LUDOVIC ZORETTI

La notion de ligne

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 26 (1909), p. 485-497
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__485_0>

LA NOTION DE LIGNE;

PAR M. LUDOVIC ZORETTI,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE.

1. Je voudrais étudier brièvement les rapports qui existent entre les deux définitions de la *ligne* que nous devons à M. Cantor et à M. Jordan. Dans les applications, c'est tantôt l'une, tantôt l'autre des deux notions qui intervient; tel problème, simple quand on a adopté une des définitions, devient beaucoup plus compliqué avec l'autre définition (1). La question que je me propose d'étudier présente donc un double intérêt : intérêt intrinsèque et applications possibles.

On connait sur ce sujet les nombreux travaux de M. Schœnflies, et je m'empresse de dire que le présent Mémoire ne va pas plus loin dans la précision des résultats que ceux de M. Schœnflies. Je crois cependant qu'il y a assez de différences dans les énoncés, et dans la façon même de poser la question, pour pouvoir le publier. Quant à la méthode, elle diffère essentiellement de celles de M. Schœnflies; elle est surtout moins géométrique.

Je reprends d'abord les deux définitions en me bornant, pour préciser, au cas de deux dimensions. Pour M. Jordan, une ligne est l'ensemble des points dont les coordonnées sont

$$x = f(t),$$
$$y = \varphi(t),$$

(1) Par exemple, les travaux de M. Painlevé sur le prolongement analytique au delà d'une coupure s'appliquent à des lignes de M. Jordan; le cas d'une ligne cantorienne n'a pas encore été résolu.

f et φ étant deux fonctions continues de t, et cette variable, t, prenant, par exemple, toutes les valeurs de 0 à 1.

M. Cantor définit, au contraire, un ensemble parfait *bien enchaîné*, c'est-à-dire tel que, entre deux quelconques de ses points, on puisse établir une chaîne dont les sommets sont tous des points de l'ensemble et dont les chaînons sont tous inférieurs à ε, quel que soit ε. Un ensemble parfait bien enchaîné est dit *continu;* il est *superficiel* ou *linéaire* suivant qu'il renferme ou non des points intérieurs (c'est-à-dire dont tout un certain entourage appartient à l'ensemble). C'est l'ensemble continu linéaire qui est la *ligne cantorienne.*

Y a-t-il identité entre les deux définitions? Toute ligne cantorienne est-elle une ligne de M. Jordan et inversement? La réponse est négative. Chacune des définitions est en même temps plus et moins générale que l'autre. Il y a, par exemple, des courbes de M. Jordan (courbes de Peano) qui ne sont pas des continus *linéaires*. Et, au contraire, on entrevoit la possibilité de compliquer tellement une ligne de M. Cantor qu'il paraisse difficile de cheminer dessus au moyen de fonctions continues : prenons, par exemple, deux ensembles parfaits non denses sur les deux segments 0-1 de l'axe des x et de l'axe des y. En chacun de leurs points, élevons une perpendiculaire à chacun des axes, de longueur 1 par exemple; nous obtenons une ligne de M. Cantor. Est-ce une ligne de M. Jordan? Je n'en sais rien, mais c'est bien invraisemblable à première vue. Un exemple plus simple est fourni par la courbe $y = \sin\frac{1}{x}$ que l'on complète par ses points limites.

2. Voici donc la question que nous devons nous poser d'après ce qui précède : *Que faut-il ajouter à chacune des deux définitions pour que les deux définitions nouvelles définissent les mêmes êtres?* Une solution évidente de ce problème consiste à ajouter à chacune des définitions les termes de l'autre; mais cela n'ajouterait pas grand'-chose à notre connaissance du continu et cela ne nous serait d'aucun secours dans les applications. Je me propose, au contraire, sans résoudre entièrement la question précédente, de chercher l'équivalent en langage cantorien de la notion de la ligne *simple* ou sans points multiples de M. Jordan. J'indique ensuite quelles autres questions

on pourra encore se poser. J'étudie enfin la frontière d'un continuum et je montre que c'est en général une ligne au sens de M. Jordan.

