NIELS NIELSEN

Recherches sur les fonctions métasphériques et sur leurs formules d'addition

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 25 (1908), p. 371-398

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__371_0>

RECHERCHES

SUR LES FONCTIONS MÉTASPHÉRIQUES

ET

SUR LEURS FORMULES D'ADDITION;

PAR NIELS NIELSEN, à Copenhague.

PREMIÈRE PARTIE.

LES FONCTIONS MÉTASPHÉRIQUES.

I. — Remarques historiques. Définitions.

On a essayé, depuis longtemps, de généraliser les fonctions sphériques ordinaires, savoir les fonctions de première espèce

$$X_n = P^n(x),$$

que Legendre (¹) a introduites dans l'Analyse à l'aide du développement

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+x^2}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} P^s(x)\alpha^s \qquad \left(|\alpha| < |x \pm \sqrt{x^2-1}|\right),$$

et les fonctions correspondantes de seconde espèce $Q^n(x)$.

Ces fonctions sphériques ordinaires $P^n(x)$ et $Q^n(x)$ sont toutes

(¹) *Mémoires présentés à l'Académie par divers savants*, t. X, 1785.

deux des intégrales particulières de l'équation différentielle obtenue de la suivante,

$$(2)\qquad (1-x^2)y^{(2)}-(1+2\nu)xy^{(1)}+\rho(\rho+2\nu)x=0,$$

en y mettant $\nu=\frac{1}{2}$ et ρ égal à un entier non négatif n.

Murphy [1] a considéré, le premier, la fonction $P^{\nu,n}(x)$ qui paraissait aussi dans un Mémoire posthume de Jacobi [2], et cela dans la généralisation suivante de la formule (1) :

$$(3)\qquad (1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}=\sum_{s=0}^{s=\infty}P^{\nu,s}(x)\alpha^s \qquad \left(|\alpha|<|x\pm\sqrt{x^2-1}|\right).$$

La fonction $P^{\nu,n}(x)$ et sa complémentaire $Q^{\nu,n}(x)$ sont toutes deux des intégrales particulières de l'équation différentielle obtenue de (2) en y mettant $\rho=n$, n désignant un entier non négatif; ces deux fonctions sont étudiées profondément par Gegenbauer [3].

C. Neumann [4] a introduit la fonction annulaire $P^{n-\frac{1}{2}}(x)$ qui est intégrale particulière de l'équation obtenue de (2) en y mettant $\nu=\frac{1}{2}$, $\rho=n-\frac{1}{2}$, n étant un entier non négatif, tandis que Mehler [5] a trouvé presque contemporainement la fonction conique $P^{-\frac{1}{2}+ir}(x)$, intégrale de l'équation (2) pour $\nu=\frac{1}{2}$, $\rho=-\frac{1}{2}+ir$, r étant un nombre fini quelconque.

Quant à la littérature et à l'histoire de ces diverses fonctions, on peut consulter l'excellente monographie de M. Wangerin [6].

Schläfli [7] a étudié les fonctions $P^{\frac{1}{2},\rho}(x)$ et $Q^{\frac{1}{2},\rho}(x)$, ρ étant un

---

(1) *Cambridge Transactions*, t. V, 1835, p. 322.

(2) *Journal de Crelle*, t. 56, 1859, p. 149. — *Œuvres*, t. VI, p. 184.

(3) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. LXX, LXXV, XCVII, CII. — *Denkschriften*, t. XLVIII.

(4) *Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe*, Halle, 1864.

(5) *Journal de Crelle*, t. 68, 1868. — *Mathematische Annalen*, t. XVIII, 1881.

(6) *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, t. II.

(7) *Ueber die zwei Heineschen Kugelfunktionen mit beliebigen Parameter*, Berne, 1881.

nombre quelconque, et Gegenbauer (¹), les fonctions générales $P^{\nu,\rho}(x)$ et $Q^{\nu,\rho}(x)$, intégrales particulières de l'équation générale (2), où ν et ρ sont des nombres complexes quelconques. Cependant la méthode de Schläfli applique des intégrales curvilignes et assez compliquées, tandis que les définitions appliquées par Gegenbauer pour les fonctions susdites ne sont pas parfaitement systématiques, parce que sa fonction $P^{\nu,\rho}(x)$ est trop compliquée.

C'est pourquoi je me suis proposé d'étudier d'un point de vue systématique les fonctions générales $P^{\nu,\rho}(x)$ et $Q^{\nu,\rho}(x)$, et cela en appliquant une méthode analogue à celle que j'ai usée dans mes recherches sur les fonctions cylindriques.

Schläfli désigne ses fonctions comme des *fonctions sphériques générales*, un nom qui me semble plus naturel que la désignation *fonctions annulaires* appliquée par Gegenbauer, parce que les fonctions sphériques sont antérieures aux fonctions annulaires, tandis que $P^{\nu,\rho}(x)$ et $Q^{\nu,\rho}(x)$ contiennent comme des cas particuliers toutes les fonctions plus spéciales susdites.

Cependant, je propose de désigner comme *fonctions métasphériques* les fonctions $P^{\nu,\rho}(x)$ et $Q^{\nu,\rho}(x)$, dans lesquelles ν et ρ sont des nombres finis quelconques, tandis que les *fonctions ultrasphériques* se déduisent des fonctions susdites en y supposant ρ égal à un entier non négatif. En effet, il me semble très désirable de pouvoir distinguer ce cas particulier des fonctions générales, à cause de leurs applications dans des séries analogues aux séries de Fourier et aux séries des fonctions cylindriques.

Généralement je désigne comme fonction métasphérique de l'argument x, du paramètre ν et de l'indice ρ une fonction $K^{\nu,\rho}(x)$ qui est assujettie à satisfaire à ces deux équations fonctionnelles (²),

$$(4)\qquad (1-x^2)\,D_x\,K^{\nu,\rho}(x) = (\rho+2\nu)\,x\,K^{\nu,\rho}(x)-(\rho+1)\,K^{\nu,\rho+1}(x),$$

$$(5)\qquad 2(\rho+\nu)\,x\,K^{\nu,\rho}(x) = (\rho+1)\,K^{\nu,\rho+1}(x)+(\rho+2\nu-1)\,K^{\nu,\rho-1}(x),$$

mais qui est, du reste, aussi arbitraire que ces conditions le permettent.

(¹) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. C, 1891, p. 745-766.

(²) *Comptes rendus*, 30 mai et 20 juin 1904. — *Mémoires de l'Académie de Danemark*, 7ᵉ série, t. II, 1906, p. 239-293.

De ces deux équations fonctionnelles on déduira sans peine l'équation différentielle (2), et en outre cette autre équation fonctionnelle,

$$(6)\qquad (1-x^2)\,D_x\,K^{\nu,\rho}(x) = -\rho x\,K^{\nu,\rho}(x) + (\rho+2\nu-1)\,K^{\nu,\rho-1}(x).$$

Cette définition de $K^{\nu,\rho}(x)$ adoptée, il saute aux yeux que les fonctions métasphériques sont très analogues aux fonctions cylindriques.

Dans un Mémoire récent ([1]), j'ai soumis les équations fonctionnelles (4), (5) à une recherche analogue à celle que j'ai entreprise pour les équations fonctionnelles des fonctions cylindriques. L'analogie entre les résultats ainsi obtenus et ceux connus pour les fonctions cylindriques est parfaite, quoique les fonctions métasphériques soient beaucoup plus compliquées que les fonctions cylindriques.

Le but principal du présent Mémoire n'est pas de donner beaucoup de résultats nouveaux, mais de montrer l'avantage de la définition susdite en comparaison avec les définitions antérieures, et cela en étudiant particulièrement les formules d'addition des fonctions métasphériques auxquelles nous avons à ajouter une formule d'addition nouvelle.

Nous avons à démontrer, dans le § III, que les deux équations fonctionnelles (4), (5) ne sont autre chose qu'une généralisation très étendue des formules fondamentales des fonctions trigonométriques

$$(7)\qquad \begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \\ \sin 2x = 2\cos x \sin x, \end{cases}$$

ce qui montrera qu'un cas très particulier du problème que nous avons à résoudre est, à ce point de vue, de déduire les formules d'addition pour $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$ en prenant pour point de départ les deux formules plus particulières (7).

