ÉTIENNE DELASSUS

Sur les invariants des systèmes différentiels

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 25 (1908), p. 255-318

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__255_0>

SUR LES INVARIANTS

DES

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS.

INTRODUCTION.

Dans des Mémoires antérieurs ([1]) publiés en 1896 et 1897, je me suis occupé des systèmes différentiels quelconques, et le Mémoire actuel est le développement de résultats que j'ai obtenus récemment en reprenant l'étude de ces questions. Aussi, sans qu'il soit nécessaire de le rappeler chaque fois, j'emploierai constamment les notations, locutions et résultats contenus dans ces Mémoires, et notamment dans celui *Sur l'extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles*.

On reconnaît immédiatement qu'un même système différentiel peut être mis de diverses façons sous *forme canonique* et que ces diverses formes conduisent à des façons bien différentes de déterminer l'intégrale au moyen de fonctions et constantes initiales. Par exemple, le

([1]) *Sur l'extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1896).

([2]) *Sur les transformations et l'intégration des systèmes différentiels* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1897).

système canonique

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (u, v \text{ fonctions de } x, y, z)$$

définit, par application du théorème de Cauchy généralisé, une intégrale au moyen de deux fonctions initiales dépendant toutes deux de y et z. Mais ce système peut être mis sous la forme canonique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

et, sous cette nouvelle forme, le même théorème de Cauchy généralisé détermine une intégrale par trois fonctions initiales, deux dépendant de y et z et une dépendant de z.

Existe-t-il des relations entre ces divers systèmes de fonctions et constantes initiales fournis par l'application du théorème de Cauchy généralisé aux diverses formes canoniques d'un même système différentiel?

Si l'on se place au point de vue analytique pur, on sait que les fonctions arbitraires entrant dans l'intégrale générale n'ont, à la rigueur, aucune importance, ne constituant que des moyens plus ou moins commodes de grouper les constantes arbitraires en nombre infini qui figurent dans l'intégrale générale. Mais, si l'on s'assujettit à n'introduire que des fonctions arbitraires acceptables sous la seule condition d'être analytiques, on obtient déjà des groupements présentant incontestablement un certain intérêt, et si, en outre, comme cela se présente pour les *systèmes initiaux de Cauchy* fournis par le théorème de Cauchy généralisé, ces fonctions initiales se suivent suivant une loi régulière et ont une signification géométrique évidente, ces groupements s'imposent et leur étude est nécessaire.

La réponse à la question que nous venons de poser nous est fournie par des *invariants*, c'est-à-dire par certaines quantités formées avec les nombres fondamentaux des formes canoniques et qui restent invariantes quand on passe à une autre forme canonique. J'ai exposé deux méthodes pour les obtenir; la première est plus simple et les donne simultanément, mais j'ai néanmoins tenu à exposer la seconde, qui les donne de proche en proche, car c'est elle qui m'a conduit à cette notion d'invariants et qui m'a permis de trouver leur loi de formation au moyen de fonctions qui se présentent dans l'analyse combinatoire élémentaire.

Ces invariants ne font pas que donner la réponse à la question posée. Ils ont une portée bien plus considérable, comme on le verra déjà dans ce Mémoire, et ils semblent devoir jouer un rôle important dans la théorie des systèmes différentiels, principalement à propos de leurs transformations.

I. — Formules et remarques préliminaires.

I. Sur les formules de combinaisons.

1. Nous poserons

$$\varphi_p(z) = \frac{z(z+1)\ldots(z+p-1)}{1.2\ldots p}. \tag{1}$$

Cette fonction de z, qui n'est définie que pour les valeurs entières et positives de l'indice p, est un polynome entier de degré p en z, et, pour z entier et positif, elle a pour valeur le nombre des combinaisons de z objets p à p avec répétition.

On vérifie immédiatement la formule de récurrence

$$\varphi_{p+1}(z+1) = \varphi_{p+1}(z) + \varphi_p(z+1), \tag{2}$$

et, si on l'applique successivement à

$$z, \quad z+1, \quad \ldots, \quad z+h \qquad (h \text{ entier positif}),$$

on obtient

$$\varphi_p(z) + \varphi_p(z+1) + \ldots + \varphi_p(z+h) = \varphi_{p+1}(z+h) - \varphi_{p+1}(z-1), \tag{3}$$

et, plus particulièrement, en faisant $z=1$, $h=k-1$,

$$\varphi_p(1) + \varphi_p(2) + \ldots + \varphi_p(k) = \varphi_{p+1}(k). \tag{4}$$

2. La formule d'addition de la fonction $\varphi_p(z)$ étant nécessaire pour la suite, nous l'établirons de la façon suivante :

Puisque $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont des polynomes entiers de degrés successifs $1, 2, \ldots$, on peut successivement exprimer $z, z^2, \ldots$ linéairement au moyen de φ_1, de φ_1 et $\varphi_2, \ldots$, et tout polynome entier de degré p pourra s'exprimer linéairement au moyen de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$. En particulier, a étant une constante,

$$\varphi_p(z+a)$$

sera un polynome de degré p et l'on pourra écrire

$$\varphi_p(z+a) = \varphi_p(a) + A_1^p \varphi_1(z) + A_2^p \varphi_2(z) + \ldots A_p^p \varphi_p(z), \tag{5}$$

les A étant des fonctions de a variant avec p et qu'il s'agit de déterminer.

On aura de même

$$\varphi_{p+1}(z+a) = \varphi_{p+1}(a) + A_1^{p+1} \varphi_1(z) + A_2^{p+1} \varphi_2(z) + \ldots + A_{p+1}^{p+1} \varphi_{p+1}(z). \tag{6}$$

Supposons maintenant que a soit un entier et que z soit un autre entier assujetti à l'unique condition

$$z + a > 1. \tag{7}$$

L'expression $\varphi_{p+1}(z+a)$ pourra se calculer par la formule (6); mais puisque, en vertu de (7), $z+a$ est un entier supérieur à l'unité, elle pourra aussi se calculer par l'application de la formule (4) :

$$\varphi_{p+1}(z+a) = \varphi_p(1) + \varphi_p(2) + \ldots + \varphi_p(z+a).$$

Par l'application de la formule (5) on a

$$\begin{array}{lll}
\varphi_p(1) & = \varphi_p(1-a+a) = \varphi_p(a) + A_1^p \varphi_1(1-a) + A_2^p \varphi_2(1-a) + \ldots + A_p^p \varphi_p(1-a), \\
\varphi_p(2) & = \varphi_p(2-a+a) = \varphi_p(a) + A_1^p \varphi_1(2-a) + A_2^p \varphi_2(2-a) + \ldots + A_p^p \varphi_p(2-a), \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\varphi_p(z+a) & = \varphi_p(a) + A_1^p \varphi_1(z) \quad + A_2^p \varphi_2(z) \quad + \ldots + A_p^p \varphi_p(z).
\end{array}$$

Si l'on additionne par colonnes, en tenant compte de la formule sommatoire (3), on aura

$$\varphi_{p+1}(z+a) = (z+a)\varphi_p(a) + A_1^p[\varphi_2(z) - \varphi_2(-a)] \\ + A_2^p[\varphi_3(z) - \varphi_3(-a)] + \ldots + A_p^p[\varphi_{p+1}(z) - \varphi_{p+1}(-a)],$$

ou, en remarquant que

$$z\varphi_p(a) = \varphi_1(z)\varphi_p(a),$$

$$\varphi_{p+1}(z+a) = \theta(a) + \varphi_p(a)\varphi_1(z) \\ + A_1^p\varphi_2(z) + A_2^p\varphi_3(z) + \ldots + A_p^p\varphi_{p+1}(z). \tag{8}$$

Les expressions (6) et (8) de $\varphi_{p+1}(z+a)$ étant égales pour une infinité de valeurs entières de z sont identiquement égales, puisque ce sont des polynomes. Cette identité s'exprime en écrivant l'égalité des coefficients des φ, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \varphi_{p+1}(a) &= \theta(a), \\ A_1^{p+1} &= \varphi_p(a), \\ A_2^{p+1} &= A_1^p, \\ A_3^{p+1} &= A_2^p, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ A_{p+1}^{p+1} &= A_p^p. \end{aligned}$$

En appliquant ces égalités aux valeurs 1, 2, ..., $p-1$ attribuées à p, on obtiendra les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A_1^p &= \varphi_{p-1}(a), \\ A_2^p &= A_1^{p-1} = \varphi_{p-2}(a), \\ A_3^p &= A_2^{p-1} = A_1^{p-2} = \varphi_{p-3}(a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_p^{p-1} &= A_{p-2}^{p-1} = \ldots = A_2^3 = A_1^2 = \varphi_1(a), \\ A_p^p &= A_{p-1}^{p-1} = \ldots = A_2^2 = A_1^1. \end{aligned}$$

Quant à la valeur de A_1^1, elle résulte de l'identité manifeste

$$\varphi_1(z+a) = \varphi_1(a) + \varphi_1(z).$$

Au moyen des coefficients A ainsi trouvés, la formule (5) donne

$$\varphi_p(z+a) = \varphi_p(a) + \varphi_{p-1}(a)\varphi_1(z) + \ldots + \varphi_1(a)\varphi_{p-1}(z) + \varphi_p(z), \tag{9}$$

et cette formule d'addition sera vraie, quelles que soient les valeurs des deux variables indépendantes z et a.

3. Par définition on a

$$\varphi_p(z) = \frac{z(z+1)\ldots(z+p-1)}{1.2\ldots p}.$$

Supposons z entier positif; en multipliant les deux termes de la fraction par

$$1.2\ldots(z-1),$$

puis les divisant tous deux par

$$1.2\ldots p,$$

on obtiendra

$$\varphi_p(z) = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+z-1)}{1.2\ldots(z-1)},$$

c'est-à-dire

$$\varphi_p(z) = \varphi_{z-1}(p+1),$$

vraie seulement pour z entier positif.

Soit D_m^n le nombre total des dérivées d'ordre n d'une fonction de m variables; ce sera le nombre des combinaisons avec répétition de m objets pris n à n; ce sera donc

$$D_m^n = \varphi_n(m),$$

mais, m et n étant des entiers positifs, on a, d'après ce qui précède,

$$\varphi_n(m) = \varphi_{m-1}(n+1).$$

On pourra donc écrire définitivement

$$D_m^n = \varphi_{m-1}(n+1),$$

et cette forme présente l'avantage de faire figurer comme argument dans la fonction φ précisément celui des deux nombres m, n qui ultérieurement sera considéré comme essentiellement variable.

II. Nombre des termes d'un ensemble canonique de dérivées.

1. Si un ensemble canonique E, formé avec des dérivées d'ordre n d'une fonction de m variables est complet, le nombre de ses termes est

$$D_m^n = \varphi_{m-1}(n+1).$$

Supposons qu'un ensemble canonique E ait pour indices

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_{m-1},$$

et que e soit l'ensemble complémentaire, les nombres T et t de leurs termes seront évidemment liés par la relation

$$T + t = D_m^n.$$

Si $\alpha_0 = 1$ on a

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0,$$

et T est nul.

Supposons $\alpha_0 = 0$ et cherchons à calculer t.

On commencera à trouver en entier, dans e, tous les groupes G_1 correspondant aux exposants $0, 1, \ldots, \alpha_1 - 1$ de ∂x_1; le nombre des termes du groupe G_1 correspondant à l'exposant i étant le nombre des dérivées d'ordre $n - i$ d'une fonction de $m - 1$ variables, c'est-à-dire

$$D_{m-1}^{n-i},$$

nos divers groupes G_1 donneront un nombre de termes

$$D_{m-1}^n + D_{m-1}^{n-1} + \ldots + D_{m-1}^{n-\alpha_1+1},$$

c'est-à-dire

$$\varphi_{m-2}(n+1) + \varphi_{m-2}(n) + \ldots + \varphi_{m-2}(n - \alpha_1 + 2),$$

ou, en vertu de la formule de sommation

$$\varphi_{m-1}(n+1) - \varphi_{m-1}(n+1-\alpha_1).$$

Dans la portion restante de e nous trouverons en entier tous les groupes G_2 qui correspondent à l'exposant α_1 pour ∂x_1 et aux exposants o, 1, ..., $\alpha_2 - 1$ pour ∂x_2, et jamais nous ne trouverons en entier le groupe G_2 qui correspond aux deux exposants α_1, α_2. Le nombre des termes de ces groupes G_2 se calculera comme précédemment en remplaçant

$$\begin{array}{lll} m & \text{par} & m-1, \\ n & \text{par} & n-\alpha_1, \\ \alpha_1 & \text{par} & \alpha_2, \end{array}$$

ce qui donnera

$$\varphi_{m-2}(n+1-\alpha_1) - \varphi_{m-2}(n+1-\alpha_1-\alpha_2),$$

et ainsi de suite. Le calcul s'appliquera jusqu'aux groupes G_{m-2}, qui donneront

$$\varphi_2(n+1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-3}) - \varphi_2(n+1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-2}).$$

Enfin les groupes G_{m-1} ne contiendront chacun qu'une dérivée, et, comme le nombre de ces groupes est α_{m-1}, on obtiendra comme nombre de termes

$$\alpha_{m-1},$$

ce qu'on peut écrire

$$\varphi_1(n+1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-2}) - \varphi_1(n+1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-1}).$$

Finalement nous obtenons la formule

$$(10)\quad \begin{aligned} t' = {} & \varphi_{m-1}(n+1) && - \varphi_{m-1}(n+1-\alpha_1) \\ & + \varphi_{m-2}(n+1-\alpha_1) && - \varphi_{m-2}(n+1-\alpha_1-\alpha_2) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\ & + \varphi_2(n+1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-3}) && - \varphi_2(n+1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-2}) \\ & + \varphi_1(n+1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-2}) && - \varphi_1(n+1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-1}). \end{aligned}$$

En mettant t' au lieu de t parce que cette formule ne donne pas la valeur de t dans tous les cas, si $\alpha_0 = 0$ on a

$$t = t';$$

si $\alpha_0 = 1$ on a

$$t = \varphi_{m-1}(n+1), \qquad t' = 0.$$

2. Posons alors

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \alpha_0,\\
\sigma_1 &= \alpha_0 + \alpha_1,\\
\sigma_2 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\sigma_{m-1} &= \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1},
\end{aligned}$$

et proposons-nous de démontrer que l'on a, dans tous les cas,

$$\begin{aligned}
(11) \qquad t = {} & \varphi_m \quad (n+1) && - \varphi_m \quad (n+1-\sigma_0)\\
& + \varphi_{m-1}(n+1-\sigma_0) && - \varphi_{m-1}(n+1-\sigma_1)\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + \varphi_2 \quad (n+1-\sigma_{m-3}) && - \varphi_2 \quad (n+1-\sigma_{m-2})\\
& + \varphi_1 \quad (n+1-\sigma_{m-2}) && - \varphi_1 \quad (n+1-\sigma_{m-1}).
\end{aligned}$$

Il suffit de démontrer que, si $\alpha_0 = 1$, elle donne $\varphi_{m-1}(n+1)$, et que, si $\alpha_0 = 0$, elle se réduit à la formule (10).