Je dis *en général* seulement, car une restriction apparaîtra dans la démonstration qui remplace l'*allseitige Erreichbarkeit* de M. Schœnflies. Cette restriction est nécessaire ([1]), mais je la formule d'une façon bien différente de celle de M. Schœnflies.

Ensemble continu irréductible.

3. Soient un ensemble continu E, a et b deux points de l'ensemble. Je dirai que *cet ensemble est* IRRÉDUCTIBLE *entre* a *et* b *s'il n'existe aucune portion continue de* E *qui contienne* a *et* b. Par exemple, un arc de cercle, un segment de droite, une ligne brisée ne se coupant pas elle-même, sont des continus irréductibles entre leurs extrémités. Un ensemble continu superficiel n'est jamais irréductible entre deux de ses points ([2]). Donc les ensembles irréductibles sont des lignes cantoriennes.

Considérons une ligne de Jordan définie par les équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t);$$

supposons qu'elle ne couvre pas une aire, et cherchons à quelles conditions c'est un continu irréductible. Il faut d'abord qu'elle n'ait pas de point double (car, si un point double correspond aux valeurs t_0, t_1, il suffira d'enlever tous les points qui répondent aux valeurs de t entre t_0 et t_1 pour avoir un continu contenant a et b); il faut encore qu'elle ne dépasse pas a et b, c'est-à-dire que nous ne gardions que les valeurs de t comprises entre celles qui correspondent aux points a et b. Ces conditions sont suffisantes. Soit, en effet, une ligne répondant à ces conditions, et supposons que a et b correspondent à $t = 0$, $t = 1$. Essayons de supprimer des points de la ligne de façon à avoir un continu et montrons que c'est impossible. Si nous voulons enlever

---

([1]) *Voir*, par exemple, H. LEBESGUE, *Palermo Rendiconti*, t. XXIV.

([2]) Car si m est un point intérieur différent de a et b, en enlevant les points intérieurs à un petit cercle de centre m, on obtient un ensemble continu qui contient encore a et b.

un point m répondant à la valeur t_0, il est nécessaire d'enlever aussi les points voisins, sans quoi l'ensemble restant ne serait pas fermé. Certains de ces points voisins répondent à des valeurs de t voisines de t_0 (peut-être pas tous). Excluons donc les points répondant aux valeurs de t comprises entre $t_0 - \alpha$ et $t_0 + \beta$, en gardant ceux qui correspondent aux valeurs $t_0 - \alpha$ et $t_0 + \beta$. Je dis que l'ensemble restant n'est pas continu. En effet, l'ensemble qui correspond aux valeurs $0 \leqq t \leqq t_0 - \alpha$ est un continu; de même, l'ensemble qui correspond aux valeurs $t_0 + \beta \leqq t \leqq 1$. Or, pour que la réunion de deux continus donne un continu, il faut et il suffit qu'ils aient un point commun [1]; il faudrait donc que la ligne ait des points multiples, ce que nous ne supposons pas. D'où ce résultat :

Toute ligne simple non fermée, au sens de M. Jordan, est un continu irréductible entre ses extrémités.

Je vais montrer que, moyennant une réserve, la réciproque est vraie, et nous en conclurons qu'*il y a à peu près identité entre les deux notions de ligne simple de M. Jordan et de continu irréductible.*

4. Je démontrerai d'abord les lemmes suivants :

1° *Un continu irréductible est l'ensemble limite d'une ligne de Jordan.*

Soit C un continu irréductible entre a et b. Considérons l'ensemble des points du plan qui sont à une distance de C inférieure à ε. C'est un continuum. Considérons une ligne allant de a et b sans sortir de ce domaine. On peut, évidemment, choisir pour cette ligne une ligne simple de M. Jordan; on peut même prendre une ligne brisée inscrite dans C. Soit L_ε une telle ligne. Faisons tendre ε vers 0. Nous obtenons un ensemble de lignes L. Je dis que l'ensemble limite est C. En effet, d'abord l'ensemble limite est continu et contient a et b d'après un théorème connu. Je dis que tout point limite appartient à C. Soit, en effet, m un point limite. On peut déterminer ε de façon que l'écart de m à la ligne L_ε soit inférieur à un nombre donné η, sinon pour *toutes* les valeurs de ε inférieures à l'une d'elles, au moins pour une

