Annales scientifiques de l'É.N.S.

L. Remy

Sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce d'une classe de surfaces algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 26 (1909), p. 259-274
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__259_0>

SUR LE NOMBRE

DES

INTÉGRALES DOUBLES DE SECONDE ESPÈCE

D'UNE

CLASSE DE SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. L. REMY.

Dans un Mémoire précédant celui-ci dans ces *Annales*, j'ai déterminé la valeur de l'invariant relatif ρ de M. Picard pour les surfaces qui représentent les couples de points d'une courbe algébrique, supposée non singulière; je me propose d'en déduire le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce des surfaces algébriques de cette classe par une généralisation de la méthode déjà indiquée dans le cas particulier d'une courbe de genre *trois*.

I.

1. Soit une courbe algébrique C, de genre p et d'équation $f(x,y)=0$, ayant pour intégrales normales de première espèce

$$\int g_1(\xi,\eta)\,d\xi, \qquad \ldots, \qquad \int g_p(\xi,\eta)\,d\xi.$$

Posons

$$u_k = \int^{x,y} g_k(\xi,\eta)\,d\xi + \int^{x',y'} g_k(\xi,\eta)\,d\xi \qquad (k=1, 2, \ldots, p),$$

et envisageons la surface définie en coordonnées homogènes par les équations

$$x_i = \Theta_i(u_1 + c_1, u_2 + c_2, \ldots, u_p + c_p) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où les quatre fonctions Θ_i sont des fonctions thêta normales de p variables, construites au moyen du Tableau de périodes des intégrales $\int g_k(\xi, \eta)\, d\xi$, de caractéristique nulle et d'ordre h, supposées sans zéro commun, et où $c_1, \ldots, c_p$ désignent des constantes arbitraires.

La surface algébrique S ainsi définie correspond point par couple à la courbe C, d'une manière univoque et sans courbe exceptionnelle; nous appliquerons à cette surface la formule fondamentale de M. Picard

$$\rho_0 = N - 4\pi - (m - 1) + 2r - (\rho - 1),$$

où m et N désignent respectivement l'ordre et la classe de la surface, π le genre d'une section plane arbitraire et r le nombre des intégrales de différentielles totales de seconde espèce de la surface.

La surface S considérée possède $2p$ intégrales de différentielles totales de seconde espèce

$$\int \gamma_k(x, y)\, dx + \gamma_k(x', y')\, dx' \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p),$$

$\gamma_k(\xi, \eta)\, d\xi$ désignant $2p$ différentielles de seconde espèce de la courbe C, linéairement indépendantes. D'autre part, d'après un théorème rappelé plus haut, l'invariant relatif ρ est égal à *deux* pour les surfaces dont les points admettent une correspondance univoque, sans point fondamental ni courbe exceptionnelle, avec les couples de points d'une courbe algébrique non unicursale, supposée non singulière.

2. Le degré m de la surface est égal au nombre des couples $(x, y), (x', y')$ communs aux deux correspondances définies par les équations

$$\Theta_i(u_1 + c_1, u_2 + c_2, \ldots, u_p + c_p) = 0,$$
$$\Theta_j(u_1 + c_1, u_2 + c_2, \ldots, u_p + c_p) = 0.$$

Or, le nombre des couples communs à deux correspondances algébriques symétriques entre deux points (x, y) et (x', y') d'une courbe de genre p a pour expression, d'après Hurwitz,

$$\alpha\alpha' - p\gamma\gamma',$$

α, γ et α', γ' désignant respectivement les entiers caractéristiques de ces correspondances.

D'ailleurs, si l'on considère d'une part la correspondance

$$\vartheta(u_1 + c_1,\ u_2 + c_2,\ \ldots,\ u_p + c_p) = 0$$

définie par la fonction normale du premier ordre et de caractéristique nulle ϑ, et, d'autre part, une correspondance du type

$$\Theta_h(u_1 + c_1,\ u_2 + c_2,\ \ldots,\ u_p + c_p) = 0$$

définie au moyen d'une fonction thêta d'ordre h, il est manifeste que les entiers caractéristiques α_1, γ_1 et α_h, γ_h de ces deux correspondances sont liés par les relations