Si $\alpha_0 = 1$, tous les autres α sont nuls et l'on a

$$\sigma_0 = \sigma_1 = \ldots = \sigma_{m-1} = 1.$$

Donc, dans l'expression de t, à partir de la seconde ligne, les termes se détruisent et il reste

$$\varphi_m(n+1) - \varphi_m(n),$$

qui, en vertu de la formule fondamentale (2) relative aux fonctions φ, se réduit bien à

$$\varphi_{m-1}(n+1).$$

Si, au contraire, $\alpha_0 = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= 0,\\
\sigma_1 &= \alpha_1,\\
\sigma_2 &= \alpha_1 + \alpha_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\sigma_{m-1} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m-1},
\end{aligned}$$

les deux termes de la première ligne de t se détruisent et les autres se réduisent aux termes correspondants de t'; ainsi t se réduit à t', ce qui achève la démonstration.

3. L'expression de t peut se mettre sous une forme beaucoup plus intéressante.

On peut l'écrire

$$\begin{aligned} t = {} & \varphi_m(n+1) \\ & + \varphi_{m-1}(n+1-\sigma_0) - \varphi_m(n+1-\sigma_0) \\ & + \varphi_{m-2}(n+1-\sigma_1) - \varphi_{m-1}(n+1-\sigma_1) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \varphi_1(n+1-\sigma_{m-2}) - \varphi_2(n+1-\sigma_{m-2}) \\ & \qquad\qquad - \varphi_1(n+1-\sigma_{m-1}), \end{aligned}$$

ou, par application de la formule (2) des fonctions φ,

$$\begin{aligned} t = {} & \varphi_m(n+1) - \varphi_m(n-\sigma_0) - \varphi_{m-1}(n-\sigma_1) - \ldots \\ & - \varphi_2(n-\sigma_{m-2}) - \varphi_1(n+1-\sigma_{m-1}). \end{aligned}$$

La formule d'addition des fonctions φ donne

$$\begin{aligned} \varphi_m(n-\sigma_0) &= \varphi_m(-\sigma_0) + \varphi_1(n)\varphi_{m-1}(-\sigma_0) + \ldots + \varphi_{m-1}(n)\varphi_1(-\sigma_0) + \varphi_m(n), \\ \varphi_{m-1}(n-\sigma_1) &= \varphi_{m-1}(-\sigma_1) + \varphi_1(n)\varphi_{m-2}(-\sigma_1) + \ldots + \varphi_{m-1}(n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_2(n-\sigma_{m-2}) &= \varphi_2(-\sigma_{m-2}) + \varphi_1(n)\varphi_1(-\sigma_{m-2}) + \varphi_2(n), \\ \varphi_1(n+1-\sigma_{m-1}) &= \varphi_1(-\sigma_{m-1}) + \varphi_1(n) + 1. \end{aligned}$$

On est alors conduit à poser

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_0 &= \varphi_1(-\sigma_0), \\ \omega_1 &= \varphi_1(-\sigma_1) + \varphi_2(-\sigma_0), \\ \omega_2 &= \varphi_1(-\sigma_2) + \varphi_2(-\sigma_1) + \varphi_3(-\sigma_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_{m-1} &= \varphi_1(-\sigma_{m-1}) + \varphi_2(-\sigma_{m-2}) + \ldots + \varphi_{m-1}(-\sigma_1) + \varphi_m(-\sigma_0), \end{aligned} \right.$$

quantités qui sont formées avec les indices de l'ensemble canonique et ne contiennent pas son ordre, c'est-à-dire qui resteront les mêmes quand on remplacera l'ensemble considéré par un ensemble dérivé d'ordre quelconque.

En additionnant par colonnes, nous obtiendrons alors

$$\begin{aligned} t = {} & \varphi_m(n+1) - \varphi_m(n) - 1 - \omega_{m-1} \\ & - \varphi_1(n)(1+\omega_{m-2}) - \varphi_2(n)(1+\omega_{m-3}) - \ldots - \varphi_{m-1}(n)(1+\omega_0), \end{aligned}$$

et l'on en déduira

$$\begin{aligned}T = {} & \varphi_{m-1}(n+1) - \varphi_m(n+1) + \varphi_m(n) \\ & + 1 + \omega_{m-1} + \varphi_1(n)(1+\omega_{m-2}) + \ldots + \varphi_{m-1}(n)(1+\omega_0),\end{aligned}$$

et comme, d'après la formule fondamentale des fonctions φ, les trois premiers termes se détruisent, nous arrivons à la formule finale

$$T = 1 + \omega_{m-1} + \varphi_1(n)(1+\omega_{m-2}) + \ldots + \varphi_{m-1}(n)(1+\omega_0). \tag{13}$$

III. Systèmes initiaux de Cauchy.

1. Considérons un certain nombre de fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et un système $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$ de valeurs initiales de ces variables.

A chaque fonction u_i faisons correspondre m nombres entiers

$$\alpha_0^i, \quad \alpha_1^i, \quad \ldots, \quad \alpha_{m-1}^i$$

positifs ou nuls, le premier ne pouvant être que *zéro* ou *un*, et, dans ce dernier cas, tous les autres étant nuls.

Relativement à la fonction u_i, considérons :

Si $\alpha_0 = 1$, la fonction u_i des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Si $\alpha_0 = 1$, les fonctions de $x_2, \ldots, x_m$ obtenues en faisant $x_1 = x_1^0$ dans

$$u_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\alpha_1^i - 1} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1^i - 1}},$$

puis les fonctions de $x_3, \ldots, x_m$ obtenues en faisant $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ dans

$$\frac{\partial^{\alpha_1^i} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1^i}}, \quad \frac{\partial^{\alpha_1^i + 1} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1^i}\, \partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\alpha_1^i + \alpha_2^i - 1} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1^i}\, \partial x_2^{\alpha_2^i - 1}},$$

et ainsi de suite, et enfin les fonctions de x_m obtenues en faisant $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $\ldots$, $x_{m-1} = x_{m-1}^0$ dans

$$\frac{\partial^{\alpha_1^i + \ldots + \alpha_{m-2}^i} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1^i} \ldots \partial x_{m-2}^{\alpha_{m-2}^i}}, \quad \frac{\partial^{\alpha_1^i + \ldots + \alpha_{m-2}^i + 1} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1^i} \ldots \partial x_{m-2}^{\alpha_{m-2}^i}\, \partial x_{m-1}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\alpha_1^i + \ldots + \alpha_{m-1}^i - 1} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1^i} \ldots \partial x_{m-2}^{\alpha_{m-2}^i}\, \partial x_{m-1}^{\alpha_{m-1}^i - 1}}.$$

Ces fonctions, considérées comme connues, font connaître immédiatement les valeurs, en $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$, de certaines dérivées de u_i d'après une certaine loi. Parmi celles qui ne sont pas ainsi déterminées, considérons-en un nombre fini.

Nous définissons ainsi, pour les p fonctions u_i, un certain nombre de fonctions et constantes initiales. Un tel ensemble de conditions initiales sera appelé *un système initial de Cauchy pour les fonctions* u_1, $u_2, \ldots, u_p$ *des variables* $x_1, \ldots, x_m$. Ce système initial est défini complètement par les nombres

$$\alpha_0^i, \quad \alpha_1^i, \quad \ldots, \quad \alpha_{m-1}^i$$

et par l'indication des dérivées, non fournies par les fonctions initiales, que l'on considère comme des données initiales. Soit α_m^i le nombre de ces dérivées relatives à u_i.

Le Tableau

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha_0^1, & \alpha_1^1, & \ldots, & \alpha_{m-1}^1, & \alpha_m^1, \\
\alpha_0^2, & \alpha_1^2, & \ldots, & \alpha_{m-1}^2, & \alpha_m^2, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\alpha_0^p, & \alpha_1^p, & \ldots, & \alpha_{m-1}^p, & \alpha_m^p
\end{array}$$

sera alors appelé *le Tableau des nombres fondamentaux du système initial de Cauchy*, et nous remarquerons immédiatement qu'à toute *forme canonique* d'un système différentiel compatible le théorème de Cauchy généralisé fait correspondre un système initial de Cauchy ayant précisément pour nombres fondamentaux ceux de la forme canonique et qu'une intégrale est complètement déterminée par ce système initial.

2. A la définition précédente nous ajouterons les suivantes. Considérons un système différentiel S, à p inconnues et m variables, qui soit compatible.

On sait qu'on peut certainement le mettre sous une forme canonique qui donne lieu aux propriétés suivantes :

1° Les équations S sont distinctes, et toute équation dérivée d'une équation de S figure dans S ou est une conséquence algébrique des équations de S;

2° Le système S est partagé en systèmes partiels S_n tels que toute équation de S_n soit d'ordre n et ne puisse pas être réduite à un ordre moindre en vertu des autres équations de S.

La mise sous forme canonique, toujours possible, montre la possibilité d'obtenir, pour le système proposé, des formes satisfaisant aux deux conditions précédentes.

Si un système est mis sous une forme où la première condition seule est réalisée, nous dirons que le système est *complet*.

Si les deux conditions sont réalisées, nous dirons que le système est *ordonné*.

3. Nous ferons immédiatement une remarque importante pour la suite.

Considérons une transformation ponctuelle

$$\begin{aligned}
x_1 &= f_1(y_1, \ldots, y_m; v_1, \ldots, v_p),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_m &= f_m(y_1, \ldots, y_m; v_1, \ldots, v_p),\\
u_1 &= F_1(y_1, \ldots, y_m; v_1, \ldots, v_p),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u_p &= F_p(y_1, \ldots, y_m; v_1, \ldots, v_p).
\end{aligned}$$

Une telle transformation transformera une équation d'ordre n en une équation d'ordre n et des équations distinctes en équations distinctes.

Donc si, partant d'un système S, on applique la transformation ponctuelle successivement à toutes ses équations, le système transformé, tel qu'il est obtenu, sera complet si S est complet et ordonné si S est ordonné.

4. Enfin nous devons faire une remarque que nous aurons souvent à utiliser.

La démonstration du théorème de Cauchy généralisé prend comme point de départ les *équations principales*, c'est-à-dire les équations S_n à partir desquelles les ensembles canoniques par rapport auxquels sont résolus les systèmes successifs S_{n+1}, S_{n+2}, ... sont les ensembles dérivés de ceux par rapport auxquels sont résolues les équations S_n.

Si l'on reprend la démonstration, on s'aperçoit immédiatement qu'il n'est pas du tout indispensable de prendre comme équations principales les équations S_n qui correspondent à l'*ordre canonique* n. On peut prendre comme équations principales n'importe quel système $S_{n'}$ pourvu que n' soit au moins égal à l'ordre canonique; toutes les équations d'ordre inférieur à n' joueront le rôle d'équations auxiliaires, et, comme les ensembles principaux auront toujours les mêmes indices, la démonstration conduira, quel que soit n', au même système initial de Cauchy.

Il en résulte que, dans toutes les démonstrations où nous aurons à utiliser le théorème de Cauchy généralisé pour un système différentiel sous forme canonique, nous pourrons toujours, sans altérer les résultats, supposer aussi grand que nous voudrons l'ordre des équations principales.

II. — Invariants.

I. Première méthode.

1. Considérons un système différentiel S *compatible* et *ordonné*. Nous avons fait la remarque que, si l'on effectue successivement sur les équations de S la même transformation ponctuelle, le système S′ transformé de S est, tel qu'il est obtenu, ordonné. Si donc on désigne par N_n et N'_n les nombres d'équations de S_n et S'_n, on aura forcément

$$N'_n = N_n.$$

Si donc nous convenons d'appeler *formes ordonnées d'un système différentiel* S, non seulement les formes ordonnées sous lesquelles il peut se mettre directement, mais aussi toutes celles sous lesquelles il peut se mettre après une transformation ponctuelle quelconque, nous pourrons dire :

Le nombre N_n, quel que soit n, est invariant pour toutes les formes ordonnées d'un même système différentiel.

2. Supposons S mis sous une forme canonique dont l'ordre canonique est ν et soit

$$\begin{array}{cccc} \alpha_0^1, & \alpha_1^1, & \ldots, & \alpha_{m-1}^1, \\ \alpha_0^2, & \alpha_1^2, & \ldots, & \alpha_{m-1}^2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_0^p, & \alpha_1^p, & \ldots, & \alpha_{m-1}^p \end{array}$$

le Tableau des nombres fondamentaux de cette forme, les nombres fondamentaux complémentaires α_m définis dans le Chapitre I, paragraphe III, n'y figurant pas.

