ÉTIENNE GOURSAT

Sur les intégrales infiniment voisines des équations aux dérivées partielles (second mémoire)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 25 (1908), p. 9-41

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__9_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR LES INTÉGRALES INFINIMENT VOISINES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

(SECOND MÉMOIRE);

PAR M. E. GOURSAT.

1. Dans le Mémoire précédent (¹) on a supposé le plus souvent, au moins dans les énoncés, que chacune des variables pouvait prendre toutes les valeurs situées à l'intérieur d'un champ complexe, ces divers champs étant indépendants les uns des autres. Par exemple, s'il y a seulement deux variables indépendantes x et y, on s'est borné à étudier le cas où les deux variables décrivent respectivement dans leurs plans deux domaines déterminés D_x et D_y. Il est clair que, dans les applications au domaine réel, ce n'est pas ainsi que se pose la question, au moins dans la plupart des cas. Supposons, en effet, que les variables x et y ne prennent que des valeurs réelles, et qu'on veuille étudier les propriétés d'une fonction de ces deux variables définie

(¹) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* (T. XXIII, 3ᵉ série, 1906, p. 429-501). Les renvois sans indications spéciales se rapportent à ce Mémoire.

d'une certaine façon lorsque le point de coordonnées (x, y) décrit une région déterminée du plan. Ce domaine de variation pour le système des deux variables x et y est tout à fait différent de celui considéré plus haut, et ne peut s'en déduire en restreignant les variables x et y à ne prendre que des valeurs réelles, à moins que la région du plan ne soit un rectangle. Dans ce dernier cas, il n'y a que les régions des deux domaines D_x et D_y, voisines de l'axe réel, qui soient utilisées.

D'un autre côté, un exemple bien simple suffit pour montrer qu'on obtient des énoncés entièrement différents, suivant qu'on attribue aux variables indépendantes des valeurs complexes quelconques, ou qu'on se borne au champ réel. Ainsi nous avons fait observer (nº 20) que l'équation

$$p = y^2 q + yz$$

n'admet aucune intégrale (différente de $z = 0$) qui soit holomorphe dans tout le domaine complexe défini par les conditions

$$|x| \leqq R, \qquad |y| \leqq R',$$

si l'on a $RR' > 1$. Cependant cette équation admet une infinité d'intégrales qui sont régulières dans le voisinage de tout système de valeurs *réelles* pour les variables x et y, par exemple l'intégrale

$$z = \frac{xy - 1 + \sqrt{(1 - xy)^2 + 4y^2}}{y^2},$$

qui tend vers 2 lorsque y tend vers zéro.

2. Nous rappellerons d'abord quelques définitions. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ un système de n variables complexes indépendantes

$$z_1 = x_1 + y_1 i, \qquad z_2 = x_2 + y_2 i, \qquad \ldots, \qquad z_n = x_n + y_n i;$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ constituent un système de $2n$ variables réelles indépendantes. Si l'on convient, pour faciliter le langage, de considérer tout système de valeurs particulières de ces $2n$ variables comme les coordonnées d'un point dans l'hyperespace à $2n$ dimensions, E_{2n}, on peut dire que tout continuum connexe R_{2n} de cet espace définit un *domaine de variation* pour le système des $2n$ variables x_i,

y_k, lorsque le point de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est assujetti à rester dans ce domaine. A R_{2n} correspond, pour le système de variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, un domaine de variation que nous représenterons par $\mathfrak{O}_{(z_1, z_2, \ldots, z_n)}$ ou plus simplement par ω_z. Dans le cas particulier où chaque couple de variables (x_i, y_i) doit rester dans un domaine déterminé à deux dimensions $R_2^{(i)}$, ces divers domaines étant indépendants les uns des autres, nous représenterons le domaine complexe ainsi défini par la notation δ_z ou $\delta_{(z_1, z_2, \ldots, z_n)}$.

Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ les coordonnées d'un point particulier de l'hyperespace E_{2n}. L'ensemble des systèmes de valeurs réelles des variables x_i, y_k, satisfaisant à la condition

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_i)^2 \leqq \rho^2, \tag{1}$$

constitue un domaine particulier que nous appellerons une *hypersphère*, ayant pour *centre* le point de coordonnées (α_i, β_k) et pour *rayon* le nombre positif ρ. Le domaine correspondant pour les variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ se compose de l'ensemble des systèmes de valeurs de ces variables vérifiant la condition

$$|z_1 - Z_1|^2 + |z_2 - Z_2|^2 + \ldots + |z_n - Z_n|^2 \leqq \rho^2, \tag{2}$$

où

$$Z_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \ldots, \quad Z_n = \alpha_n + i\beta_n.$$

Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ n nombres positifs tels qu'on ait

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_n^2 \leqq \rho^2;$$

la condition (2) sera certainement satisfaite si l'on a

$$|z_1 - Z_1| < \rho_1, \quad \ldots, \quad |z_n - Z_n| < \rho_n, \tag{3}$$

c'est-à-dire si chacune des variables complexes z_i décrit dans son plan un cercle de centre Z_i et de rayon ρ_i. Mais inversement les conditions (3) ne résultent pas de l'inégalité (2).

Un point de coordonnées (α_i, β_k) est *intérieur* au domaine R_{2n}, si l'on peut trouver un nombre positif ρ assez petit pour que l'hypersphère de rayon ρ ayant ce point pour centre ait tous ses points dans le domaine R_{2n}. Un point (α_i, β_k) appartient à la *frontière* de R_{2n} lorsque, aussi petit que soit le nombre positif ρ, l'hypersphère de rayon ρ ayant ce point pour centre renferme des points du domaine R_{2n} et des points ne faisant pas partie de ce domaine. Nous supposerons le plus souvent par la suite que les domaines considérés renferment leurs frontières.

3. Pour montrer l'application de ces généralités au domaine réel, considérons une fonction analytique $u = f(x, y)$ de deux variables réelles x et y, régulière pour tous les points d'une région R_2 limitée par une courbe C de forme quelconque. Soient (α, β) les coordonnées d'un point M de cette région; dans le voisinage de ce point, la fonction u est égale à la somme d'une série entière en $x - \alpha$, $y - \beta$:

$$(4) \qquad u = P(x - \alpha, y - \beta) = f(\alpha, \beta) + A_1(x - \alpha) + B_1(y - \beta) + \dots$$

Quand on se limite aux valeurs réelles de x et de y, la courbe qui limite la région de convergence de la série précédente peut avoir des formes très variées, qu'il est inutile d'étudier ici. Nous désignerons seulement par $\rho(\alpha, \beta)$ le nombre positif *maximum* tel que la série (4) soit convergente quand on a à la fois

$$|x - \alpha| < \rho(\alpha, \beta), \qquad |y - \beta| < \rho(\alpha, \beta).$$

A chaque point (α, β) du domaine R_2 correspond ainsi un nombre *positif* $\rho(\alpha, \beta)$. Soient maintenant z_1 et z_2 deux variables complexes

$$z_1 = x + x'i, \qquad z_2 = y + y'i,$$

x, y, x', y' étant quatre variables indépendantes. On peut définir un continuum R_4 de l'espace à quatre dimensions de la manière suivante. D'abord le point de coordonnées (x, y) dans le plan doit rester dans la région R_2; de plus, pour des valeurs données de x et de y dans ce domaine, les valeurs de x' et y' doivent satisfaire à la condition

$$(5) \qquad x'^2 + y'^2 < \rho^2(x, y),$$

$\rho(x, y)$ étant la fonction qui vient d'être définie. D'après les propriétés des séries entières, il existe une fonction analytique

$$F(z_1, z_2)$$

des deux variables complexes z_1 et z_2, qui est régulière dans le voisinage de tout système de valeurs appartenant au domaine ainsi déterminé, et qui se réduit à la fonction $f(x, y)$ pour $x' = y' = 0$. Inversement, toute propriété établie pour une fonction analytique $F(z_1, z_2)$ des deux variables complexes z_1 et z_2 dans un domaine tel que le précédent s'applique évidemment à la fonction $f(x, y)$ des deux variables réelles x et y, à laquelle elle se réduit pour $x' = y' = 0$, dans la région R_2.