II. — Les fonctions métasphériques.

En résolvant les équations fonctionnelles § I, (4), (5), j'ai trouvé,

---

([1]) *Annali di Matematica*, 3e série, t. XIV, 1907, p. 69-90.

pour $|x| > 1$, comme les solutions les plus simples, ces deux fonctions [1]

$$(1)\qquad P^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu+\rho)(2x)^\rho}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)} F\left(\frac{1-\rho}{2}, -\frac{\rho}{2}, 1-\nu-\rho, \frac{1}{x^2}\right),$$

$$(2)\qquad Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\,x^{-\rho-2\nu}}{2^{\rho+1}\Gamma(\nu+\rho+1)} F\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}, \nu+\frac{\rho}{2}, 1+\nu+\rho, \frac{1}{x^2}\right),$$

où F désigne la série hypergéométrique ordinaire. Supposons $|x| < 1$; nous trouverons ces deux autres fonctions

$$(3)\qquad M^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\cos\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)} y_1 + \frac{2\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}\right)\sin\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)} y_2,$$

$$(4)\qquad N^{\nu,\rho}(x) = -\frac{2^{2\nu-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\sin\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)} y_1 + \frac{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}\right)\cos\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)} y_2,$$

où nous avons posé pour abréger

$$(5)\qquad y_1 = F\left(-\frac{\rho}{2}, \nu+\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right),$$

$$(6)\qquad y_2 = x\,F\left(\frac{1-\rho}{2}, \nu+\frac{1+\rho}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

Les coefficients indépendants de x qui figurent dans nos quatre fonctions particulières sont choisis de sorte que tous les coefficients des séries de puissances en question deviennent des nombres rationnels, si nous posons $\nu = \frac{1}{2}$ et ρ égal à un entier non négatif, cas qui nous conduira aux fonctions sphériques ordinaires.

Dans les cas particuliers, où les définitions susdites deviennent illusoires, à cause des facteurs nuls ou infinis il faut multiplier par des fonctions convenables, indépendantes de x, mais périodiques par rapport à ρ en ayant la période additive $+1$.

En effet, désignons par K_1 et K_2 les systèmes de fonctions (1), (2)

---

(1) *Mémoires de l'Académie de Danemark*, 7e série, t. II, 1906, p. 246.

ou (3), (4); la fonction métasphérique la plus générale se détermine comme suit :

$$\text{(7)} \qquad K^{\nu,\rho}(x) = a(\nu, \rho)\, K_1^{\nu,\rho}(x) + b(\nu, \rho)\, K_2^{\nu,\rho}(x),$$

où $a(\nu, \rho)$ et $b(\nu, \rho)$ sont des fonctions arbitraires de ν et ρ assujetties à satisfaire seulement à la condition de périodicité

$$\text{(8)} \qquad a(\nu, \rho + 1) = a(\nu, \rho), \qquad b(\nu, \rho + 1) = b(\nu, \rho).$$

Les deux formules (1), (2) donnent immédiatement la proposition suivante :

Toute série hypergéométrique dont les deux premiers éléments ont la différence $\frac{1}{2}$ est une fonction métasphérique, abstraction faite d'un simple facteur.

En effet, nous aurons, en vertu de (1), (2),

$$\text{(9)} \qquad F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \beta+1, \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2^{2\beta-\alpha+1}\,\Gamma(\beta+1)\,x^{\alpha}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)}\, Q^{\alpha-\beta,\, 2\beta-\alpha}(x),$$

$$\text{(10)} \qquad F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \beta+1, \frac{1}{x^2}\right) = \frac{\Gamma(\alpha-\beta)\,\Gamma(1-\alpha)\,(2x)^{\alpha}}{\Gamma(-\beta)}\, P^{\alpha-\beta,\, -\alpha}(x).$$

Cela posé, il est très curieux, ce me semble, que la plupart des propriétés connues pour le polynome X_n de *Legendre* se trouvent chez les fonctions métasphériques générales $P^{\nu,\rho}(x)$ et $Q^{\nu,\rho}(x)$ aussi, et, de plus, que le caractère très simple de X_n, savoir d'être un polynome entier, ne simplifie que très rarement les démonstrations.

Les formules (9) et (10) montrent clairement qu'on peut déduire une suite de formules concernant les fonctions métasphériques en spécialisant les formules connues pour la fonction hypergéométrique générale. Cependant, un tel procédé est trop compliqué ; généralement les formules en question se déduisent immédiatement à l'aide des définitions § I, (4), (5), elles-mêmes. D'un autre côté, il faut nécessairement appliquer exclusivement un tel procédé sans s'appuyer à la fonction hypergéométrique générale, si l'on désire donner une théorie systématique des fonctions métasphériques.

Dans mon Mémoire *Recherches sur les fonctions sphériques* [1], j'ai déduit, en suivant la méthode susdite, une suite de propriétés fondamentales des fonctions $P^{\nu,\rho}(x)$ et $Q^{\nu,\rho}(x)$. Ici nous avons à nous borner aux *invariants* suivants et à quelques autres formules qui nous seront indispensables dans ce qui suit.

En premier lieu, posons dans les équations fonctionnelles § I, (4), (6), $-\rho-2\nu$ au lieu de ρ; nous retrouverons, dans l'ordre inverse, ces mêmes équations fonctionnelles, d'où, en vertu de (1), (2),

$$(11) \qquad P^{\nu,-\rho-2\nu}(x) = -\frac{2^{1-2\nu}\sin\pi(\rho+2\nu)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\sin\pi(\rho+\nu)}\,Q^{\nu,\rho}(x),$$

$$(12) \qquad Q^{\nu,-\rho-2\nu}(x) = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\sin\pi(\rho+2\nu)}{2^{1-2\nu}\sin\rho\pi}\,P^{\nu,\rho}(x),$$

formules qui sont essentielles dans la théorie des fonctions métasphériques, parce qu'elles nous permettent de nous borner à l'étude d'une seule des deux fonctions P et Q.

Le même procédé nous conduira à ces deux autres formules,

$$(13) \qquad (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\,P^{1-\nu,-\rho-1}(x) = \frac{\Gamma(1+\rho)\sin\rho\pi}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(\rho+2\nu)\sin\pi(\rho+\nu)}\,Q^{\nu,\rho}(x),$$

$$(14) \qquad (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\,Q^{1-\nu,-\rho-1}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(1+\rho)\sin\pi(\rho+\nu)}{\Gamma(\rho+2\nu)\sin\pi(\rho+2\nu)}\,P^{\nu,\rho}(x),$$

d'où, en vertu de (11), (12), ces deux formules curieuses,

$$(15) \qquad P^{1-\nu,\rho-1+2\nu}(x) = \frac{2^{2\nu-1}\,\Gamma(1+\rho)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(\rho+2\nu)}\,(x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,P^{\nu,\rho}(x),$$

$$(16) \qquad Q^{1-\nu,\rho-1+2\nu}(x) = \frac{2^{1-2\nu}\,\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(\rho+2\nu)}\,(x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,Q^{\nu,\rho}(x),$$

qui se réduisent, pour $\nu=\frac{1}{2}$, à des identités formelles.

Différentions par rapport à x les deux formules § I, (4), (5); nous aurons, en vertu de (1), (2),

$$(17) \qquad D_x P^{\nu,\rho}(x) = 2\nu\,P^{\nu+1,\rho-1}(x), \qquad D_x Q^{\nu,\rho}(x) = -\frac{1}{2}\,Q^{\nu+1,\rho-1}(x),$$

---

(1) *Mémoires de l'Académie de Danemark*, 7e série, t. II, 1906.

formules qui nous permettent de donner sous simple forme la série de Taylor obtenue pour $P^{\nu,\rho}(x+h)$ et $Q^{\nu,\rho}(x+h)$; nous aurons, pourvu que x ne soit ni ± 1 ni ∞, ces deux développements,

$$(18) \qquad P^{\nu,\rho}(x+h) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{-\nu}{s} P^{\nu+s,\rho-s}(x)\,(2h)^s,$$

$$(19) \qquad Q^{\nu,\rho}(x+h) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s!} Q^{\nu+s,\rho-s}(x) \left(\frac{h}{2}\right)^s,$$

convergents pourvu que $|h| < |x \pm 1|$.

