ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON DARBOUX

Sur certains systèmes d'équations différentielles linéaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 26 (1909), p. 449-471

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__449_0>

SUR CERTAINS SYSTÈMES

D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES;

PAR M. GASTON DARBOUX.

I.

1. Les systèmes d'équations linéaires dont je veux développer les propriétés sont analogues à celui qui se présente dans la théorie du mouvement relatif. On sait que, si un solide invariable se meut dans l'espace et si l'on connaît, à chaque instant t, les composantes p, q, r de la relation instantanée, relatives aux axes d'un trièdre invariablement lié à ce système mobile, la détermination de sa position absolue dépend de l'intégration du système linéaire à trois inconnues

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \qquad \frac{db}{dt} = cp - ar, \qquad \frac{dc}{dt} = aq - bp, \tag{1}$$

qui admet l'intégrale quadratique à coefficients constants

$$a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.} \tag{2}$$

Les systèmes que je veux considérer sont ceux qu'on rencontre dans l'étude des questions analogues relatives à un nombre quelconque de dimensions. Ils se présentent sous la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} p_{ik} x_k, \tag{3}$$

où les indices i et k peuvent prendre les valeurs $1, 2, \ldots, n$, et où les quantités p_{ik} satisfont aux deux conditions

$$(4) \qquad p_{ii}=0, \qquad p_{ik}+p_{ki}=0.$$

Ils admettent, eux aussi, l'intégrale quadratique

$$(5) \qquad \sum x_i^2 = \text{const.},$$

de sorte que toute solution particulière définie par les formules

$$x_i = x_i^0$$

conduira à l'intégrale linéaire

$$\sum x_i^0 x_i = \text{const.}$$

Indépendamment de leur intérêt cinématique, les systèmes (3) méritent, au point de vue analytique, une étude approfondie. On peut leur appliquer une remarque que j'ai déjà faite pour le cas de trois variables et montrer que tout système linéaire homogène admettant une intégrale quadratique, *à coefficients constants ou variables*, peut se ramener à la forme (3). Par suite, si l'on considère un système linéaire quelconque

$$(6) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

et si on lui associe le système que j'ai appelé *adjoint* (*Comptes rendus*, t. XC)

$$(7) \qquad \frac{du_i}{dt} = -\sum_k a_{ki} u_k,$$

l'ensemble des systèmes (6) et (7) admet l'intégrale quadratique

$$(8) \qquad \sum u_i x_i = \text{const.}$$

et peut, par suite, être ramené à la forme (3).

M. E. Goursat, dans deux Notes insérées aux *Comptes rendus* (t. CVI, 16 janvier 1888, p. 187, et t. CXLVIII, 8 mars 1909, p. 612), M. John Eiesland, dans un Mémoire inséré à l'*American Journal of*

Mathematics (t. XX, p. 245), et M. Ernesto Laura, dans deux Notes insérées en 1907 et 1908 aux *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* (16 juin 1907 et 12 janvier 1908), se sont occupés du cas particulier du système (3), où n est égal à 4; et ils ont obtenu ce beau résultat, qui peut être considéré comme la généralisation de ce que l'on sait pour n égal à 3, que *l'intégration du système peut s'effectuer par le moyen de deux équations de Riccati*. Je me propose d'établir ce théorème par des méthodes qui peuvent s'étendre, dans une certaine mesure, aux cas généraux.

Considérons donc le système

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{k=4} p_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{9}$$

où l'on a encore

$$p_{ii} = 0, \qquad p_{ik} + p_{ki} = 0, \tag{10}$$

et qui admet l'intégrale quadratique

$$\sum x_i^2 = \text{const.} \tag{11}$$

La voie que je vais suivre repose sur la considération des solutions pour lesquelles la constante du second membre est nulle, c'est-à-dire pour lesquelles on a

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0. \tag{12}$$

Ces solutions ont été déjà considérées par M. Eiesland, mais peut-être ne leur a-t-il pas attribué la place qu'elles méritent dans la théorie.

La solution la plus générale de l'équation (12) peut être obtenue en posant

$$\begin{cases} x_1 + i x_2 = \alpha\beta, & x_3 + i x_4 = -\beta\delta, \\ x_1 - i x_2 = \gamma\delta, & x_3 - i x_4 = \alpha\gamma, \end{cases} \tag{13}$$

α, β, δ, γ étant de nouvelles inconnues auxiliaires, qui ne sont même pas pleinement déterminées; car il est évidemment permis, sans changer les valeurs des x_i, d'effectuer la substitution

$$\alpha \mid \alpha h, \quad \beta \left| \frac{\beta}{h}, \right. \quad \delta \mid \delta h, \quad \gamma \left| \frac{\gamma}{h}, \right. \tag{14}$$

où h est une fonction qu'on pourra choisir arbitrairement. Nous ferons plus loin usage de cette remarque.