(1) Cela exige, bien entendu, que la ligne ne soit pas fermée.

infinité d'entre elles tendant vers zéro. Cet écart est la distance de m à un certain point p de L_ε, et ce point est à une distance de C inférieure à ε. Or, l'écart de m à C est inférieur à la somme de la distance de m à p et de l'écart de p à C, c'est-à-dire à $\varepsilon + \eta$. L'écart de m à C peut donc être rendu inférieur à tout nombre donné. Donc m est sur C, puisque C est fermé.

Alors, l'ensemble limite de L_ε est un continu qui contient a et b, et qui ne contient que des points de C; il coïncide donc avec C, puisque C est irréductible.

2° *Si l'on décompose un continu* C *irréductible entre a et b en deux continus ayant un et un seul point commun c, chacun d'eux est irréductible, l'un entre a et c, l'autre entre b et c.*

D'abord l'un des deux continus, C_1, doit contenir a, et l'autre, C_2, b, car, si a et b étaient sur C_1, C ne serait pas irréductible. Je dis que C_1 est irréductible entre a et c. Supposons, en effet, qu'il existe une portion Γ_1 de C_1 continue et contenant a et c; l'ensemble $\Gamma_1 + C_2$ sera continu comme somme de deux continus qui ont un point commun c; il contiendra a et b; et c'est une *portion* de C; en effet, les points que nous avons exclus de C_1 ne peuvent se retrouver sur C_2, puisque C_1 et C_2 n'ont que c en commun. Donc C ne serait pas irréductible.

3° Soient C un continu irréductible entre a et b, c un point quelconque de C; *il est possible et d'une seule manière de décomposer* C *en deux continus ayant c pour seul point commun* (et qui, par suite, seront irréductibles l'un entre a et c, l'autre entre b et c).

Traçons, en effet, une ligne (de Jordan) partant de c et s'éloignant à l'infini dans les deux sens. On peut toujours la choisir telle qu'elle sépare a et b, c'est-à-dire qu'on ne puisse aller de a en b [1] sans rencontrer la ligne et qu'elle n'ait pas avec C d'ensemble continu commun contenant c. Pour fixer les idées, nous prendrons une droite L. Parmi les droites passant par c, il y en a bien qui remplissent les conditions précédentes [2].

Considérons alors le domaine D_ε, lieu des points dont l'écart à C est

(1) Par un chemin *continu*.

(2) Sans quoi C comprendrait une *aire* autour de c.

inférieur à ε; ce domaine contient C à son *intérieur*. Comme il ne s'étend pas à l'infini, L sort de D des deux côtés. Soient, sur chacune des demi-droites séparées par c sur L, α et β les *premiers* points de rencontre de L avec la frontière *extérieure* de D. Ces premiers points existent, car les points d'intersection de L et de la frontière D (qui est continue) forment un ensemble fermé, et c n'est pas un point de cet ensemble, car c est intérieur (au sens étroit) à C.

Désignons par Δ_ε le domaine intérieur à la frontière extérieure de D_ε. Ce domaine comprend entièrement D_ε et a pour toute frontière la frontière extérieure de D_ε. On peut voir alors, je laisse ce point de côté, que la droite $\alpha\beta$ qui joint deux points de la frontière de Δ et n'a pas d'autre point commun avec elle détermine dans Δ deux domaines séparés Δ_1^ε, Δ_2^ε, dont la somme est Δ_ε, chacun ayant pour frontière $\alpha\beta$ et une portion de frontière de Δ. L'un de ces domaines contient a, l'autre b.