Soit

$$\begin{array}{cccc} \omega_0^1, & \omega_1^1, & \ldots, & \omega_{m-1}^1, \\ \omega_0^2, & \omega_1^2, & \ldots, & \omega_{m-1}^2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \omega_0^p, & \omega_1^p, & \ldots, & \omega_{m-1}^p \end{array}$$

le Tableau correspondant des quantités ω définies par les formules (12) du Chapitre I, paragraphe II.

Dans la forme considérée, pour toute valeur de n égale ou supérieure à ν, les équations S_n seront résolues par rapport à des ensembles canoniques d'ordre n ayant précisément pour indices les nombres α du Tableau précédemment écrit; il en résulte que N_n sera égal au nombre total des dérivées de ces p ensembles canoniques, c'est-à-dire, en utilisant la formule fondamentale établie au Chapitre précédent,

$$N_n = p + \sum_1^p \omega_{m-1}^i + \varphi_1(n)\left(p + \sum_1^p \omega_{m-2}^i\right) + \ldots + \varphi_{m-1}(n)\left(p + \sum_1^p \omega_0^i\right),$$

ou, en posant

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} I_0 \quad = \sum_1^p \omega_0^i, \\ I_1 \quad = \sum_1^p \omega_1^i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ I_{m-1} = \sum_1^p \omega_{m-1}^i, \end{array}\right.$$

$$(15)\qquad N_n = p + I_{m-1} + \varphi_1(n)(p + I_{m-2}) + \ldots + \varphi_{m-1}(n)(p + I_0).$$

3. L'ordre canonique a manifestement une limite inférieure θ; partons de la forme canonique correspondante et appliquons la formule (5). Cette formule sera valable certainement pour toute valeur de n supérieure à θ, ce qui nous montre que, à partir d'une certaine valeur de n inférieure ou égale à θ, on aura

$$N_n = A_{m-1} + A_{m-2}n + \ldots + A_0 n^{m-1} = P(n),$$

et le fait que toutes les expressions N_n, quel que soit n supérieur à θ, sont des invariants, se réduit simplement au fait que les m coefficients

$$A_{m-1}, \quad A_{m-2}, \quad \ldots, \quad A_0$$

sont des invariants.

Nous obtenons donc, comme invariants, tous les nombres N_n jusqu'à une certaine valeur de n, puis m nombres A.

4. Considérons deux formes canoniques C, C' du même système S, C pouvant être obtenue après avoir effectué dans S une certaine transformation ponctuelle et C' après avoir effectué une autre transformation ponctuelle.

Si l'on désigne par $I_0, I_1, \ldots, I_{m-1}, I'_0, I'_1, \ldots, I'_{m-1}$ les quantités relatives à ces deux formes et définies par les formules (14), on aura, pour n suffisamment grand,

$$N_n = p + I_{m-1} + \varphi_1(n)(p + I_{m-2}) + \ldots + \varphi_{m-1}(n)(p + I_0),$$
$$N'_n = p + I'_{m-1} + \varphi_1(n)(p + I'_{m-2}) + \ldots + \varphi_{m-1}(n)(p + I'_0),$$

et l'égalité

$$N'_n = N_n,$$

vraie pour toutes les valeurs de n, donnera

$$\begin{aligned} I'_0 &= I_0, \\ I'_1 &= I_1, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ I'_{m-1} &= I_{m-1}. \end{aligned}$$

Si, comme nous l'avons fait pour les formes ordonnées, nous convenons d'appeler *formes canoniques d'un système différentiel* toutes les formes canoniques sous lesquelles il peut se mettre après une transformation ponctuelle quelconque, nous pourrons dire que *les m quantités*

$$I_0, \quad I_1, \quad \ldots, \quad I_{m-1}$$

sont invariantes quand on passe d'une forme canonique du système à toute autre forme canonique du même système.

5. $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ étant les nombres fondamentaux relatifs à une inconnue u, cherchons le nombre M des dérivées d'ordre égal ou inférieur à n qui sont données par les fonctions initiales correspondantes.

Si $\alpha_1 = 0$, c'est u elle-même qui est arbitraire et donne les valeurs initiales de toutes les dérivées d'ordre égal ou inférieur à n. On a donc

$$M = \varphi_m(n+1) \qquad \text{si} \qquad \alpha_0 = 1.$$

Supposons $\alpha_0 = 0$. Les fonctions arbitraires

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\alpha_1 - 1} u}{\partial x_1^{\alpha_1 - 1}} \qquad \text{pour} \qquad x_1 = x_1^0$$

donneront les valeurs initiales de toutes les dérivées d'ordre égal ou inférieur à n de u par rapport à $x_2, \ldots, x_m$, puis toutes les dérivées d'ordre égal ou inférieur à $n-1$ de $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ par rapport à $x_2, \ldots, x_m$, etc., et enfin toutes les dérivées d'ordre égal ou inférieur à $n - \alpha_1 + 1$ de $\frac{\partial^{\alpha_1 - 1} u}{\partial x_1^{\alpha_1 - 1}}$ par rapport à $x_2, \ldots, x_m$; donc, au total, un nombre de dérivées égal à

$$\varphi_{m-1}(n+1) + \varphi_{m-1}(n) + \ldots + \varphi_{m-1}(n - \alpha_1 + 2),$$

ou encore à

$$\varphi_m(n+1) - \varphi_m(n+1-\alpha_1).$$

En continuant à calculer pour les séries suivantes de fonctions initiales, on arrivera, comme on l'a fait dans le calcul des nombres des termes d'un ensemble canonique, à l'expression

$$\begin{aligned} M' = \ & \varphi_m(n+1) - \varphi_m(n+1-\alpha_1) \\ & + \varphi_{m-1}(n+1-\alpha_1) - \varphi_{m-1}(n+1-\alpha_1-\alpha_2) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \varphi_2(n+1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-2}) - \varphi_2(n+1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-1}), \end{aligned}$$

avec

$$\mathrm{M} = \varphi_m(n+1) \quad \text{si} \quad \alpha_0 = 1,$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{M}' \quad \text{si} \quad \alpha_0 = 0.$$

Ajoutons à M′ une ligne supplémentaire

$$\varphi_1(n+1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-1}) - \varphi_1(n+1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-1}-0),$$

qui est nulle. Nous voyons alors que nous trouvons pour M exactement le nombre des termes de l'ensemble complémentaire d'un ensemble canonique d'ordre n à $m+1$ variables et ayant pour indices

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_{m-1}, \quad 0.$$

Les m premiers ω seront ceux formés avec les indices α_0, α_1, ..., α_{m-1}; quant au $m+1^{\text{ième}}$ ce sera, puisque $\sigma_m = \sigma_{m-1}$,

$$\varphi_1(-\sigma_{m-1}) + \varphi_2(-\sigma_{m-1}) + \ldots + \varphi_m(-\sigma_1) + \varphi_{m+1}(-\sigma_0).$$

On aura donc

$$\begin{aligned}\mathrm{M} = -1 - \varphi_1(-\sigma_{m-1}) - \varphi_2(-\sigma_{m-1}) - \ldots - \varphi_m(-\sigma_1) - \varphi_{m+1}(-\sigma_0)\\ - \varphi_1(n)(1+\omega_{m-1}) + \ldots - \varphi_m(n)(1+\omega_0) + \varphi_m(n+1).\end{aligned}$$

6. Les nombres N_n d'ordres supérieurs à l'ordre canonique minimum donnent naissance aux invariants I_0, I_1, ..., I_{m-1}, qui ont des expressions algébriques simples au moyen des nombres fondamentaux, mais il n'en est plus de même pour les nombres N_n qui correspondent à des ordres inférieurs; on constate que ces invariants ont des définitions qui présentent plutôt un caractère discontinu et arithmétique; suivant les grandeurs relatives des nombres fondamentaux ils sont dépendants ou indépendants de certain d'entre eux.

Ces invariants ne présentent donc ni la simplicité ni l'intérêt des invariants I, mais il se présente néanmoins un fait extrêmement remarquable, c'est que leur somme est un invariant à définition algébrique et qu'on arrive ainsi à un nouvel invariant précisément de même forme que les I.

Posons

$$\mathfrak{N}_n = \mathrm{N}_n + \mathrm{N}_{n-1} + \ldots.$$

Soient $\alpha_m^1, \ldots, \alpha_m^p$ les nombres fondamentaux complémentaires relatifs aux diverses inconnues.

Chaque inconnue donnera naissance à des quantités

$$\omega_0^i, \quad \omega_1^i, \quad \ldots, \quad \omega_{m-1}^i, \quad \omega_m^i,$$

la dernière étant formée en continuant à appliquer la règle de formation successive des précédentes et à des nombres

$$\mathbf{M}_1, \quad \mathbf{M}_2, \quad \ldots, \quad \mathbf{M}_p.$$

On a, par définition même,

$$\mathfrak{N}_n + (\mathbf{M}_1 + \ldots + \mathbf{M}_p) + (\alpha_m^1 + \ldots + \alpha_m^p) = p\,\varphi_m(n+1)$$

ou

$$\mathfrak{N}_n = p\,\varphi_m(n+1) - \sum_1^p (\mathbf{M}_i + \alpha_m^i).$$

Si l'on forme $\mathbf{M}_i + \alpha_m^i$ d'après la formule du paragraphe précédent, on voit apparaître la quantité

$$-\varphi_1(-\sigma_{m-1}^i) + \alpha_m^i = \sigma_{m-1}^i + \alpha_m^i = \sigma_m^i = -\varphi_1(-\sigma_m^i),$$

et, par suite, la quantité ω_m^i.

Si alors nous posons

$$\mathrm{I}_m = \sum_1^p \omega_m^i, \tag{16}$$

nous trouvons immédiatement

$$\mathfrak{N}_n = p + \mathrm{I}_m + \varphi_1(n)(p + \mathrm{I}_{m-1}) + \ldots + \varphi_m(n)(p + \mathrm{I}_0), \tag{17}$$

et, comme $\mathfrak{N}_n$ est invariant ainsi que $\mathrm{I}_0, \mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_{m-1}$, il en résulte que I_m *est aussi un invariant quand on passe d'une forme canonique à toute autre forme canonique du même système.*

7. Nous venons de trouver une expression de $\mathfrak{N}_n$, qui est un polynome entier de degré m en n :

$$\mathfrak{N}_n = \Psi(n).$$

Comme on l'a fait remarquer à propos du polynome $P(n)$, si l'on calcule ce polynome au moyen d'une forme canonique, on est assuré que l'égalité précédente a lieu pour toute valeur de n égale ou supérieure à l'ordre canonique; mais, par suite de l'invariance des I, toutes les formes canoniques donnent le même polynome, de sorte qu'on peut affirmer que $\mathfrak{P}(n)$ représente $\mathfrak{M}_n$ à partir de l'ordre canonique minimum θ déjà considéré.

Il peut même arriver que $\mathfrak{P}(n)$, que nous appellerons *le polynome associé au système* S, représente $\mathfrak{M}_n$ pour des valeurs de n inférieures à θ.

Prenons par exemple le système

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

qui est canonique à l'ordre 3 et qui ne peut être mis sous aucune forme canonique d'ordre inférieur. On a le Tableau de nombres fondamentaux

	α_0.	α_1.	α_2.
u	0	2	0
v..................	0	3	0

d'où l'on conclut

$$I_0 = 0, \qquad I_1 = -5, \qquad I_2 = -1$$

et

$$\mathfrak{P}(n) = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2.$$

Pour $n = 2$ on a

$$\mathfrak{M}_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{P}(n) = 1;$$

donc l'égalité

$$\mathfrak{M}_n = \mathfrak{P}(n)$$

a lieu même pour $n = 2$.

Elle a lieu aussi pour $n = 1$, car

$$\mathfrak{M}_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{P}(1) = 0;$$

mais elle n'a plus lieu pour $n = 0$, car

$$\mathfrak{N}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{P}(0) = 1.$$

Dans cet exemple, le polynome associé est valable à partir de $n = 1$, tandis que les ordres canoniques ne commencent qu'à $n = 3$.

Quand nous aurons à nous en servir, nous désignerons par μ l'ordre le plus faible à partir duquel l'égalité

$$\mathfrak{N}_n = \mathfrak{P}(n)$$

a lieu sans interruption, et nous l'appellerons le *degré de validité* du polynome associé.

II. Seconde méthode.

1. Partons d'un système différentiel S aux inconnues $u_1, \ldots, u_p$ et aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Supposons qu'après lui avoir, au besoin, appliqué une transformation ponctuelle T_A, on ait pu le mettre sous une certaine forme canonique A caractérisée par un certain Tableau

$$(A) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} \alpha_0^1, & \alpha_1^1, & \ldots, & \alpha_{m-1}^1, & \alpha_m^1, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_0^p, & \alpha_1^p, & \ldots, & \alpha_{m-1}^p, & \alpha_m^p \end{array} \right.$$

de nombres fondamentaux.

Supposons alors qu'on applique à S la transformation ponctuelle T la plus générale. La possibilité de mettre S sous la forme canonique A est une possibilité de résolution des équations successives S_n par rapport à certains ensembles canoniques; puisque cette possibilité existe pour la transformation particulière T_A, elle existera pour la transformation générale T, pourvu que les fonctions qui définissent cette transformation ne satisfassent pas à certaines conditions $\mathfrak{A}$, qui ne sont pas réalisées identiquement puisqu'elles ne le sont pas pour T_A.