On tire des équations (13) les valeurs suivantes des x_i :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2x_1 = \alpha\beta + \gamma\delta, & 2x_3 = \alpha\gamma - \beta\delta, \\ 2x_2 = i(\gamma\delta - \alpha\beta), & 2x_4 = i(\alpha\gamma + \beta\delta). \end{array} \right. \tag{15}$$

Pour avoir les équations différentielles auxquelles satisfont α, β, γ, δ, différentions les équations (13) et remplaçons les dérivées des x_i par leurs valeurs. La première, par exemple, nous donnera le résultat suivant :

$$\begin{aligned} &\alpha\left[\frac{d\beta}{dt} + \frac{i}{2}\beta p_{12} + \frac{\gamma}{2}(p_{13} + ip_{23}) - \frac{\gamma}{2}(ip_{14} - p_{24})\right] \\ &+ \beta\left[\frac{d\alpha}{dt} + \frac{i}{2}\alpha p_{12} + \frac{\delta}{2}(p_{13} + ip_{23}) - \frac{\delta}{2}(ip_{14} - p_{24})\right] = 0. \end{aligned}$$

En introduisant une inconnue auxiliaire λ, on peut remplacer cette équation *quadratique* par le système de deux équations *linéaires*

$$\begin{aligned} 2\frac{d\alpha}{dt} &= -i\alpha(p_{12} + \lambda) + \delta[-p_{13} - p_{24} + i(p_{14} - p_{23})], \\ 2\frac{d\beta}{dt} &= -i\beta(p_{12} - \lambda) + \gamma[p_{13} - p_{24} + i(p_{14} + p_{23})]. \end{aligned}$$

Différentions les autres équations (13), en tenant compte des deux équations précédentes. Si, pour plus de symétrie, on pose

$$\lambda = \mu - p_{34}, \tag{16}$$

et si l'on introduit, pour abréger, les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} p_{12} + p_{34} = a_2, & p_{13} + p_{24} = a_3, & p_{14} + p_{23} = a_4, \\ p_{12} - p_{34} = b_2, & p_{13} - p_{24} = b_3, & p_{14} - p_{23} = b_4, \end{array} \right. \tag{17}$$

on sera conduit au système suivant :

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\frac{d\alpha}{dt} &= -i\alpha(\mu+b_2)+\delta(-a_3+ib_4),\\ 2\frac{d\delta}{dt} &= \alpha(a_3+ib_4)-i\delta(\mu-b_2). \end{aligned}\right.$$

$$(18')\qquad \left\{\begin{aligned} 2\frac{d\beta}{dt} &= i\beta(\mu-a_2)+\gamma(b_3+ia_4),\\ 2\frac{d\gamma}{dt} &= b(-b_3+ia_4)+i\gamma(a_2+\mu), \end{aligned}\right.$$

qui *se décompose en deux systèmes linéaires à deux inconnues seulement*. Ces deux systèmes sont absolument indépendants.

Si l'on effectue sur les variables α, β, γ, δ la substitution (14), il faut effectuer de même sur μ la substitution

$$(19)\qquad \mu \,\Big|\, \mu-\frac{i}{h}\frac{dh}{dt};$$

μ *pourra donc être choisie arbitrairement*. Comme on sait que les systèmes linéaires de la forme

$$\frac{dx}{dt}=mx+ny,\qquad \frac{dy}{dt}=px+qy,$$

pour lesquels la somme $m+q$ est égale à zéro, jouissent de la propriété que le déterminant $x_1y_2-x_2y_1$ de deux systèmes de solutions particulières est constant, on sera conduit à poser ici

$$(20)\qquad \mu=0,$$

pour donner cette propriété aux systèmes (18) et (18′). Ils prendront alors la forme définitive

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\frac{d\alpha}{dt} &= -ib_2\alpha+(-a_3+ib_4)\delta,\\ 2\frac{d\delta}{dt} &= (a_3+ib_4)\alpha+ib_2\delta, \end{aligned}\right.$$

$$(21')\qquad \left\{\begin{aligned} 2\frac{d\beta}{dt} &= -ia_2\beta+(b_3+ia_4)\gamma,\\ 2\frac{d\gamma}{dt} &= (-b_3+ia_4)\beta+ia_2\gamma. \end{aligned}\right.$$

On sait qu'on peut ramener l'intégration de ces systèmes à celle de deux équations de Riccati, qui seront

$$
(22) \quad \left\{
\begin{aligned}
2\left(\delta \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{d\delta}{dt}\right) &= (-a_3 + ib_4)\delta^2 - 2ib_2\alpha\delta - (a_3 + ib_4)\,\alpha^2,\\
2\left(\gamma \frac{d\beta}{dt} - \beta \frac{d\gamma}{dt}\right) &= (b_3 + ia_4)\,\gamma^2 - 2ia_2\beta\gamma - (-b_3 + ia_4)\beta^2,
\end{aligned}
\right.
$$

et qui détermineront respectivement les rapports $\frac{\alpha}{\delta}$ et $\frac{\beta}{\gamma}\cdot$ Si l'on se reporte aux formules (13), on constate que ces rapports mutuels sont *les paramètres des deux familles de génératrices rectilignes de la quadrique représentée par l'équation* (12).

Il est facile maintenant d'avoir la solution générale du système proposé. Si α, δ et α_1, δ_1 sont deux systèmes particuliers de solutions du système (21) qu'on pourra, pour plus de netteté, supposer liés par la relation

$$
(23) \qquad \alpha\delta_1 - \delta\alpha_1 = 1,
$$

la solution la plus générale de ce système sera donnée par les formules

$$
(24) \qquad \alpha' = c\alpha + c_1\alpha_1, \qquad \delta' = c\delta + c_1\delta_1,
$$

où c, c_1 désigneront deux constantes arbitraires.

De même, si β, γ; β_1, γ_1 désignent deux systèmes de solutions du système (21′) liés également par la relation

$$
(25) \qquad \beta\gamma_1 - \gamma\beta_1 = 1,
$$

la solution générale de ce système aura pour expression

$$
(26) \qquad \beta' = c_2\beta + c_3\beta_1, \qquad \gamma' = c_2\gamma + c_3\gamma_1,
$$

où c_2, c_3 seront deux nouvelles constantes.