Les formules (17) nous conduisent aux fonctions métasphériques adjointes. En effet, posons généralement

$$(20) \qquad P_\sigma^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu+\sigma)\,\Gamma(\rho-\sigma+1)}{2^{\rho-\sigma}\,\Gamma(\rho+\nu)} (x^2-1)^{\frac{\sigma}{2}} P^{\nu+\sigma,\rho-\sigma}(x),$$

$$(21) \qquad Q_\sigma^{\nu,\rho}(x) = \frac{2^{\rho-\sigma-1}\,\Gamma(\nu+\rho+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+\sigma+2\nu)} (x^2-1)^{\frac{\sigma}{2}} Q^{\nu+\sigma,\rho-\sigma}(x);$$

nous verrons, en vertu de (17), que $P_s^{\nu,\rho}(x)$ et $Q_s^{\nu,\rho}(x)$ sont, pour s positif entier, intimement liées aux dérivées de $P^{\nu,\rho}(x)$ et $Q^{\nu,\rho}(x)$.

Les coefficients qui figurent aux seconds membres de (20), (21) sont choisis de sorte que nous aurons, en vertu de (1), (2), ces valeurs limites,

$$(22) \qquad \lim_{|x|=\infty} [x^{-\rho} P_\sigma^{\nu,\rho}(x)] = 1,$$

$$(23) \qquad \lim_{|x|=\infty} [x^{\rho+2\nu} Q_\sigma^{\nu,\rho}(x)] = 1.$$

Les définitions mêmes des fonctions adjointes donnent immédiatement, en vertu de l'équation différentielle des fonctions métasphériques, pour les fonctions adjointes, cette équation analogue,

$$(24) \quad (1-x^2)y^{(2)} - (1+2\nu)xy^{(1)} + \left[\rho(\rho+2\nu) - \frac{\sigma(\sigma+2\nu-1)}{1-x^2}\right] y = 0,$$

qui nous sera très utile bientôt.

Quant au prolongement analytique des deux systèmes de fonctions métasphériques $P^{\nu,\rho}(x)$, $Q^{\nu,\rho}(x)$ et $M^{\nu,\rho}(x)$, $N^{\nu,\rho}(x)$, il est digne de remarque, ce me semble, qu'il se présente immédiatement, comme je viens de le démontrer (¹), à l'aide de la formule intégrale de M. N. de Sonin (²) :

$$(25)\quad \int_0^\infty J^\nu(ty)\,J^\rho(tx)\,t^\sigma\,dt$$
$$= \cos\frac{\pi}{2}(\rho+\sigma-\nu)\,\frac{2^\sigma x^\rho}{\pi\, y^{\rho+\sigma+1}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\rho+\sigma+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+\sigma-\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\rho+1)}$$
$$\times F\left(\frac{\rho+\sigma+\nu+1}{2}, \frac{\rho+\sigma-\nu+1}{2}, \rho+1, \frac{x^2}{y^2}\right).$$

En effet, nous n'avons qu'à exprimer à l'aide de (25) ou $Q^{\nu,\rho}(x)$ ou les deux séries hypergéométriques qui figurent dans les formules (5), (4), c'est-à-dire à poser ou $\nu = \pm\frac{1}{2}$ ou $\rho = \pm\frac{1}{2}$.

Quant à la formule (25), les cas particuliers qui correspondent à $\nu = \pm\frac{1}{2}$ sont donnés sous autre forme par Hankel (³). Plus tard, M. Schafheitlin (⁴) a retrouvé, sans connaître évidemment le Mémoire de M. de Sonin, la formule (25). On voit clairement de ces citations que les formules tirées de (25) pour $\nu = \pm\frac{1}{2}$ n'appartiennent pas à Gegenbauer, ce qu'il prétend (⁵).

III. — Les fonctions ultrasphériques.

Posons dans les définitions § II, (1), (3), des fonctions $P^{\nu,\rho}(x)$ et $M^{\nu,\rho}(x)$, $\rho = n$, n étant un entier non négatif; nous aurons

$$P^{\nu,n}(x) = M^{\nu,n}(x),$$

et les séries hypergéométriques correspondantes donnent immédia-

(¹) *Annali di Matematica*, 3ᵉ série, t. XIV, 1907, p. 84.
(²) *Mathematische Annalen*, t. XVI, 1880, p. 51.
(³) *Id.*, t. VIII, 1875, p. 468.
(⁴) *Id.*, t. XXX, 1887, p. 168, 169.
(⁵) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. C, 1891.

tement pour le polynome entier de x ainsi obtenu cette autre expression,

$$(1) \qquad P^{\nu,n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu+n-s)}{s!(n-2s)!} (2x)^{n-2s},$$

et ces valeurs numériques,

$$(2) \qquad P^{\nu,n}(1) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)},$$

$$(3) \qquad P^{\nu,2n+1}(0) = 0, \qquad P^{\nu,2n}(0) = \frac{(-1)^n \Gamma(\nu+n)}{n!\,\Gamma(\nu)}.$$

Pour des petites valeurs de n, nous aurons, en vertu de (1),

$$P^{\nu,0}(x) = 1,$$
$$P^{\nu,1}(x) = 2\nu x,$$
$$P^{\nu,2}(x) = 2\nu(\nu+1)x^2 - \nu,$$
$$P^{\nu,3}(x) = \frac{4}{3}\nu(\nu+1)(\nu+2)x^3 - 2\nu(\nu+1)x,$$
$$P^{\nu,4}(x) = \frac{2}{3}\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)x^4 - 2\nu(\nu+1)(\nu+2)x^2 + \frac{1}{2}\nu(\nu+1).$$

Dans la théorie des fonctions sphériques ordinaires obtenues en mettant dans $P^{\nu,n}(x)\nu = \frac{1}{2}$, on trouve des nombreuses analogies entre les fonctions $P^n(\cos\varphi)$ et $\cos(n\varphi)$, $\sin(n\varphi)$; la raison de ces analogies est à chercher dans le fait que les trois fonctions susdites sont des cas particuliers de $P^{\nu,n}(\cos\varphi)$.

En effet, nous aurons, en vertu des formules § I, (1), (3),

$$(4) \qquad P^{\frac{1}{2},n}(\cos\varphi) = P^n(\cos\varphi) = X_n(\cos\varphi),$$

$$(5) \qquad \lim_{\nu=0}[\Gamma(\nu)P^{\nu,n}(\cos\varphi)] = D_\nu P^{\nu,n}(\cos\varphi)_{\nu=0} = \frac{2}{n}\cos(n\varphi), \qquad n > 0,$$

$$(6) \qquad P^{1,n}(\cos\varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Dans les paragraphes 21, 22, 23 de mon Mémoire *Recherches sur les fonctions sphériques* [1], j'ai donné une suite de conséquences, dont

---

[1] *Mémoires de l'Académie de Danemark*, 7e série, t. II, 1906.

plusieurs sont connues, tirées directement des trois dernières formules. D'autres analogies se trouvent dans les paragraphes suivants du présent Mémoire.

Cependant, la propriété la plus fondamentale des fonctions ultrasphériques est à chercher dans le théorème suivant :

Supposons plus grand que l'unité le rayon de convergence de la série de puissances

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots; \tag{7}$$

nous aurons ce développement en série de fonctions métasphériques

$$f(x) = \Gamma(\nu) \sum_{s=0}^{s=\infty} (\nu + s) \mathrm{A}_s \mathrm{P}^{\nu,s}(x), \tag{8}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\mathrm{A}_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(n+2s)!\, a_{n+2s}}{2^{n+2s} s!\, \Gamma(\nu+n+s+1)}; \tag{9}$$

la série de fonctions ultrasphériques qui figure au second membre de (9) *est convergente à l'intérieur de la plus petite ellipse qui a ses foyers dans* $(\pm 1, 0)$ *et qui passe par un point singulier de la fonction* $f(x)$.

