmatrix} A_{11}(\zeta_\nu) & \dots & A_{1n}(\zeta_\nu) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ A_{n1}(\zeta_\nu) & \dots & A_{nn}(\zeta_\nu) \end{vmatrix}$$

soit nul pour certaines valeurs finies, négatives (entières), des indices $\nu_1, \dots, \nu_\rho$ *sous la condition cependant de l'existence d'un facteur complémentaire de la fonction* $A^{-1}(z)$ *de forme*

$$R_2(z) = q_1(z - \zeta_{\nu_1}) \dots q_\rho(z - \zeta_{\nu_\rho}),$$

c'est-à-dire d'un facteur s'annulant aux points $\zeta_{\nu_1}, \dots, \zeta_{\nu_\rho}$, mais fini et différent de zéro en tout autre point de la série $\zeta_{-\infty}, \dots, \zeta_{+\infty}$.

Ce facteur complémentaire $R_2(z)$ nous garantit en même temps que le produit $R_2(z) A^{-1}(z)$ aura une valeur finie en tout point de la série $\zeta_{-\infty}, \dots, \zeta_{+\infty}$ sans excepter les points $\zeta_{\nu_1}, \dots, \zeta_{\nu_\rho}$.

Le facteur complémentaire des intégrales $U_i(z)$ *est donc, au point singulier* ζ,

$$R(z) = R_2(z) = q_1(z - \zeta_{\nu_1}) \dots q_\rho(z - \zeta_{\nu_\rho}).$$

c. Tous les nombres ζ *choisis de sorte que, parmi les éléments*

$$A_{ij}(\zeta_\nu) \qquad (i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n;\ \nu = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r),$$

quelques-uns deviennent infinis, mais seulement lorsque l'exposant r *a une valeur finie et encore sous la condition de l'existence d'un facteur* $R_1(z)$ *de la forme*

$$R_1(z) = p_1(z - \zeta_{\mu_1}) \dots p_r(z - \zeta_{\mu_r}),$$

s'annulant aux points $\zeta_{\nu_1}, \dots, \zeta_{\nu_r}$, *de la série* $\zeta_{-\infty}, \dots, \zeta_{+\infty}$, *fini aux* *autres points, qui nous donne la certitude que les produits* $R_1(z)A_{ij}(z)$ *sont finis en tous ces points.*

Le facteur complémentaire au point singulier ζ *de l'intégrale* $U_i(z)$ *est donc*

$$R(z) = R_1^{n-1}(z) = p_1^{n-1}(z-\zeta_{\mu_1}) \dots p_r^{n-1}(z-\zeta_{\mu_r}).$$

d. Tous les nombres ζ *choisis de sorte que pour certaines valeurs finies entières, négatives, des indices de* $\zeta_{\nu_1}, \dots, \zeta_{\nu_\rho}$, *la condition indiquée sous b soit remplie, le facteur complémentaire* $R_2(z)$ *est de la forme*

$$R_2(z) = q_1(z-\zeta_{\nu_1}) \dots q_\rho(z-\zeta_{\nu_\rho}),$$

et que pour les indices de $\zeta_{\mu_1}, \dots, \zeta_{\mu_r}$ *la condition indiquée sous c soit remplie, le facteur complémentaire est*

$$R_1(z) = p_1(z-\zeta_{\mu_1}) \dots p_r(z-\zeta_{\mu_r}).$$

Le facteur complémentaire des intégrales $U_i(z)$ *en un point non essentiellement singulier* ζ *est donc de la forme*

$$R(z) = R_1^{n-1}(z)\,R_2(z),$$
$$R(z) = p_1^{n-1}(z-\zeta_{\mu_1}) \dots p_r^{n-1}(z-\zeta_{\mu_r})\,q_1(z-\zeta_{\nu_1}) \dots q_\rho(z-\zeta_{\nu_\rho}).$$

3. Le troisième problème concernant les points essentiellement singuliers des fonctions $U_i(z)$ est résolu par :

1° Les points zéros de la fonction $B(z)$;

2° Les points essentiellement singuliers des fonctions $A_{ij}(z)$.

Le calcul itéraire nous apprend qu'à la première catégorie appartiennent les racines des équations du type $f_M(z) = f_N(z)$ (M et N nombres entiers).

4. Le quatrième problème concernant les points de ramification des fonctions $U_{ij}(z)$ est résolu par :

1° Les points de ramification de la fonction fondamentale $f(z)$;

2° Les points de ramification des fonctions $A_{ij}(z)$;

3° Les points de ramification de la fonction $B(z)$.

Ces derniers points, dans le cas où ils ne peuvent être envisagés comme appartenant à la catégorie 1°, sont encore inaccessibles aux investigations analytiques.