En portant toutes ces valeurs dans les formules (15), on aura

$$
\left\{
\begin{aligned}
2x_1 &= cc_2(\alpha\beta + \gamma\delta) + cc_3(\alpha\beta_1 + \delta\gamma_1) + c_1c_2(\alpha_1\beta + \delta_1\gamma) + c_1c_3(\alpha_1\beta_1 + \gamma_1\delta_1),\\
2x_2 &= icc_2(\gamma\delta - \alpha\beta) + icc_3(\delta\gamma_1 - \alpha\beta_1) + ic_1c_2(\gamma\delta_1 - \beta\alpha_1) + ic_1c_3(\gamma_1\delta_1 - \alpha_1\beta_1),\\
2x_3 &= cc_2(\alpha\gamma - \beta\delta) + cc_3(\alpha\gamma_1 - \delta\beta_1) + c_1c_2(\gamma\alpha_1 + \beta\delta_1) + c_1c_3(\alpha_1\gamma_1 - \beta_1\delta_1),\\
2x_4 &= icc_2(\alpha\gamma + \beta\delta) + icc_3(\alpha\gamma_1 + \delta\beta_1) + ic_1c_2(\gamma\alpha_1 + \beta\delta_1) + ic_1c_3(\alpha_1\gamma_1 + \beta_1\delta_1).
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules, à la vérité, ne fournissent que les solutions pour lesquelles la somme des carrés est nulle. Mais il est bien facile de passer au cas général. Il suffit d'y remplacer les produits $c_i c_k$ par des constantes quelconques. On obtient ainsi la solution générale par les formules

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= C(\alpha\beta+\gamma\delta)+C_1(\alpha_1\beta_1+\gamma_1\delta_1)+D(\beta\alpha_1+\gamma\delta_1)+D_1(\alpha\beta_1+\delta\gamma_1),\\ x_2 &= iC(\gamma\delta-\alpha\beta)+iC_1(\gamma_1\delta_1-\alpha_1\beta_1)+iD(\gamma\delta_1-\beta\alpha_1)+iD_1(\delta\gamma_1-\alpha\beta_1),\\ x_3 &= C(\alpha\gamma-\beta\delta)+C_1(\alpha_1\gamma_1-\delta_1\beta_1)+D(\gamma\alpha_1-\beta\delta_1)+D_1(\alpha\gamma_1-\delta\beta_1),\\ x_4 &= iC(\alpha\gamma+\beta\delta)+iC_1(\alpha_1\gamma_1+\beta_1\delta_1)+iD(\gamma\alpha_1+\beta\delta_1)+iD_1(\alpha\gamma_1+\delta\beta_1),\end{aligned}\right.$$

où C, C_1, D, D_1 désignent des constantes entièrement arbitraires. Il est facile de voir qu'on aura

$$(29)\qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4CC_1-4DD_1.$$

La méthode précédente ne paraît guère susceptible de s'étendre au cas où n est quelconque. Je me propose de montrer cependant que la considération des solutions pour lesquelles la somme des carrés des inconnues est nulle conduit encore à des simplifications pour les valeurs les moins élevées de n. J'aurai également l'occasion de montrer qu'à la considération d'un système d'équations linéaires et à celle de son système adjoint, il faut lier l'étude de certains systèmes intermédiaires qui admettent comme solutions les divers déterminants qu'on peut former avec un groupe plus ou moins étendu de solutions particulières.

II.

2. Les résultats contenus dans l'article précédent ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans la séance du 4 janvier 1909 (*Comptes rendus*, t. CXLVIII, p. 16).

Depuis, dans une Note insérée aux *Comptes rendus* du 8 février suivant (p. 332 du même Tome), un géomètre des plus habiles, M. Vessiot, est revenu sur ce sujet pour lui appliquer les méthodes tirées de la théorie des groupes de Sophus Lie, qu'il avait déjà proposées dans un Mémoire antérieur. Je voudrais, à mon tour, terminer mon étude et faire connaître à la fois les méthodes et les résultats que j'ai sommairement annoncés au cours et à la fin de ma première Communication.

Les méthodes reposent toujours sur la considération des génératrices rectilignes des surfaces du second degré dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. On sait, et il a été établi par MM. Corrado Segre dans le Tome XXXVI des *Mémoires de Turin* (2ᵉ série), par M. Émile Borel dans les *Annales de l'École Normale* (1892), qu'on peut étendre à un espace à un nombre quelconque de dimensions la théorie des génératrices rectilignes des quadriques.

Si l'on considère, par exemple, l'équation quadratique *homogène*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = 0,$$

contenant un nombre pair de variables, on peut toujours la ramener à la forme

$$(3)\qquad p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = 0,$$

où les p_i, x_k désignent $2n$ fonctions linéairement indépendantes, et l'on obtient alors deux systèmes de génératrices rectilignes, l'un défini par des équations

$$(4)\qquad p_i = \sum_k a_{ik} x_k,$$

où l'on a

$$(5)\qquad a_{ik} + a_{ki} = 0;$$

l'autre, qui dériverait des équations (4) par l'échange d'une des quantités p_i avec la quantité correspondante x_i. Si, dans l'un ou l'autre système, on échange un nombre *pair* de quantités p_i avec les quantités de même indice x_i, on retombe sur une génératrice rectiligne de même système.

Supposons au contraire qu'on envisage une relation quadratique homogène, à un nombre impair de variables,

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}) = 0,$$

on pourra la ramener à la forme

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n + x_{n+1}^2 = 0, \tag{6}$$

et l'on n'obtiendra cette fois *qu'un seul* système de génératrices rectilignes, défini, par exemple, par les formules

$$\left\{ \begin{aligned} p_1 &= \sum a_{ik} x_k, \\ x_{n+1} &= \sum a_{n+1,k} x_k \end{aligned} \right. \tag{7}$$

avec les conditions

$$a_{ik} + a_{ki} = 0. \tag{8}$$

Au reste, ce cas se ramène au précédent si l'on identifie l'une des quantités p_i avec la quantité de même indice x_i.