Le théorème susdit est donné par C. Neumann (¹) dans le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$; cependant, la démonstration du théorème généralisé est identique à celle donnée par l'illustre géomètre allemand (²).

Supposons que $x = \pm 1$ soient de valeurs singulières pour la série de puissances (7); la série (8) n'est convergente que dans la partie de l'axe des nombres réels qui est située entre -1 et $+1$. De telles séries sont applicables pour des fonctions non analytiques aussi; ces séries, analogues à celles de Fourier, sont étudiées par Dirichlet (³)

(¹) *Ueber die Entwicklung einer Funktion mit imaginärem Argument nach der Kugelfunktionen erster und zweiter Art*, p. 10; Halle, 1862.

(²) *Voir* mon Mémoire susdit, p. 285.

(³) *Journal de Crelle*, t. 17, 1837, p. 35-56; *Œuvres*, t. I, p. 283-306.

et plus rigoureusement par MM. Dini ([1]) et Darboux ([2]). Ces géomètres ne considèrent que le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$; M. Giolotto ([3]) a étudié, en suivant la méthode de M. Dini, le cas général où ν est supposé quelconque.

Comme cas particuliers des séries *neumanniennes* susdites, nous aurons celles-ci,

$$x^n = \frac{n!\,\Gamma(\nu)}{2^n} \sum_{s=0}^{s\leq\frac{n}{2}} \frac{n-2s+\nu}{s!\,\Gamma(\nu+n-s+1)} \mathrm{P}^{\nu,n-2s}(x), \tag{10}$$

$$\frac{1}{(y-x)^\rho} = \frac{2^{2\nu}\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho)\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{s=n} (\nu+s)\,\mathrm{Q}^{\rho-\nu,2\nu-\rho+s}(y)\,\mathrm{P}^{\nu,s}(x), \tag{11}$$

qui nous seront très utiles bientôt; la formule (11), où il faut admettre $|x \pm \sqrt{x^2-1}| < |y \pm \sqrt{y^2-1}|$, est due à Gegenbauer ([4]).

IV. — Fonctions de Gegenbauer. Intégrales de Laplace et Jacobi.

Comme nous avons remarqué dans le § I, les fonctions annulaires de Gegenbauer, principalement identiques à nos fonctions métasphériques, ne sont pas pratiques toutes deux.

La première des fonctions en question est, abstraction faite d'un simple facteur, identique à notre $\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x)$, tandis que la seconde est, à un facteur près, la fonction suivante,

$$\mathrm{A}^{\nu,\rho}(x) = \int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^\rho (\sin\varphi)^{2\nu-1}\,d\varphi, \tag{1}$$

où il faut supposer *positive* la partie réelle de ν.

Pour étudier maintenant la fonction (1), supposons d'abord $|x| > |\sqrt{x^2-1}|$; la formule binomiale donnera

$$x^{-\rho}\mathrm{A}^{\nu,\rho}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{\rho}{s} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^s \int_0^\pi (\cos\varphi)^s (\sin\varphi)^{2\nu-1}\,d\varphi,$$

([1]) *Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. VI, 1874.
([2]) *Journal de Math.*, 2ᵉ série, t. XIX, 1894, p. 14.
([3]) *Giornale di Matematiche*, t. XXXIX, 1901, p. 162.
([4]) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. C, 1891.

d'où, en vertu des formules intégrales très connues,

$$\int_0^{\pi} (\cos\varphi)^{2s+1} (\sin\varphi)^{2\nu-1}\, d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{\pi} (\cos\varphi)^{2s} (\sin\varphi)^{2\nu-1}\, d\varphi = \frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\nu+s+\frac{1}{2}\right)},$$

et après des calculs élémentaires, pour $A^{\nu,\rho}(x)$, cette autre expression,

$$(2) \qquad A^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\,x^{\rho}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} F\left(\frac{1-\rho}{2}, -\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}+\nu, \frac{x^2-1}{x^2}\right);$$

c'est-à-dire que $A^{\nu,\rho}(x)$ est, abstraction faite d'un simple facteur, une fonction métasphérique de l'argument $x : \sqrt{x^2-1}$.

Appliquons ensuite la formule de Gauss [1] concernant la série hypergéométrique

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, 1-x) = {} & \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \\ & \times F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, x) + \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \\ & \times x^{\gamma-\alpha-\beta}(1-x)^{1-\gamma} F(1-\alpha, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, x); \end{aligned}$$

nous aurons, en vertu de (2) et des définitions § II, (1), (2), des fonctions métasphériques, puis en appliquant la formule § II, (16), pour $A^{\nu,\rho}(x)$, cette autre expression

$$(3) \quad A^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+2\nu)} \left[2^{2\nu-1}\,\Gamma(\nu)\,P^{\nu,\rho}(x) + \frac{\sin\rho\pi}{\sqrt{\pi}\,\sin\pi(\rho+\nu)} Q^{\nu,\rho}(x) \right].$$

Il saute aux yeux que cette fonction est beaucoup plus compliquée que notre $P^{\nu,\rho}(x)$.

Appliquons maintenant à la fonction (3) les identités § II, (11), (12), savoir : posons dans (3) $-\rho-2\nu$ au lieu de ρ, nous aurons après un

---

(1) *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, § 43; *Œuvres*, t. III.

simple calcul l'identité

$$A^{\nu,\rho}(x) = A^{\nu,-\rho-2\nu}(x),$$

d'où, en vertu de (1), cette formule intégrale curieuse,

$$(4)\qquad \int_0^{\pi} (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{\rho}(\sin\varphi)^{2\nu-1}\,d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{(\sin\varphi)^{2\nu-1}\,d\varphi}{(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{\rho+2\nu}},$$

qui semble être nouvelle dans cette généralité ; dans (4) il faut supposer positive la partie réelle de ν.

Le cas particulier de (4) qui correspond à $\nu = \frac{1}{2}$ et ρ égal à un entier non négatif est classique; cette formule particulière appartient au fond à Euler ([1]); elle a été retrouvée par Jacobi ([2]).

Posons ensuite dans (3), (4) $\rho = n$, n désignant un entier non négatif; nous aurons ces deux représentations intégrales de la fonction ultrasphérique,

$$(5)\qquad P^{\nu,n}(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma^2(\nu)\,2^{2\nu-1}} \int_0^{\pi} (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{n}(\sin\varphi)^{2\nu-1}\,d\varphi,$$

$$(6)\qquad P^{\nu,n}(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma^2(\nu)\,2^{2\nu-1}} \int_0^{\pi} \frac{(\sin\varphi)^{2\nu-1}\,d\varphi}{(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+2\nu}},$$

où la partie réelle de ν doit être supposée positive. Posons particulièrement $\nu = \frac{1}{2}$; la première de ces formules particulières appartient à Laplace ([3]), la seconde à Jacobi ([4]).

Il est *formellement* très curieux, ce me semble, que l'intégrale qui figure au second membre de (6) représente un polynome entier de x, quel que soit le paramètre ν.

Combinons encore les formules (2), (3); il en résulte pour la fonction ultrasphérique cette autre expression,

$$(7)\qquad P^{\nu,n}(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)\,x^n}{n!\,\Gamma(2\nu)}\,F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \nu+\frac{1}{2}, \frac{x^2-1}{x^2}\right),$$

([1]) *Institutiones calculi integralis*, t. IV, *Supplément* IV, 1794.
([2]) *Journal de Crelle*, t. 26, 1843, p. 81; *Œuvres*, t. VI, p. 148.
([3]) *Mécanique céleste*, t. V, Livre II, Chap. II.
([4]) *Loc. cit.*

d'où, en mettant $x = \cos\varphi$,

$$(8)\qquad P^{\nu,n}(\cos\varphi) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+2\nu)(\cos\varphi)^n}{n!\,\Gamma(\nu)\,2^{2\nu-1}}\,F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \nu+\frac{1}{2}, -\operatorname{tang}^2\varphi\right);$$

posons dans (8) $\nu = \frac{1}{2}$, nous retrouvons une formule due au fond à Euler [1], tandis que les hypothèses $\nu = 0$, $\nu = 1$ donnent, en vertu de § III, (5), (6), la formule de Moivre concernant la puissance $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$.