Donnons à ε une infinité dénombrable de valeurs tendant vers zéro. Je dis que Δ_ε a pour limite C. D'abord l'ensemble limite est continu et contient a et b, donc C. Soit m un point extérieur à C. On peut trouver une ligne allant de m à l'infini et ne rencontrant pas C. Laissons encore de côté pour un instant la démonstration de ce point. Sur cette ligne, l'écart des différents points à C admet une borne inférieure $\delta \neq 0$. Quand ε sera inférieur à δ, la ligne sera donc sans point commun avec D_ε et, par suite, extérieure à Δ_ε puisqu'elle part de l'infini; m est donc extérieur à Δ et, par suite, ne peut appartenir à l'ensemble limite de Δ.

Chacun des domaines Δ_1^ε, Δ_2^ε a aussi un continu limite; l'un contient a et c, l'autre b et c. La démonstration sera achevée si je montre que le seul point commun est c. Or, pour qu'un point de C soit commun, il faut qu'il appartienne pour les petites valeurs de ε à Δ_1^ε et à Δ_2^ε, c'est-à-dire à leur partie commune $\alpha\beta$. Il faudrait donc que $\Delta_1 \Delta_2$ aient constamment en commun un segment *fixe* de L (entourant c); ce segment appartiendrait à Δ_ε quel que soit ε, donc à sa limite, donc à C, ce qui est absurde puisque C et L n'ont pas un continu commun.

En résumé, les continus limites de Δ_1 et Δ_2 sont deux portions de C, dont la somme donne C et qui n'ont que c en commun.

5. Je dis que cette décomposition n'est possible que d'une manière. Soient, en effet, deux autres continus Γ_1 et Γ_2 ayant c pour seul point commun, et supposons que a soit dans Γ_1, b dans Γ_2. Je dis que C_1 est identique à Γ_1. Appelons, en effet, C'_1 la partie commune à Γ_1 et C_1; C'_2 la partie commune à Γ_1 et C_2; C'_1 contient a et c, C'_2 contient c; les deux ensembles C'_1, C'_2, intersections d'ensembles fermés, sont fermés. Ils ont c pour seul point commun. Or, il est bien facile de montrer que la somme de deux ensembles fermés ayant un seul point commun ne peut être continue que s'ils sont tous deux continus (l'un pouvant se réduire à un point). Donc C'_1 et C'_2 sont continus ou réduits à un point, et, comme C'_1 contient deux points a et c, il est continu. C'est donc une portion continue de C_1. C'est donc C_1 puisque C_1 est irréductible. Donc Γ_1 contient C_1; de même Γ_2 contient C_2, et comme $\Gamma_1 + \Gamma_2$ est identique à $C_1 + C_2$ *et que* Γ_1 *et* Γ_2 *n'ont qu'un point conmun*, Γ_1 est identique à C_1 et Γ_2 à C_2.

6. J'arrive alors au théorème que j'ai en vue. Il est bien connu que l'on peut toujours prendre dans C un ensemble dénombrable de points qui, joint à son dérivé, coïncide avec C. Par exemple, enfermons les points de C dans un nombre limité de cercles ayant pour centres des points de C et de rayon r. Considérons les centres de ces cercles. Recommençons en donnant à r une valeur plus petite et, en général, une infinité dénombrable de valeurs tendant vers zéro. Nous obtenons une infinité dénombrable de centres, et tout point de C est ou bien un centre ou bien un point limite de centres.

Rangeons donc en série linéaire l'ensemble dénombrable de centres obtenu ainsi, soit $u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$. En appliquant le théorème précédent, on peut dire sous une forme simple que u_1 divise C en deux *arcs* (c'est-à-dire deux continus contenant l'un a et u_1, l'autre b et u_1, sans autre point commun que u_1); u_2 appartient à l'un de ces arcs, bu_1 par exemple, *et, comme* bu_2 *est irréductible*, u_2 le divise en deux arcs; u_3 appartient à un des trois arcs obtenus et le divise en deux, et ainsi de suite. Alors tout point de C ou bien est l'un des u, ou bien appartient à chaque stade de la subdivision à un arc bien déterminé (puisque la décomposition se fait d'une seule manière); les arcs qui contiennent un point donné m sont tels que chacun contienne tous les suivants.