Ces explications préliminaires aideront le lecteur à mieux comprendre la méthode que nous allons employer.

3. Revenons au système (1) qui admet l'intégrale quadratique

$$\sum x_i^2 = \text{const.}$$

Comme dans le cas où $n = 4$, nous ne considérerons que les solutions du système pour lesquelles on a

$$\sum x_i^2 = 0. \tag{9}$$

On verra facilement qu'elles fourniront sans intégration nouvelle la solution générale.

Pour éviter l'emploi des imaginaires, je supposerai qu'on ait ramené la relation (9) à la forme (3), dans le cas où le nombre des variables est pair, à la forme (6) si le nombre des variables est impair. Envisageons d'abord la première hypothèse, et supposons que la relation (9) ait été réduite à la forme

$$(10)\qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = 0.$$

Le système (1) pourra alors s'écrire comme il suit :

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum \alpha_{ik} x_k + \sum a_{ik} p_k,$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum \beta_{ik} p_k + \sum b_{ik} x_k,$$

et, pour qu'il puisse admettre l'intégrale (10), il faudra qu'on ait

$$\alpha_{ik} + \beta_{ki} = 0, \qquad a_{ik} + a_{ki} = 0, \qquad b_{ik} + b_{ki} = 0.$$

On pourra donc lui donner la forme

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \quad \sum \alpha_{ik} x_k + \sum a_{ik} p_k, \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\sum \alpha_{ki} p_k + \sum b_{ik} x_k, \end{cases}$$

les α_{ik} étant des fonctions quelconques de t et les a_{ik}, b_{ik} étant, au contraire, assujetties à vérifier les conditions

$$(12)\qquad a_{ik} + a_{ki} = 0, \qquad b_{ik} + b_{ki} = 0,$$

pour toutes les valeurs des indices i et k.

4. Cela posé, je considère une génératrice rectiligne de la quadrique, définie par les équations

$$(13)\qquad p_i = \sum_k u_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec les conditions

$$(14)\qquad u_{ik} + u_{ki} = 0,$$

et je vais déterminer les u_{ik} par la condition que *la génératrice porte le plus grand nombre possible de solutions du système* (11).

Pour cela, je remarque que, si l'on substitue les valeurs des p_i dans la première des équations (11), on obtient d'abord un système

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_k \mathrm{H}_{ik} x_k, \tag{15}$$

où l'on a

$$\mathrm{H}_{ik} = \alpha_{ik} + \sum_\mu a_{i\mu} u_{\mu k},$$

de sorte que, si les u_{ik} sont connues, les x_i devront déjà satisfaire au système (15). Pour qu'ils restent les plus généraux possibles, il faudra donc que les autres équations, celles qu'on obtient en portant les valeurs des p_i dans la seconde équation (11), soient identiquement vérifiées. On est ainsi conduit, par un calcul facile, aux équations

$$\frac{du_{ik}}{dt} = \sum_\mu (\alpha_{\mu k} u_{\mu i} - \alpha_{\mu i} u_{\mu k}) + b_{ik} + \sum_\mu \sum_{\mu'} a_{\mu\mu'} u_{\mu i} u_{\mu' k}, \tag{16}$$

qui détermineront les quantités u_{ik} et qui sont en même nombre que ces inconnues.

5. Appliquée au cas où $n = 2$ et aux deux systèmes de génératrices, cette méthode fournirait les résultats de notre première Communication. Envisageons maintenant l'hypothèse $n = 3$.

La relation identique deviendra ici

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0.$$

Pour ne pas compliquer les notations, nous remplacerons u_{32}, u_{13}, u_{21} respectivement par v_1, v_2, v_3. Nous aurons alors les équations d'une génératrice

$$p_1 = v_2 x_3 - v_3 x_2, \qquad p_2 = v_3 x_1 - v_1 x_3, \qquad p_3 = v_1 x_2 - v_2 x_1, \tag{17}$$

puis la formule (16) donnera

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} = {} & b_{32} + \alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} v_2 + \alpha_{13} v_3 \\ & - v_1(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + a_{23} v_1 + a_{31} v_2 + a_{12} v_3) \end{aligned} \tag{18}$$

et les deux équations analogues.

Posons

$$v_i = \frac{V_i}{V}$$

et déterminons V par la condition

$$\frac{dV}{dt} = (h + \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})V + a_{23}V_1 + a_{31}V_2 + a_{12}V_3;$$

h étant une fonction arbitraire dont on pourra disposer à volonté, nous serons ramenés au système suivant :

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = (b + \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})V + a_{23}V_1 + a_{31}V_2 + a_{12}V_3, \\ \dfrac{dV_1}{dt} = b_{32}V + (h + \alpha_{11})V_1 + \alpha_{12}V_2 + \alpha_{13}V_3, \\ \dfrac{dV_2}{dt} = b_{13}V + \alpha_{21}V_1 + (h + \alpha_{22})V_2 + \alpha_{23}V_3, \\ \dfrac{dV_3}{dt} = b_{21}V + \alpha_{31}V_1 + \alpha_{32}V_2 + (h + \alpha_{33})V_3, \end{cases}$$

qui est linéaire, homogène et du quatrième ordre seulement. Mais ce système a perdu la propriété d'admettre une intégrale quadratique et, lorsqu'on en connaîtra les solutions, il restera encore à intégrer le suivant :

$$(20)\quad \begin{cases} V\dfrac{dx_1}{dt} = (\alpha_{11}V + a_{12}V_3 - a_{13}V_2)x_1 + (\alpha_{12}V + a_{13}V_1)x_2 + (\alpha_{13}V - a_{12}V_1)x_3, \\ V\dfrac{dx_2}{dt} = (\alpha_{21}V - a_{23}V_2)x_1 + (\alpha_{22}V + a_{23}V_1 - a_{21}V_2)x_2 + (\alpha_{23}V + a_{21}V_2)x_3, \\ V\dfrac{dx_3}{dt} = (\alpha_{31}V + a_{32}V_3)x_1 + (\alpha_{32}V - a_{31}V_3)x_2 + (\alpha_{33}V + a_{31}V_2 - a_{32}V_1)x_3, \end{cases}$$

qui déterminera les solutions portées sur la génératrice rectiligne définie par les équations (17).