$$\alpha_h = h\alpha_1 \qquad \text{et} \qquad \gamma_h = h\gamma_1.$$

Ceci posé, les limites inférieures des intégrales

$$G_k(x, y) = \int^{x, y} g_k(\xi, \eta)\, d\xi$$

peuvent être choisies de telle sorte que les relations

$$\pm u_k = \sum_{i=1}^{i=p-1} G_k(x_i, y_i) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

entraînent, comme conséquence, l'équation

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0,$$

et réciproquement. D'autre part il est possible, et cela d'une infinité de manières, de déterminer sur la courbe C un groupe de $(3p - 5)$ points (ξ_j, η_j) tels que

$$c_k = \sum_{j=1}^{j=3p-5} G_k(\xi_j, \eta_j) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p);$$

dès lors, l'équation

$$\Im(u_1 + c_1, u_2 + c_2, \ldots, u_p + c_p) = 0$$

est équivalente au système

$$G_k(x, y) + G_k(x', y') + \sum_{i=1}^{i=p-1} G_k(x_i, y_i) + \sum_{j=1}^{j=3p-5} G_k(\xi_j, \eta_j) = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p),$$

lequel exprime que les $(4p-4)$ points (x, y), (x', y'), (x_i, y_i) et (ξ_j, η_j) sont situés sur une courbe Γ d'ordre $(2n-6)$, biadjointe à la courbe C (n désignant l'ordre de C).

En définitive, les couples de points (x, y), (x', y'), définis par l'équation considérée, sont découpés sur la courbe C par un faisceau de courbes de la famille Γ passant par $(3p-5)$ points fixes de C; de cette définition géométrique, il résulte que

$$\alpha_1 = p \quad \text{et} \quad \gamma_1 = 1,$$

d'où

$$\alpha_h = ph \quad \text{et} \quad \gamma_h = h.$$

Dès lors, l'application de la formule de Hurwitz donne, pour le nombre des points communs à deux sections planes de la surface S,

$$m = (\alpha_h)^2 - p(\gamma_h)^2 = p(p-1)h^2.$$

3. Nous aurons également recours à la formule de Hurwitz pour déterminer le genre π d'une section plane arbitraire de la surface. Si l'on remarque en effet que, sur cette section plane, les groupes canoniques $G_{2\pi-2}$ sont découpés par les surfaces sous-adjointes d'ordre $(m-3)$, il suffit de connaître le nombre des points de rencontre de la section plane avec une telle surface, ou, ce qui revient au même, avec l'ensemble d'un plan et d'une surface du système canonique.

Or, les intégrales doubles de première espèce de la surface S étant de la forme

$$\iint du_i\, du_k = \iint [g_i(x, y) g_k(x', y') - g_k(x, y) g_i(x', y')]\, dx\, dx'$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, p),$$

la courbe générale du système canonique est définie par la correspondance

$$\sum_i \sum_k a_{ik}[g_i(x,y)g_k(x',y') - g_k(x,y)g_i(x',y')] = 0.$$

Cette correspondance associe à un point donné (x, y) les points d'intersection (x', y') de la courbe C avec une adjointe d'ordre $(n-3)$ passant par le point (x, y), d'où l'on déduit que les entiers caractéristiques α_0, γ_0 d'une courbe du système canonique sont respectivement égaux à

$$\alpha_0 = 2p - 3 \quad \text{et} \quad \gamma_0 = 1.$$

D'autre part, les entiers caractéristiques d'une section plane ont pour valeurs

$$\alpha_h = ph \quad \text{et} \quad \gamma_h = h;$$

de là résulte que

$$2\pi - 2 = ph(2p - 3 + ph) - ph(1 + h),$$

d'où

$$\pi = \frac{p(p-1)}{2} h^2 + p(p-2)h + 1.$$

4. Déterminons enfin la classe N de la surface. Les points de contact des plans tangents menés à S par la droite d'intersection de deux plans ayant respectivement pour équations $\Theta = 0$ et $\theta = 0$ sont définis par les conditions