Si, en outre, on remarque qu'après la transformation générale T rien ne distingue entre elles les différentes inconnues, on voit que *le système* S, *après la transformation ponctuelle générale* T *ne satisfaisant* *pas à certaines conditions $\mathcal{A}$ non réalisées identiquement, pourra se mettre sous une forme canonique caractérisée par le Tableau* A *de nombres fondamentaux, les diverses lignes de ce Tableau pouvant être mises dans un ordre arbitrairement choisi.*

Supposons maintenant qu'au moyen d'une transformation ponctuelle T_B on soit arrivé, pour S, à une forme canonique B caractérisée par le Tableau

$$(B)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} \beta_0^1, & \beta_1^1, & \ldots, & \beta_{m-1}^1, & \beta_m^1, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \beta_0^p, & \beta_1^p, & \ldots, & \beta_{m-1}^p, & \beta_m^p, \end{array}\right.$$

et répétons le raisonnement précédent; nous trouverons certaines conditions $\mathcal{B}$ non réalisées identiquement, puisqu'elles ne le sont pas par la transformation particulière T_B.

Il existera donc des transformations ponctuelles ne satisfaisant ni aux conditions $\mathcal{A}$, ni aux conditions $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{C}$ l'une d'elles. Le système S, après avoir subi la transformation $\mathcal{C}$, sera un système Σ aux inconnues $v_1, v_2, \ldots, v_p$, aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$, et pourra, tel qu'il sera à ce moment et sans subir aucune nouvelle transformation, se mettre sous deux formes canoniques; v_1 ayant pour nombres fondamentaux, dans la première forme, une ligne arbitrairement choisie du Tableau (A) et, dans la seconde forme, une ligne arbitrairement choisie du Tableau (B); v_2 ayant pour nombres fondamentaux, dans la première forme, une autre ligne arbitrairement choisie de (A) et, dans la seconde, une autre ligne arbitrairement choisie de (B), et ainsi de suite.

2. Nous pouvons donc supposer que, dans Σ, ce soient les inconnues $v_p, v_{p-1}, \ldots, v_{p-a+1}$ qui, pour la forme canonique A, correspondent aux lignes du Tableau (A) pour lesquelles on a $\alpha_0 = 1$, c'est-à-dire aux lignes de la forme

$$1, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad 0,$$

et que, pour la forme canonique B, ce soient les inconnues $v_p, v_{p-1}, \ldots, v_{p-b+1}$ qui correspondent aux lignes analogues du Tableau (B).

Supposons a et b inégaux, par exemple

Sous la forme canonique (B), le système Σ montre, par application du théorème de Cauchy généralisé, que l'on peut se donner arbitrairement

$$v_p, \quad v_{p-1}, \quad \ldots, \quad v_{p-b+1},$$

mais que, ceci fait, aucune des autres inconnues

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_{p-b}$$

ne peut être prise arbitrairement.

La forme A montrerait, au contraire, qu'on peut se donner arbitrairement

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_{p-a+1},$$

c'est-à-dire qu'une fois

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_{p-b+1}$$

choisis arbitrairement, on pourrait encore choisir arbitrairement

$$v_{p-b}, \quad \ldots, \quad v_{p-a+1}.$$

Cette contradiction montre que a et b ne peuvent être inégaux; donc on a forcément

$$a = b.$$

Dans les deux Tableaux (A) et (B) les α_0 et β_0 ne peuvent être égaux qu'à *zéro* ou *un*, et le nombre de ceux qui sont égaux à *un* est le même; on peut donc écrire

$$\sum \alpha_0 = \sum \beta_0,$$

ou encore

$$\sum \varphi_1(-\alpha_0) = \sum \varphi_1(-\beta_0).$$

Si l'on remarque, en outre, que $\alpha_0 = \sigma_0$, on voit que la somme

$$\mathrm{I}_0 = \sum_1^p \varphi_1(-\sigma'_0) = \sum_1^p \omega'_0$$

est la même pour les deux Tableaux (A) et (B), ou encore que I_0 *est* *un invariant quand on passe d'une forme canonique à toute autre forme canonique du même système.*

3. Partons du système Σ sous la forme A; donnons-nous

$$v_{p-a+1}, \quad \ldots, \quad v_p,$$

et considérons le système comme aux inconnues

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_q \qquad (q = p - a),$$

pour lesquelles on a

$$\alpha_0^1 = \alpha_0^2 = \ldots = \alpha_0^q = 0.$$

Prenons comme équations principales les équations d'ordre n, n étant supérieur à l'ordre canonique de A, mais choisi d'une façon arbitraire, et considérons les fonctions

$$\theta_i^0, \quad \theta_i^1, \quad \ldots, \quad \theta_i^{n-1},$$

auxquelles se réduisent respectivement

$$u_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial y_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} u_i}{\partial y_1^{n-1}}$$

quand on y fait $y_1 = y_1^0$. Comme nous l'avons vu dans le théorème de Cauchy généralisé, nous aurons avantage à poser

$$\theta_i^0 = w_i^0, \qquad \theta_i^1 = \frac{\partial w_i^1}{\partial y_2}, \qquad \ldots, \qquad \theta_i^{n-1} = \frac{\partial^{n-1} w_i^{n-1}}{\partial y_2^{n-1}},$$

et nous obtiendrons, pour déterminer les nq inconnues w, un système canonique A_1 dont nous allons calculer le Tableau des nombres fondamentaux.

Considérons l'inconnue

$$w_i^j \qquad (i \leqq q, \ j \leqq n - 1).$$

Elle figurera dans les ensembles canoniques principaux de A_1 en provenance des termes de la forme

$$\frac{\partial^n v_i}{\partial y_1^j \ldots},$$

en y supprimant le symbole

$$\frac{\partial}{\partial y_i^j}$$

pour le remplacer par

$$\frac{\partial}{\partial y_2^j}.$$

Si $j > \alpha_1^i$, la première suppression donne un ensemble canonique *complet*, d'ordre $n-j$ à $m-1$ variables, dont tous les indices sont nuls; si alors on remet le second symbole, on a un ensemble canonique d'ordre n à $m-1$ variables, mais dont tous les indices sont

$$0, \quad j, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0.$$

Si $j = \alpha_1^i$, la première suppression ne donne plus un ensemble complet, mais un ensemble d'indices

$$0, \quad \alpha_2^i, \quad \alpha_3^i, \quad \ldots, \quad \alpha_{m-1}^i,$$

de sorte qu'en remettant le second symbole, on a un ensemble d'indices

$$0, \quad \alpha_1^i + \alpha_2^i, \quad \alpha_3^i, \quad \ldots, \quad \alpha_{m-1}^i.$$

Enfin, si $j < \alpha_1^i$, l'inconnue x_j^i ne figurera pas dans les ensembles principaux de la forme canonique A_1; elle donnera un ensemble canonique nul dont les indices seront

$$1, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0.$$

En résumé, le Tableau des nombres fondamentaux du système canonique A_1 sera

Tableau A_1.

	γ_0.	γ_1.	γ_2.		γ_{m-2}.	γ_{m-1}.
$x_1'^0$	1	0	0	...	0	//
....	.	.	.	...	.	.
$x_1'^{\alpha_1^1-1}$	1	0	0	...	0	//
$x_1'^{\alpha_1^1}$	1	$\alpha_1^1 + \alpha_2^1$	α_3^1	...	α_{m-1}^1	//
$x_1'^{\alpha_1^1+1}$	0	$\alpha_1^1 + 1$	0	...	0	//

TABLEAU A_1 (*suite*).

	γ_0.	γ_1.	γ_2.		γ_{m-2}.	γ_{m-1}.
ϖ_1^{n-1}	o	$n-1$	o	...	o	//
....	o	.....	.	...	.	.
ϖ_q^0	1	o	o	...	o	//
....	.	.	.	...	.	.
$\varpi_q^{\alpha_1^q-1}$	1	o	o	...	o	.
$\varpi_q^{\alpha_1^q}$	o	$\alpha_1^q+\alpha_2^q$	α_3^q	...	α_{m-1}^q	//
$\varpi_q^{\alpha_1^q+1}$	o	α_1^q+1	o	...	o	//
....	.	......	.	...	.	.
ϖ_q^{n-1}	o	$n-1$	o	...	o	//

Dans ce Tableau nous n'avons pas fait figurer les γ_{m-1}, parce qu'il n'est pas possible de déterminer d'une façon précise les valeurs des γ_{m-1} qui correspondent aux différentes inconnues ϖ à cause de l'arbitraire qui existe dans le choix des dérivées qu'on peut prendre comme constantes initiales.

Si toutefois on remarque que le passage de A à A_1 n'introduit aucune constante arbitraire, on en conclut que les constantes arbitraires introduites par l'application du théorème de Cauchy généralisé à la forme A se retrouvent dans l'application du même théorème à la forme A_1, d'où résulte

$$\sum \gamma_{m-1} = \sum \alpha_m,$$

et cette égalité suffira pour la suite.

4. Supposons n pris supérieur aux ordres canoniques de A et B; nous pourrons, par le procédé précédent, former deux systèmes A_1 et B_1; ces deux systèmes seront aux mêmes inconnues et aux mêmes variables. Les deux systèmes aux inconnues θ_i^j sont rigoureusement identiques, puisqu'ils expriment tous deux les conditions que doivent remplir les mêmes fonctions pour que les v vérifient le système Σ. Les deux systèmes A_1, B_1 résultant de ces deux systèmes identiques en y faisant la même transformation

$$\theta_i^j = \frac{\partial^j \varpi_i}{\partial y^j}$$

seront donc aussi identiques, de sorte que A_1 et B_1 sont deux formes canoniques qu'on peut donner à un même système Σ_1 sans y faire la moindre transformation. Autrement dit, Σ_1, A_1, B_1 sont des systèmes à $m-1$ variables qui remplissent exactement les conditions qui avaient été imposées aux systèmes Σ, A, B à m variables.

On pourra donc raisonner sur Σ_1, A_1, B_1 comme sur Σ, A, B, et obtenir de nouveaux systèmes Σ_2, A_2, B_2 à $m-2$ variables et remplissant encore les mêmes conditions.

En continuant ainsi, nous arriverons aux systèmes Σ_{m-1}, A_{m-1}, B_{m-1}, à une variable, et enfin aux systèmes Σ_m, A_m, B_m, qui ne contiendront plus de variables et seront les relations finies qui doivent exister entre les valeurs initiales des inconnues de Σ_{m-1} pour que ces inconnues vérifient Σ_{m-1}. Ceci posé, remarquons que l'invariant

$$\sum \alpha_0,$$

relatif au nombre des inconnues qui peuvent être prises entièrement arbitraires s'applique au passage de A à B, au passage de A_1 à B_1, etc., et au passage de A_{m-1} à B_{m-1}. Il s'applique également au passage de A_m à B_m, qui sont deux systèmes finis et équivalents de relations entre les mêmes constantes.

Remarquons aussi que, dans leur ensemble, les nombres fondamentaux de rang h de A_1 s'expriment au moyen des nombres fondamentaux de rang $h+1$ et de ceux de moindre rang de A, de sorte que, de proche en proche, nous pourrons dire que, dans leur ensemble, les nombres fondamentaux de rang h de A_k s'exprimeront au moyen des nombres fondamentaux

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_{h+k}$$

de A.

5. Considérons successivement les groupes

$$\begin{array}{ll} A, & B, \\ A_1, & B_1, \\ A_2, & B_2, \\ \ldots, & \ldots, \\ A_{m-1}, & B_{m-1}, \\ A_m, & B_m. \end{array}$$

L'invariant $\Sigma\alpha_0$, appliqué au groupe A_1, B_1, nous donnera, en exprimant les α_0 de A_1 et B_1 au moyen des α de A et B, un certain invariant I_1 contenant les α_0 et les α_1.

Appliquons ce même invariant $\Sigma\alpha_0$ au groupe A_2, B_2; il nous donnera, en exprimant les α_0 de A_2 et B_2 au moyen des α de A et B, un certain invariant I_2 contenant les α_0, les α_1 et les α_2, et ainsi de suite.

D'une façon générale, l'invariant $\Sigma\alpha_0$ appliqué au groupe A_k, B_k donnera, pour A, B, un invariant I_k contenant les $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, et finalement le groupe A_m, B_m fournira un invariant I_m dépendant des $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m$.

Considérons l'invariant I_2; il s'obtient en appliquant à $A_2 B_2$ l'invariant I_0 qui, appliqué à $A_1 B_1$, donne l'invariant I_1 de AB. Cet invariant n'est donc autre que l'invariant I_1 appliqué à $A_1 B_1$. Plus généralement, l'invariant I_k sera l'invariant I_0 appliqué à A_k, B_k, c'est-à-dire I_1 appliqué à A_{k-1}, B_{k-1}, c'est-à-dire I_2 appliqué à A_{k-1}, B_{k-1}, etc., c'est-à-dire finalement l'invariant I_{k-1} appliqué à A_1, B_1, de sorte qu'en définitive il n'est pas utile de passer par les systèmes successifs; il suffira de former, comme nous l'avons fait, le Tableau de nombres fondamentaux pour A_1, B_1; en lui appliquant l'invariant I_0 démontré directement, on obtiendra I_1; en lui appliquant I_1 on obtiendra I_2, etc.; en lui appliquant I_{m-1} on obtiendra I_m.