Cette réduction revient au fond à celle qui a été signalée par M. Vessiot à la page 334 du Tome CXVIII des *Comptes rendus*.

6. La méthode que nous venons de suivre s'applique, presque sans modification, au cas où le nombre total des variables est impair. Alors on peut prendre pour la forme réduite de la relation quadratique l'expression

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_{n-1} x_{n-1} + x_n^2 = 0, \tag{21}$$

et il n'y aura qu'à supposer

$$p_n = x_n$$

dans les calculs précédents. La comparaison des valeurs de $\frac{dx_n}{dt}$, $\frac{dp_n}{dt}$ dans les formules (11) nous donnera les relations supplémentaires entre les coefficients

$$\alpha_{nk} - b_{nk} = 0, \qquad \alpha_{kn} + a_{nk} = 0. \tag{22}$$

Ici les équations (13) se partageront. On aura d'abord

$$p_i = \sum_k u_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{23}$$

puis

$$x_n = \sum_k u_{nk} x_k. \tag{24}$$

Les équations (16) subsisteront sans modification; mais le système des équations (15)

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_k \mathrm{H}_{ik} x_k \tag{25}$$

pourra être ramené à ne contenir que les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, la variable x_n étant fournie par l'équation (24).

Ainsi, dans le cas de cinq variables comme dans celui de six variables, on sera ramené à un système linéaire à quatre inconnues; mais le système complémentaire analogue au système (20) ne contiendra plus que deux inconnues.

7. Revenons maintenant au cas où il y a un nombre pair de variables et supposons $n = 4$; alors il y a six quantités u_{ik} et le système (16) se composera seulement de six équations. Il est vrai qu'il ne sera pas linéaire. Je n'examinerai pas comment, par l'addition de certaines

inconnues, on parviendrait à le transformer en un autre système linéaire, et je me bornerai à faire remarquer ce fait curieux que, comparé au système primitif, il réalise un abaissement de l'ordre, puisque le système proposé se composait de huit équations à huit inconnues, tandis que le système (16) ne contient plus que six inconnues. Il est vrai qu'après l'avoir intégré, il restera encore à obtenir les solutions d'un système linéaire à quatre inconnues, le système (15); mais c'est précisément dans cette décomposition des difficultés du problème que réside l'intérêt de la méthode que nous avons suivie.

8. Les résultats que nous venons d'exposer s'appliquent tous à un système linéaire particulier, caractérisé par la propriété d'admettre une intégrale quadratique. Il me paraît intéressant de les rattacher à des remarques et à des méthodes générales, d'ailleurs très élémentaires, embrassant tous les systèmes linéaires homogènes sans exception.

Dans la Note qui a été insérée en 1880 à la page 524 du Tome XC des *Comptes rendus*, j'ai donné une généralisation très simple de l'équation adjointe de Lagrange, en montrant qu'il y a lieu d'associer à tout système linéaire

$$(26) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum a_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

le système suivant :

$$(27) \qquad \frac{du_i}{dt} = -\sum a_{ki} u_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

que j'ai appelé le *système adjoint*. En s'inspirant des idées qui ont été indiquées par Clebsch dans son Mémoire : *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie,* publié en 1872 dans les *Mémoires de la Société de Gœttingue*, on peut étendre beaucoup la notion du système adjoint.

Utilisant les notions fondamentales introduites par la méthode des polaires réciproques de Poncelet et la géométrie des droites de Plücker, Clebsch se propose, dans ce Mémoire, de formuler tout au moins l'énoncé du problème fondamental de la théorie des invariants, et il est conduit à considérer dans un espace à un nombre quelconque de dimensions toutes les *multiplicités linéaires*, d'un nombre moindre de dimensions, qui peuvent y entrer.

Si, par exemple, l'espace est à $n-1$ dimensions, il faudra y envisager : 1° la multiplicité de dimension nulle formée par un point unique; 2° les multiplicités linéaires à une, deux, ..., $n-2$ dimensions déterminées par deux, trois, ..., $n-1$ points. Dans l'espace ordinaire, elles forment le point, la ligne droite, le plan.

Si l'on étudie ces multiplicités au point de vue de la méthode des polaires réciproques, en cherchant pour chacune d'elles les multiplicités d'ordre $n-2$ qui la contiennent tout entière, on verra facilement qu'une multiplicité de la $k^{\text{ième}}$ dimension est contenue dans des multiplicités de la $(n-2)^{\text{ième}}$ dimension qui forment un ensemble linéaire à $n-k-2$ paramètres.