C'est ici qu'apparaît la restriction que j'ai en vue : il n'est pas certain que ces arcs contenant un point donné tendent vers zéro. Ce qui est certain, c'est que, m étant limite des u, les *deux* extrémités d'un arc contenant m ont pour point limite le point m; cela, tout au moins, est facile à voir. Mais cela n'implique pas que l'arc tout entier ait m pour seul point limite. Ajoutons donc à l'hypothèse que le continu donné est irréductible la suivante : *tout arc contenant un point m* (ce qui a un sens précis d'après ce qui précède) *peut être enfermé dans un cercle dont le rayon tend vers zéro en même temps que la distance de m aux extrémités de l'arc.* Nous dirons d'un tel continu irréductible qu'il est *absolument* ou *complètement* fermé.

Faisons alors correspondre à u_1 le point $\frac{1}{2}$ du segment o-1; à u_2 le point $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$, suivant que u_2 est sur au_1 ou sur bu_1, ..., en général, à u_n, le milieu du segment dont les extrémités correspondent aux deux points u dont l'arc renferme u_n (¹); à chaque u répond un point déterminé v du segment o-1 et ces points se suivent dans le même ordre que les u correspondants. A chaque point m de C nous pourrons faire correspondre un point du segment o-1, savoir *le* point limite des points v auxquels répondent les extrémités successives des arcs qui contiennent m. Ce point limite est unique, car les arcs v s'emboîtent les uns dans les autres et tendent vers zéro comme les arcs u.

Donc, l'abscisse et l'ordonnée d'un point de C sont des fonctions de l'abscisse du point v correspondant sur le segment o-1, et il est manifeste que ces fonctions sont continues. L'ensemble C est donc une ligne de Jordan.

7. Je reviens maintenant sur la démonstration des points que j'ai laissés de côté pour qu'on puisse suivre plus aisément la démonstration. Ils sont bien intuitifs, mais comme, dans cet ordre d'idées, c'est le paradoxe qui est la règle et le naturel l'exception, il faut les démontrer en toute rigueur.

Voyons d'abord dans quel cas la somme de deux ensembles fermés E, F ayant un seul point commun peut être continue. Je dis

(¹) Au moment où u_n s'introduit pour la première fois.

que E et F sont bien enchaînés. Supposons, par exemple, que E soit mal enchaîné entre deux points a et b. L'ensemble $S = E + F$ étant continu est bien enchaîné entre a et b; on peut donc lui inscrire un polygone de côtés inférieurs à ε. Le premier sommet a étant sur E ainsi que le dernier b, et (pour ε assez petit) tous les sommets ne devant pas être sur E, on peut trouver quatre sommets du polygone m, p; p', m' jouissant des propriétés suivantes : m et p sont consécutifs ainsi que m' et p'; m et m' sont sur E, p et p' sur F (ces derniers peuvent être confondus); enfin, tous les sommets avant m sont sur E, de même que ceux qui suivent m'. Faisons tendre ε vers zéro; tout point α limite de m est limite de p; tout point β limite de m' est limite de p'. Donc α appartient à E et à F (qui sont fermés) et β aussi. Donc E et F ont *deux* points communs, sauf si α et β sont confondus. Mais cela est impossible, car alors la distance $\overline{mm'}$ pourrait être rendue aussi petite qu'on veut, et l'on pourrait, au polygone primitif, en substituer un autre dont tous les côtés pourraient être rendus inférieurs à tout nombre donné et dont tous les sommets seraient sur E, c'est-à-dire que E serait bien enchaîné.

Donc nos deux ensembles E, F sont bien enchaînés. Étant fermés ils sont donc parfaits et, par suite, continus. Ils peuvent d'ailleurs se réduire à un point.

L'hypothèse que E et F ont un seul point commun est indispensable pour l'exactitude du théorème. Ainsi, prenons pour E le segment 0-1 et le segment 2-3, et pour F le segment 1-2. La somme est continue et E ne l'est pas; E et F ont deux points communs.

Continu linéaire quelconque.