$$(\mathrm{E}) \quad \frac{\Theta}{\theta} = \frac{\dfrac{\partial\Theta}{\partial u_1} + \dfrac{\partial\Theta}{\partial u_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial u_1} + \ldots + \dfrac{\partial\Theta}{\partial u_p}\dfrac{\partial u_p}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial u_1} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial u_1} + \ldots + \dfrac{\partial\theta}{\partial u_p}\dfrac{\partial u_p}{\partial u_1}} = \frac{\dfrac{\partial\Theta}{\partial u_2} + \dfrac{\partial\Theta}{\partial u_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial u_2} + \ldots + \dfrac{\partial\Theta}{\partial u_p}\dfrac{\partial u_p}{\partial u_2}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial u_2} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial u_2} + \ldots + \dfrac{\partial\theta}{\partial u_p}\dfrac{\partial u_p}{\partial u_2}},$$

les paramètres u_1 et u_2 étant pris pour variables indépendantes. On a, d'ailleurs,

$$\frac{\partial u_i}{\partial u_1} = \frac{[2, i]}{[1, 2]} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_i}{\partial u_2} = \frac{[1, i]}{[2, 1]}$$

en désignant par la notation $[i, k]$ le déterminant

$$g_i(x,y)g_k(x',y') - g_k(x,y)g_i(x',y').$$

Les équations (E) peuvent se mettre sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Theta\left[\frac{\partial\theta}{\partial u_1}[1,2]+\frac{\partial\theta}{\partial u_3}[2,3]+\ldots+\frac{\partial\theta}{\partial u_p}[2,p]\right]\\
&-\theta\left[\frac{\partial\Theta}{\partial u_1}[1,2]+\frac{\partial\Theta}{\partial u_3}[2,3]+\ldots+\frac{\partial\Theta}{\partial u_p}[2,p]\right]=0,\\
&\Theta\left[\frac{\partial\theta}{\partial u_2}[2,1]+\frac{\partial\theta}{\partial u_3}[1,3]+\ldots+\frac{\partial\theta}{\partial u_p}[1,p]\right]\\
&-\theta\left[\frac{\partial\Theta}{\partial u_2}[2,1]+\frac{\partial\Theta}{\partial u_3}[1,3]+\ldots+\frac{\partial\Theta}{\partial u_p}[1,p]\right]=0,
\end{aligned}\right.$$

mais ce dernier système admet des solutions étrangères au problème, à savoir, d'une part, celles qui satisfont aux deux équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&\Theta=0,\\&\theta=0,\end{aligned}\right.$$

et, d'autre part[1], celles qui annulent le déterminant $[1,2]$. Ces dernières sont les solutions du système

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&[1,2]=0,\\&\Theta\left[\frac{\partial\theta}{\partial u_3}[2,3]+\ldots+\frac{\partial\theta}{\partial u_p}[2,p]\right]-\theta\left[\frac{\partial\Theta}{\partial u_3}[2,3]+\ldots+\frac{\partial\Theta}{\partial u_p}[2,p]\right]=0,\end{aligned}\right.$$

à l'exception toutefois de celles qui vérifient les deux équations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&g_2(x,y)=0,\\&g_2(x',y')=0.\end{aligned}\right.$$

On reconnaît aisément, par l'application de la formule de Hurwitz, que les solutions des systèmes (1), (2), (3) sont respectivement au nombre de

$$\begin{aligned}
N_1&=[2ph+(2p-3)]^2-p(2h+1)^2,\\
N_2&=p(p-1)h^2,\\
N_3&=[2ph+(2p-3)][2p-3]-p(2h+1);
\end{aligned}$$

[1] En effet, dans la recherche des plans tangents, on peut remplacer les équations (E) par les équations analogues qui s'en déduisent par permutation des lettres $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

enfin, les équations (4) admettent

$$N_4 = (p-1)(2p-3)$$

solutions, correspondant aux combinaisons deux à deux des points de rencontre de la courbe C avec son adjointe $g_2(x, y) = 0$.