Analytiquement, la méthode de Clebsch revient à considérer, à côté des multiplicités de dimensions nulles formées par des points tels que les suivants :

$$(28)\qquad \left\{\begin{array}{llll} x_1^1, & x_2^1, & \ldots, & x_n^1, \\ x_1^2, & x_2^2, & \ldots, & x_n^2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \ldots, & x_n^{n-1}, \\ x_1^n, & x_2^n, & \ldots, & x_n^n, \end{array}\right.$$

les multiplicités linéaires à une, deux, ... dimensions formées avec deux, trois, ... de ces points. Par analogie avec ce qui se passe dans l'espace ordinaire, on est conduit à prendre pour coordonnées de ces multiplicités certains déterminants formés avec les coordonnées des points qui les déterminent. Par exemple, pour la multiplicité d'ordre 2 assujettie à contenir les trois points de coordonnées

$$\begin{array}{llll} x_1^1, & x_2^1, & \ldots, & x_n^1, \\ x_1^2, & x_2^2, & \ldots, & x_n^2, \\ x_1^3, & x_2^3, & \ldots, & x_n^3, \end{array}$$

les coordonnées seront les $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ déterminants

$$p_{ikl} = \begin{vmatrix} x_i^1 & x_k^1 & x_l^1 \\ x_i^2 & x_k^2 & x_l^2 \\ x_i^3 & x_k^3 & x_l^3 \end{vmatrix}$$

entre lesquels existent, comme on sait, de nombreuses relations.

Si l'on associe au Tableau (28) le Tableau suivant :

$$(29)\qquad \begin{cases} u_1^1, & u_2^1, & \ldots, & u_n^1, \\ u_1^2, & u_2^2, & \ldots, & u_n^2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ u_1^n, & u_2^n, & \ldots, & u_n^n, \end{cases}$$

dont les éléments sont déterminés par les relations

$$(30)\qquad \sum_i u_i^h x_i^h = 1,$$

$$(31)\qquad \sum_i u_i^h x_i^{h'} = 0 \qquad (h \neq h'),$$

chaque mineur du Tableau (28) est proportionnel au coefficient du mineur correspondant dans le Tableau (29), de sorte que les coordonnées $p_{ikl\ldots}$ d'une multiplicité linéaire quelconque peuvent s'exprimer, soit en fonction des x_i^k, soit en fonction des u_i^h par les déterminants dont nous venons d'établir les corrélations.

9. Après avoir rappelé ces idées de Clebsch, appliquons-les à la question actuelle et revenons au système linéaire (26).

Supposons que le Tableau (28) définisse un système fondamental d'intégrales de ce système, et cherchons à définir directement toutes les multiplicités de dimensions quelconques qui y sont contenues. Commençons par les plus simples, celles dont les coordonnées seraient formées avec les déterminants de deux systèmes de solutions, et posons

$$(32)\qquad u_{ik} = \begin{vmatrix} x_i^1 & x_k^1 \\ x_i^2 & x_k^2 \end{vmatrix}.$$

On aura

$$u_{ik} + u_{ki} = 0$$

et la différentiation montre très simplement que les u_{ik} satisfont aux équations suivantes :

$$(33)\qquad \frac{du_{ik}}{dt} = \sum a_{i\mu}\, u_{\mu k} - \sum a_{k\mu}\, u_{\mu i},$$

qui forment un système linéaire à $\frac{n(n-1)}{2}$ inconnues définissant les multiplicités à une dimension contenues dans la multiplicité formée par l'ensemble des inconnues.

D'après leur définition même, les fonctions u_{ik} satisfont nécessairement à toutes les relations telles que la suivante :

$$\Delta_{iklm} = u_{ik}u_{lm} + u_{il}u_{mk} + u_{im}u_{kl} = 0.$$

Or, l'emploi des équations (33) nous permet de démontrer les formules

$$(34)\qquad \frac{d\Delta_{iklm}}{dt} = \sum_{\mu} a_{i\mu}\Delta_{\mu klm} + \sum_{\mu} a_{k\mu}\Delta_{i\mu lm} + \sum_{\mu} a_{l\mu}\Delta_{ik\mu m} + \sum_{\mu} a_{m\mu}\Delta_{ikl\mu},$$

qui montrent que le système (33), envisagé en lui-même et indépendamment de son origine, ne conduit pas nécessairement à des valeurs nulles des Δ_{iklm}. Ce résultat était facile à prévoir; mais il sera avantageux dans certains cas de substituer ou d'adjoindre le système (34) aux équations (33).

Supposons, par exemple, $n = 4$. Il y aura donc une seule quantité Δ, Δ_{1234}, et l'on aura

$$\frac{d\Delta}{dt} = (a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44})\Delta.$$

Comme on peut toujours, en employant une quadrature, faire en sorte qu'on ait

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 0,$$

on reconnaît que, pour le cas particulier où $n = 4$, le système linéaire à six inconnues (32) admettra une intégrale quadratique et sera réductible, par conséquent, à ceux qui ont été l'occasion de cette étude. C'est le résultat inverse de celui qui a été établi à l'article 3.

10. Après ce cas particulier, élevons-nous tout de suite au cas le plus général, et voyons comment on pourrait déterminer les multiplicités à un nombre quelconque de dimensions formées avec les solutions du système proposé. Pour ne pas compliquer les notations,

bornons-nous à envisager par exemple les expressions

$$(35)\qquad u_{iklm} = \begin{vmatrix} x_i^1 & x_k^1 & x_l^1 & x_m^1 \\ x_i^2 & x_k^2 & x_l^2 & x_m^2 \\ x_i^3 & x_k^3 & x_l^3 & x_m^3 \\ x_i^4 & x_k^4 & x_l^4 & x_m^4 \end{vmatrix}.$$

En différentiant on aura le système des équations propres à les déterminer :

$$(36)\qquad \frac{du_{iklm}}{dt} = \sum_\mu a_{i\mu} u_{\mu klm} + \sum_\mu a_{k\mu} u_{i\mu lm} + \sum_\mu a_{l\mu} u_{ik\mu m} + \sum_\mu a_{m\mu} u_{ikl\mu}.$$

On voit immédiatement le mode de formation de ces équations et le moyen de les étendre à un nombre quelconque d'indices. Le nombre de ces indices pouvant varier de 2 à $n-1$, on aura ainsi $n-2$ systèmes linéaires distincts. Nous dirons qu'*ils sont associés au système proposé*.