Il est quelquefois préférable de définir le domaine ω_2 d'une façon un peu différente. Supposons que la fonction $f(x, y)$ soit aussi régulière, non seulement à l'intérieur de la courbe limite C, mais aussi dans le voisinage d'un point quelconque de cette courbe, de telle sorte qu'à tout point (α, β) de la région R_2 et de sa limite C correspond un nombre *positif* $\rho(\alpha, \beta)$. On voit aisément, en s'appuyant sur les propriétés des séries entières, que ce nombre $\rho(\alpha, \beta)$ est une fonction continue des deux variables (α, β). Il a donc *un minimum positif* r, et l'on peut remplacer les conditions (5) par les conditions

$$|x'| < r, \qquad |y'| < r, \tag{6}$$

pour définir le domaine ω_2.

Un cas particulier intéressant est celui où la région R_2 est un rectangle ayant ses côtés parallèles aux axes

$$x = a, \qquad x = b \qquad (a < b),$$
$$y = a', \qquad y = b' \qquad (a' < b').$$

Le domaine correspondant pour z_1 et z_2 est alors défini par les inégalités

$$a \leqq x \leqq b, \qquad a' \leqq y \leqq b', \qquad |x'| < r, \qquad |y'| < r.$$

On peut évidemment considérer ce domaine comme un domaine $\delta_{(z_1, z_2)}$, défini de la manière suivante. La variable complexe $z_1 = x + x'i$ décrit dans son plan un rectangle limité par les quatre droites

$$x = a, \qquad x = b, \qquad x' = -r, \qquad x' = r,$$

et de même la variable $z_2 = y + y'i$ décrit dans son plan un rectangle limité par les quatre droites

$$y = a', \qquad y = b', \qquad y' = -r, \qquad y' = r.$$

Il est clair que les remarques précédentes s'étendent aux fonctions analytiques d'un nombre quelconque de variables réelles.

4. Soient $\mathfrak{D}_z$ un domaine de variation quelconque pour un système de n variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, défini par un certain *continuum* R_{2n} de l'hyperespace à $2n$ dimensions, et $Z = F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une fonction de ces n variables complexes. Cette fonction est *régulière*, dans le domaine $\mathfrak{D}_z$, lorsqu'elle satisfait à la condition suivante: si

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, \qquad \ldots, \qquad \gamma_n = \alpha_n + \beta_n i$$

sont un système quelconque de valeurs intérieur au domaine $\mathfrak{D}_z$, c'est-à-dire si le point de coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ est intérieur au continuum R_{2n}, pour les valeurs des variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$, voisines de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ respectivement, on a

$$Z = P(z_1 - \gamma_1, z_2 - \gamma_2, \ldots, z_n - \gamma_n),$$

le second membre étant une série entière ordonnée suivant les puissances positives de $z_1 - \gamma_1, \ldots, z_n - \gamma_n$, et convergente pourvu qu'on ait à la fois

$$|z_1 - \gamma_1| < \rho, \qquad |z_2 - \gamma_2| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |z_n - \gamma_n| < \rho,$$

ρ étant un nombre positif convenable.

Lorsque cette condition est vérifiée aussi pour tout point pris sur la frontière de $\mathfrak{D}_z$, la fonction Z est régulière dans tout le domaine $\mathfrak{D}_z$ et sur sa frontière. Cette fonction est alors régulière dans un domaine plus étendu $\mathfrak{D}'_z$, qui renferme le domaine $\mathfrak{D}_z$ tout entier à son intérieur.

Voici encore une remarque générale qui nous sera utile. Considérons, pour fixer les idées, une fonction de trois variables complexes z_1, z_2, u

$$Z = F(z_1, z_2, u),$$

jouissant de la propriété suivante : $\mathcal{D}_z$ étant un domaine de variation pour le système de variables z_1, z_2 et (γ_1, γ_2) un point quelconque de ce domaine, la fonction Z est régulière dans le voisinage des valeurs

$$z_1 = \gamma_1, \qquad z_2 = \gamma_2, \qquad u = 0,$$

et la série entière qui représente la fonction dans ce domaine,

$$Z = P(z_1 - \gamma_1, z_2 - \gamma_2, u),$$

est convergente pourvu qu'on ait

$$|z_1 - \gamma_1| < \rho_1, \qquad |z_2 - \gamma_2| < \rho_2, \qquad |u| < r,$$

ρ_1, ρ_2 et r étant trois nombres positifs, *dont le dernier r est indépendant de la position du point (γ_1, γ_2) dans le domaine $\mathcal{D}_z$*. La fonction Z peut alors être représentée par la somme d'une série entière ordonnée suivant les puissances de u,

$$Z = \Phi_0(z_1, z_2) + u\Phi_1(z_1, z_2) + \ldots + u^n\Phi_n(z_1, z_2) + \ldots,$$

dont les coefficients sont des fonctions régulières des variables z_1, z_2 dans $\mathcal{D}_z$, et qui est convergente pour tout point de ce domaine pourvu que le module de u soit inférieur à r.

Cette remarque se généralise aisément. Soit

$$Z = F(z_1, z_2, \ldots, z_n; u_1 u_2, \ldots, u_p)$$

une fonction des $n+p$ variables complexes z_i, u_k, régulière pour tout système de valeurs des variables z_i dans un domaine $\mathcal{D}_z$, pourvu que les modules des variables u_k restent plus petits qu'un nombre fixe positif r; on peut représenter cette fonction par la somme d'une série entière ordonnée suivant les puissances des variables $u_1, \ldots, u_p$, dont les coefficients sont des fonctions régulières des variables z_i dans le domaine $\mathcal{D}_z$, série qui est convergente, quel que soit le système des valeurs des variables z_i dans $\mathcal{D}_z$, pourvu que les modules de $u_1, \ldots, u_p$ soient inférieurs à r.

5. Nous allons encore reprendre, en la généralisant, la démonstra-

tion du théorème V (p. 463). Soit

$$
(7) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= F_1(x, y, z, u, \lambda),\\
\frac{dz}{dx} &= F_2(x, y, z, u, \lambda),\\
\frac{du}{dx} &= F_3(x, y, z, u, \lambda)
\end{aligned}
\right.
$$

un système de trois équations différentielles du premier ordre, où les seconds membres sont nuls pour $u = \lambda = 0$, et sont développables en séries entières ordonnées suivant les puissances de λ et de u, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables (x, y, z) tant que la variable x décrit un domaine simplement connexe δ_x, et que le système des variables complexes (y, z) reste dans un domaine de variation quelconque $\omega(y, z)$.

Soit (y_0, z_0) un système de valeurs appartenant à un domaine $\omega'(y, z)$, intérieur à $\omega(y, z)$; posons, dans les équations (7),

$$
y = y_0 + Y, \qquad z = z_0 + Z, \qquad u = \mu + U,
$$

elles deviennent

$$
(7') \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dY}{dx} &= F_1(x, y_0 + Y, z_0 + Z, \mu + U, \lambda),\\
\frac{dZ}{dx} &= F_2(x, y_0 + Y, z_0 + Z, \mu + U, \lambda),\\
\frac{dU}{dx} &= F_3(x, y_0 + Y, z_0 + Z, \mu + U, \lambda).
\end{aligned}
\right.
$$

Les seconds membres des nouvelles équations sont des fonctions holomorphes des variables $x, y_0, z_0, Y, Z, U, \lambda, \mu$, lorsque le couple (y_0, z_0) reste dans le domaine $\omega'(y, z)$ et que x reste dans δ_x, pourvu que les modules des autres variables Y, Z, U, μ, λ restent plus petits qu'un nombre positif convenable ρ. On peut donc développer suivant les puissances de λ et de μ les intégrales du système (7′) qui sont nulles pour $x = 0$, et les coefficients de ces séries sont des fonctions holomorphes des variables x, y_0, z_0 dans les domaines δ_x et $\omega'(y, z)$.