Enfin, combinons les deux formules (2), (3), puis appliquons § II, (10); il en résulte la formule

$$(9)\qquad \Gamma(\nu)\,P^{\nu,\rho}(x) + \frac{\sin\pi\rho}{\sqrt{\pi}\,2^{2\nu-1}\sin\pi(\rho+\nu)}\,Q^{\nu,\rho}(x)$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\cos\nu\pi}{2^{\rho+2\nu-1}\,\Gamma\left(\rho+\nu+\frac{1}{2}\right)\cos\pi(\rho+\nu)}\,(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}\,P^{\frac{1}{2}-\nu-\rho,\rho}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right),$$

d'où, en vertu des identités § II, (15), (16), la formule analogue

$$(10)\qquad \Gamma(\nu)\,P^{\nu,\rho}(x) - \frac{\sin\pi(\rho+2\nu)}{\sqrt{\pi}\,2^{2\nu-1}\sin\pi(\rho+\nu)}\,Q^{\nu,\rho}(x)$$
$$= \frac{2^{\rho+1}\,\Gamma(\rho+2\nu)\sin\pi(\rho+2\nu)}{\pi}\,(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}\,Q^{\frac{1}{2}-\nu-\rho,\rho}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right).$$

Ces deux formules se déduisent aussi immédiatement à l'aide d'une transformation de la variable x dans l'équation différentielle § I, (2), des fonctions métasphériques. Cependant, j'ai préféré appliquer la formule susdite de Gauss au lieu de donner la transformation indiquée.

---

(1) *Institutiones calculi integralis*, t. I, sect. I, Cap. VI, probl. 33.

SECONDE PARTIE.

FORMULES D'ADDITION.

V. — Équations aux dérivées partielles.

Dans son Traité classique, Heine [1] remarque que la propriété la plus essentielle des fonctions sphériques est à chercher dans la formule d'addition de ces fonctions.

La raison de cette formule d'addition et de l'autre que nous ajoutons dans le dernier paragraphe du présent Mémoire est à chercher dans le fait curieux que la fonction métasphérique générale, prise d'un argument très compliqué, satisfait à des équations aux dérivées partielles d'une forme très simple.

En premier lieu, considérons la fonction

$$y = \mathrm{K}^{\nu,\rho}(\omega), \qquad \omega = \alpha\beta + x\sqrt{\alpha^2 - 1}\sqrt{\beta^2 - 1};$$

nous aurons

$$\frac{dy}{d\omega} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\lambda}, \qquad \frac{d^2 y}{d\omega^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{\lambda^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} + \frac{x\sqrt{\beta^2 - 1}}{\lambda^3}\frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(\alpha^2 - 1)\sqrt{\beta^2 - 1}}{\lambda}\frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)\left(\frac{\alpha^2 - 1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} + \frac{x\sqrt{\beta^2 - 1}}{\lambda^3}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right),$$

où nous avons posé pour abréger

$$\lambda = \beta\sqrt{\alpha^2 - 1} + \alpha x\sqrt{\beta^2 - 1},$$

d'où, sans peine,

$$1 - \omega^2 = -\lambda^2 + (x^2 - 1)(\beta^2 - 1).$$

---

[1] *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, 1878, p. 312; Berlin.

Appliquons ensuite l'équation différentielle § I, (2),

$$(1-\omega^2)\frac{d^2y}{d\omega^2}-(1+2\nu)\omega\frac{dy}{d\omega}+\rho(\rho+2\nu)y=0;$$

les formules différentielles que nous venons de développer donnent immédiatement pour $y=\mathrm{K}^{\nu,\rho}(\omega)$ cette équation aux dérivées partielles :

$$(1)\qquad (1-\alpha^2)\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}-(1+2\nu)\alpha\frac{\partial y}{\partial\alpha} +\rho(\rho+2\nu)y+\frac{1}{1-\alpha^2}\left[(1-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2\nu x\frac{\partial y}{\partial x}\right]=0.$$

L'analogie entre les deux parties du premier membre de (1) et les premiers membres des équations différentielles obtenues pour $\mathrm{K}^{\nu,\rho}(\alpha)$ et $\mathrm{K}^{\nu-\frac{1}{2},\rho}(x)$ saute aux yeux.

Il est bien curieux, ce me semble, qu'une étude directe du cas particulier $\beta=\alpha$ nous conduira à des résultats analogues aux précédents.

En effet, posons

$$y=\mathrm{K}^{\nu,\rho}(\omega),\qquad \omega=\alpha^2+(1-\alpha^2)x;$$

nous aurons les formules différentielles

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha}=2\alpha(1-x)\frac{dy}{d\omega},\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}=4\alpha^2(1-x)^2\frac{d^2y}{d\omega^2}+2(1-x)\frac{dy}{d\omega},$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}=(1-\alpha^2)\frac{dy}{d\omega},\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=(1-\alpha^2)^2\frac{d^2y}{d\omega^2},$$

ce qui donnera, en vertu de l'équation différentielle de $\mathrm{K}^{\nu,\rho}(\omega)$, cette équation aux dérivées partielles,

$$(2)\qquad \alpha(1-\alpha^2)\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}-[1+(4\nu+1)\alpha^2]\frac{\partial y}{\partial\alpha}+4\alpha\rho(\rho+2\nu)y +\frac{4\alpha}{1-\alpha^2}\left[(1-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-(1+2\nu)x\frac{\partial y}{\partial x}\right]=0,$$

car nous aurons ici

$$1-\omega^2=(1-\alpha^2)(1-x)[1+x+\alpha^2(1-x)].$$

La partie du premier membre de (2) qui contient les dérivées prises par rapport à x est semblable au premier membre de l'équation différentielle obtenue pour $K^{\nu,\rho}(x)$, tandis que la partie contenant les dérivées prises par rapport à α est intimement liée au premier membre de l'équation différentielle de Gauss.

En effet, mettons dans l'équation de Gauss

$$(3)\quad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0,\qquad y=F(\alpha,\beta,\gamma,x),$$

où F désigne la série hypergéométrique ordinaire

$$\alpha=\sigma-\rho,\qquad \beta=\rho+\sigma+2\nu,\qquad \gamma=2\nu+2\sigma+1,\qquad \alpha+\beta+1=\gamma;$$

nous aurons, pour la fonction

$$y=F(\sigma-\rho,\ \rho+\sigma+2\nu,\ 2\nu+2\sigma+1,\ x),$$

l'équation différentielle plus simple

$$(4)\quad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(2\nu+2\sigma+1)(1-x)\frac{dy}{dx}+(\rho-\sigma)(\rho+\sigma+2\nu)y=0.$$

Introduisons maintenant dans (4), comme variable indépendante, la fonction

$$\omega=1-x^2,$$

puis appliquons ces formules de transformation

$$\frac{dy}{d\omega}=-\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx},\qquad \frac{d^2y}{d\omega^2}=\frac{1}{4x^2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{4x^3}\frac{dy}{dx};$$

il en résulte sans peine pour la fonction

$$y=F(\sigma-\rho,\ \rho+\sigma+2\nu,\ 2\nu+2\sigma+1,\ 1-x^2)$$

cette équation différentielle linéaire :

$$(5)\quad \begin{aligned} x(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-[1+(4\nu+4\sigma+1)x^2]\frac{dy}{dx}\\ +4x(\rho-\sigma)(\rho+\sigma+2\nu)y=0.\end{aligned}$$