6. Pour appliquer commodément le calcul que nous venons d'indiquer, commençons par former le Tableau des σ du système A_1; ce sera, en remarquant que les inconnues ω correspondent à des inconnues ν pour lesquelles $\alpha_0 = 0$, donc $\alpha_1 = \sigma_1$:

TABLEAU S_1.

	s_0.	s_1.	s_2.		s_{m-2}.	s_{m-1}.
ω_1^0..........	1	1	1	...	1	″
....	.	.	.	...	.	.
$\omega_1^{\sigma_1^1-1}$.......	1	1	1	...	1	″
$\omega_1^{\sigma_1^1}$.........	0	σ_2^1	σ_3^1	...	σ_{m-1}^1	″
$\omega_1^{\sigma_1^1+1}$.......	0	σ_1^1+1	σ_1^1+1	...	σ_1^1+1	″

Tableau S_1 (*suite*).

	s_0.	s_1.	s_2.		s_{m-2}.	s_{m-1}.
α'^{n-1}_1	0	$n-1$	$n-1$	...	$n-1$	n
....	.	.....	.....	...	.....	n
α'^{0}_q	1	1	1	...	1	n
....	.	.	.	...	.	.
$\alpha'^{\sigma_1^q-1}_q$	1	1	1	...	1	n
$\alpha'^{\sigma_1^q}_q$	0	σ_2^q	σ_3^q	...	σ_{m-1}^q	n
$\alpha'^{\sigma_1^q+1}_q$	0	σ_1^q+1	σ_1^q+1	...	σ_1^q+1	n
....	.	.....	.....	...	.....	.
α'^{n-1}_q	0	$n-1$	$n-1$	...	$n-1$	n

Quant aux s_{m-1}, nous savons qu'on a

$$\sum s_{m-1} - \sum s_{m-2} = \sum \sigma_m - \sum \sigma_{m-1}$$

comme conséquence de l'égalité

$$\sum \gamma_{m-1} = \sum \alpha_m.$$

On doit remarquer que la loi de formation des colonnes successives du Tableau S_1 devient régulière à partir de la seconde et qu'il ne se produit de nouvelle irrégularité qu'au passage à la colonne s_{m-1}.

7. Pour appliquer $I_0 = \sum \varphi_1(-\sigma_0)$ à A_1, il nous faut former

$$\sum \varphi_1(-s_0)$$

du Tableau S_1. On obtient immédiatement

$$\sigma_1^1 \varphi_1(-1) + \ldots + \sigma_1^q \varphi_1(-1)$$

ou

$$\varphi_1(-\sigma_1^1) + \ldots + \varphi_1(-\sigma_1^q),$$

somme qui est donc invariante dans le passage de A à B.

Si alors nous considérons la somme

$$\begin{aligned}\sum_1^p \omega_1^i &= \sum_1^p \varphi_1(-\sigma_1^i) + \sum_1^p \varphi_2(-\sigma_0^i)\\ &= \sum_1^q \varphi_1(-\sigma_1^i) + \sum_{q+1}^p \varphi_1(-\sigma_1^i) + \sum_1^p \varphi_2(-\sigma_0^i),\end{aligned}$$

nous voyons que la première partie est invariante quand on passe de A à B, la seconde a une valeur fixe puisque tous les σ_1 qui y figurent sont égaux à *un*, et la troisième est nulle puisque tous les σ_0 étant égaux à *zéro* ou *un* annulent φ_2. Il en résulte que

$$I_1 = \sum_1^p \omega_1^i$$

est invariant quand on passe de A à B.

Admettons maintenant que

$$I_0 = \sum_1^p \omega_0^i, \qquad I_1 = \sum_1^p \omega_1^i, \qquad \ldots, \qquad I_h = \sum_1^p \omega_h^i$$

sont des invariants, et appliquons l'invariant I_h à A_1.

Il nous faut faire la somme

$$\sum \varphi_{h+1}(-s_0) + \sum \varphi_h(-s_1) + \ldots + \sum \varphi_1(-s_h)$$

étendue à tout le Tableau S_1.

Calculons d'abord la portion qui correspond aux inconnues

$$w_i^0, \quad w_i^1, \quad \ldots, \quad w_i^{n-1};$$

elle se décomposera elle-même en sommes partielles relatives aux diverses colonnes.

La portion

$$\sum \varphi_{h+1}(-s_0)$$

sera

$$\sigma_1^i \varphi_{h+1}(-1),$$

qui est nulle, car $h+1$ est supérieur à *un*.

La portion relative à la $k^{\text{ième}}$ colonne

$$\sum \varphi_{h-k+1}(-s_k) \qquad (0 < k \leqq h)$$

se composera de trois parties.

Une première

$$\sigma_1^i \varphi_{h-k+1}(-1)$$

sera nulle si k est inférieur à h et égale à

$$-\sigma_1^i$$

ou encore à

$$\varphi_1(-\sigma_1^i)$$

si $k = h$.

La deuxième partie sera

$$\varphi_{h-k+1}(-\sigma_{k+1}^i).$$

La troisième partie sera enfin

$$\varphi_{h-k+1}(-\sigma_1^i - 1) + \varphi_{h-k+1}(-\sigma_1^i - 2) + \ldots + \varphi_{h-k+1}(-n+1),$$

c'est-à-dire

$$\varphi_{h-k+2}(-\sigma_1^i - 1) - \varphi_{h-k+2}(-n);$$

le second terme indépendant des σ se retrouvera en passant de A à B et l'on pourra le négliger. Quant au premier, en vertu des propriétés des fonctions φ, on peut l'écrire

$$\varphi_{h-k+2}(-\sigma_1^i) - \varphi_{h-k+1}(-\sigma_1^i).$$

Finalement, la portion totale relative à $\varpi_i^0, \ldots, \varpi_i^{n-1}$ sera

$$\begin{aligned}
&\varphi_{h+1}(-\sigma_1^i) - \varphi_h(-\sigma_1^i) + \varphi_h(-\sigma_2^i)\\
&+ \varphi_h(-\sigma_1^i) - \varphi_{h-1}(-\sigma_1^i) + \varphi_{h-1}(-\sigma_3^i)\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \varphi_3(-\sigma_1^i) - \varphi_2(-\sigma_1^i) + \varphi_2(-\sigma_h^i)\\
&+ \varphi_2(-\sigma_1^i) - \varphi_1(-\sigma_1^i) + \varphi_1(-\sigma_{h+1}^i) + \varphi_1(-\sigma_1^i).
\end{aligned}$$

Si l'on supprime les termes qui se détruisent deux à deux et si l'on y ajoute la quantité

$$\varphi_{h+2}(-\sigma_0^i),$$

qui est nulle, on trouve immédiatement

$$\omega_{h+1}^i.$$

Notre calcul montre donc que la somme

$$\sum_1^q \omega_{h+1}^i$$

ne change pas quand on passe de A à B. Il en résulte que

$$\mathrm{I}_{h+1} = \sum_1^p \omega_{h+1}^i$$

est un invariant, car la portion relative aux $p-q$ dernières inconnues est la même, ces inconnues ayant les mêmes nombres fondamentaux

$$1, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0$$

dans A et B.

Ce calcul s'appliquera tant que h sera inférieur à $m-1$, car on n'aura à faire intervenir que les colonnes $s_0, s_1, \ldots, s_{m-2}$ du Tableau S_1.

Supposons maintenant

$$h = m - 1;$$

le calcul de

$$\sum \omega_h^i$$

pour le Tableau S_1 se fera comme précédemment, sauf pour la somme

$$\sum \varphi_1(-s_{m-1})$$

relative à la dernière colonne de S_1. Nous avons remarqué que

$$\sum s_{m-1} - \sum s_{m-2} = \sum \sigma_m - \sum \sigma_{m-1},$$

ce qu'on peut écrire

$$\sum \varphi_1(-s_{m-1}) = \sum \varphi_1(-\sigma'_m) - \sum \varphi_1(-\sigma^i_{m-1}) + \sum \varphi_1(-s_{m-2}).$$

Or $\sum \varphi_1(-s_{m-2})$ a été calculé pour obtenir I_{m-2}, et l'on a trouvé

$$\sum \varphi_2(-\sigma^i_1) - \sum \varphi_1(-\sigma^i_1) + \sum \varphi_1(-\sigma^i_{m-1}) + \sum \varphi_1(-\sigma^i_1);$$

donc

$$\sum \varphi_1(-s_{m-1}) = \sum \varphi_1(-\sigma^i_m) - \sum \varphi_1(-\sigma^i_{m-1}) + \sum \varphi_2(-\sigma^i_1) + \sum \varphi_1(-\sigma^i_{m-1})$$
$$= \sum \varphi_1(-\sigma^i_m) + \sum \varphi_2(-\sigma^i_1).$$

On obtiendra alors finalement

$$\sum \varphi_m(-\sigma^i_1) - \sum \varphi_2(-\sigma^i_1 \quad) + \sum \varphi_{m-1}(-\sigma^i_2 \quad) + \ldots$$
$$+ \sum \varphi_2(-\sigma^i_{m-1}) + \sum \varphi_1 \quad (-s_{m-1}),$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^q \varphi_m(-\sigma^i_1) + \varphi_{m-1}(-\sigma^i_2) + \ldots + \varphi_2(-\sigma^i_{m-1}) + \varphi_1(-\sigma^i_m)$$

ou

$$\sum_1^q \omega^i_m.$$

Par le même raisonnement on montre qu'on peut, sans que l'invariance cesse, étendre la somme jusqu'à l'indice p, et l'on obtient ainsi le $m+1^{\text{ième}}$ invariant

$$I_m = \sum_1^p \omega^i_m.$$

8. Les invariants I sont commodes, à cause de leur forme symé-

trique. Dans certaines questions il est néanmoins utile de les remplacer par certaines de leurs combinaisons. Nous aurons occasion d'utiliser la suivante :

$$\begin{aligned}
J_0 &= I_0,\\
J_1 &= I_1 - I_0,\\
J_2 &= I_2 - I_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
J_m &= I_m - I_{m-1}.
\end{aligned}$$

Si, comme nous l'avons déjà fait dans des Mémoires antérieurs, nous posons

$$\Gamma_0 = \sum_1^p \alpha_0^i, \qquad \Gamma_1 = \sum_1^p \alpha_1^i, \qquad \ldots, \qquad \Gamma_m = \sum_1^p \alpha_m^i,$$

les Γ étant les nombres d'arbitraires des différents genres qui figurent dans le système initial de Cauchy considéré, et si, de plus, nous tenons compte de la formule fondamentale (2) relative aux fonctions φ, nous obtiendrons immédiatement les expressions suivantes, où l'on a négligé tous les termes de la forme

$$\varphi_k(-\sigma_0 - 1) \qquad (k > 2)$$

et ceux de la forme

$$\varphi_2(-\sigma_0),$$

qui sont tous nuls :

$$\begin{aligned}
J_0 &= -\Gamma_0,\\
J_1 &= -\Gamma_1,\\
J_2 &= -\Gamma_2 + \sum_1^p \varphi_2(-\sigma_1^i),\\
J_3 &= -\Gamma_3 + \sum_1^p \varphi_2(-\sigma_2^i) + \sum_1^p \varphi_3(-\sigma_1^i - 1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
J_m &= -\Gamma_m + \sum_1^p \varphi_2(-\sigma_{m-1}^i) + \sum_1^p \varphi_3(-\sigma_{m-2}^i - 1) + \ldots + \sum_1^p \varphi_m(-\sigma_1^i - 1).
\end{aligned}$$

Ces formules n'ont plus la parfaite symétrie de celles qui définissent les I, mais elles ont l'avantage de mettre en évidence les quantités Γ qui ont une signification intéressante.

9. Les égalités

$$\mathrm{I}_0 = \sum_1^p \omega_0^i, \qquad \mathrm{I}_1 = \sum_1^p \omega_0^i, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{I}_m = \sum_1^p \omega_m^i$$

peuvent être considérées de deux façons.

Si l'on y considère les α comme donnés, elles définissent les invariants I.

Si l'on y considère les I comme donnés, ce sont des équations aux inconnues α qu'il s'agit de résoudre en *nombres entiers positifs ou nuls*, satisfaisant en outre à la condition que les α_0 ne peuvent prendre que les valeurs *zéro* ou *un*, et que, si un α_0 est égal à *un*, tous les autres α qui lui correspondent sont nuls. Dans cet ordre d'idées, les équations précédentes seront tout naturellement appelées *équations d'invariance*.

III. — Premières propriétés et applications des invariants.

1. Partons d'une forme canonique d'un système différentiel S; nous formerons ses invariants I et toute autre forme canonique du même système devra avoir un Tableau

$$\begin{matrix} \alpha_0^1, & \alpha_1^1, & \ldots, & \alpha_{m-1}^1, & \alpha_m^1, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_0^p, & \alpha_1^p, & \ldots, & \alpha_{m-1}^p, & \alpha_m^p, \end{matrix}$$

satisfaisant aux équations d'invariance

$$\mathrm{I}_0 = \sum_1^p \varphi_1(-\sigma_0),$$

$$\mathrm{I}_1 = \sum_1^p \varphi_1(-\sigma_1) + \sum_1^p \varphi_2(-\sigma_0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{I}_m = \sum_1^p \varphi_1(-\sigma_m) + \sum_1^p \varphi_2(-\sigma_{m-1}) + \ldots + \sum_1^p \varphi_{m+1}(-\sigma_0),$$

les σ étant des entiers positifs ou nuls satisfaisant aux conditions

$$\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_{m-1} = 1 \qquad (\sigma_m \geqq 1)$$

ou

$$\sigma_0 = 0, \qquad \sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \sigma_3 \leqq \ldots \leqq \sigma_{m-1} \leqq \sigma_m.$$

La première équation d'invariance donne un nombre limité de systèmes de nombres σ_0, car ce sont des entiers positifs dont la somme est connue. Adoptant l'une de ces solutions, la seconde équation fera connaître la somme

$$\sum \sigma_1,$$

ce qui donnera encore un nombre limité de systèmes de nombres σ_1. On peut continuer ainsi jusqu'au bout et en conclure qu'*un système* S *donné n'admet qu'un nombre fini de Tableaux de nombres fondamentaux satisfaisant aux équations d'invariance.*

D'autre part, soit $\sum$ le système S dans lequel on a fait la transformation ponctuelle générale; nous savons que les formes canoniques de S sont les formes canoniques sous lesquelles on peut mettre *directement* $\sum$. Considérons alors deux telles formes correspondant au même Tableau de nombres fondamentaux. Soient μ l'ordre canonique de la première, μ' celui de la seconde, et supposons

$$\mu' > \mu.$$

Dans la première forme, les équations S_μ, $S_{\mu+1}$, ... seront résolues par rapport à des ensembles canoniques

$$\begin{array}{llll}
E^1_\mu, & E^2_\mu, & \ldots, & E^\rho_\mu, \\
E^1_{\mu+1}, & E^2_{\mu+1}, & \ldots, & E^\rho_{\mu+1}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,
\end{array}$$

ceux d'une ligne étant les dérivés de ceux de la ligne précédente.

