A. LIAPOUNOFF

Sur une classe de figures d'équilibre d'un liquide en rotation

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 26 (1909), p. 473-483
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__473_0>

SUR

UNE CLASSE DE FIGURES D'ÉQUILIBRE

D'UN

LIQUIDE EN ROTATION;

PAR M. A. LIAPOUNOFF.

1. Étant considérée une masse liquide homogène, dont les particules s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton et qui est soustraite à toute action extérieure, si on lui donne une figure convenable, elle pourra tourner librement autour d'un axe fixe, comme un corps solide, et l'on aura alors une de ces *figures d'équilibre* dont il est ici question.

On connaît depuis longtemps les figures ellipsoïdales d'équilibre, dont l'ensemble est constitué des ellipsoïdes de révolution aplatis de Maclaurin et des ellipsoïdes à trois axes inégaux de Jacobi.

Ces ellipsoïdes forment des séries continues de figures d'équilibre, et ces séries ont, pour ainsi dire, des connexions, de sorte qu'il existe des ellipsoïdes par lesquels s'établit un passage continu d'une série à une autre.

Or cette question se pose : n'y a-t-il pas de figures d'équilibre non ellipsoïdales qui forment des séries continues ayant des connexions avec les séries ellipsoïdales?

S'il en est ainsi, on doit pouvoir trouver des ellipsoïdes, tels qu'il existe des figures d'équilibre non ellipsoïdales qui en soient aussi peu différentes qu'on veut.

C'est la question qui m'a été proposée jadis par Tchebychef, et dont je me suis déjà occupé autrefois (1).

Quelques résultats que j'ai obtenus alors, et surtout les résultats remarquables qu'a obtenus presque à la même époque M. Poincaré, ont rendu une réponse affirmative très vraisemblable.

Néanmoins la question restait loin d'être résolue, puisqu'on ne connaissait qu'une première approximation, et non seulement il n'y avait aucune méthode pour qu'on pût pousser l'approximation plus loin, l'existence même de nouvelles figures d'équilibre n'était pas établie d'une manière quelque peu satisfaisante.

C'est pourquoi j'ai repris la question il y a quelques années, et j'ai déjà publié une partie de mes recherches dans les deux premières Parties parues du travail intitulé : *Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation* (2).

Dans ce travail, je donne une solution rigoureuse de la question. Mais cette solution est sujette à certaines restrictions, que j'ai dû introduire pour pouvoir appliquer ma méthode.

Il est vrai que ces restrictions laissent encore subsister une grande généralité. Mais il n'en est pas moins désirable de s'en débarrasser.

C'est ce que je me propose de faire dans le présent Mémoire, où je montrerai qu'en dehors des hypothèses que j'ai admises il n'y a pas de solution, de sorte que les conclusions auxquelles je suis arrivé dans mon travail sont valables sans aucune réserve.

2. Soit E un ellipsoïde de Maclaurin ou de Jacobi.

Pour employer les notations dont je me suis servi, je désignerai les demi-axes de cet ellipsoïde par

$$\sqrt{\rho+1}, \quad \sqrt{\rho+q}, \quad \sqrt{\rho},$$

---

(1) Pour ce qui concerne les détails, je renverrai au Mémoire : *Sur un problème de Tchebychef* (*Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XVII, N° 3, 1905).

(2) Ouvrage publié séparément par l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg. Première Partie : *Étude générale du problème*, 1906. — Deuxième Partie : *Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Maclaurin*, 1909.

en entendant par ρ et q des nombres positifs et en supposant que q ne dépasse pas 1. Si c'est un ellipsoïde de Maclaurin, on aura $q=1$, et, si l'on considère un ellipsoïde de Jacobi, q sera une fonction connue de ρ.

Soient ensuite E_i et E_e des ellipsoïdes homofocaux à E et ayant respectivement pour demi-axes

$$\sqrt{\rho-\delta+1},\quad \sqrt{\rho-\delta+q},\quad \sqrt{\rho-\delta},$$
$$\sqrt{\rho+\delta+1},\quad \sqrt{\rho+\delta+q},\quad \sqrt{\rho+\delta},$$

δ étant un nombre positif moindre que ρ.