Cela posé, mettons enfin dans (5)

$$y = (1 - x^2)^{\sigma} z;$$

un simple calcul donnera finalement pour la fonction

$$(6) \qquad z = (1 - x^2)^{\sigma} F(\sigma - \rho, \rho + \sigma + 2\nu, 2\nu + 2\sigma + 1, 1 - x^2)$$

l'équation différentielle suivante :

$$(7) \qquad x(1 - x^2)\frac{d^2 z}{dx^2} - [1 + (4\nu + 1)x^2]\frac{dz}{dx} + \left[4\rho(\rho + 2\nu) - \frac{4\sigma(\sigma + 2\nu)}{1 - x^2}\right] xz = 0.$$

Remarquons encore que, une seconde intégrale particulière de l'équation (3) de Gauss étant la série hypergéométrique

$$x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x),$$

nous aurons comme seconde intégrale particulière de (7) la fonction

$$(8) \qquad (1 - x^2)^{-\sigma-2\nu} F(-\sigma - \rho - 2\nu, \rho - \sigma, 1 - 2\nu - 2\sigma, 1 - x^2).$$

VI. — Première formule d'addition.

Étudions maintenant la fonction ultrasphérique

$$(1) \qquad y = P^{\nu+\frac{1}{2}, n}(\alpha\beta + x\sqrt{\alpha^2 - 1}\sqrt{\beta^2 - 1});$$

nous aurons toujours une identité de la forme

$$(2) \quad \Gamma(\nu + \tfrac{1}{2}) P^{\nu+\frac{1}{2}, n}(\alpha\beta + x\sqrt{\alpha^2 - 1}\sqrt{\beta^2 - 1}) = \Gamma(\nu)\sum_{s=0}^{s=n} A_s^{\nu, n}(\alpha, \beta) P^{\nu, s}(x),$$

où les coefficients $A_s^{\nu, n}(\alpha, \beta)$ sont symétriques par rapport aux deux variables α et β, savoir :

$$(3) \qquad A_s^{\nu, n}(\alpha, \beta) = A_s^{\nu, n}(\beta, \alpha).$$

Pour déterminer maintenant les coefficients A_s différentions par rapport à x les deux membres de l'identité (2); nous aurons, en vertu de § II, (17),

$$\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1}\,\Gamma(\nu+\tfrac{3}{2})\,P^{\nu+\frac{3}{2},n-1}(\alpha\beta+x\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1})$$
$$=\Gamma(\nu+1)\sum_{s=0}^{s=n-1}A_{s+1}^{\nu,n}(\alpha,\beta)\,P^{\nu+1,s}(x),$$

d'où, en mettant dans (2) $\nu+1$ au lieu de ν et $n-1$ au lieu de n, la formule récursive

$$A_s^{\nu,n}(\alpha,\beta)=\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1}\,A_{s-1}^{\nu+1,n-1}(\alpha,\beta)$$
$$=(\alpha^2-1)^{\frac{s}{2}}(\beta^2-1)^{\frac{s}{2}}A_0^{\nu+s,n-s}(\alpha,\beta), \tag{4}$$

de sorte qu'il ne nous reste plus qu'à déterminer le seul coefficient $A_0^{\nu,n}(\alpha,\beta)$.

A cet effet, appliquons l'équation aux dérivées partielles § V, (1), pour $\rho=n$, n étant un entier non négatif, puis remarquons l'identité

$$(1-x^2)D_x^2P^{\nu,s}(x)-(1+2\nu)xD_xP^{\nu,s}(x)=-s(s+2\nu)P^{\nu,s}(x);$$

nous aurons pour la détermination de $A_s^{\nu,n}(\alpha,\beta)$ cette équation aux dérivées partielles,

$$(1-\alpha^2)\frac{\partial^2A_s}{\partial\alpha^2}-(2+2\nu)\alpha\frac{\partial A_s}{\partial\alpha}+\left[n(n+2\nu+1)-\frac{s(s+2\nu)}{1-\alpha^2}\right]A_s=0,$$

d'où, en vertu de l'équation différentielle des fonctions adjointes citée dans le paragraphe II, formule (24),

$$A_s^{\nu,n}(\alpha,\beta)=a_s^{\nu,n}\,P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\alpha)\,P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\beta), \tag{5}$$

où les coefficients a_s sont indépendants et de α et de β.

Cela posé, mettons dans (2) $\alpha=\beta=1$; nous aurons

$$\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\,P^{\nu+\frac{1}{2},n}(1)=\Gamma(\nu)\,P^{\nu,n}(1)\left[P^{\nu+\frac{1}{2},n}(1)\right]^2A_0^{\nu,n},$$

d'où, en vertu de § II, (20), et § III, (2),

$$a_0^{\nu,n}=\frac{2^{2\nu+2n+1}\Gamma^2(\nu+n+\frac{1}{2})\nu}{\sqrt{\pi}\,n!\,\Gamma(n+2\nu+1)},$$

de sorte que la formule récursive (4) donnera la formule générale

$$a_s^{\nu,n} = \frac{2^{2\nu+2n+1}\,\Gamma^2(\nu+n+\frac{1}{2})(\nu+s)}{\sqrt{\pi}(n-s)!\,\Gamma(2\nu+n+s+1)},$$

d'où finalement le développement cherché :

$$(6)\quad \begin{aligned} &P^{\nu+\frac{1}{2},n}(\alpha\beta + x\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1}) \\ &= \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma^2(\nu+n+\frac{1}{2})2^{2\nu+2n+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \\ &\quad\times\sum_{s=0}^{s=n}\frac{\nu+s}{(n-s)!\,\Gamma(2\nu+n+s+1)}\,P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\alpha)\,P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\beta)\,P^{\nu,s}(x), \end{aligned}$$

dont le cas $\nu = 0$ est dû à Laplace et Legendre ([1]).

La formule d'addition (6) est d'une portée très étendue; ici nous avons à étudier séparément les cas particuliers suivants :

1° $x = 1$, $\alpha \cos\varphi$, $\beta = \cos\psi$; nous aurons, en vertu de § III, (2),

$$(7)\quad \begin{aligned} &P^{\nu+\frac{1}{2},n}[\cos(\varphi+\psi)] \\ &= \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma^2(\nu+n+\frac{1}{2})2^{2\nu+2n+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(2\nu)} \\ &\quad\times\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(\nu+s)\,\Gamma(s+2\nu)}{(n-s)!\,s!\,\Gamma(2\nu+n+s+1)}\,P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\cos\varphi)\,P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\cos\psi), \end{aligned}$$

d'où pour $\nu = \pm\frac{1}{2}$ les formules générales pour $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$, tandis que l'hypothèse $\nu = 0$ donnera le développement analogue

$$(8)\quad \begin{aligned} &P^n[\cos(\varphi+\psi)] \\ &= [1.3.5\ldots(2n-1)]^2\sum_{s=0}^{s=n}\frac{\varepsilon_{n-s}}{(n-s)!\,(n+s)!}\,P_s^n(\cos\varphi)\,P_s^n(\cos\psi), \end{aligned}$$

où nous avons posé pour abréger $\varepsilon_0 = 1$, mais $\varepsilon_p = 2$ pour $p \geqq 1$.

([1]) HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, 1878, p. 313.

2° L'hypothèse $x = 0$ donnera la formule singulière

$$(9)\quad \begin{aligned} &P^{\nu+\frac{1}{2},n}(\alpha\beta) \\ &= \frac{\Gamma^2(\nu+n+\frac{1}{2})2^{2\nu+2n+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \\ &\quad\times\sum_{s=0}^{s=\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(\nu+2s)\Gamma(\nu+s)}{s!(n-s)!\Gamma(2\nu+n+s+1)} P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\alpha)P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\beta). \end{aligned}$$

3° Considérons un triangle sphérique ayant les côtés a, b, c et les angles opposés A, B, C; nous aurons

$$(10)\qquad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

d'où, en posant dans (6) $\alpha = \cos a$, $\beta = \cos b$, $x = \cos C$,

$$(11)\quad \begin{aligned} &P^{\nu+\frac{1}{2},n}(\cos c) \\ &= \frac{\Gamma(\nu)\Gamma^2(\nu+n+\frac{1}{2})2^{2\nu+2n+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^s(\nu+s)}{(n-s)!\Gamma(2\nu+n+s+1)} \\ &\quad\times P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\cos a)P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\cos b)P^{\nu,s}(\cos C), \end{aligned}$$

ce qui donnera pour $\nu = \frac{1}{2}$

$$(12)\quad \begin{aligned} &\frac{\sin(n+1)c}{\sin c} \\ &= (n!)^2 2^{2n+1}\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^s(2s+1)P_s^{1,n}(\cos a)P_s^{1,n}(\cos b)}{(n-s)!(n+s+1)!}P^s(\cos C), \end{aligned}$$

formule qui est nouvelle peut-être.