De plus, ces séries sont convergentes pourvu qu'on ait

$$|\lambda| \leqq \eta, \qquad |\mu| \leqq \eta,$$

en choisissant pour η un nombre positif assez petit.

6. Il n'y a plus maintenant aucune difficulté à généraliser la démonstration du théorème VII (p. 474). Pour fixer les idées, considérons une équation aux dérivées partielles du premier ordre à trois variables indépendantes x, y, z,

$$(8) \qquad p = \mathrm{F}(x, y, z, u, q, r; \lambda), \qquad p = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial u}{\partial z};$$

la fonction F est une fonction régulière des variables qui y figurent dans un domaine de variation défini de la façon suivante :

1° La variable x reste dans un domaine simplement connexe δ_x;

2° Le système des variables complexes (y, z) reste dans un domaine défini d'une façon quelconque $\omega_{(y,z)}$;

3° Les modules des autres variables u, q, r, λ restent inférieurs à un nombre positif ρ.

On suppose de plus qu'on a

$$\mathrm{F}(x, y, z, 0, 0, 0, 0) = 0,$$

et que le développement de F en série entière ordonnée suivant les puissances de u, q, r, λ ne renferme pas de termes en q et r du premier degré,

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}u + \mathrm{B}\lambda + \ldots,$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en u, q, r, λ.

Soit $x = a$ une valeur de x dans le domaine δ_x; proposons-nous d'étudier l'intégrale de l'équation (8) qui se réduit à zéro pour $x = a$, le module de λ étant supposé très petit. Cette intégrale est le lieu des multiplicités caractéristiques à une dimension issues des divers éléments de la multiplicité

$$x = a, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0, \qquad u = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0.$$

Les équations différentielles de ces caractéristiques sont les suivantes :

$$(9)\qquad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial r}} = \frac{du}{q\frac{\partial F}{\partial q} + r\frac{\partial F}{\partial r} - F} = \frac{-dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial u}} = \frac{-dr}{\frac{\partial F}{\partial z} + r\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

Ces équations différentielles donnent pour $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}, \frac{dq}{dx}, \frac{dr}{dx}$ des séries entières en u, q, r, λ, dont tous les termes contiennent en facteur une des variables u, q, r, λ. Pour $\lambda = 0$, elles admettent donc les intégrales

$$u = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0, \qquad y = C, \qquad z = C',$$

qui représentent les caractéristiques de l'intégrale particulière $u = 0$, pour $\lambda = 0$. Les intégrales qui prennent les valeurs initiales

$$u = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0 \qquad \text{pour} \qquad x = a$$

sont donc de la forme

$$(10)\qquad \begin{cases} y = y_0 + \lambda P(x, y_0, z_0, \lambda), \\ z = z_0 + \lambda Q(x, y_0, z_0, \lambda), \\ u = \qquad \lambda R(x, x_0, y_0, \lambda), \end{cases}$$

P, Q, R désignant des fonctions régulières de x_0, y_0, z_0, λ, lorsque la variable x reste dans le domaine δ_x, que le couple (y_0, z_0) reste dans un domaine $\omega(y, z)$ intérieur à $\omega'(y, z)$, et que $|\lambda|$ reste inférieur à un nombre positif η convenablement choisi.

Les deux premières de ces relations donnent y_0 et z_0 en fonction de y, z, x et λ. Posons en effet $y = y_0 + \xi$, $z = z_0 + \zeta$; ces équations deviennent

$$\xi = \lambda P(x, y - \xi, z - \zeta, \lambda),$$
$$\zeta = \lambda Q(x, y - \xi, z - \zeta, \lambda).$$

Lorsque x reste dans δ_x, et les variables (y, z) dans un domaine $\omega''(y, z)$ intérieur à $\omega'(y, z)$, les seconds membres de ces relations sont des fonctions régulières des $x, y, z, \xi, \zeta, \lambda$, pourvu que les modules des variables ξ, ζ, λ restent inférieurs à un nombre positif η' assez petit.

On en déduit donc pour ξ, ζ des fonctions

$$\xi = \pi_1(x, y, z, \lambda), \qquad \zeta = \pi_2(x, y, z, \lambda)$$

régulières dans les domaines δ_x et $\omega''(y, z)$, pourvu que $|\lambda|$ ne dépasse pas un nombre positif ε. Comme ces fonctions s'annulent pour $\lambda = 0$, on peut supposer le nombre ε assez petit pour que $(y - \xi, z - \zeta)$ restent dans le domaine $\omega'(y, z)$ lorsque (y, z) restent dans le domaine $\omega''(y, z)$. En remplaçant y_0 et z_0 par $y - \pi_1$ et $z - \pi_2$ respectivement dans $R(x_0, y_0, z, \lambda)$, on obtient pour u une intégrale

$$u = \lambda R(x, y - \pi, z - \pi_2, \lambda), \tag{11}$$

qui est régulière lorsque la variable x reste dans le domaine δ_x, que les variables (y, z) restent dans le domaine $\omega''(y, z)$, pourvu que $|\lambda|$ soit $\leqq \varepsilon$.

7. Pour appliquer le théorème précédent au domaine réel, supposons que les coefficients A, B, ... de l'équation (8) soient des fonctions régulières des variables x, y, z, à l'intérieur d'un cylindre ayant ses génératrices parallèles à l'axe des x, limité par deux plans $x = x_0$, $x = x_1$, et dont la section droite par le plan des yz se compose d'une ou plusieurs courbes fermées. Pour fixer les idées, admettons que cette section est une courbe fermée C. On peut alors prendre pour le domaine δ_x une bande infiniment étroite entourant le segment (x_0, x_1) de l'axe réel dans le plan de la variable x, et définir comme plus haut (n° 2) un domaine $\omega(y, z)$ comprenant en particulier tous les systèmes de valeurs réelles de y et de z, qu'on obtient en prenant les coordonnées de tous les points intérieurs à la courbe C. Cela posé, soit C' une courbe plane quelconque *intérieure* à la courbe C. L'ensemble des points intérieurs à C'' appartient de même à un certain domaine $\omega''(y, z)$ intérieur à $\omega(y, z)$. Soit a une valeur de x comprise entre x_0 et x_1; l'application du théorème général du paragraphe précédent nous montre que *l'intégrale de l'équation* (8), *qui est nulle pour $x = a$, est une fonction régulière des variables x, y, z, à l'intérieur du cylindre ayant ses génératrices parallèles à l'axe des x, la courbe* C' *pour section droite, et limité par les deux plans $x = x_0$, $x = x_1$, pourvu que la valeur absolue du paramètre λ soit suffisamment petite.*

Lorsque les coefficients A, B, ... de l'équation (8) sont réguliers en tous les points de la surface du cylindre considéré, il est clair qu'on peut substituer dans l'énoncé précédent la courbe C à la courbe C''.

Étant donnée une équation du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right), \tag{12}$$

admettant l'intégrale particulière $u = 0$, pour laquelle les caractéristiques sont les droites

$$y = C, \qquad z = C',$$

le développement de F suivant les puissances de $u, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ ne renferme qu'un terme du premier degré en u

$$F = Au + Bu^2 + \ldots, \tag{13}$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en $u, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$. On peut, et d'une infinité de manières, introduire un ou plusieurs paramètres dans l'équation (12), et l'on en déduit que cette équation admet une infinité d'intégrales infiniment voisines de la solution $u = 0$, qui sont des fonctions régulières de x, y, z dans une portion (E) de l'espace pourvu que cette région soit comprise dans un cylindre ayant ses génératrices parallèles à l'axe Ox, où les coefficients de la série (13) sont des fonctions régulières. On suppose, bien entendu, que la série (13) est convergente dans cette région, pourvu que les modules de $u, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ soient suffisamment petits.