Dans la seconde forme, par suite de l'identité des Tableaux de nombres fondamentaux, les équations $S_{\mu'}$, $S_{\mu'+1}$, ... seront résolues par rapport aux ensembles $E_{\mu'}$, $E_{\mu'+1}$, ... du Tableau précédent. Dans cette forme, les équations $S_{\mu'-1}$ seront résolues par rapport à des ensembles

$$E'_{\mu'-1},$$

qui seront au plus égaux aux ensembles $E_{\mu'-1}$, puisque leurs ensembles dérivés doivent être au plus égaux aux ensembles $E_{\mu'}$ dérivés des ensembles $E_{\mu'-1}$, et, comme le nombre des termes des ensembles $E'_{\mu'-1}$ est égal à celui des ensembles $E_{\mu'-1}$, il en résulte l'identité des ensembles $E'_{\mu'-1}$ et $E_{\mu'-1}$.

On pourrait continuer ainsi et l'on arriverait à démontrer l'identité des ensembles E'_{μ} et E_{μ}, de sorte que les deux formes sont du même ordre canonique et résolues par rapport aux mêmes ensembles canoniques. Les deux formes ne pourront différer que par la résolution des équations auxiliaires. Nous pourrons donc dire que ces deux formes canoniques ne sont pas distinctes, et, par suite :

A un Tableau de nombres fondamentaux satisfaisant aux équations d'invariance ne peut correspondre plus d'une forme canonique du système.

Si l'on rapproche ce résultat du précédent, on en conclut immédiatement :

Le nombre des formes canoniques distinctes d'un même système différentiel est toujours limité.

2. Employons le langage de la géométrie à n dimensions. Nous pourrons dire que le système Σ, qui dérive du système S par la transformation ponctuelle la plus générale, définit une multiplicité à m dimensions dans un espace à $m+p$ dimensions. Bornons-nous à considérer alors la transformation ponctuelle la plus générale équivalente à un changement d'axes.

Nous remarquerons de suite que les axes interviennent dans la définition des dérivées d'ordre n des fonctions inconnues par rapport aux diverses variables et qu'il en sera de même pour un système de p ensembles canoniques d'ordre n qui ne sont pas tous nuls ou complets.

Soit $\mathcal{E}_n$ un tel système et soit $\mathcal{E}'_n$ l'ensemble analogue relatif aux nouvelles inconnues et variables, le nombre de termes de $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}'_n$ étant précisément le nombre N_n des équations S_n.

Si, quel que soit le changement d'axes, les équations S_n n'étaient jamais résolubles par rapport à $\mathcal{E}'_n$, qui est toujours défini de la même façon par rapport aux axes, ce fait constituerait, pour les multiplicités intégrales, une propriété relative aux axes et qui serait vraie quels que fussent ces axes, ce qui est manifestement impossible.

Il en résulte :

Après un changement d'axes indéterminé, les équations S_n *sont résolubles par rapport à tout système d'ensembles canoniques d'ordre n dont le nombre total de termes est* N_n.

Considérons alors un Tableau de nombres fondamentaux satisfaisant aux équations d'invariance.

Si σ est le plus grand des nombres

$$\sigma^1_{m-1}, \quad \sigma^2_{m-1}, \quad \ldots, \quad \sigma^p_{m-1}$$

relatifs à ce Tableau, pour toute valeur de n au moins égale à σ, il existera certainement des ensembles canoniques

$$E^1_n, \quad \ldots, \quad E^p_n,$$

ayant pour indices les nombres α du Tableau, et, d'après le calcul du nombre des termes d'un ensemble canonique et les équations d'invariance qui sont vérifiées, le nombre total de leurs termes sera

$$p + I_{m-1} + \varphi_1(n)(p + I_{m-2}) + \ldots + \varphi_{m-1}(n)(p + I_0).$$

Mais nous savons qu'à partir d'une certaine valeur de n cette expression est égale à N_n. Il en résulte qu'après le changement d'axes les équations S_n seront résolubles par rapport aux ensembles $E^1_n, \ldots, E^p_n$, pourvu que n soit supérieur à une certaine limite. Les ensembles $E^1_{n+1}, \ldots, E^p_{n+1}$ étant alors les dérivés des ensembles $E^1_n, \ldots, E^p_n$, comme ayant mêmes indices, il en découle la conclusion immédiate que le système S ainsi résolu est sous forme canonique et a pour Tableau de nombres fondamentaux le Tableau donné à l'avance.

Si l'on remarque en outre que le changement d'axes n'est qu'un cas particulier de la transformation ponctuelle linéaire, nous arrivons à cette conclusion :

La transformation ponctuelle linéaire à coefficients indéterminés permet sûrement de mettre un système différentiel sous toutes les formes canoniques dont les nombres fondamentaux satisfont aux équations d'invariance.

3. Considérons un système différentiel d'invariants $I_0, I_1, \ldots, I_m$. A partir d'un certain ordre on a

$$N_n = p + I_{m-1} + \varphi_1(n)(p + I_{m-2}) + \ldots + \varphi_{m-1}(n)(p + I_0);$$

d'autre part on a, par la formule d'addition des fonctions φ,

$$\varphi_{m-1}(n+1) = \varphi_{m-1}(1) + \varphi_{m-2}(1)\varphi_1(n) + \ldots + \varphi_1(1)\varphi_{m-2}(n) + \varphi_{m-1}(n),$$

ou, en tenant compte de ce que l'on a

$$\varphi_q(1) = 1,$$

quel que soit q,

$$\varphi_{m-1}(n+1) = 1 + \varphi_1(n) + \ldots + \varphi_{m-2}(n) + \varphi_{m-1}(n).$$

Il en résulte que la différence

$$N_n - (p + I_0 - 1)\varphi_{m-1}(n+1),$$

dans laquelle le coefficient de $\varphi_{m-1}(n)$ est l'unité, devient positive à partir d'une certaine valeur de n.

Soit alors μ un ordre satisfaisant à toutes les conditions précédentes et soit q le nombre des inconnues entièrement arbitraires; on a

$$q = -I_0,$$

et le nombre des termes d'un ensemble canonique complet d'ordre μ est

$$\varphi_{m-1}(\mu + 1).$$

Si aux q inconnues arbitraires nous faisons correspondre des ensembles canoniques *nuls*, puis aux $p - q - 1$ suivantes des ensembles canoniques complets d'ordre μ, nous aurons un nombre total de termes

$$(p-q-1)\,\varphi_{m-1}(\mu+1) = (p+\mathrm{I}_0-1)\,\varphi_{m-1}(\mu+1),$$

donc inférieur au nombre N_μ des équations S_μ. Nous pourrons donc trouver un ensemble canonique non nul E_μ d'ordre μ correspondant à la $p^{\text{ième}}$ inconnue et tel que le nombre total des termes devienne précisément N_μ.

Nous pouvons recommencer le même raisonnement pour les ordres $\mu+1$, $\mu+2$, ... et trouver des ensembles canoniques

$$E_{\mu+1}, \quad E_{\mu+2}, \quad \ldots.$$

Si l'on suppose qu'on ait effectué dans S la transformation ponctuelle linéaire indéterminée, on sera assuré que les équations S_μ, $S_{\mu+1}$, ... seront respectivement résolubles par rapport aux systèmes d'ensembles canoniques ainsi déterminés. Je dis que la forme obtenue est canonique. Pour le voir il suffit de remarquer que, si l'on fait la résolution *régulière et canonique* du système S transformé en prenant les inconnues dans l'ordre

$$u_{q+1}, \quad u_{q+2}, \quad \ldots, \quad u_{p-1}, \quad u_p, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_q,$$

u_1, ..., u_q étant celles qu'on peut prendre arbitrairement, on retombe forcément sur la résolution précédente et que, comme on l'a vu dans la formation des systèmes canoniques, la résolution régulière conduit forcément à une forme canonique.

Nous en tirons cette conclusion :

Tout système différentiel compatible à p inconnues possède une forme canonique dans laquelle $p-1$ ensembles principaux sont nuls ou complets.

Il résulte de là que les équations d'invariance admettent toujours une solution dans laquelle il y a $-\mathrm{I}_0$ lignes correspondant à des ensembles nuls et $p+\mathrm{I}_0-1$ lignes correspondant à des ensembles complets. Si l'on ajoute que, pour la forme canonique spéciale que nous venons de trouver, il y a un certain nombre $\Sigma\alpha_m$ de constantes arbitraires et que les α_m ne figurent dans la $(m+1)^{\text{ième}}$ équation d'invariance que par cette somme $\Sigma\alpha_m$, on en conclut qu'on peut, sans cesser de vérifier ces équations, remplacer tous les α_m par zéro, sauf un qu'on remplace par leur somme, et par suite :

Les équations d'invariance d'un système compatible admettent toujours une solution de la forme

$$\begin{array}{lllll}
0, & \alpha_1, & \ldots, & \alpha_{m-1}, & \alpha_m, \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, \\
.., & .., & \ldots, & .., & .., \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, \\
1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, \\
.., & .., & \ldots, & .., & .., \\
1, & 0, & \ldots, & 0, & 0.
\end{array}$$

Cette solution est évidemment unique, comme le montrent immédiatement les équations d'invariance; nous l'appellerons la *solution extrême des équations d'invariance*, et la forme canonique correspondante sera la *forme canonique extrême du système différentiel*.

4. Donnons-nous *a priori* des nombres $I_0, I_1, \ldots, I_m$ et supposons que ces nombres soient tels que les équations d'invariance soient compatibles, c'est-à-dire admettent au moins une solution

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_0^1, & \alpha_1^1, & \ldots, & \alpha_{m-1}^1, & \alpha_m^1, \\
.., & .., & \ldots, & \ldots, & .., \\
\alpha_0^p, & \alpha_1^p, & \ldots, & \alpha_{m-1}^p, & \alpha_m^p,
\end{array}$$

correspondant à un nombre p d'inconnues, les nombres α satisfaisant à toutes les conditions indiquées au dernier paragraphe du Chapitre précédent.

Nous remarquerons immédiatement que, si elles sont compatibles pour p, elles le sont encore pour $p+q$, car si, au Tableau précédent, on ajoute q lignes formées par des zéros, on ne change pas les valeurs des I. Nous pouvons donc supposer

Si nous prenons n supérieur au plus grand des nombres σ^i_{m-1} du Tableau précédent, nous sommes assuré qu'il existe des ensembles canoniques

$$E^1_n, \quad E^2_n, \quad \ldots, \quad E^p_n,$$

tels que les indices de E^i_n soient les m premiers nombres de la $i^{\text{ième}}$ colonne.

Considérons alors le système différentiel $S_{(n)}$ obtenu en annulant toutes les dérivées de ces ensembles. Quel que soit n, le système sera canonique, aura les mêmes nombres fondamentaux $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, et, par suite, admettra les mêmes fonctions initiales qui seront ainsi indépendantes de n. Ces fonctions initiales détermineront les valeurs initiales d'un certain nombre de dérivées d'ordre $n-1$, d'ordre $n-2$, etc.; prenons celles qui ne sont pas ainsi déterminées et rangeons-les dans l'ordre suivant, en remarquant que toutes celles d'un même ordre relatives à une même inconnue forment un ensemble canonique : les dérivées d'ordre $n-1$ de u_1 dans leur ordre canonique, puis les dérivées d'ordre $n-1$ de u_2 dans leur ordre canonique, etc., enfin les dérivées d'ordre $n-1$ de u_p dans leur ordre canonique; nous prendrons ensuite les dérivées d'ordre $n-2$ rangées suivant la même loi, puis les dérivées d'ordre $n-3$ et ainsi de suite jusqu'à l'ordre zéro.

Ayant ainsi rangé ces dérivées Δ_{n-1}, nous remarquerons que le système S reste canonique avec les mêmes nombres fondamentaux si l'on y ajoute les équations obtenues en annulant les q premières dérivées Δ_{n-1}, et cela quel que soit le nombre q. En ajoutant q telles équations, on ne fait, d'après le théorème de Cauchy généralisé, que diminuer de q unités le nombre des constantes arbitraires. Le système $S_{(n)}$ donne, en outre des fonctions arbitraires, des constantes arbitraires qui sont toutes les dérivées Δ_{n-1} dont le nombre δ_{n-1} va certainement en croissant indéfiniment avec n si les ensembles E^i_n ne sont pas tous nuls, hypothèse vérifiée forcément puisque

$$p > -I_0.$$

On pourra donc prendre n assez grand pour avoir

$$\delta_{n-1} > \sum \alpha^i_m.$$

Si alors on ajoute à S_m les équations obtenues en annulant les

$$\delta_{n+1} - \sum \alpha_m^i$$

premières dérivées Δ_{n-1}, on arrivera à un système canonique ayant les $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ du Tableau considéré et dont le nombre de constantes arbitraires sera

$$\sum \alpha_m^i.$$

Comme les α_m^i n'entrent dans l'expression de I_m que par leur somme, on voit que le système obtenu aura forcément pour invariants les nombres $I_0, I_1, \ldots, I_m$.