En supposant δ suffisamment petit, j'ai recherché s'il existe des figures d'équilibre non ellipsoïdales, situées à l'intérieur de l'ellipsoïde E_e et renfermant à leur intérieur l'ellipsoïde E_i.

C'est une pareille figure que j'ai entendue par une figure peu différente d'un ellipsoïde.

En désignant par x, y, z les coordonnées rectangulaires et par θ et ψ des variables auxiliaires, on pourra représenter la surface d'une telle figure par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x=\sqrt{\rho+\zeta+1}\sin\theta\cos\psi, \\ y=\sqrt{\rho+\zeta+q}\sin\theta\sin\psi, \\ z=\sqrt{\rho+\zeta}\cos\theta, \end{cases}$$

ζ étant une fonction de θ et ψ dont la valeur absolue ne dépasse pas δ.

Or, en partant de ces équations, je ne me suis pas borné à supposer que δ soit assez petit, et j'ai encore introduit certaines conditions complémentaires que je vais énoncer à l'instant.

On peut envisager θ et ψ comme les angles polaires d'un point p, situé sur la surface de la sphère Σ de rayon 1 et de centre à l'origine, et j'ai rapporté les valeurs de la fonction ζ aux points de cette surface.

Cela posé, j'ai admis qu'en tout point de la surface de la sphère Σ la fonction ζ a une seule valeur. De plus, j'ai supposé que cette fonction soit continue, et cela de telle manière que, ζ' étant sa valeur en un point $p'(\theta', \psi')$ de la même surface, le rapport

$$\frac{\zeta'-\zeta}{pp'}$$

reste, en valeur absolue, au-dessous d'une limite suffisamment petite, quelles que soient les positions des points p et p'; ce qui, en posant

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi' - \psi) = \cos\varphi,$$

peut être exprimé par une inégalité de la forme

$$\left|\frac{\zeta' - \zeta}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right| < \delta_1,$$

δ_1 étant un nombre fixe suffisamment petit.

Dans ces hypothèses, j'ai complètement résolu la question, en montrant tout d'abord comment on doit choisir l'ellipsoïde E pour qu'il existe des figures d'équilibre non ellipsoïdales qui en soient aussi peu différentes qu'on veut, et en donnant ensuite une méthode pour déterminer ces figures avec une approximation voulue. En même temps, j'ai montré comment on obtiendra, pour un ellipsoïde donné, toutes les figures d'équilibre, pour lesquelles δ et δ_1 sont assez petits.

Or on peut se demander : n'y a-t-il pas de figures d'équilibre pour lesquelles δ seul soit assez petit, mais qui ne satisfassent pas aux conditions complémentaires ci-dessus?

Je vais montrer que la réponse est négative.

3. Soit F la figure d'équilibre considérée, dont la surface sera définie par les équations (1), l'axe des z étant dirigé suivant l'axe de rotation.

Soient ensuite ω la vitesse angulaire qui lui correspond, f la constante de la gravitation universelle, k la densité du liquide et $\pi f k\mathrm{U}$ le potentiel de la masse liquide au point (x, y, z).

Comme, par hypothèse, le liquide n'est soumis à aucune action extérieure et que, par suite, la pression doit être *nulle* sur la surface libre, on aura, sur la surface de la figure F,

$$\Omega(x^2 + y^2) + \mathrm{U} = \text{const.}, \tag{2}$$

en posant, conformément aux notations que j'ai employées,

$$\frac{\omega^2}{2\pi f k} = \Omega.$$

Le second membre de l'équation (2) est une constante, au sujet de laquelle il faut faire une remarque.

En se plaçant à un point de vue général, on ne doit pas écarter d'avance le cas où la surface de la figure considérée consiste en plusieurs nappes isolées, et, dans ce cas, la constante dont il s'agit pourra varier d'une nappe à une autre. Mais si, parmi les nappes, il en existe qui servent à limiter une seule et même portion connexe de la masse liquide, cette constante ne changera pas de valeur, quand on passe d'une de ces nappes à une autre.

De cette façon, l'équation (2) doit être conçue comme il suit :

La fonction

$$\Omega(x^2+y^2)+\mathrm{U}$$

ne change pas de valeur quand on passe d'un point de la surface à un autre, toutes les fois qu'on peut joindre ces deux points par une ligne continue, située à l'intérieur du liquide.