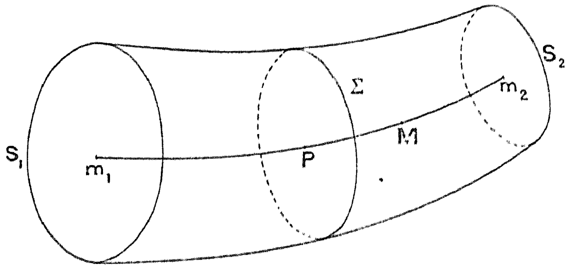
8. Avant d'aborder les équations de forme générale, il convient de présenter quelques remarques très simples, que nous développerons, pour fixer les idées, en restant dans l'espace à trois dimensions.

Soient $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ deux fonctions analytiques des variables réelles x, y, z, régulières dans les portions de l'espace qui seront considérées. Les équations différentielles

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z) \tag{14}$$

définissent une famille de courbes Γ, que nous appellerons, pour abréger, *caractéristiques*. Toute portion de l'espace où les fonctions f et φ sont régulières constitue un *champ de caractéristiques*. Considérons en particulier un champ de caractéristiques ayant une forme analogue à celle d'un cylindre, où les génératrices seraient remplacées par des caractéristiques et les deux bases par deux nappes de surface S_1 et S_2 (*fig.* 1), de telle façon que, par tout point M du champ, il passe

Fig. 1.



un segment $m_1 m_2$ de caractéristique joignant un point m_1 de S_1 à un point m_2 de S_2. Soit T un champ défini de cette façon, que nous appellerons un *tube* de caractéristiques. Le long de l'arc $m_1 m_2$ de caractéristique, x varie de x_1 à x_2, et y et z sont des fonctions régulières de x dans l'intervalle (x_1, x_2). Prenons dans T une portion de surface analytique régulière Σ qui rencontre, *en un point et en un seul*, chacune des caractéristiques de ce domaine, et supposons les coordonnées (ξ, η, ζ) d'un point de Σ exprimées en fonction de deux paramètres (t, u), de telle sorte que cette surface Σ corresponde point par point d'une façon univoque à une certaine région R_2 du plan (t, u), la liaison qui existe entre ξ, η, ζ et les nouvelles variables t et u étant exprimée par des relations analytiques. Il est clair qu'on peut toujours, et d'une infinité de manières, trouver une surface Σ, satisfaisant à ces diverses conditions.

La surface Σ étant choisie de cette façon, la caractéristique Γ issue d'un point M de T rencontre cette surface Σ en un point P dont les coordonnées ξ, η, ζ sont des fonctions analytiques régulières de x, y, z dans T. On le démontre aisément au moyen des équations aux variations relatives aux intégrales du système (14) infiniment voisines de la caractéristique considérée. Par suite, t et u sont aussi des fonctions analytiques régulières des variables x, y, z dans T, et l'on peut remarquer que ces diverses fonctions ξ, η, ζ, t, u sont des intégrales de l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$\frac{\partial v}{\partial x}+f\frac{\partial v}{\partial y}+\varphi\frac{\partial v}{\partial z}=0,$$

ce qui résulte immédiatement de leur définition.

Inversement, soient (t, u) les coordonnées d'un point de la région R_2; à ce point correspond une caractéristique déterminée de T, représentée par des formules

$$(15)\qquad y=\psi(x;\,t,u),\qquad z=\pi(x;\,t,u),$$

dans lesquelles on doit faire varier x de X_1 à X_2. Ces limites X_1 et X_2 sont des fonctions des variables t, u, qui dépendent des surfaces S_1 et S_2; si ces deux surfaces sont analytiques, X_1 et X_2 sont également des fonctions analytiques des variables (t, u) régulières dans la région R_2, et nous supposerons par la suite que l'on a

$$X_1 < X_2.$$

Les formules (15) font correspondre point par point d'une façon univoque le domaine T de l'espace (x, y, z) à un domaine analogue T' de l'espace (x, t, u), limité par un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Ox et par les deux surfaces

$$x=X_1(t,u),\qquad x=X_2(t,u);$$

les seconds membres des formules (15) qui définissent cette transformation sont des fonctions analytiques des variables x, t, u, régulières dans ce domaine T'. De plus, cette transformation fait correspondre aux caractéristiques Γ des droites parallèles à Ox dans l'espace (x, t, u).

9. Considérons maintenant une équation aux dérivées partielles

$$(16)\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-f\frac{\partial v}{\partial y}-\varphi\frac{\partial v}{\partial z}+Av+B\lambda+\ldots,$$

les termes non écrits du second membre étant au moins du second degré en v, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, λ.

Pour $\lambda = 0$, cette équation admet l'intégrale particulière $v = 0$, et les caractéristiques correspondantes, qui sont définies par le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{f} = \frac{dz}{\varphi},$$

sont précisément les courbes Γ. Nous supposons que tous les coefficients de la série (16) sont des fonctions analytiques régulières de x, y, z dans le domaine T défini plus haut, et que cette série est convergente, quelle que soit la position du point (x, y, z) dans T, pourvu que les modules de v, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, λ soient inférieurs à un nombre positif suffisamment petit.

Faisons dans cette équation le changement de variables

$$y = \psi(x; t, u), \qquad z = \pi(x; t, u),$$

ψ et π désignant les fonctions (15) définies tout à l'heure. De la formule

$$dv = p\,dx + q\,dy + r\,dz,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$p = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial v}{\partial z},$$

on tire

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} p + q\frac{\partial \psi}{\partial x} + r\frac{\partial \pi}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x}, \\ q\frac{\partial \psi}{\partial t} + r\frac{\partial \pi}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial t}, \\ q\frac{\partial \psi}{\partial u} + r\frac{\partial \pi}{\partial u} &= \frac{\partial v}{\partial u}. \end{aligned} \right.$$

Mais les fonctions ψ et π satisfont, d'après leur définition même, aux équations différentielles

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f(x; \psi, \pi),$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = \varphi(x; \psi, \pi);$$

si l'on tire q et r des deux dernières équations (17), et qu'on fasse la substitution dans l'équation proposée, elle prend la forme

$$\frac{\partial v}{\partial x} = A_1 v + B_1 \lambda + \ldots, \tag{18}$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en v, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial u}$, λ. Tous les coefficients de la nouvelle série sont des fonctions analytiques des variables x, t, u régulières dans le domaine T', et cette série est encore convergente, quelle que soit la position du point de coordonnées (x, t, u) dans T', pourvu que les modules de v, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial u}$, λ soient inférieurs à un nombre positif assez petit.

10. L'intégrale particulière $v = 0$ de l'équation (18), correspondant à la valeur $\lambda = 0$ du paramètre, admet pour caractéristiques les droites

$$t = C, \qquad u = C'.$$

Pour ramener le domaine T' à la forme cylindrique du n° 7, une dernière transformation est nécessaire.

Soit $x = X_3(t, u)$ l'abscisse du point où la caractéristique qui correspond au système de valeurs (t, u) rencontre la surface Σ; on a, d'après les hypothèses qui ont été expliquées,

$$X_1 < X_3 < X_2.$$

Considérons la fraction rationnelle en x'

$$\Phi(t, u; x') = \frac{Lx' + M}{Nx' + P}, \tag{19}$$

les coefficients L, M, N, P ayant les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} L &= X_3(X_1 + X_2) - 2X_1X_2, \\ M &= X_3(X_2 - X_1), \\ N &= 2X_3 - X_1 - X_2, \\ P &= X_2 - X_1. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que l'on a

$$\Phi(t, u; -1) = X_1, \qquad \Phi(t, u; 0) = X_3, \qquad \Phi(t, u; 1) = X_2,$$

et que la fonction Φ est continue et croissante lorsque x' croît de -1 à $+1$, le point de coordonnées (t, u) restant dans la région du plan considérée. La transformation définie par les formules

$$x = \Phi(t', u'; x'), \qquad t = t', \qquad u = u' \tag{20}$$

fait correspondre à la région T' de l'espace (x, t, u) et, par suite, à la région T de l'espace (x, y, z) un cylindre T'' de l'espace (x', t', u'), ayant ses génératrices parallèles à Ox', et limité par les deux plans $x' = -1$, $x' = +1$, la section de ce cylindre par le plan $x' = 0$ correspondant à la surface Σ du domaine primitif T.