Réciproquement, s'il existe un système différentiel admettant les I pour invariants, en le mettant sous une forme canonique, les nombres fondamentaux correspondants vérifieront les équations d'invariance qui seront compatibles.

Si les équations d'invariance sont compatibles, nous venons de voir que ce sont forcément les équations d'invariance d'un système différentiel, donc elles admettent une solution extrême; la réciproque est évidente.

On en conclut :

Pour que $I_0, I_1, \ldots, I_m$ soient les invariants d'un système différentiel à m variables, il faut et il suffit que les équations d'invariance formées avec $I_0, I_1, \ldots, I_m$ admettent une solution extrême.

Remarquons que, dans un Tableau de nombres fondamentaux, toute ligne de la forme

$$0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad 0$$

donne une portion nulle dans tous les invariants et que toute ligne de la forme

$$1, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad 0$$

donne, dans chaque invariant, une portion égale à -1. Si donc on appelle q le nombre des lignes de cette dernière forme figurant dans la solution extrême, les équations d'invariance seront

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_0 &= -q,\\
\mathrm{I}_1 &= \varphi_1(-\sigma_1) - q,\\
\mathrm{I}_2 &= \varphi_1(-\sigma_2) + \varphi_2(-\sigma_1) - q,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\mathrm{I}_m &= \varphi_1(-\sigma_m) + \varphi_2(-\sigma_{m-1}) + \dots + \varphi_m(-\sigma_1) - q,
\end{aligned}$$

avec les conditions

$$0 \leqq \sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \dots \leqq \sigma_{m-1} \leqq \sigma_m.$$

Les invariants sont, par leur formation même, des nombres entiers; nous supposerons donc toujours cette condition remplie.

La première équation donne la condition

$$\mathrm{I}_0 \leqq 0;$$

tirant alors q de la première, et portant dans les autres, on est conduit à considérer les nouveaux invariants

$$\mathrm{W}_0 = \mathrm{I}_0, \qquad \mathrm{W}_1 = \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_0, \qquad \mathrm{W}_2 = \mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_0, \qquad \dots, \qquad \mathrm{W}_m = \mathrm{I}_m - \mathrm{I}_0,$$

qui sont encore des entiers et grâce auxquels les équations d'invariance précédemment écrites deviennent

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_1 &= \varphi_1(-\sigma_1) = -\sigma_1,\\
\mathrm{W}_2 &= \varphi_1(-\sigma_2) + \varphi_2(-\sigma_1) = -\sigma_2 + \varphi_2(-\sigma_1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\mathrm{W}_m &= \varphi_1(-\sigma_m) + \varphi_2(-\sigma_{m-1}) + \dots + \varphi_m(-\sigma_1)\\
&= \quad -\sigma_m + \varphi_2(-\sigma_{m-1}) + \dots + \varphi_m(-\sigma_1).
\end{aligned}$$

On en tire, de proche en proche,

$$\begin{aligned}
-\sigma_1 &= \mathrm{W}_1,\\
-\sigma_2 &= \mathrm{W}_2 - \varphi_2(\mathrm{W}_1),\\
-\sigma_3 &= \mathrm{W}_3 - \varphi_2[\mathrm{W}_2 - \varphi_2(\mathrm{W}_1)] - \varphi_3(\mathrm{W}_1),
\end{aligned}$$

et l'on en déduit les conditions finales

$$W_0 \geqq 0,$$
$$0 \leqq W_1 \leqq W_2 - \varphi_2(W_1) \leqq W_3 - \varphi_2[W_2 - \varphi_2(W_1)] - \varphi_3(W_1) \leqq \ldots,$$

que doivent remplir $W_0, W_1, \ldots, W_m$ pour être les invariants d'un système à m variables.

Considérons en particulier le cas de deux variables; il y a alors trois invariants W et les conditions deviennent

$$\begin{aligned} W_0 &\geqq 0, \\ W_1 &\geqq 0, \\ W_2 - W_1 &\geqq \varphi_2(W_1), \end{aligned}$$

ou, en introduisant les invariants J,

$$\begin{aligned} J_0 &\geqq 0, \\ J_1 &\geqq 0, \\ J_2 &\geqq \varphi_2(J_1). \end{aligned}$$

Les inégalités que nous avons obtenues sont de la forme

$$\begin{aligned} W_0 &\geqq 0, \\ W_1 &\geqq 0, \\ W_2 &\geqq F_2(W_0, W_1), \\ W_3 &\geqq F_3(W_0, W_1, W_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et nous remarquons immédiatement que m, nombre des variables, n'y figure pas. Nous pouvons alors imaginer une suite infinie de nombres $W_0, W_1, W_2, \ldots$ et former, d'après la loi précédente, les inégalités successives en nombre infini. Pour que $W_0, W_1, \ldots, W_m$ soient les invariants d'un système à m variables il faut alors et il suffit qu'ils vérifient les $m + 1$ premières inégalités.

Supposons alors que $W_0, W_1, \ldots, W_{m+k}$ soient les invariants d'un système à $m + k$ variables, ils vérifieront les $m + k + 1$ premières inégalités; donc $W_0, W_1, \ldots, W_m$ vérifieront les $m + 1$ premières. Soit alors k' un entier quelconque positif; nous pourrons choisir un entier W'_{m+1} satisfaisant à

$$W'_{m+1} \equiv F_{m+1}(W_0, W_1, \ldots, W_m),$$

puis, W'_{m+1} étant ainsi fixé, choisir W'_{m+2} tel que

$$W'_{m+2} \equiv F_{m+2}(W_0, W_1, \ldots, W_m, W'_{m+1}),$$

et ainsi de suite, c'est-à-dire trouver $W'_{m+1}, \ldots, W'_{m+k'}$, tels que W_0, $W_1, \ldots, W_m, W'_{m+1}, \ldots, W'_{m+k'}$ soient les invariants d'un système à $m+k'$ variables; donc :

Si $W_0, W_1, \ldots, W_m$ *sont les* $m+1$ *premiers invariants d'un système à un nombre quelconque de variables, on peut trouver des systèmes à autant de variables que l'on veut (ce nombre étant toutefois au moins égal à* m*) et ayant* $W_0, W_1, \ldots, W_m$ *comme* $m+1$ *premiers invariants. Il en est de même pour les invariants* I *et les invariants* J.

La dernière partie résulte immédiatement des expressions des I et des J au moyen des W.

5. Considérons un Tableau de nombres fondamentaux

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{array}{llll} 0, & \alpha_1^1, & \alpha_2^1, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ 0, & \alpha_1^p, & \alpha_2^p, & \ldots, \end{array} \right.$$

que l'on peut supposer prolongé indéfiniment sur la droite et dans lequel la colonne des α_0 est formée uniquement avec des zéros.

Soient d'autre part

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots$$

une suite de nombres entiers positifs ou nuls et

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots$$

les sommes analogues aux σ formées avec eux.

Si nous considérons le Tableau (A_k) obtenu en prenant les $k+1$ premières lignes de (A), il existe certainement un système différentiel à k variables ayant (A_k) comme Tableau de nombres fondamentaux; donc les équations d'invariance formées avec (A_k) admettront une solution extrême

$$0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k.$$

Si alors nous considérons le Tableau (A_{k+1}), les k premières équations d'invariance seront les mêmes que pour le Tableau (A_k), de sorte qu'on retrouvera les mêmes nombres $a_1, \ldots, a_k$ et un nouveau nombre a_{k+1}.

On peut donc dire que le Tableau A, prolongé indéfiniment vers la droite, déterminera une suite infinie

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots$$

de nombres entiers positifs ou nuls.

Considérons maintenant le Tableau

$$(A'_{k+1}) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} 0, & \alpha_1^1, & \ldots, & \alpha_k^1, & 0, \\ ., & \ldots, & \ldots, & \ldots, & ., \\ 0, & \alpha_1^p, & \ldots, & \alpha_k^p, & 0. \end{array} \right.$$

Ce Tableau donnera naissance aux $k+1$ nombres

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k, \quad a'_{k+1},$$

déterminés par les équations d'invariance suivantes, écrites en partant des invariants J :

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sum \alpha_1^i, \\
a_2 + \Phi_1(s_1) &= \sum \alpha_2^i + \sum \Phi_1(\sigma_1^i), \\
a_2 + \Phi_2(s_2, s_1) &= \sum \alpha_3^i + \sum \Phi_2(\sigma_2^i, \sigma_1^i), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_k + \Phi_k(s_{k-1}, \ldots, s_1) &= \sum \alpha_k^i + \sum \Phi_k(\sigma_{k-1}^i, \ldots, \sigma_1^i), \\
a'_{k+1} + \Phi_{k+1}(s_k, \ldots, s_1) &= \phantom{\sum \alpha_k^i +{}} \sum \Phi_{k+1}(\sigma_k^i, \ldots, \sigma_1^i).
\end{aligned}$$

Si l'on considère les équations analogues déterminant

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k, \quad a_{k+1},$$

on voit que la dernière seule change et est remplacée par

$$a_{k+1}+\Phi_{k+1}(s_k, \ldots, s_1)=\sum \alpha^i_{k+1}+\sum \Phi_{k+1}(\sigma^i_k, \ldots, \sigma^i_1).$$

On remarque alors que les $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ sont formés avec les $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, donc sont les mêmes dans les deux cas, et qu'il en est de même des $s_1, \ldots, s_k$ formés avec $a_1, \ldots, a_k$. On pourra donc, par soustraction, obtenir

$$a_{k+1}=\sum \alpha^i_{k+1}+a'_{k+1},$$

ou, puisque a'_{k+1} est forcément positif ou nul,

$$a_{k+1} \geqq \sum \alpha^i_{k+1}.$$

Comme k est quelconque, nous pouvons donc affirmer que l'on a la suite infinie d'inégalités

$$a_1=\sum \alpha^i_1, \qquad a_2 \geqq \sum \alpha^i_2, \qquad a_3 \geqq \sum \alpha^i_3, \qquad \ldots.$$

Ces inégalités ont une interprétation intéressante. Considérons un système différentiel à m variables et p inconnues dont aucune n'est arbitraire. Supposons-le, d'abord, mis sous une forme canonique quelconque (distincte de la forme canonique extrême) et caractérisée par un Tableau de nombres fondamentaux $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; l'application, à cette forme, du théorème de Cauchy généralisé donnera, dans l'intégrale, des arbitraires des différents ordres dont les nombres seront

$$\Gamma_1=\sum \alpha^i_1, \qquad \Gamma_2=\sum \alpha^i_2, \qquad \ldots, \qquad \Gamma_m=\sum \alpha^i_m.$$

Si nous prenons maintenant ce système sous sa forme canonique extrême, on aura des nombres analogues

$$\mathrm{A}_1=a_1, \qquad \mathrm{A}_2=a_2, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{A}_m=a_m,$$

et les inégalités démontrées donneront immédiatement

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \Gamma_1, \\ \Lambda_2 &= \Gamma_2, \\ \ldots&\ldots, \\ \Lambda_m &= \Gamma_m, \end{aligned}$$

de sorte que :

La forme canonique extrême qui, à certains points de vue, apparaît comme la plus simple, est celle qui donne la solution générale sous la forme la plus compliquée, en ce sens que, pour chaque genre, elle donne un nombre d'arbitraires au moins égal à celui fourni pour toute autre forme canonique du système.

6. En continuant, comme dans le paragraphe précédent, à désigner par $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ les nombres Γ de la forme canonique extrême, les égalités établies au paragraphe IV de ce Chapitre pourront s'écrire

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= -W_1, \\ \Lambda_2 + \Lambda_1 &= -W_2 + \varphi_2(W_1), \\ \Lambda_3 + \Lambda_2 + \Lambda_1 &= -W_3 + \varphi_2[W_2 - \varphi_2(W_1)] + \varphi_3(W_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Supposons alors que, pour une forme canonique du système, on ait

$$\Gamma_0 = \Gamma_1 = \ldots = \Gamma_r = 0, \qquad \Gamma_{r+1} > 0 \qquad (r < m);$$

c'est dire que tous les α_0, les $\alpha_1, \ldots,$ les α_r de cette forme sont nuls, et l'on en déduit immédiatement

$$J_0 = J_1 = \ldots = J_r = 0, \qquad J_{r+1} = -\Gamma_{r+1},$$

et, par suite,

$$W_0 = W_1 = \ldots = W_r = 0, \qquad W_{r+1} = -\Gamma_{r+1}.$$

Il en résulte immédiatement

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \ldots = \Lambda_r = 0, \qquad \Lambda_{r+1} = \Gamma_{r+1}.$$

Pour toute autre forme canonique on aura donc

$$\Gamma'_1 = 0, \qquad \Gamma'_2 \leqq 0, \qquad \ldots, \qquad \Gamma'_r \leqq 0,$$

c'est-à-dire

$$\Gamma'_1 = \Gamma'_2 = \ldots = \Gamma'_r = 0,$$

puisque les Γ' sont des nombres essentiellement positifs. Si, au moyen de cette seconde forme, on reprend le calcul fait sur la première, on trouvera

$$\Lambda_{r+1} = \Gamma'_{r+1}.$$

On a donc finalement

$$\Gamma'_0 = \Gamma'_1 = \ldots = \Gamma'_r = 0, \qquad \Gamma'_{r+1} = \Gamma_{r+1}.$$

Ainsi :

Quelle que soit la forme canonique adoptée, le genre maximum et le nombre des arbitraires de ce genre figurant dans l'intégrale générale par application du théorème de Cauchy généralisé sont toujours les mêmes.