8. Je rattacherai les deux autres points de rigueur qui me restent à démontrer à l'étude de la frontière d'un continuum, mais je ferai auparavant une remarque sur les questions que l'on peut encore se poser. Toutes les lignes de M. Jordan sont des continus cantoriens, et nous connaissons la condition nécessaire et suffisante pour que ce soient de vraies lignes : c'est qu'elles ne remplissent pas une aire. Toutes les lignes cantoriennes ne sont pas des lignes de M. Jordan.

J'ai, d'une part, trouvé un cas étendu où l'on peut conclure par l'affirmative en apportant une restriction très simple à la définition de M. Cantor; j'ai, d'autre part, fait comprendre, et l'exemple de la fonction $\sin\frac{1}{x}$ le montre bien, la nécessité de la restriction indiquée plus haut, comme l'avait déjà fait M. Schœnflies. Il resterait à étudier les ignes cantoriennes qui peuvent se décomposer en une infinité dénombrable de continus irréductibles, l'extrémité de chacun coïncidant avec l'origine du suivant. Ce seront là évidemment, moyennant la restriction indispensable, des lignes de Jordan, plus nécessairement simples. Je signale en passant le lien et les différences de cette question avec l'étude des assemblages de lignes en *Analysis situs*.

Frontières d'un domaine.

9. Soit un domaine borné D ne comprenant qu'une seule ligne frontière, sa frontière extérieure L. Soient a et b deux points de L, et λ une ligne (de Jordan) sans point double passant par a et b et toute intérieure à D. Je dis que D est la somme de deux domaines D_1, D_2 ayant λ et des portions de L pour frontière. Considérons pour cela une décomposition du plan en carrés dont les côtés sont parallèles aux axes; ceux de ces carrés qui ont au moins un point intérieur à D forment un domaine Δ. Ajoutons à λ deux lignes s'éloignant à l'infini, partant l'une de a, l'autre de b et tout entières extérieures à D; ces lignes sortent de Δ. Considérons ceux des carrés qui renferment au moins un point de la ligne ainsi complétée; cette file de carrés Δ_3 partage Δ en deux domaines séparés Δ_1, Δ_2. Quand les côtés des carrés tendent vers zéro, il est manifeste que Δ a D pour limite; $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ont séparément trois continus limites dont la somme doit être D. Or, Δ_3 a λ pour limite (et aucun point des lignes ajoutées, car ces points sont hors de D). Donc Δ_1 et Δ_2 ont deux continus limites D_1, D_2 ayant en commun la ligne λ et pas d'autre point; leur somme est D. Soit enfin un point m frontière de D_1; dans son voisinage, il y a des points extérieurs à D_1 et, par suite, appartenant soit à l'extérieur de D (alors m est sur L), soit à D_2 (alors m est sur λ). La frontière de D_1 est donc formée de λ et d'une portion L_1 de L; celle de D_2, de λ et du reste L_2

de L. De plus, ni L_1 ni L_2 ne peuvent disparaître, car λ seule ne saurait être frontière d'un domaine. Enfin, L_1 et L_2 sont continus, comme limites de portions continues des frontières de Δ_1 et Δ_2.

10. Je me trouve avoir démontré en même temps que la frontière extérieure d'un domaine peut se décomposer en deux continus ayant seulement deux points communs a et b.

Je dis que, *lorsqu'on effectue une telle décomposition, chacun des continus obtenus est séparément irréductible entre a et b.*