Cherchons ce que devient l'équation (18) après ce nouveau changement de variables. La relation

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial u} du$$

nous donne

$$dv = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t'} dt' + \frac{\partial \Phi}{\partial u'} du' + \frac{\partial \Phi}{\partial x'} dx'\right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} dt' + \frac{\partial v}{\partial u} du',$$

et, par suite, on a les relations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x'} \frac{\partial v}{\partial x} \phantom{+ \frac{\partial v}{\partial t}} &= \frac{\partial v}{\partial x'},\\
\frac{\partial \Phi}{\partial t'} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial t'},\\
\frac{\partial \Phi}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial u} &= \frac{\partial v}{\partial u'},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire inversement

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x'}} \frac{\partial v}{\partial x'},\\
\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial t'} - \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial t'}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x'}} \frac{\partial v}{\partial x'},\\
\frac{\partial v}{\partial u} &= \frac{\partial v}{\partial u'} - \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial u'}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x'}} \frac{\partial v}{\partial x'}.
\end{aligned}$$

La dérivée $\frac{\partial\Phi}{\partial x'}$ est régulière et ne s'annule pas dans la région T''. L'équation (18) se change donc en une équation de la forme

$$(18)' \qquad \frac{\partial v}{\partial x'} = F\left(x', t', u', v, \frac{\partial v}{\partial x'}, \frac{\partial v}{\partial t'}, \frac{\partial v}{\partial u'}, \lambda\right),$$

le second membre étant une série entière en v, $\frac{\partial v}{\partial x'}$, $\frac{\partial v}{\partial t'}$, $\frac{\partial v}{\partial u'}$, λ, dont tous les coefficients sont des fonctions analytiques des variables x', t', u', régulières dans le domaine T'', cette série étant convergente dans tout ce domaine pourvu que les modules des variables v, $\frac{\partial v}{\partial x'}$, $\frac{\partial v}{\partial t'}$, $\frac{\partial v}{\partial u'}$, λ soient plus petits qu'un nombre positif suffisamment petit. De plus, la série ne renferme aucun terme du premier degré en $\frac{\partial v}{\partial x'}$, $\frac{\partial v}{\partial t'}$, $\frac{\partial v}{\partial u'}$; par suite, en résolvant l'équation (18)' par rapport à $\frac{\partial v}{\partial x'}$, on en déduira une équation de même forme que l'équation (18)

$$(21) \qquad \frac{\partial v}{\partial x'} = A_2 v + B_2 \lambda + \ldots,$$

le domaine T' étant seulement remplacé par le domaine T''. A cette équation (21) nous pouvons appliquer le théorème du n° 3 : l'intégrale de cette équation qui se réduit à zéro pour $x' = 0$ est une fonction régulière des variables x', t', u' dans tout domaine intérieur à T'', pourvu que $|\lambda|$ soit inférieur à un nombre positif η convenablement choisi. Il en sera donc de même de l'intégrale de l'équation primitive (16) qui se réduit à zéro sur la surface Σ, dans tout domaine intérieur à T. Cette intégrale sera même régulière dans le domaine T tout entier, si les conditions que nous avons supposées vérifiées à l'intérieur de ce domaine T sont vérifiées également à l'intérieur d'un domaine analogue, mais un peu plus grand.

La surface Σ pouvant être choisie d'une infinité de manières, on voit que l'équation (16) admet une infinité d'intégrales infiniment voisines de l'intégrale $v = 0$ et régulières dans le domaine T, ou du moins dans un domaine quelconque intérieur à T, et en différant d'aussi peu qu'on le voudra.

11. Considérons enfin une équation du premier ordre, ne dépendant d'aucun paramètre, et admettant l'intégrale particulière $v = 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -f\frac{\partial v}{\partial y} - \varphi\frac{\partial v}{\partial z} + Av + \ldots. \tag{22}$$

Soit (E) une région de l'espace, où les coefficients de la série qui est au second membre sont des fonctions régulières de x, y, z, telle que cette série soit convergente en tout point de cette région pourvu que les modules de v, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ restent inférieurs à un nombre positif convenable. Comme on peut toujours introduire un paramètre λ dans l'équation (22), par exemple en posant

$$v = V + \lambda\,\Phi(x, y, z),$$

$\Phi(x, y, z)$ étant une fonction régulière dans (E), de façon que l'intégrale particulière $v = 0$ corresponde à la valeur $\lambda = 0$ du paramètre, on voit que *l'équation* (22) *admet une infinité d'intégrales infiniment voisines de l'intégrale* $v = 0$, *et régulières dans une portion quelconque* (E′) *de* (E) *pourvu que* (E′) *soit compris dans un tube de caractéristiques* (T).

Les conclusions précédentes s'appliquent évidemment quel que soit le nombre des variables indépendantes. Dans le cas de deux variables x et y, le tube de caractéristiques est remplacé par un quadrilatère limité par deux segments de caractéristiques Γ_1 et Γ_2, deux autres segments de courbes C_1 et C_2, tel qu'on puisse joindre un point de Γ_1 à un point de Γ_2 par un segment de courbe coupant en un point et en un seul toutes les caractéristiques du domaine considéré.

Reprenons par exemple l'équation linéaire

$$p = y^2 q + yz;$$

les courbes caractéristiques sur l'intégrale particulière $z = 0$ sont les hyperboles

$$y(x - C) = 1,$$

C désignant la constante arbitraire. Ces hyperboles ont pour asymptote l'axe des x, et la seconde asymptote est parallèle à Oy. Il est clair que toute région du plan à distance finie peut être renfermée dans une région analogue au domaine T considéré plus haut; l'équation doit donc admettre une infinité d'intégrales régulières dans toute région finie du plan. On le vérifie sans peine, en remarquant que l'intégrale qui se réduit à une fonction $\varphi(x)$ pour $y = x$ a pour expression

$$z = \frac{xy - 1 + \sqrt{(xy-1)^2 + 4y^2}}{2y^2}\,\varphi\left(\frac{xy - 1 + \sqrt{(xy-1)^2 + 4y^2}}{2y}\right).$$

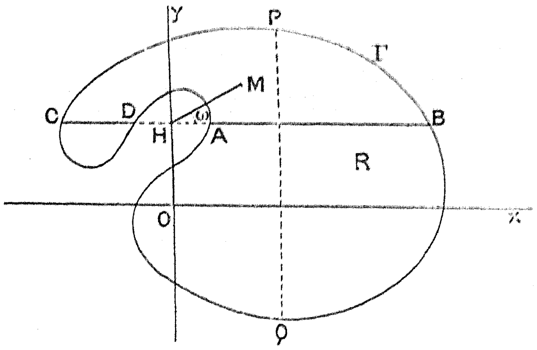
12. Les théorèmes qui viennent d'être établis ne s'appliquent qu'aux domaines à l'intérieur desquels les caractéristiques qui correspondent à l'intégrale particulière connue ont une certaine disposition. Il est facile de prouver par des exemples très élémentaires que cette condition n'est nullement artificielle, mais qu'elle est au contraire dans la nature même des choses.

Prenons d'abord l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + (y-h)^2}, \tag{23}$$

h étant un nombre positif, et considérons l'aire R, limitée par un con-

Fig. 2.



tour fermé tel que Γ, laissant à l'extérieur le point H de coordonnées $(0, h)$. La parallèle $y = h$ à l'axe Ox rencontre le contour Γ en quatre points A, B, C, D, et les points P et Q d'ordonnées maximum et minimum sont supposés, pour fixer les idées, sur la droite $x = 1$ (*fig.* 2).