4° Multiplions ensuite par β^n les deux membres de (6), puis faisons croître au delà de toute limite la valeur absolue de β; nous aurons, en vertu de § 2, (22), cet autre développement,

$$(13)\quad \begin{aligned} &(\alpha + x\sqrt{\alpha^2-1})^n \\ &= \frac{n!\,\Gamma(\nu+n+\frac{1}{2})\Gamma(\nu)2^{2\nu+1}}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(s+\nu)P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\alpha)}{(n-s)!\Gamma(2\nu+n+s+1)}P^{\nu,s}(x), \end{aligned}$$

d'où, pour $\nu = 0$, $x = \cos\varphi$, une formule classique [1].

---

[1] Heine, *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, 1878, p. 200.

Considérons encore la fonction métasphérique générale

$$(14)\qquad y = P^{\nu+\frac{1}{2},\rho}(\alpha\beta + x\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1}),$$

où $\alpha\beta$ n'est égal ni à ± 1 ni à ∞, tandis que nous supposons encore

$$(15)\qquad |1 \pm \alpha\beta| > |\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1}|;$$

la fonction (14) est développable en série de puissances ascendantes de x, dont le rayon de convergence est plus grand que l'unité; c'est-à-dire que la fonction (14) est développable en série *neumannienne* et cela en appliquant les formules générales indiquées dans le paragraphe III.

Posons généralement

$$(16)\qquad \Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\,P^{\nu+\frac{1}{2},\rho}(\alpha\beta + x\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1}) = \Gamma(\nu)\sum_{s=0}^{s=\infty} A_s^{\nu,\rho}(\alpha,\beta)\,P^{\nu,s}(x);$$

il est évident que la formule (4) garde sa validité si nous y remplaçons le positif entier n par le nombre quelconque ρ; de plus, nous aurons certainement au lieu de (5) pour $A_s^{\nu,\rho}(\alpha,\beta)$ cette expression générale,

$$(17)\qquad A_s^{\nu,\rho}(\alpha,\beta) = a_s^{\nu,\rho}\,K_s^{\nu+\frac{1}{2},\rho}(\alpha)\,K_s^{\nu+\frac{1}{2},\rho}(\beta),$$

où les $K_s^{\nu+\frac{1}{2},\rho}$ désignent des fonctions adjointes.

Cela posé, multiplions par $\beta^{-\rho}$ les deux membres de (16), puis faisons croître au delà de toute limite la valeur absolue de β; les coefficients $a_s^{\nu,\rho}$ qui figurent au second membre de (17) se déterminent en développant à l'aide de § III, (11), la puissance

$$(\alpha + x\sqrt{\alpha^2-1})^{\rho}.$$

On voit que les fonctions adjointes qui figurent dans (17) sont intimement liées aux fonctions étudiées dans le paragraphe IV.

La formule générale (16) ainsi obtenue est due à Gegenbauer [1].

---

[1] *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. C, 1891.

VII. — Autres développements concernant le triangle sphérique.

Appliquons les formules générales concernant les séries *neumanniennes* indiquées au paragraphe III; nous aurons ce développement élémentaire,

$$(1)\qquad \left(\alpha\beta + x\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1}\right)^n$$
$$= n!\,\Gamma(\nu)\,(\alpha\beta)^n \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\left(\sqrt{\alpha^2-1}\right)^s\left(\sqrt{\beta^2-1}\right)^s}{(n-s)!\,\Gamma(\nu+s)\,(2\alpha\beta)^s}$$
$$\times F\left(\frac{s-n}{2}, \frac{s+1-n}{2}, \nu+s+1, \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\,\frac{\beta^2-1}{\beta^2}\right) P^{\nu,s}(x),$$

d'où, en posant $x = -\cos C$, $\alpha = \cos a$, $\beta = \cos b$, pour le triangle sphérique mentionné au paragraphe VI, 3°,

$$(2)\quad (\cos c)^n = n!\,\Gamma(\nu)\,(\cos a \cos b)^n \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b)^s}{(n-s)!\,\Gamma(\nu+s)\,2^s}$$
$$\times F\left(\frac{s-n}{2}, \frac{s+1-n}{2}, \nu+s+1, \operatorname{tang}^2 a \operatorname{tang}^2 b\right) P^{\nu,s}(\cos C).$$

Posons dans (2) $\nu = \frac{1}{2}$, nous aurons un développement selon les fonctions sphériques ordinaires, tandis que les hypothèses $\nu = 0$, $\nu = 1$ donnent respectivement, en vertu de § III, (5), (6),

$$(3)\quad (\cos c)^n = (\cos a \cos b)^n \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\varepsilon_s \binom{n}{s}}{2^s} (\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b)^s$$
$$\times F\left(\frac{s-n}{2}, \frac{s+1+n}{2}, s+1, \operatorname{tang}^2 a \operatorname{tang}^2 b\right) \cos(sC),$$

$$(4)\quad (\cos c)^n = (\cos a \cos b)^n \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\binom{n}{s}}{2^s} (\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b)^s$$
$$\times F\left(\frac{s-n}{2}, \frac{s+1-n}{2}, s+2, \operatorname{tang}^2 a \operatorname{tang}^2 b\right) \frac{\sin(s+1)C}{\sin C};$$

dans (3) il faut poser $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_p = 2$ pour $p > 0$.

Multiplions ensuite par β^{-n} les deux membres de (1), puis faisons croître au delà de toute limite la valeur absolue de β; nous retrouvons la série *neumannienne* § VI, (13), d'où une nouvelle démonstration de la formule § IV, (7).

Comparons maintenant les deux développements (1) et § VI, (6), puis développons en vertu de § III, (10), la puissance qui figure au premier membre de (1); nous aurons, en égalant les coefficients de $P^{\nu,\rho}(x)$ dans les deux développements ainsi obtenus de la puissance susdite, cette formule curieuse,

$$(5)\quad (\alpha\beta)^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \nu+1, \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\,\frac{\beta^2-1}{\beta^2}\right)$$

$$= \frac{n!\,\Gamma(2\nu+1)\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{2^n} \sum_{s=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(n-2s+\nu+\frac{1}{2})\,(n-2s)!}{s!\,\Gamma(\nu+n-s+\frac{1}{2})\,\Gamma(2\nu+n-2s+1)}$$

$$\times P^{\nu+\frac{1}{2},\,n-2s}(\alpha)\,P^{\nu+\frac{1}{2},\,n-2s}(\beta),$$

d'où, pour $\nu = \frac{1}{2}$, $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \cos\psi$,

$$(6)\qquad (2\cos\varphi\cos\psi)^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, \tang^2\varphi\tang^2\psi\right)$$

$$= \sum_{s=0}^{\frac{n}{2}} \varepsilon_{n-2s} \binom{n}{s} \cos(n-2s)\varphi\cos(n-2s)\psi,$$

tandis que l'hypothèse $\nu = \frac{1}{2}$, $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \cos\psi$ donnera de même

$$(7)\qquad (2\cos\varphi\cos\psi)^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \tang^2\varphi\tang^2\psi\right)$$

$$= \sum_{s=0}^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{s!\,(n-s+1)!}\,\frac{\sin(n-2s+1)\varphi\sin(n-2s+1)\psi}{\sin\varphi\sin\psi}.$$