L'équation (2) exprime la condition d'équilibre pour la figure F.

Pour l'ellipsoïde E on aura de même

$$\Omega_0(x^2+y^2)+\mathrm{U}_0=\text{const.},$$

en désignant le potentiel de l'ellipsoïde par $\pi f k \mathrm{U}_0$ et en posant

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi f k}=\Omega_0,$$

ω_0 étant la vitesse angulaire correspondante.

Cette équation aura lieu sur la surface de l'ellipsoïde E, où l'on aura, d'après une formule connue,

$$\mathrm{U}_0=\Delta(\rho)\int_\rho^\infty\left(1-\frac{x^2}{t+1}-\frac{y^2}{t+q}-\frac{z^2}{t}\right)\frac{dt}{\Delta(t)},$$

en posant, pour abréger,

$$\sqrt{t(t+1)(t+q)}=\Delta(t).$$

Or, à l'intérieur de l'ellipsoïde E, on aura pour U_0 la même expression.

Donc, pour les points intérieurs à l'ellipsoïde, on aura

$$\Omega_0(x^2+y^2)+U_0=\text{const.}-\lambda\left(\frac{x^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho}\right), \tag{3}$$

où

$$\lambda=\rho\,\Delta(\rho)\int_\rho^\infty\frac{dt}{t\,\Delta(t)}.$$

4. Pour simplifier l'analyse, nous allons supposer que la figure F se trouve à l'intérieur de l'ellipsoïde E. Cela est permis, puisque la figure considérée peut être remplacée par une figure homothétique par rapport à l'origine des coordonnées, sans que la condition d'équilibre soit altérée.

Dans cette hypothèse, l'égalité (3) aura lieu pour tous les points de la surface de la figure F.

Par suite, en posant

$$\Omega-\Omega_0=\eta, \qquad U_0-U=U_1,$$

on aura sur cette surface

$$\eta(x^2+y^2)+\lambda\left(1-\frac{x^2}{\rho+1}-\frac{y^2}{\rho+q}-\frac{z^2}{\rho}\right)-U_1=C, \tag{4}$$

C étant une constante dans le sens expliqué au numéro précédent.

D'après les équations (1), on a ici

$$x^2+y^2=(\rho+\cos^2\psi+q\sin^2\psi+\zeta)\sin^2\theta,$$

$$1-\frac{x^2}{\rho+1}-\frac{y^2}{\rho+q}-\frac{z^2}{\rho}=-\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{\rho+1}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{\rho+q}+\frac{\cos^2\theta}{\rho}\right)\zeta.$$

Quant à U_1, on aura

$$U_1=\frac{1}{\pi}\int\frac{d\tau}{r},$$

où r est la distance de l'élément de volume $d\tau$ au point (x, y, z), et l'intégrale s'étend à tous les éléments qui se trouvent à l'intérieur de l'ellipsoïde E et à l'extérieur de la figure F.

Comme tous ces éléments sont situés entre les surfaces des ellipsoïdes E et E_i, on pourra assigner à U_1 une limite supérieure de la forme $L\delta$, L étant un nombre ne dépendant que de ρ.

D'après cela, on voit facilement que η ne dépassera pas, en valeur absolue, une limite supérieure de la même forme.

En effet, la constante C figurant dans l'équation (4) est la valeur de

$$-\frac{\lambda}{\rho}\zeta - U_1,$$

en un point où l'axe des z rencontre la surface de la figure F. On aura donc

$$|C| < \left(\frac{\lambda}{\rho} + L\right)\delta.$$

Or, si l'on pose dans l'équation (4) $\psi = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, elle deviendra

$$(\rho + 1 + \zeta)\eta - \frac{\lambda}{\rho + 1}\zeta - U_1 = C,$$

et de là, δ étant plus petit que ρ, on tire

$$|\eta| < \left(\frac{\lambda}{\rho + 1} + \frac{\lambda}{\rho} + 2L\right)\delta,$$

inégalité de la forme

$$|\eta| < M\delta, \tag{5}$$

où M ne dépend que de ρ.