La classe de la surface S a donc pour expression

$$N = N_1 - N_2 - (N_3 - N_4) = 3p(p-1)h^2 + 4p(p-2)h + (2p^2 - 5p + 3).$$

On trouve dès lors, après réductions,

$$N - 4\pi - m = 2p^2 - 5p - 1.$$

5. Ce résultat pourrait également se déduire d'une formule de MM. Castelnuovo et Enriques [1] qui établit un lien entre l'expression invariante

$$I = N - 4\pi - m,$$

le genre numérique p_n de la surface et le genre $p^{(1)}$ de la courbe générale du système canonique, à savoir :

$$p^{(1)} + I = 12p_n + 9.$$

D'ailleurs, le nombre $p^{(1)}$ est lui-même lié au degré $p^{(2)}$ du système canonique par la relation de M. Nöther

$$p^{(1)} = p^{(2)} + 1.$$

Au cas actuel, le degré du système canonique a pour expression, en vertu du théorème de Hurwitz,

$$p^{(2)} = (\alpha_0)^2 - p(\gamma_0)^2 = (2p-3)^2 - p.$$

D'autre part, la détermination du genre numérique p_n résulte d'un théorème de MM. Castelnuovo et Enriques, d'après lequel la différence entre le genre géométrique et le genre numérique d'une surface est égale au nombre de ses intégrales de différentielles totales de première

---

[1] *Annali di Matematica*, 3ᵉ série, t. VI, 1901.

espèce : la surface S possédant $\frac{p(p-1)}{2}$ intégrales doubles de première espèce

$$\iint [g_i(x,y)g_k(x',y') - g_k(x,y)g_i(x',y')]\,dx\,dx' \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p),$$

et, d'autre part, p intégrales de différentielles totales de première espèce

$$\int g_k(x,y)\,dx + g_k(x',y')\,dx' \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

il en résulte que

$$p_n = \frac{p(p-1)}{2} - p.$$

Dès lors

$$I = 12p_n + 9 - (p^{(2)} + 1) = 2p^2 - 5p - 1.$$

6. Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer la formule fondamentale

$$\rho_0 = \mathrm{N} - 4\pi - (m-1) + 2r - (\rho - 1);$$

comme il devait être, la valeur de h s'élimine et l'on trouve immédiatement

$$\rho_0 = 2p^2 - p - 1.$$

D'où cette conclusion : *Les surfaces algébriques dont les points admettent une correspondance univoque avec les couples de points d'une courbe algébrique de genre p, supposée non singulière, possèdent*

$$2p^2 - p - 1$$

intégrales doubles de seconde espèce distinctes.

Ce théorème peut être présenté sous une autre forme. Si l'on désigne par

$$\gamma_1(x,y)\,dx, \quad \ldots, \quad \gamma_{2p}(x,y)\,dx$$

$2p$ différentielles normales de seconde espèce de la courbe C, linéairement indépendantes, il est manifeste que les combinaisons

$$\iint [\gamma_i(x,y)\gamma_k(x',y') - \gamma_k(x,y)\gamma_i(x',y')]\,dx\,dx',$$

au nombre de $(2p^2 - p)$, sont des intégrales doubles de seconde espèce de la surface S; mais, en vertu du théorème précédent, ces intégrales ne sont pas distinctes. En d'autres termes :

Les différentielles normales de seconde espèce d'une courbe algébrique vérifient une identité de la forme

$$\sum_i \sum_k A_{ik}[\gamma_i(x,y)\gamma_k(x',y') - \gamma_k(x,y)\gamma_i(x',y')] = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x'},$$

R *et* S *étant deux fonctions rationnelles de* (x, y) *et* (x', y').

L'existence de cette identité a d'ailleurs été établie directement par Weierstrass : il est digne de remarque qu'elle puisse être rattachée à la théorie des fonctions algébriques de deux variables au point de vue transcendant de M. Picard.

II.

7. Il a été supposé dans la section précédente que les coordonnées d'un point de la surface S étaient des fonctions *symétriques* des deux points (x, y) et (x', y') du couple homologue de la courbe C ; on peut envisager de même les surfaces algébriques T dont les points admettent une correspondance univoque avec les couples *non symétriques* de points d'une courbe algébrique. Proposons-nous de déterminer également pour les surfaces de ce type la valeur des invariants ρ et ρ_0.