Inversement, déduisons à l'aide de la définition § III, (1), de la fonction ultrasphérique, la formule § VI, (4), de (1); nous aurons de même

$$(8)\qquad \frac{\Gamma(2\nu)\,\Gamma(\nu)\,n!}{\Gamma(n+2\nu)} P^{\nu,n}(\alpha)\,P^{\nu,n}(\beta)$$

$$= \sum_{s=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s\,\Gamma(\nu+n-s)\,(2\alpha\beta)^{n-2s}}{s!\,(n-2s)!}$$

$$\times F\left(\frac{2s-n}{2}, \frac{2s+1-n}{2}, \nu+\frac{1}{2}, \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\,\frac{\beta^2-1}{\beta^2}\right),$$

d'où, pour $\nu = 0$, $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \cos\psi$,

$$\begin{aligned}(9)\qquad & \frac{2}{n}\cos(n\varphi)\cos(n\psi) \\ & = \sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s (n-s-1)!}{s!(n-2s)!}(2\cos\varphi\cos\psi)^{n-2s} \\ & \quad \times F\left(\frac{2s-n}{2}, \frac{2s+1-n}{2}, \frac{1}{2}, \tang^2\varphi \tang^2\psi\right),\end{aligned}$$

tandis que les hypothèses $\nu = 1$, $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \cos\psi$ donnent la formule analogue

$$\begin{aligned}(10)\qquad & \frac{\sin(n+1)\varphi\sin(n+1)\psi}{\sin\varphi\sin\psi} \\ & = \sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n-s}{s}(2\cos\varphi\cos\psi)^{n-2s} \\ & \quad \times F\left(\frac{2s-n}{2}, \frac{2s+1-n}{2}, \frac{3}{2}, \tang^2\varphi \tang^2\psi\right).\end{aligned}$$

VIII. — Seconde formule d'addition.

L'équation aux dérivées partielles § V, (2), nous conduira naturellement à étudier un développement de la forme

$$(1)\qquad P^{\nu,n}[\alpha^2 + (1-\alpha^2)x] = \sum_{s=0}^{s=n} A_s^{\nu,n}(\alpha)\, P^{\nu,s}(x),$$

où les coefficients A_s désignent des polynomes entiers de α; la formule (1) est valable pour des valeurs finies quelconques de α et de x.

Pour déterminer maintenant les polynomes inconnus $A_s^{\nu,n}(\alpha)$, différentions par rapport à x la formule (1); nous aurons

$$(1-\alpha^2)\, P^{\nu+1,n-1}[\alpha^2 + (1-\alpha^2)x] = \sum_{s=0}^{s=n-1} A_{s+1}^{\nu,n}(\alpha)\, P^{\nu+1,s}(x),$$

d'où, en posant dans (1) $\nu+1$ au lieu de ν et $n-1$ au lieu de n, la formule récursive

$$(2)\qquad A_s^{\nu,n}(\alpha) = (1-\alpha^2)\, A_{s-1}^{\nu+1,n-1}(\alpha) = (1-\alpha^2)^s A_0^{\nu+s,n-s}(\alpha),$$

de sorte qu'il ne nous reste plus qu'à déterminer la seule fonction $A_0^{\nu,n}(\alpha)$.

A cet effet, appliquons l'équation aux dérivées partielles § V, (2); nous aurons pour $A_s^{\nu,n}(\alpha)$ cette équation différentielle linéaire,

$$\alpha(1-\alpha^2)\frac{d^2 A_s}{d\alpha^2} - [1+(4\nu+1)\alpha^2]\frac{dA_s}{d\alpha} + \left[4n(n+2\nu) - \frac{4s(s+2\nu)}{1-\alpha^2}\right]\alpha A_s = 0,$$

d'où, en vertu de § V, (7),

$$(3) \qquad A_s^{\nu,n}(\alpha) = a_s^{\nu,n}(1-\alpha^2)^s F(s-n,\ n+s+2\nu,\ 2\nu+2s+1,\ 1-\alpha^2),$$

où $a_s^{\nu,n}$ est indépendant de α.

Cela posé, mettons dans (1) $\alpha = 1$; nous aurons immédiatement

$$A_0^{\nu,n}(1) = P^{\nu,n}(1) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{4!\,\Gamma(2\nu)} = a_0^{\nu,n},$$

d'où finalement la formule cherchée

$$(4) \qquad \begin{aligned} &P^{\nu,n}[\alpha^2+(1-\alpha^2)x] \\ &\quad = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\Gamma(n+s+2\nu)(1-\alpha^2)^s}{(n-s)!\,\Gamma(2\nu+2\nu)} \\ &\qquad \times F(s-n,\ n+s+2\nu,\ 2\nu+2s+1,\ 1-\alpha^2)\, P^{\nu,s}(x), \end{aligned}$$

qui est certainement nouvelle.

Posons ensuite dans (4) $x = 1$ et $\beta = 1-\alpha^2$; il en résulte

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!} &= \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\Gamma(n+s+2\nu)\,\Gamma(2s+2\nu)}{(n-s)!\,s!\,\Gamma(2\nu+2s)}\beta^s \\ &\quad \times F(s-n,\ n+s+2\nu,\ 2\nu+2s+1,\ \beta), \end{aligned}$$

tandis que l'hypothèse $x = 0$ donnera, si nous posons ensuite $x = 1-\alpha^2$,

$$(6) \qquad \begin{aligned} P^{\nu,n}(1-x) &= \sum_{s=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s\,\Gamma(n+2s+2\nu)\,\Gamma(s+\nu)}{(n-s)!\,s!\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(4s+2\nu)} x^{2s} \\ &\quad \times F(2s-n,\ 2s+n+2\nu,\ 2\nu+4s+1,\ x). \end{aligned}$$

Étudions maintenant le triangle sphérique isoscèle ayant les côtés c, a, a et les angles opposés C, A, A; nous aurons

$$(7) \qquad \cos c = \cos^2 a + \cos^2 b \cos C,$$

d'où, en vertu de (4) en y posant $\alpha = \cos a$, $x = \cos C$,

$$(8)\qquad P^{\nu,n}(\cos c) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\Gamma(n+s+2\nu)(\sin a)^{2s}}{(n-s)!\,\Gamma(2s+2\nu)} \times F(s-n, s+n+2\nu, 2\nu+2s+1, \sin^2 a)\, P^{\nu,s}(\cos C),$$

ce qui donnera pour $\nu = \frac{1}{2}$

$$(9)\qquad P^{n}(\cos c) = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n+s}{2s} (\sin a)^{2s} \times F(s-n, s+n+1, 2s+2, \sin^2 a)\, P^{s}(\cos C),$$

tandis que les hypothèses $\nu = 0$, $\nu = 1$ donnent respectivement

$$(10)\qquad \cos(nc) = n \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\varepsilon_s (n+s-1)!\,(\sin a)^{2s}}{(n-s)!\,(2s)!} \times F(s-n, n+s, 2s+1, \sin^2 a) \cos(sC),$$

$$(11)\qquad \frac{\sin(n+1)c}{\sin c} = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n+s+1}{2s+1} (\sin a)^{2s} \times F(s-n, s+n+2, 2s+3, \sin^2 a) \frac{\sin(s+1)C}{\sin C};$$

la formule (10), où il faut admettre $\varepsilon_0 = 1$, mais généralement $\varepsilon_p = 2$, $p \geq 1$, est due à Stieltjes (¹).

Quant à la fonction métasphérique générale $K^{\nu,\rho}[\alpha^2 + (1-\alpha^2)x]$, où α n'est égal ni à ± 1 ni à ∞, elle a toujours dans $x = 1$ un point singulier, c'est-à-dire que la série de puissances de x obtenue pour la fonction susdite a son rayon de convergence précisément égal à l'unité, de sorte que la série de fonctions $P^{\nu,\rho}(x)$ correspondante ne devienne aucune série *neumannienne*. En effet, la série en question n'est convergente que dans la partie de l'axe des nombres réels qui est située entre $+1$ et -1; c'est pourquoi nous ne nous arrêtons pas ici à l'étude plus ample de telles séries.

(¹) *Journal de Math.*, 4ᵉ série, t. V, 1889, p. 55-65.