L'intégrale générale de l'équation (23) est

$$z = -\frac{1}{y-h}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{y-h}{x}\right) + \varphi(y) = -\frac{\omega}{y-h} + \varphi(y),$$

ω désignant l'angle de HM avec HA et $\varphi(y)$ étant une fonction arbitraire de y. Pour avoir une intégrale régulière dans la région R, on doit prendre pour $\varphi(y)$ une fonction de y régulière dans l'intervalle (y_0, y_1), y_0 et y_1 désignant respectivement les ordonnées des deux points Q et P. La fonction $\varphi(y)$ satisfaisant à cette condition, le premier terme de l'intégrale

$$-\frac{1}{y-h}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{y-h}{x}\right)$$

reste fini lorsque le point M de coordonnées (x, y) vient sur AB; mais, lorsque ce point M vient sur CD, l'angle ω devient égal à π, et l'intégrale z devient infinie sur le segment CD. L'équation (23) n'admet donc *aucune* intégrale qui soit régulière en tous les points du domaine limité par la courbe Γ, de quelque façon qu'on prenne la fonction arbitraire $\varphi(y)$.

Cela posé, considérons l'équation

$$(24) \qquad p = \frac{\lambda}{x^2 + (y-h)^2} + \ldots \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en z, q, λ. Pour $\lambda = 0$, cette équation admet l'intégrale particulière $z = 0$, sur laquelle les caractéristiques sont les parallèles à l'axe Ox.

Si l'on cherche à développer suivant les puissances de λ une intégrale se réduisant à la précédente pour $\lambda = 0$,

$$z = \lambda\varphi_1(x, y) + \lambda^2\varphi_2(x, y) + \ldots,$$

on a, pour déterminer le coefficient φ_1, l'équation

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + (y-h)^2},$$

qui n'admet, nous venons de le voir, aucune intégrale régulière dans la région intérieure à la courbe Γ. Il n'existe par conséquent aucune intégrale de l'équation (24), infiniment voisine de l'intégrale $z = 0$, qui soit régulière dans toute cette région. Ce résultat n'est nullement en contradiction avec le théorème général, car il est impossible de tracer dans la région R un arc de courbe coupant en un seul point chacun des segments de caractéristiques situés dans cette région.

Il serait bien facile de former des exemples analogues pour le cas de trois variables ou d'un nombre quelconque de variables.

13. Étant donnée une équation du premier ordre, dépendant d'un paramètre λ, et admettant pour $\lambda = 0$ l'intégrale particulière $v = 0$, le théorème général précédent permet de reconnaître, par une discussion qui appartient à la Géométrie de situation, si cette équation admet des intégrales infiniment voisines de celles-là, et régulières dans un domaine déterminé. Pour obtenir le développement de ces intégrales suivant les puissances de λ, il est inutile de passer par tous les intermédiaires qui ont été employés pour la démonstration du théorème. Pour simplifier l'écriture, nous exposerons la méthode à suivre dans le cas de deux variables indépendantes.

Prenons d'abord une équation linéaire

$$p + q f(x, y) = \varphi(x, y) z + \psi(x, y), \tag{25}$$

f, φ, ψ étant des fonctions régulières des variables x et y dans une certaine portion du plan R limitée par une courbe fermée Γ.

Nous appellerons *caractéristiques* les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y), \tag{26}$$

et nous supposons qu'il existe un segment de courbe C coupant en un point et en un seul tous les segments de caractéristiques situés dans la région R.

Ces caractéristiques étant supposées connues, il est facile d'obtenir l'expression de l'intégrale de l'équation (25) qui se réduit à une fonction donnée le long de l'arc AB (*fig.* 3).

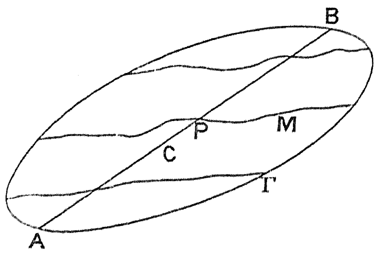
Soient (ξ, η) les coordonnées d'un point quelconque de ce segment AB, que nous supposons exprimées au moyen d'une variable auxiliaire t. Soient, d'autre part, $\Phi(t)$ une fonction quelconque de t, et $\pi(x, y)$ une fonction régulière dans la région R.

Considérons l'expression

$$u(x, y) = \Phi(t) + \int_{(\xi, \eta)}^{(x, y)} \pi(x, y)\, dx, \tag{27}$$

l'intégrale curviligne du second membre étant prise suivant le segment de caractéristique PM qui joint le point M de coordonnées (x, y) au point $P(\xi, \eta)$, où le segment de caractéristique passant au point M

Fig. 3.



rencontre l'arc AB. Il est clair que cette fonction $u(x, y)$ se réduit à $\Phi(t)$ lorsque le point M vient sur l'arc AB. D'un autre côté, il est aisé d'avoir une relation entre les dérivées partielles u'_x et u'_y; en effet, pour un déplacement infiniment petit du point M sur la caractéristique PM on a deux valeurs de l'accroissement Δu,

$$\Delta u = (u'_x + u'_y f)\, \Delta x,$$
$$\Delta u = \pi(x, y)\, \Delta x,$$

d'où l'on déduit la relation

$$u'_x + u'_y f(x, y) = \pi(x, y). \tag{28}$$

Considérons maintenant l'expression

$$z(x, y) = e^{\int_{(\xi, \eta)}^{(x, y)} \varphi(x, y)\, dx} \left[\Phi(t) + \int_{(\xi, \eta)}^{(x, y)} \psi(x, y)\, e^{-\int_{(\xi, \eta)}^{(x, y)} \varphi(x, y)\, dx} dx \right], \tag{29}$$

les intégrales $\int_{(\xi,\eta)}^{(x,y)}$ étant prises suivant l'arc de caractéristique PM. Il est clair que cette fonction $z(x,y)$ se réduit à $\Phi(t)$ lorsque le point M vient sur l'arc AB. Pour prouver que c'est une intégrale de l'équation (25), posons

$$u = \int_{(\xi,\eta)}^{(x,y)} \varphi(x,y)\,dx,$$

$$v = \Phi(t) + \int_{(\xi,\eta)}^{(x,y)} \psi(x,y)\,e^{-u}\,dx;$$

ces deux fonctions vérifient respectivement les deux relations

$$u'_x + u'_y f(x,y) = \varphi(x,y),$$
$$v'_x + v'_y f(x,y) = \psi(x,y)\,e^{-u},$$

et la formule (29) peut s'écrire

$$(29)' \qquad z = e^u v.$$

On en déduit

$$p = e^u v u'_x + e^u v'_x,$$
$$q = e^u v u'_y + e^u v'_y,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} p + q f(x,y) &= e^u v (u'_x + f u'_y) + e^u (v'_x + f v'_y) \\ &= e^u v \varphi(x,y) + e^u \psi(x,y)\,e^{-u} \\ &= z\varphi(x,y) + \psi(x,y). \end{aligned}$$

La formule (29) représente donc l'intégrale de l'équation (25) qui se réduit à une fonction donnée $\Phi(t)$ le long de l'arc AB. Il est visible que cette intégrale est une fonction régulière dans tout le domaine R, lorsqu'il satisfait à la condition énoncée.

Prenons enfin une équation du premier ordre

$$(30) \qquad p + q f(x,y) = \mathrm{A}z + \mathrm{B}\lambda + \ldots,$$

les termes non écrits du second membre étant au moins du second degré en z, q, λ. Nous supposons toujours que les coefficients de la série de ce second membre sont des fonctions régulières dans la région R, que cette série est convergente, quelle que soit la position du point (x, y) dans R, pourvu que les modules de z, q, λ soient inférieurs à un nombre positif convenable η, et enfin que la région R satisfait à la même condition que tout à l'heure, relativement aux caractéristiques de l'intégrale particulière $z = 0$, c'est-à-dire aux courbes intégrales de l'équation (26). Proposons-nous de développer suivant les puissances de λ l'intégrale de l'équation (30) qui se réduit à zéro tout le long de l'arc AB (*fig.* 3), qui coupe tous les segments de caractéristiques situés dans R :

$$(31) \qquad z = \lambda z_1(x, y) + \lambda^2 z_2(x, y) + \ldots + \lambda^n z_n(x, y) + \ldots.$$

Le coefficient $z_1(x, y)$ doit satisfaire à l'équation

$$(32) \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial y} f(x, y) = \mathrm{A}\, z_1 + \mathrm{B},$$

et, d'une façon générale, en égalant les coefficients de λ^n dans les deux membres de l'équation (30) après la substitution, on obtient la relation

$$(33) \qquad \frac{\partial z_n}{\partial x} + \frac{\partial z_n}{\partial y} f(x, y) = \mathrm{A}\, z_n + \Phi\left(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \ldots\right),$$

Φ désignant un polynome en $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y'}$, dont les coefficients sont des fonctions régulières dans la région R.