8. Soit une telle surface T, supposée sans point fondamental ni courbe exceptionnelle, et considérons les trois courbes particulières L_0, L'_0 et J définies respectivement par les correspondances suivantes entre les points (x, y) et (x', y') :

$$\begin{array}{lll} (L_0)\ldots\ldots & x = x_0 & y = y_0 \\ (L'_0)\ldots\ldots & x' = x_0 & y' = y_0 \\ (J)\ldots\ldots & x = x' & y = y' \end{array}$$

Il résulte de la démonstration que nous avons exposée [1] dans le

---

[1] *Sur une classe de surfaces algébriques*..., § 13.

cas des surfaces S, qu'il n'existe pas d'intégrale de différentielle totale de la forme

$$\int R(x, y; x', y')\,dx + S(x, y; x', y')\,dx'$$

ayant seulement pour courbes logarithmiques, sur la surface T, les courbes J, L_0 et L'_0, ou encore la courbe J et l'une des deux courbes L_0, L'_0. D'ailleurs, il ne saurait exister d'intégrale de ce type n'admettant que L_0 et L'_0 pour courbes logarithmiques, car, dans cette hypothèse, l'intégrale simple

$$\int R(x, y; x'_1, y'_1)\,dx$$

correspondant à une position fixe (x'_1, y'_1) du point (x', y') ne posséderait qu'un seul point logarithmique $x = x_0, y = y_0$. En résumé, il n'existe pas d'intégrale de différentielle totale de troisième espèce de la surface T ayant seulement pour courbes logarithmiques la totalité ou une partie des courbes L_0, L'_0 et J.

9. Soit, d'autre part, Γ une courbe algébrique quelconque de la surface : il résulte du théorème fondamental de Hurwitz qu'on peut former une fonction rationnelle $P(x, y; x', y')$ qui n'admette comme lignes de zéros et d'infinis, en dehors de la courbe considérée Γ, que la courbe

$$x = x', \qquad y = y'$$

et un certain nombre de courbes des deux familles

$$x = x_i, \qquad y = y_i$$

et

$$x' = x_j, \qquad y' = y_j.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par $G_{0i}(\xi, \eta)\,d\xi$ la différentielle normale de troisième espèce attachée à la courbe C et relative aux deux points (x_0, y_0) et (x_i, y_i), il est manifeste que les expressions

$$I_{0i} = \int G_{0i}(x, y)\,dx$$

et

$$I'_{0j} = \int G_{0j}(x', y')\,dx'$$

sont des intégrales de différentielles totales de la surface admettant respectivement pour courbes logarithmiques, la première L_0 et L_i, la seconde L'_0 et L'_j. Dès lors il est possible, en retranchant de l'expression

$$\log P(x, y; x' y')$$

une combinaison linéaire des intégrales I_{0i}, ... et I'_{0j}, ..., de former une intégrale de différentielle totale de la surface qui n'admette pas, en dehors de Γ, d'autres courbes logarithmiques que les courbes L_0, L'_0 et J.

Donc : *L'invariant relatif* ρ *est égal à* TROIS *pour les surfaces algébriques dont les points admettent une correspondance univoque (sans courbe exceptionnelle) avec les couples* NON SYMÉTRIQUES *de points d'une courbe algébrique non unicursale, supposée non singulière.*

10. De la valeur du nombre ρ, on déduit aisément celle de l'invariant absolu ρ_0. La surface considérée possédant p^2 intégrales doubles de première espèce distinctes

$$\int\int [g_i(x, y) g_k(x', y')]\, dx\, dx' \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p),$$

et, d'autre part, $2p$ intégrales de différentielles totales de première espèce, linéairement indépendantes

$$\int g_i(x, y)\, dx \qquad \text{et} \qquad \int g_k(x', y')\, dx' \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p),$$

on en conclut que son genre numérique est égal à

$$p_n = p^2 - 2p.$$

Déterminons, d'autre part, la valeur de l'expression $(N - 4\pi - m)$ et, à cet effet, celle du second genre $p^{(1)}$. Les courbes du système canonique étant définies par des équations de la forme

$$\sum_i \sum_k A_{ik}\, g_i(x, y)\, g_k(x', y') = 0,$$

il suffit, pour obtenir le degré $p^{(2)}$ du système canonique, de considérer les deux équations particulières

$$g_i(x, y)\, g_k(x', y') = 0,$$
$$g_j(x, y)\, g_l(x', y') = 0,$$

lesquelles possèdent $2(2p-2)^2$ solutions communes ; par suite

$$p^{(1)} = 8(p-1)^2 + 1$$

et

$$N - 4\pi - m = 12p_n + 9 - p^{(1)} = 4p^2 - 8p.$$

On trouve dès lors

$$\rho_0 = 4p^2 - 1,$$

résultat qui peut être prévu *a priori*, eu égard à l'identité de Weierstrass.