Il importe de remarquer d'abord que le dernier ne diffère pas essentiellement du système adjoint.

En effet, d'après ce que nous savons du système adjoint, les quantités u_i^k du Tableau (29), qui satisfont aux relations (30) et (31), forment un système fondamental de solutions du système adjoint. Or, si l'on résout ces équations (30) en posant, suivant la notation de Kronecker,

$$\Delta = \text{dét.}\,|x_k^i|,$$

on aura évidemment

$$u_k^i = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial x_k^i}.$$

Les mineurs $\frac{\partial\Delta}{\partial x_k^i}$ sont précisément les inconnues qui figurent dans notre dernier système associé. Quant à Δ, on peut le déterminer, comme on sait, par une quadrature. Notre dernier système associé est donc identique au fond au système *adjoint*.

Quant à ceux qui précèdent, il résulte évidemment des relations établies à l'article 8 qu'ils pourraient tous se déduire, dans un ordre inverse, du système adjoint. L'avant-dernier, par exemple, serait le premier qui se déduirait du système adjoint, et ainsi de suite.

11. Dès que le nombre des variables croîtra quelque peu, tous les systèmes auxiliaires précédents comprendront un nombre rapidement croissant d'inconnues. Ces inconnues, par exemple, seront au nombre de 15 ou de 20 dès que n sera égal à 6.

Dans tous les cas, elles seront liées, il est vrai, par un grand nombre de relations. Mais ces relations seront plus ou moins simples, plus ou moins dépendantes les unes des autres, et leur considération peut introduire de grandes complications. Nous allons montrer qu'on peut substituer à ces systèmes associés d'autres systèmes d'équations différentielles, qui à la vérité ne seraient plus linéaires, mais où les fonctions inconnues seront indépendantes, en ce sens que leurs valeurs initiales pourront être choisies arbitrairement. Ces systèmes nous apparaissent comme la véritable généralisation de l'équation de Riccati.

Envisageons à cet effet un système linéaire homogène de la forme la plus générale tel que le système (26), et considérons un système fondamental de solutions donné par le Tableau (28). L'intégrale générale du système sera de la forme

$$(38)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = C_1 x_1^1 + C_2 x_1^2 + \ldots + C_n x_1^n, \\ x_2 = C_1 x_2^1 + C_2 x_2^2 + \ldots + C_n x_2^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = C_1 x_n^1 + C_2 x_n^2 + \ldots + C_n x_n^n. \end{array}\right.$$

Établissons, entre les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, p relations linéaires

$$(39)\qquad \left\{\begin{array}{l} C_1 = h_{11} C_{p+1} + h_{12} C_{p+2} + \ldots + h_{1,n-p} C_n, \\ C_2 = h_{21} C_{p+1} + h_{22} C_{p+2} + \ldots + h_{2,n-p} C_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_p = h_{p1} C_{p+1} + h_{p2} C_{p+2} + \ldots + h_{p,n-p} C_n, \end{array}\right.$$

où les h_{ik} désignent des constantes quelconques, au nombre de $p(n-p)$. Les x_i deviendront des fonctions linéaires de $C_{p+1}, C_{p+2}, \ldots, C_n$, et l'on aura

$$(40)\qquad x_i = v_{i1} C_{p+1} + v_{i2} C_{p+2} + \ldots + v_{i,n-p} C_n,$$

les v_{ik} ayant pour valeurs

$$(41)\qquad v_{ik} = x_i^{p+k} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} h_{\mu k} x_i^{\mu}.$$

Par suite on aura, entre les x_i, p relations indépendantes des constantes C_{p+h}, et p relations seulement. On peut d'ailleurs former ces relations et les écrire comme il suit :

$$(42)\qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} x_i & v_{i1} & v_{i2} & v_{i,n-p} \\ x_{p+1} & v_{p+1,1} & \dots & v_{p+1,n-p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & v_{n1} & \dots & v_{n,n-p} \end{vmatrix} = 0,$$

i pouvant prendre toutes les valeurs $1, 2, \ldots, p$.

On peut résoudre les équations précédentes par rapport aux x_i, et l'on aura

$$(43)\qquad x_i = w_{i1}x_{p+1} + w_{i2}x_{p+2} + \ldots + w_{i,n-p}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

en posant, pour abréger,

$$(44)\qquad w_{ik} = -\frac{\partial \Delta_i}{\partial x_{p+1}} : \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_i}.$$

On peut donc considérer comme connue la forme des expressions w_{ik} en fonction des constantes arbitraires h_{ik}; absolument comme on connaît, dans le cas de l'équation de Riccati, la forme de l'intégrale générale en fonction de la constante arbitraire.

Or on peut former aisément les équations différentielles qui déterminent les quantités w_{ik}.