L'intégrale de l'équation (32), qui est nulle le long de l'arc AB, est une fonction régulière, on vient de le voir, dans R. D'une façon générale, si les fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ sont régulières dans R, il en sera de même de l'intégrale z_n de l'équation (33) qui s'annule sur l'arc AB. On obtiendra donc ainsi une série de la forme (31), satisfaisant formellement à l'équation (30), et dont tous les coefficients sont des fonctions régulières dans R. Nous avons démontré plus haut que cette série était convergente dans tout domaine intérieur à R, pourvu que le module de λ soit assez petit.

14. Les considérations précédentes peuvent aussi être étendues aux intégrales des équations linéaires dans le domaine complexe. Consi-

dérons une équation

$$p + qf = z\varphi + \psi, \tag{34}$$

où nous supposerons, pour plus de simplicité, que les fonctions f, φ, ψ sont des fonctions entières des variables x et y, ou des polynomes. Soit $\Phi(y)$ une fonction régulière de y dans un certain domaine, par exemple une fonction entière. L'intégrale de l'équation (34), se réduisant à $\Phi(y)$ pour $x = 0$, peut être, comme on le sait, considérée comme le lieu des multiplicités intégrales du système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{f} = \frac{dz}{z\varphi + \psi}$$

prenant les valeurs initiales $y = y_0$, $z = \Phi(y_0)$, pour $x = 0$, quand on fait varier y_0. Prenons, en particulier, l'intégrale de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{35}$$

qui prend la valeur y_0 pour $x = 0$, et supposons qu'elle soit holomorphe dans un domaine simplement connexe δ_x du plan de la variable x, de telle façon que la variable y décrive dans son plan un domaine $\delta_y^{y_0}$ lorsque x parcourt δ_x. Si l'on remplace y par cette intégrale dans φ et ψ, l'intégrale de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \varphi z + \psi,$$

qui prend la valeur $\Phi(y_0)$ pour $x = 0$, est elle-même holomorphe dans δ_x. La caractéristique ainsi déterminée constitue un continuum à deux dimensions dans l'espace à quatre dimensions, et l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles (34) est une fonction régulière de x et de y tout le long de cette caractéristique, c'est-à-dire dans le voisinage de tout système de valeurs $x = \alpha$, $y = \beta$, prises respectivement dans les domaines δ_x et $\delta_y^{(y_0)}$, de façon qu'elles se correspondent. Le domaine $\delta_y^{(y_0)}$ varie en général avec y_0; supposons que toutes les intégrales de l'équation (35) soient holomorphes dans δ_x, lorsque y_0 varie dans un certain domaine. Si tous les domaines $\delta^{(y_0)}$ ont en commun un domaine δ'_y du plan de la variable y, on est assuré que l'intégrale de l'équation (34) qui se réduit à $\Phi(y)$ pour $x=0$ sera une fonction holomorphe des variables x et y lorsque ces variables décrivent respectivement les deux domaines δ_x et δ'_y.

Mais il peut arriver que, quel que soit le domaine dans lequel on fait varier y_0, les deux domaines δ_x et δ'_y ne puissent recouvrir simultanément deux régions déterminées dans chacun des deux plans. Reprenons, par exemple, l'équation

$$(34)' \qquad p = y^2 q + yz;$$

l'équation (35) est ici

$$(35)' \qquad \frac{dy}{dx} = -y^2,$$

et l'intégrale qui prend la valeur $y_0 \neq 0$ pour $x=0$ a pour expression

$$y = \frac{1}{x-a}, \qquad \text{où} \qquad a = -\frac{1}{y_0}.$$

Faisons décrire à la variable x un cercle C de rayon R ayant pour centre l'origine; le point $x-a$ décrit de même un cercle C_1 de rayon R ayant pour centre le point a; le point $y=\frac{1}{x-a}$ décrit la portion du plan extérieure à un cercle C'_{y_0} inverse d'un cercle égal à C_1 par rapport au cercle Γ de rayon un décrit du point $y=0$ pour centre. Pour qu'un cercle C' de rayon R' décrit du point $y=0$ pour centre soit tout entier dans le domaine décrit par le point y, il faut qu'il soit tout entier à l'extérieur de C'_{y_0}. L'inverse de ce cercle C' par rapport à Γ est un cercle de rayon $\frac{1}{R'}$ qui doit renfermer à son intérieur l'inverse de C'_{y_0} par rapport à Γ. Or le rayon de ce dernier cercle est égal à R; on doit donc avoir $\frac{1}{R'} > R$ ou $RR' < 1$ (*voir* n° 20).

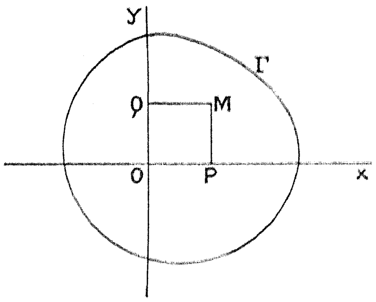
15. Prenons maintenant une équation du second ordre de la forme

$$(36) \qquad s = Ap + Bq + Cz + D\lambda + \ldots,$$

où les termes non écrits sont au moins du second degré en $z, p, q, r,$

t, λ et dont tous les coefficients sont des fonctions analytiques des variables x et y, régulières dans un domaine ω, tel que ceux qui ont été définis plus haut (n° 3), comprenant une région R du plan des xy, limitée par une courbe fermée Γ telle que celle de la figure. Si par un point quelconque M de R on mène une parallèle MP à Oy et une parallèle MQ à Ox, le rectangle OPMQ est tout entier dans la région R. On suppose de plus que la série du second membre de

Fig. 4



l'équation (36) est convergente pour tout système de valeurs des variables x et y dans le domaine ω, pourvu que les modules de z, p, q, r, t, λ soient inférieurs à un nombre positif η. Soient (x_0, y_0) les coordonnées d'un point M de la région R. Considérons dans le plan de la variable complexe x un domaine δ_x formé d'une bande infiniment mince de largeur 2ε, comprenant à son intérieur le segment $(0, x_0)$ de l'axe réel, et dans le plan de la variable y un domaine analogue δ_y formé d'une bande infiniment mince de largeur $2\varepsilon'$, comprenant à l'intérieur le segment $(0, y_0)$ de l'axe réel; les deux membres ε, ε' sont supposés assez petits pour que l'ensemble des deux domaines δ_x et δ_y fasse partie de ω. D'après le théorème général établi dans le Mémoire précédent (p. 495), l'intégrale de l'équation (36) qui se réduit à zéro, pour $x = 0$ et pour $y = 0$, est une fonction holomorphe des variables x, y, λ, lorsque x décrit un domaine δ'_x intérieur à δ_x et y un domaine δ'_y intérieur à δ_y, pourvu que $|\lambda|$ reste inférieur à un nombre positif ρ. Si les domaines δ'_x, δ'_y renferment respectivement les deux segments $(0, x_0)$ et $(0, y_0)$ des axes réels, l'intégrale en question sera une fonction régulière des variables x et y dans tout le rectangle OPMQ, pourvu que la valeur absolue de λ soit plus petite que ρ. Si l'on ordonne cette intégrale suivant les puissances de λ, les coefficients successifs sont déterminés de proche en proche par des équations de Laplace, dont les coefficients sont des fonctions régulières dans la région R.