D'où cette conclusion : *Les surfaces algébriques dont les points admettent une correspondance univoque avec les couples* NON SYMÉTRIQUES *de points d'une courbe algébrique de genre p, supposée non singulière, possèdent*

$$4p^2 - 1$$

intégrales doubles de seconde espèce distinctes.

III.

11. Les théorèmes précédents supposent que la courbe algébrique considérée n'est pas *singulière*, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune relation singulière, à coefficients entiers, entre les périodes de ses intégrales abéliennes normales de première espèce ; cette hypothèse est essentielle, et nous allons préciser ce point par l'étude d'un exemple emprunté aux courbes de genre *deux*.

Envisageons une surface de Kummer K, définie analytiquement au moyen des fonctions thêta de deux variables correspondant au Tableau normal de périodes

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & h, \\ 0, & 1, & h, & g', \end{matrix}$$

et supposons que les périodes g, h, g' vérifient *une* relation singulière, laquelle peut être ramenée, au moyen d'une transformation du premier ordre, à la forme

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0, \tag{I}$$

α, β, γ étant des nombres entiers.

12. D'après un théorème de M. Humbert, toute courbe algébrique tracée sur une surface de Kummer, représentée en coordonnées homogènes par des équations de la forme

$$x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

s'obtient en égalant à zéro une fonction intermédiaire des variables u, v, paire ou impaire. Or, dans l'hypothèse où les périodes g, h, g' satisfont à la relation (I), il existe, en dehors des fonctions thêta proprement dites, des fonctions intermédiaires singulières $\varphi_{lk}(u, v)$, lesquelles vérifient des équations fonctionnelles du type

$$\begin{aligned}
\varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v), \\
\varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v), \\
\varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\, e^{2\pi i[-lu+k\gamma v]+\nu}, \\
\varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)\, e^{2\pi i[-k\alpha u-(l+k\beta)v]+\nu'},
\end{aligned}$$

l et k étant deux nombres entiers assujettis seulement à certaines inégalités relatives à la convergence des développements en série.

Ceci posé, considérons sur la surface K deux courbes algébriques C_1 et C_2 ayant respectivement pour équations

$$\varphi_{l_1 k_1}(u, v) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_{l_2 k_2}(u, v) = 0$$

et choisies de telle sorte que le déterminant formé avec les indices l_1, k_1 et l_2, k_2 soit différent de zéro; soit, d'autre part, une courbe algébrique quelconque C de la surface, définie par l'équation

$$\varphi_{lk}(u, v) = 0.$$

On peut déterminer trois entiers positifs ou négatifs n_1, n_2 et n (ce dernier différent de zéro) tels que

$$n_1 l_1 + n_2 l_2 + n l = 0,$$
$$n_1 k_1 + n_2 k_2 + n k = 0;$$

les nombres n_1, n_2, n étant ainsi choisis, le produit

$$P = (\varphi_{l_1 k_1})^{n_1} (\varphi_{l_2 k_2})^{n_2} (\varphi_{lk})^{n}$$

est une fonction quadruplement périodique des variables u, v, et, par conséquent, une fonction rationnelle des coordonnées d'un point de la surface. Dès lors, l'expression $\log P$ est une intégrale de différentielle totale de troisième espèce de la surface qui ne possède pas d'autres courbes logarithmiques que les courbes C, C_1, C_2. En d'autres termes, l'invariant relatif ρ est *au plus égal à deux* pour la surface considérée.