12. Remarquons d'abord que, si l'on élimine $x_1, \ldots, x_p$ à l'aide des équations (43), on donnera aux équations différentielles proposées la forme suivante :

$$(45)\qquad \frac{dx_i}{dt} = H_{i1}x_{p+1} + H_{i2}x_{p+2} + \ldots + H_{i,n-n}x_n,$$

où l'on a

$$(46)\qquad H_{ik} = a_{i,p+k} + a_{i1}w_{1k} + a_{i2}w_{2k} + \ldots + a_{ip}w_{pk}.$$

Si d'abord on met à part les p premières équations (45), en y remplaçant les x_i par leur valeur tirée des équations (43), il viendra

$$\sum x_{p+k}\left(\frac{dw_{ik}}{dt} - H_{ik} + \sum w_{i\mu}H_{p+\mu,k}\right) = 0.$$

Comme il ne doit y avoir aucune relation linéaire entre les x_{p+k}, il faut donc qu'on ait

$$\frac{d\varpi_{ik}}{dt} = \mathrm{H}_{ik} - \sum_{\mu} \varpi_{i\mu} \mathrm{H}_{p+\mu,k}. \tag{47}$$

Cela donne un système de $p(n-p)$ équations différentielles du premier ordre propre à déterminer les $p(n-p)$ fonctions ϖ_{ik}. Elles ne sont pas linéaires, mais, comme il arrive pour l'équation de Riccati, leurs seconds membres sont du second degré par rapport aux fonctions inconnues.

Supposons qu'on les ait intégrées. Alors les $n-p$ dernières équations (45) formeront un système linéaire

$$\frac{dx_{p+k}}{dt} = \mathrm{H}_{p+k,1} x_{p+1} + \ldots + \mathrm{H}_{p+k,n-p} x_n \tag{48}$$

qui déterminera les valeurs les plus générales des $n-p$ inconnues $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Quant aux p premières $x_1, x_2, \ldots, x_p$, elles s'obtiendront ensuite sans intégration nouvelle à l'aide des relations linéaires (43).

13. Il nous reste maintenant à établir la relation que nous avons énoncée à l'article 11, c'est-à-dire à montrer que la nouvelle méthode de solution équivaut à celle que nous avons déduite de la considération des systèmes associés. Cela ne présente aucune difficulté. Si nous substituons en effet, dans les formules (43), successivement $n-p$ systèmes de solutions du système fondamental, choisis comme on voudra,

$$x_1^i, \quad x_2^i, \quad x_3^i, \quad \ldots, \quad x_n^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-p),$$

on aura $n-p$ équations

$$x_h^i = \sum_{\mu=1}^{\mu=n-p} \varpi_{h\mu} x_{p+\mu}^i,$$

qui détermineront les $\varpi_{h\mu}$ en fonction de ces solutions. Le dénominateur commun des valeurs des $\varpi_{h\mu}$ sera

$$\left| \begin{matrix} x_{p+1}^1 & x_{p+2}^1 & \ldots & x_n^1 \end{matrix} \right|$$

Quant aux numérateurs, on les obtiendra en remplaçant, dans une des colonnes du déterminant précédent, l'indice inférieur $p+k$ par un indice au plus égal à p.

Ces numérateurs et ces dénominateurs ne sont autres, par conséquent, que les déterminants qui entrent dans les solutions générales d'un même système associé. Ce sont ceux de ces déterminants entre lesquels il n'existe, *a priori*, aucune relation.

14. Je laisserai au lecteur le soin de rapprocher les remarques générales que je viens de présenter des méthodes que j'ai appliquées au cas spécial où il y a une intégrale quadratique; mais je terminerai en donnant deux propositions relatives aux systèmes associés.

La première n'est qu'une généralisation d'un théorème que j'avais établi pour l'équation de Riccati dans le Volume dédié à la mémoire du P. Chelini et que j'ai étendu ensuite dans le Tome XC des *Comptes rendus* aux systèmes linéaires les plus généraux.

Sous une forme abrégée, ce théorème s'énonce comme il suit :

Si un système linéaire homogène d'équations différentielles admet une intégrale algébrique, nécessairement homogène, toutes les formes adjointes (covariants, contrevariants, formes mixtes) donnent encore des intégrales du même système.

Les formes adjointes que j'avais ainsi considérées ne contenaient que deux espèces différentes de variables, par exemple des coordonnées de points et des coordonnées de plans dans l'espace ordinaire, L'introduction des systèmes associés permet d'étendre le théorème aux formes invariantes les plus générales telles que Clebsch les a définies, c'est-à-dire à celles qui contiennent les coordonnées de toutes les multiplités linéaires qui peuvent exister dans un espace donné. Dans l'espace ordinaire, ces formes pourraient renfermer, ensemble ou séparément, non seulement des coordonnées de points et de plans, mais aussi des coordonnées de lignes droites.

Pour ne donner qu'un exemple, si le système fondamental admet une intégrale quadratique, il en est de même de tous les systèmes associés.

15. La seconde proposition sur laquelle j'insisterai est la suivante :

Quand on peut intégrer le système fondamental, on peut aussi intégrer complètement chacun des systèmes associés, considéré indépendamment de tous les autres.

Parmi les différentes manières de la démontrer, je choisirai la suivante :

Si l'on soumet le système fondamental à une substitution linéaire quelconque, il est clair que tous les systèmes associés seront soumis à une substitution linéaire dérivée de la première. Si on les soumet à cette substitution dérivée, ils demeureront les systèmes associés au nouveau système fondamental.

D'après cela, effectuons la substitution linéaire qui réduit le système fondamental à la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = 0. \tag{49}$$

Toutes les quantités a_{ik} étant devenues nulles, les systèmes associés prendront les formes suivantes :

$$\frac{du_{ik}}{dt} = 0, \qquad \frac{du_{ikl}}{dt} = 0, \qquad \ldots,$$

et pourront, par conséquent, être immédiatement intégrés.

Ainsi la réduction du système fondamental à la forme (49), c'est-à-dire son intégration, entraîne celle de tous les systèmes associés.

22 mars 1909.