Tous les termes de la série ainsi obtenue, qui satisfait formellement à l'équation (36), sont donc aussi des fonctions régulières dans R. D'après ce qu'on vient de démontrer, à chaque point $M(x_0, y_0)$ de ce domaine on peut associer un nombre positif ρ_0 tel que la série précédente soit convergente dans tout le rectangle OPMQ pourvu que l'on ait $|\lambda| < \rho_0$.

Si le point M décrit un domaine R' intérieur à R, il est clair que ρ_0 varie d'une manière continue et par conséquent reste supérieur à un nombre $\eta < 0$. L'intégrale considérée est donc régulière dans tout le domaine R', pourvu que l'on ait $|\lambda| < \eta$. Le théorème s'applique également à la région R elle-même, si elle est comprise dans une région un peu plus grande et satisfaisant à toutes les autres conditions énoncées plus haut.

16. Étant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre, admettant la solution *non singulière* $z = 0$, on peut lui appliquer les résultats précédents, en introduisant dans cette équation un paramètre λ, de façon que la nouvelle équation admette l'intégrale $z = 0$ pour $\lambda = 0$, et cela d'une infinité de manières. Le théorème général du dernier paragraphe permet d'affirmer l'existence d'intégrales infiniment voisines de la solution $z = 0$ (c'est-à-dire se réduisant à zéro pour $\lambda = 0$), et régulières, dans tout domaine réel D, simplement connexe, satisfaisant à la condition suivante, qui fait intervenir uniquement la disposition des caractéristiques sur l'intégrale particulière $z = 0$; par tout point de D, il passe deux caractéristiques réelles, non tangentes l'une à l'autre, et de plus il existe dans ce domaine deux segments de caractéristiques $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, de systèmes différents, dont chacun rencontre en un point et en un seul tout segment de caractéristique d'une famille différente situé dans D. Une transformation bien simple ramène ce cas à celui qui vient d'être traité, où les caractéristiques sont les droites $x = C'$, $y = C'$.

Si les deux systèmes de caractéristiques de l'intégrale particulière connue $z=0$ sont confondus, la conclusion est la même que pour une équation aux dérivées partielles du premier ordre et s'établit de la même façon.

En résumé, la conclusion générale qui se dégage de cette étude, c'est que, dans la recherche des intégrales infiniment voisines d'une intégrale particulière connue, la disposition des caractéristiques sur cette intégrale particulière est un élément essentiel à considérer.

17. La question se présente d'une façon toute différente pour les équations du second ordre à caractéristiques imaginaires. On sait, en effet, que, pour une équation linéaire du type elliptique, c'est le problème de Dirichlet, et non le problème de Cauchy, qui se pose naturellement. Considérons, pour fixer les idées, l'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{A}\frac{\partial z}{\partial x}+\mathrm{B}\frac{\partial z}{\partial y}+\mathrm{C}z+\mathrm{D}\lambda+\ldots, \tag{37}$$

les termes non écrits étant au moins du second degré par rapport à

$$\lambda,\quad z,\quad \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

et les coefficients étant des fonctions analytiques régulières des variables x et y à l'intérieur d'un contour fermé Γ. Nous supposons de plus que cette série est convergente à l'intérieur de ce contour Γ, pourvu que les modules des variables λ, z, ... restent plus petits qu'une certaine limite. Pour $\lambda=0$, l'équation (37), admet l'intégrale particulière $z=0$. Cherchons une série ordonnée suivant les puissances de λ

$$z=\lambda z_1+\lambda^2 z_2+\ldots+\lambda^n z_n+\ldots \tag{38}$$

satisfaisant formellement à l'équation (37), et dont tous les coefficients s'annulent le long de Γ, tout en restant réguliers à l'intérieur de ce contour. Le coefficient $z_1(x,y)$ doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}=\mathrm{A}\frac{\partial z_1}{\partial x}+\mathrm{B}\frac{\partial z_1}{\partial y}+\mathrm{C}z_1+\mathrm{D}, \tag{39}$$

s'annuler le long de Γ et rester régulier à l'intérieur de ce contour. Ce problème admet *en général* une solution et une seule; il n'y a d'exception que si l'unité est une valeur singulière pour une équation de Fredholm [1] qui se rattache à l'équation linéaire (39). Si l'on ne se trouve pas dans ce cas singulier, tous les autres coefficients $z_2, \ldots, z_n, \ldots$ pourront être déterminés de proche en proche; z_n, par exemple, doit être une fonction régulière à l'intérieur du contour Γ, s'annulant sur ce contour et vérifiant une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} = \mathrm{A}\frac{\partial z_n}{\partial x} + \mathrm{B}\frac{\partial z_n}{\partial y} + \mathrm{C} z_n + \mathrm{F}(x, y),$$

où $\mathrm{F}(x, y)$ est une fonction régulière à l'intérieur de Γ.

Il resterait encore à établir la convergence de la série ainsi obtenue.

18. Nous avons toujours supposé jusqu'ici que les coefficients étaient des fonctions analytiques. Il paraît difficile de s'affranchir de cette hypothèse, au moins dans le cas général, mais on peut le faire pour des équations de forme particulière.

Considérons par exemple une équation

$$(40) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, z, \lambda, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \mathrm{A}\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{B}\frac{\partial z}{\partial y} + \mathrm{C}z + \mathrm{D}\lambda + \ldots,$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, λ, et les coefficients de cette série A, B, C, D, ... étant des fonctions continues des variables x et y lorsque x et y varient de o à a. Nous supposons enfin que la série $f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \lambda\right)$ est uniformément convergente dans le domaine D défini par les inégalités

$$0 \leqq x \leqq a, \qquad 0 \leqq y \leqq a,$$

(1) *Voir*, par exemple, un article de M. Picard *Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de M. Fredholm* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXII, 1906).

pourvu que les valeurs absolues de z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, λ restent plus petites qu'une limite déterminée. Cherchons encore à former une série entière en λ

$$z = \lambda z_1 + \lambda^2 z_2 + \ldots + \lambda^n z_n + \ldots \tag{41}$$

satisfaisant formellement à l'équation (40), et dont tous les coefficients $z_n(x, y)$ soient des fonctions continues dans le domaine D, s'annulant pour $x = 0$ et pour $y = 0$. Le premier coefficient $z_1(x, y)$ doit satisfaire aux trois relations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = A\dfrac{\partial z_1}{\partial x} + B\dfrac{\partial z_1}{\partial y} + C z_1 + D, \\ z_1(0, y) = 0, \qquad z_1(x, 0) = 0, \end{array}\right. \tag{42}$$

et, en général, $z_n(x, y)$ doit satisfaire à trois relations de même nature

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z_n}{\partial x\, \partial y} = A\dfrac{\partial z_n}{\partial x} + B\dfrac{\partial z_n}{\partial y} + C z_n + F(x, y), \\ z_n(x, 0) = 0, \qquad z_n(0, y) = 0, \end{array}\right. \tag{43}$$

la fonction F étant régulière dans le domaine D.

Si l'on intègre les équations (42) et (43) de proche en proche, au moyen de la méthode des approximations successives, par exemple, on voit que ces fonctions peuvent se déduire des coefficients de la série $f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \lambda\right)$ par des quadratures seulement, et il en est de même des dérivées $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_n}{\partial y}$. On obtient donc ainsi une série de la forme (41), satisfaisant formellement à l'équation (40), et dont tous les coefficients sont continus, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, dans D, et s'annulent pour $x = 0$ et pour $y = 0$.

Pour démontrer la convergence de ce développement, on peut évidemment remplacer le second membre de l'équation (40) par une fonction majorante. Soit M une limite supérieure du module de ce second membre lorsque le point (x, y) reste dans le domaine D, et que les modules de z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, λ ne dépassent pas un nombre positif ρ. La convergence du développement (41) sera démontrée si l'on établit que la série obtenue de la même façon en partant de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\mathrm{M}}{\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\left(1-\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(1-\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\rho}\right)} - \mathrm{M}$$

est elle-même convergente. Or les coefficients de la nouvelle équation sont analytiques, et l'on peut lui appliquer le théorème général du n° 15.