13. On peut démontrer que ce nombre est effectivement égal à *deux*. A cet effet, nous nous appuierons sur un théorème dû à M. Severi, d'après lequel « la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les intégrales de différentielles totales d'une surface algébrique soient réductibles à des combinaisons algébrico-logarithmiques, c'est que la surface soit *régulière* ». La surface de Kummer étant une surface régulière, on peut donc affirmer que toutes ses intégrales de différentielles totales de troisième espèce sont algébrico-logarithmiques. Or, cette propriété, ainsi que l'a montré M. Picard, entraîne la conséquence suivante : « Si l'on prend arbitrairement sur la surface $(\rho + 1)$ courbes algébriques irréductibles, il est possible de former une fonction rationnelle qui admette seulement ces $(\rho + 1)$ courbes comme lignes de zéros ou d'infinis. » Si donc l'invariant relatif ρ était égal à l'unité pour la surface de Kummer considérée, il existerait une fonction rationnelle des coordonnées d'un point de la surface s'annulant le long de la courbe C_1 et infinie le long de C_2, laquelle serait nécessairement une fonction des variables u, v de la forme

$$\frac{[\varphi_{l_1 k_1}(u, v)]^{m_1}}{[\varphi_{l_2 k_2}(u, v)]^{m_2}},$$

m_1 et m_2 étant deux entiers différents de zéro ; or, cette conclusion est en contradiction avec l'hypothèse que le déterminant

$$\begin{vmatrix} l_1 & k_1 \\ l_2 & k_2 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

Donc : *L'invariant relatif* ρ *est égal à* DEUX *pour les surfaces de Kummer simplement singulières* (alors qu'il est égal à l'unité pour les surfaces de Kummer non singulières).

14. L'analyse précédente peut s'étendre aux cas où les périodes g, h, g' des fonctions abéliennes, dont dérive la surface de Kummer, satisfont à deux ou à trois relations singulières distinctes. Dans l'hypothèse où elles vérifient, par exemple, *deux* telles relations, il existe des fonctions intermédiaires de u, v dépendant de *trois* entiers l, k, k' ; on considère alors sur la surface trois courbes algébriques C_1, C_2, C_3 définies respectivement par les équations

$$\varphi_{l_1 k_1 k'_1}(u, v) = 0,$$
$$\varphi_{l_2 k_2 k'_2}(u, v) = 0,$$
$$\varphi_{l_3 k_3 k'_3}(u, v) = 0,$$

et choisies de telle sorte que le déterminant

$$\begin{vmatrix} l_1 & k_1 & k'_1 \\ l_2 & k_2 & k'_2 \\ l_3 & k_3 & k'_3 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, et l'on démontre par le même mode de raisonnement que, dans ce cas, le nombre ρ est égal à *trois*.

15. Si l'on se reporte, d'autre part, à la formule de M. Picard relative à l'invariant absolu ρ_0, on reconnaît de suite que, à l'exception du nombre ρ, tous les éléments qui interviennent dans l'expression de ρ_0 conservent la même valeur dans le cas singulier que dans le cas général ; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Lorsque les périodes g, h, g' des intégrales normales de première espèce d'une courbe algébrique de genre deux vérifient σ *relations distinctes à* *coefficients entiers de la forme*

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

le nombre ρ_0 *des intégrales doubles distinctes de seconde espèce de la surface de Kummer qui correspond à cette courbe est diminuée de ce fait de* σ *unités.*

Ce théorème met bien en évidence le caractère arithmétique de l'invariant absolu ρ_0 de M. Picard, lequel dépend non seulement des singularités géométriques de la surface, mais encore de certaines relations d'un caractère arithmétique entre les coefficients de son équation [1].

---

(1) J'ai énoncé les principaux résultats de ce travail dans trois Notes publiées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* des 2 novembre 1908, 23 novembre 1908 et 14 décembre 1908. Depuis lors, j'ai eu connaissance que M. Severi avait étudié antérieurement les surfaces qui correspondent point par couple à une courbe algébrique (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin*, t. LIV, 1903); toutefois ma méthode est distincte du point de vue géométrique auquel s'est placé M. Severi, et je ne crois pas d'ailleurs que ses recherches aient porté sur la valeur de l'invariant ρ_0, ni sur le rôle joué par les fonctions intermédiaires singulières. Je dois aussi citer une Note de M. de Franchis (*Circolo mat. di Palermo*, t. XVIII, 1903).