5. Nous poserons, pour abréger,

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{\rho + 1} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{\rho + q} + \frac{\cos^2\theta}{\rho} = K,$$
$$\sin^2\theta\cos^2\psi + q\sin^2\theta\sin^2\psi = J,$$

de sorte que l'équation (4) s'écrira

$$\eta(J + \rho\sin^2\theta) - (\lambda K - \eta\sin^2\theta)\zeta - U_1 = C.$$

Cela posé, considérons deux points $P(\theta, \psi)$ et $P'(\theta', \psi')$ de la surface de la figure F, qui puissent être joints par une ligne continue située à l'intérieur du liquide.

Comme pour ces deux points la constante C aura la même valeur, nous aurons, en employant un accent pour désigner les valeurs relatives au point P′,

$$\begin{aligned}(\lambda K' - \eta \sin^2\theta')\zeta' - (\lambda K - \eta \sin^2\theta)\zeta \\ - \eta(J' - J) - \rho\eta(\sin^2\theta' - \sin^2\theta) + U'_1 - U_1 = 0,\end{aligned}$$

ce qu'on peut présenter sous la forme

$$\begin{aligned}(6)\quad (\lambda K - \eta \sin^2\theta)(\zeta' - \zeta) \\ = \lambda(K - K')\zeta' + \eta(\sin^2\theta' - \sin^2\theta)(\rho + \zeta') + \eta(J' - J) + U_1 - U'_1.\end{aligned}$$

Or, en posant, comme nous l'avons déjà fait,

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi' - \psi) = \cos\varphi,$$

il est facile d'établir ces inégalités

$$|\sin^2\theta' - \sin^2\theta| < 2\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$|K' - K| < \frac{2}{\rho}\sin\frac{\varphi}{2}, \qquad |J' - J| < 2\sin\frac{\varphi}{2}.$$

D'autre part, δ étant assez petit, on aura

$$(7)\qquad |U'_1 - U_1| < \left(N_1|\zeta' - \zeta| + N_2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\delta\log\frac{\rho}{\delta},$$

en entendant par N_1 et N_2 des nombres positifs suffisamment grands et ne dépendant que de ρ.

En effet, on a

$$U_1 - U'_1 = \frac{1}{\pi}\int\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{\pi}\int\frac{d\tau}{r'} = \frac{1}{\pi}\int\frac{(r' - r)\,d\tau}{rr'}$$

et, par suite, D étant la distance PP′,

$$|U'_1 - U_1| < \frac{D}{\pi}\int\frac{d\tau}{rr'}.$$

Or, en exprimant D à l'aide des formules (1), et en tenant compte de ce que ζ se trouve toujours entre o et $-\delta$, on s'assure facilement que

$$D < \frac{|\zeta' - \zeta|}{2\sqrt{\rho - \delta}} + 2\sqrt{\rho + 1} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Quant à l'intégrale, on peut lui assigner une limite supérieure de la forme

$$N \delta \log \frac{\rho}{\delta},$$

N ne dépendant que de ρ.

Donc, en supposant δ suffisamment petit $\left(\text{par exemple, plus petit que } \frac{1}{2}\rho\right)$, on aura bien une inégalité telle que (7).

Par suite, en remarquant que

$$K > \frac{1}{\rho + 1},$$

et tenant compte de l'inégalité (5), on peut tirer de (6) l'inégalité suivante :

$$(8) \qquad \left(\frac{\lambda}{\rho + 1} - M\delta - N_1 \delta \log \frac{\rho}{\delta}\right) |\zeta' - \zeta| < \left[\frac{2\lambda}{\rho} + 2M(\rho + 1) + N_2 \log \frac{\rho}{\delta}\right] \delta \sin \frac{\varphi}{2}.$$

6. Maintenant il est aisé d'établir ce que nous nous sommes proposé.

Tout d'abord, on voit immédiatement que, δ étant assez petit, à aucun point de la surface de la sphère Σ il ne pourra correspondre plus d'*un* point de la surface de la figure F.

En effet, si à un point $p(\theta, \psi)$ il en correspondait plusieurs, il s'en trouverait certainement deux qui pussent être joints par une ligne continue située tout entière à l'intérieur du liquide, et auxquels, par suite, on pourrait appliquer l'inégalité (8). Or cette inégalité, où l'on devrait alors faire $\sin \frac{\varphi}{2} = 0$ sans supposer $\zeta' = \zeta$, se réduirait à

$$\left(\frac{\lambda}{\rho + 1} - M\delta - N_1 \delta \log \frac{\rho}{\delta}\right) |\zeta' - \zeta| < 0,$$

et cela est impossible, dès que δ est assez petit.