Soit L la frontière du domaine D, décomposée en L_1 et L_2, ensembles continus ayant a et b pour seuls points communs. Supposons qu'il existe une portion continue λ_1 de L_1 qui contienne a et b. Formons $\lambda_1 + L_2$, c'est là une ligne cantorienne. Prenons un point de L_2 distinct de a et b. On peut tracer un cercle ayant ce point pour centre, ne contenant aucun point de L_1 ni, par suite, de λ_1, et, d'autre part, ce cercle renfermera un point m intérieur à D. Considérons le domaine Δ, ensemble des points du plan qu'on peut attendre en partant du point m sans rencontrer ni λ_1 ni L_2. La frontière de ce domaine comprend L_2 et une portion de λ_1. De plus, il existe des points, m par exemple, intérieurs à la fois à D et Δ, et des points p (le point à l'infini par exemple) extérieurs à D et Δ. Je dis que D est identique à Δ. Supposons, par exemple, qu'il existe un point μ intérieur à Δ, extérieur à D; il existe une ligne joignant μp sans rencontrer la frontière de D, puisque μ et p sont extérieurs à D; *a fortiori* ce chemin ne rencontrera pas la frontière de Δ, et c'est absurde puisque μ et p sont dans des régions différentes de Δ. De même, s'il existait un point π extérieur à Δ, intérieur à D, on pourrait trouver un chemin $m\pi$ qui ne rencontre pas la frontière de D, ni, par suite, celle de Δ, ce qui est absurde. Donc D et Δ sont identiques, donc ils ont même frontière. Il existe donc une portion de λ_1 qui est identique à L_1. Cela n'est possible que si λ_1 coïncide avec L_1.

Si l'on pouvait démontrer que pour la frontière la condition d'être un ensemble absolument fermé est vérifiée, on en déduirait que la frontière est une ligne de Jordan. La chose est d'ailleurs inexacte, et il faut ajouter expressément cette condition pour pouvoir conclure que la frontière d'un continuum est une ligne de Jordan simple fermée.

11. Il me reste encore à établir le théorème dont je me suis servi plus haut :

Étant donné un continu irréductible L *et un point* m *hors de* L, *on peut trouver un chemin joignant* m *au point à l'infini et ne rencontrant pas* L.

Ce qui peut encore s'énoncer ainsi :

L'ensemble des points qui n'appartiennent pas à un continu irréductible donné est un continuum.

Supposons qu'on ne puisse pas, en partant de m, atteindre le point à l'infini sans rencontrer L. Alors l'ensemble des points qu'on peut atteindre forme un continuum *borné* dont la frontière ne peut, évidemment, comprendre que des points de L. Il y a donc une portion λ de L qui est la frontière extérieure d'un domaine. Supposons que a et b soient sur λ. Alors, on peut trouver une portion continue de λ et, par suite, de L qui renferme a et b, et L n'est pas irréductible.

Supposons que ni a ni b ne soient sur λ (on traite d'une façon analogue le cas plus simple où a seul est sur λ). L'ensemble L étant bien enchaîné, on peut former une chaîne de a à b. Alors, de deux choses l'une : ou bien cette chaîne ne comprendra jamais de point *voisin* de λ (1). Dans ce cas, l'ensemble limite de cette chaîne est continu, portion de L (puisqu'il ne comprend pas λ), et il contient a et b, ce qui est absurde; ou bien, quelque petit que soit le chaînon ε, il y aura toujours sur le polygone inscrit des sommets qu'on peut supposer appartenir à λ. Sur chacun des polygones il y a alors un premier sommet sur λ, soit m, et un dernier, soit p. La ligne brisée am et la ligne bp ont pour limites deux continus portions de L, dont on pourra ne garder qu'une portion $a\mu$, πb; $a\mu$ et πb n'ayant respectivement qu'un point, μ, π, commun avec λ. On peut trouver une portion continue de λ contenant μ et π; appelons-la $\mu\pi$. L'ensemble $a\mu + \mu\pi + \pi b$, somme de trois continus qui ont deux à deux un point commun, est continu, il contient a et b, c'est une portion de L; il y a donc contradiction.

(1) C'est-à-dire que la plus petite distance de ces points à λ ne tendra pas vers zéro en même temps que le chaînon ε.

12. Ainsi se trouve éclaircie la place à part occupée parmi les ensembles continus par ceux qui peuvent être frontières d'un domaine ou partie de cette frontière. J'ai déjà appelé l'attention là-dessus il y a quelques années. J'ai cru devoir y revenir avec quelques détails. Il pourra sembler superflu d'insister longuement sur des remarques qui dérivent de notre sens de continuité ; à cela, on peut répondre que les études de ce genre ont surtout pour but d'éclaircir un peu cette notion vague de la continuité et qu'il importe, par conséquent, de tout établir sans y faire appel.