Il faut donc admettre qu'en tout point de la surface de Σ la fonction ζ a une seule valeur.

Or, s'il en est ainsi, l'inégalité (8) sera valable, quels que soient les points P et P′ de la surface de F, et d'après cette inégalité, δ étant assez petit, on aura

$$\left|\frac{\zeta'-\zeta}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right| < \mathrm{N}\delta\log\frac{\rho}{\delta},$$

en prenant pour N un nombre suffisamment grand, ne dépendant que de ρ.

On arrive donc à notre condition complémentaire.

7. La conclusion précédente a été obtenue dans l'hypothèse que la figure F se trouvât tout entière à l'intérieur de l'ellipsoïde E. Mais, si on ne le supposait pas, le résultat n'en serait pas changé.

En effet, pour se débarrasser de ladite hypothèse, il n'y a qu'à remplacer la figure considérée par une figure homothétique, dont la surface soit définie par les équations de la forme

$$\begin{aligned} x &= n\sqrt{\rho+1+\zeta}\sin\theta\cos\psi, \\ y &= n\sqrt{\rho+q+\zeta}\sin\theta\sin\psi, \\ z &= n\sqrt{\rho+\zeta}\cos\theta. \end{aligned}$$

Pour ramener ensuite ces équations à la forme (1), on posera

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho+1+\zeta_1}\sin\theta_1\cos\psi_1 &= n\sqrt{\rho+1+\zeta}\sin\theta\cos\psi, \\ \sqrt{\rho+q+\zeta_1}\sin\theta_1\sin\psi_1 &= n\sqrt{\rho+q+\zeta}\sin\theta\sin\psi, \\ \sqrt{\rho+\zeta_1}\cos\theta_1 &= n\sqrt{\rho+\zeta}\cos\theta; \end{aligned}$$

et, après avoir éliminé entre ces dernières équations θ et ψ, on en déduira ζ_1 en fonction de θ_1 et ψ_1.

J'ai étudié de pareilles transformations dans la première Partie de mon travail *Sur les figures d'équilibre* (n^os^ 55-58), et j'y ai montré que, si les fonctions

$$|\zeta| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\zeta'-\zeta}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|$$

restent toujours au-dessous des nombres suffisamment petits, le nombre n étant assez peu différent de 1, les fonctions

$$|\zeta_1| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\zeta_1' - \zeta_1}{\sin\frac{\varphi_1}{2}}\right|,$$

où φ_1 est l'angle entre les directions (θ_1, ψ_1) et (θ_1', ψ_1') répondant aux valeurs ζ_1 et ζ_1', ne dépasseront pas des limites aussi petites qu'on veut.

Il en résulte que la conclusion du numéro précédent ne dépend nullement de l'hypothèse que la figure F soit située à l'intérieur de l'ellipsoïde E, et que, par suite, la condition complémentaire admise dans mon travail sera toujours remplie d'elle-même, pourvu que δ soit assez petit.

On doit donc conclure que les figures d'équilibre que j'ai étudiées sont les seules qui puissent être assez peu différentes des ellipsoïdes.

8. En terminant, j'ajouterai que Tchebychef, en me proposant la question dont il s'agit, voulait surtout savoir ce qui arrive quand la vitesse angulaire, en croissant continûment, atteint sa valeur, pour laquelle les deux ellipsoïdes de Maclaurin se confondent.

On sait que, si la vitesse angulaire continue à croître, les figures ellipsoïdales d'équilibre cessent d'exister. Mais on ne savait pas si elles ne se transforment pas alors en certaines figures d'équilibre non ellipsoïdales peu différentes des ellipsoïdes, et c'est cela que voulait savoir Tchebychef.

J'ai montré dans mon travail (Ire Partie, n° 72) que, sous la condition complémentaire que j'ai admise, de pareilles figures d'équilibre sont impossibles.

Donc à présent on peut affirmer qu'il n'en existe pas, sans aucune réserve.

De cette façon, la question soulevée par Tchebychef peut à présent être considérée comme complètement résolue.