On peut remarquer que l'on aurait pu démontrer cette propriété sans passer par la considération de la forme canonique extrême. Il aurait suffi de démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour avoir

$$J_0 = J_1 = \ldots = J_r = 0, \qquad J_{r+1} = -\Gamma_{r+1}$$

est que tous les α_0, les α_1, ..., les α_r soient nuls. Cette démonstration résulte de ce que les α_1, les α_2, ... n'entrent successivement dans les J successifs que par leurs sommes.

7. Nous avons vu précédemment que toute solution des équations d'invariance donne une forme canonique du système. Quel est son ordre canonique?

Faisons d'abord la remarque suivante. Nous avons introduit deux polynomes $P(n)$ et $\mathfrak{P}(n)$ associés au système; *soient* ν *l'ordre le plus petit à partir duquel* $P(n)$ *est valable,* μ l'ordre analogue relatif à $\mathfrak{P}(n)$. On a forcément

$$\nu \leqq \mu;$$

en effet on a, pour n au moins égal à ν,

$$\mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_{\nu-1} + \mathrm{P}(\nu) + \mathrm{P}(\nu+1) + \ldots + \mathrm{P}(n),$$

et les formules élémentaires sur les sommes de puissances semblables de nombres entiers successifs montrent que $\mathfrak{N}_n$ est un polynome entier $\mathrm{Q}(n)$ de degré m, puisque celui de $\mathrm{P}(n)$ est $m-1$. Pour toute valeur de n au moins égale à ν on a donc

$$\mathfrak{N}_n = \mathrm{Q}(n),$$

et, pour toute valeur au moins égale à μ,

$$\mathfrak{N}_n = \mathfrak{P}(n).$$

Les deux polynomes $\mathfrak{P}(n)$ et $\mathfrak{Q}(n)$ seront donc égaux pour une infinité de valeurs de n, donc seront identiques, et, par suite, $\mathfrak{P}(n)$ sera valable certainement à partir de l'ordre ν, et de là découle l'inégalité annoncée.

D'autre part, pour qu'il existe un ensemble canonique d'ordre n ayant pour indices

$$0, \quad \alpha'_1, \quad \ldots, \quad \alpha'_{m-1},$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$n \geqq \sigma'_{m-1}.$$

Soient alors un système S à m variables et p inconnues, et

$$\begin{array}{cccc}
0, & \alpha_1^1, & \ldots, & \alpha_m^1, \\
\cdot\,, & \cdot\,\cdot\,, & \ldots, & \cdot\,\cdot\,, \\
0, & \alpha_1^q, & \ldots, & \alpha_m^q, \\
1, & 0, & \ldots, & 0, \\
\cdot\,, & \cdot\,, & \ldots, & \cdot\,, \\
1, & 0, & \ldots, & 0
\end{array}$$

la solution considérée.

Si n est l'ordre canonique de la forme canonique correspondante, il existe des ensembles canoniques d'ordre n à m variables ayant pour indices les m premiers nombres des diverses colonnes et, pour cet ordre, le polynome $P(n)$ est valable; on a donc

$$n \geqq \nu, \qquad n \geqq \sigma_{m-1}^1, \qquad \ldots, \qquad n \geqq \sigma_{m-1}^q.$$

On peut même prolonger les dernières inégalités jusqu'à σ_{m-1}^p, puisque ces derniers σ_{m-1} sont égaux à un.

Désignons alors par σ le plus grand des nombres

$$\sigma_{m-1}^1, \quad \sigma_{m-1}^2, \quad \ldots, \quad \sigma_{m-1}^p$$

relatifs à notre solution des équations d'invariance. Ce qui précède nous montre que n devra être au moins égal au plus grand des deux nombres ν et σ; soit λ cet ordre minimum.

Réciproquement, faisons dans S une transformation ponctuelle linéaire; puisque λ est au moins égal à σ, pour l'ordre λ et pour tout ordre supérieur, il existera des ensembles canoniques ayant pour indices les $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ du Tableau et, puisque λ est au moins égal à ν, on aura, pour toute valeur de n au moins égale à λ,

$$N_n = P(n),$$

ce qui, en vertu des équations d'invariance, signifie que N_n est, quel que soit n, au moins égal à λ, précisément le nombre des termes des ensembles canoniques d'ordre n que nous venons de définir, de sorte que, à partir de l'ordre λ, les équations S_n sont constamment résolubles par rapport à ces ensembles, ce qui montre que le système est alors mis sous forme canonique et que son ordre canonique est λ.

Donc :

L'ordre canonique de la forme canonique qui correspond à une solution des équations d'invariance est le plus grand des deux nombres ν et σ.

Lorsqu'on passe d'une solution à une autre, σ change, et, comme le nombre des solutions est limité, σ aura une limite inférieure δ et une limite supérieure Δ, ces deux nombres, par leur nature même, étant des entiers positifs.

On est alors amené à distinguer trois cas si l'on remarque que ν peut occuper toutes les positions possibles par rapport à δ et Δ.

Reprenons l'exemple cité dans le Chapitre II :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

On a ici

$$I_0 = 0, \qquad I_1 = -5,$$
$$P(n) = 2n - 3.$$

On a

$$P(2) = 1, \qquad P(1) = -1,$$

donc

$$\nu = 2.$$

En outre, on a

$$\delta = 3, \qquad \Delta = 5,$$

donc

$$\nu < \delta < \Delta.$$

Prenons maintenant

$$\frac{\partial^\lambda u}{\partial x^\lambda} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^\lambda u}{\partial x^2\,\partial y^{\lambda-2}} = 0, \qquad \frac{\partial^\lambda v}{\partial x^\lambda} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^\lambda v}{\partial x^3\,\partial y^{\lambda-3}} = 0$$
$$(\lambda > 3);$$

les invariants sont encore

$$I_0 = 0, \qquad I_1 = -5,$$

comme dans le cas précédent. Mais

$$P(n) = 2n - 3$$

donne, pour toute valeur de n inférieure à λ, une valeur qui n'est pas nulle, tandis que, pour toutes ces valeurs de n, le nombre N_n est nul. On a donc

$$\nu = \lambda;$$

δ et Δ sont les mêmes que dans le cas précédent. Si donc nous prenons

$$\lambda = 4,$$

on aura

$$\delta < \nu < \Delta,$$

et, si nous prenons

$$\lambda > 5,$$

on aura

$$\partial < \Delta < \nu.$$

En prenant, pour λ, les valeurs 3 ou 5, on aura des exemples des deux cas intermédiaires

$$\nu = \partial, \qquad \nu = \Delta.$$

Les deux premiers cas

$$\nu < \partial < \Delta,$$
$$\partial < \nu < \Delta$$

ne donnent, *a priori*, rien d'intéressant; la solution qui donne

$$\sigma = \Delta$$

donnera une forme dont l'ordre canonique sera Δ, et la solution qui donne

$$\sigma = \partial$$

donnera une forme canonique dont l'ordre canonique sera soit ∂, soit ν, suivant le cas. Il n'y a que le cas particulier

$$\nu \leqq \partial = \Delta$$

qui présente de l'intérêt, car alors toutes les formes canoniques sont du même ordre canonique.

Le troisième cas,

$$\Delta \leqq \nu,$$

est intéressant, parce que, sans autre hypothèse, on peut être assuré que toutes les formes canoniques sont du même ordre canonique.

8. L'étude précédente nous a conduit à introduire deux nombres ∂ et Δ. Ces deux nombres entiers et positifs sont entièrement définis par les équations d'invariance et, par suite, par les invariants. On peut donc poser

$$\partial = \theta(\mathrm{I}_0, \mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_m),$$
$$\Delta = \Theta(\mathrm{I}_0, \mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_m).$$

Il semble difficile d'obtenir l'expression de la fonction θ; mais, par contre, les propriétés qui ont été précédemment établies pour les solutions et formes canoniques extrêmes vont facilement nous fournir l'expression Θ, en supposant que I_0 est nul.

Prenons la solution extrême des équations d'invariance; on a, pour elle,

$$\sigma^1_{m-1} = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_{m-1},$$

et tous les autres σ_{m-1} sont nuls; on a donc, pour cette solution extrême,

$$\sigma = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_{m-1},$$

et, par suite,

$$\Delta \leqq \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_{m-1}.$$

Considérons maintenant une quelconque des solutions des équations d'invariance; on aura

$$\sigma^1_{m-1} + \ldots + \sigma^p_{m-1} \leqq \sigma,$$
$$\sigma^1_{m-1} + \ldots + \sigma^p_{m-1} = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_{m-1},$$
$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_{m-1} \geqq \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_{m-1},$$

d'où résulte

$$\sigma \geqq \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_{m-1},$$

et, par suite,

$$\Delta \geqq \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_{m-1}.$$

Les deux inégalités obtenues pour Δ montrent que l'on a forcément

$$\Delta = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_{m-1},$$

et cette quantité s'exprime facilement au moyen des invariants par les formules du paragraphe 6 de ce Chapitre.

Le calcul que nous venons de faire nous donne plusieurs conséquences intéressantes.

Supposons que, pour une solution des équations d'invariance, on ait

$$\sigma = \Delta;$$

il résultera forcément des égalités et inégalités précédentes que l'on aura forcément

$$\sigma^1_{m-1} + \ldots + \sigma^p_{m-1} = \sigma,$$

et, comme σ est le plus grand des nombres qui figurent au premier membre, cette égalité ne pourra avoir lieu que si un seul des σ du premier membre n'est pas nul, c'est-à-dire si la solution considérée est la solution extrême; donc :

Pour la forme canonique extrême on a

$$\sigma = \Delta,$$

et, pour toute autre forme canonique du même système, on a

$$\sigma < \Delta,$$

ou, sous une autre forme :

Si toutes les formes canoniques d'un système S *n'ont pas le même ordre canonique, c'est la forme canonique extrême qui a l'ordre canonique le plus élevé, et elle est la seule à être de cet ordre canonique.*

Considérons les systèmes pour lesquels on a

$$\delta = \Delta.$$

Quelle que soit la forme canonique adoptée, on aura forcément

$$\sigma = \Delta.$$

Donc le système ne possédera qu'une seule forme canonique, et, en même temps que l'on voit ainsi pourquoi on a trouvé ces systèmes parmi ceux dont toutes les formes canoniques sont du même ordre canonique, on voit aussi qu'à ce point de vue ils ne présentent qu'un intérêt secondaire, puisqu'ils ne sont susceptibles que d'une seule forme canonique.

Comme exemples de tels systèmes, nous citerons d'abord les systèmes de première espèce, c'est-à-dire les systèmes dans lesquels, à partir d'une certaine valeur de n, les équations S_n donnent toutes les dérivées d'ordre n de toutes les inconnues, et en second lieu les systèmes dans lesquels les ensembles principaux sont tous complets sauf un, auquel il ne manque qu'une seule dérivée pour être complet, c'est-à-dire où les équations S_n font connaître toutes les dérivées d'ordre n, sauf une, de toutes les inconnues. On reconnaît immédiatement là les systèmes, intégrés par M. Beudon, dont l'intégrale générale ne dépend que de constantes arbitraires et d'une seule fonction arbitraire d'un seul argument.

Diverses raisons font prévoir que ces deux sortes de systèmes sont les seules à satisfaire à la condition

$$\delta = \Delta;$$

mais, pour l'instant, nous laisserons de côté cette question et l'étude des *systèmes à ordre canonique fixe*.

9. Dans les paragraphes précédents nous avons étudié les premières propriétés des invariants et des équations d'invariance; dans un Mémoire ultérieur nous montrerons comment l'existence des invariants permet de démontrer des propriétés des systèmes différentiels, notamment à propos de leurs transformations, mais, dès à présent, nous allons montrer que certains systèmes différentiels sont complètement caractérisés par leurs invariants.

Considérons d'abord un *système fini* à p inconnues et m variables. En le considérant comme système différentiel, les équations S_n feront, quel que soit n, connaître toutes les dérivées d'ordre n de toutes les inconnues, de sorte que, quel que soit n, $\mathfrak{N}_n$ sera le nombre total des fonctions inconnues et de toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre n; donc

$$\mathfrak{N}_n = p\,\varphi_m(n+1) = p + \varphi_1(n)p + \ldots + \varphi_m(n)p.$$

Cette expression générale de $\mathfrak{N}_n$ nous fournit les invariants I. Ceux-ci sont tous nuls.

Réciproquement, supposons tous les invariants I nuls; on aura, à partir d'une certaine valeur de n,

$$\mathfrak{N}_n = p + \varphi_1(n)p + \ldots + \varphi_m(n)p = p\,\varphi_m(n+1);$$

donc les équations S_n, S_{n+1}, ... feront connaître toutes les inconnues et leurs dérivées jusqu'à l'ordre n. Les inconnues étant ainsi exprimées au moyen des variables, le système est bien un système fini; donc :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système différentiel soit un système fini est que tous ses invariants I *soient nuls.*

Considérons maintenant un système de première espèce; à partir d'un certain ordre, les équations S_n feront connaître toutes les dérivées d'ordre n de toutes les inconnues; donc :

$$N_n = p\,\varphi_{m-1}(n+1) = p + \varphi_1(n)p + \ldots + \varphi_{m-1}(n)p.$$

Cette expression générale de N_n fait connaître tous les invariants I_0, $I_1, \ldots, I_{m-1}$. Ils sont nuls.

Réciproquement, s'il en est ainsi, on a, à partir d'une certaine valeur de n,

$$N_n = p\,\varphi_{m-1}(n+1),$$

et les équations S_n font connaître toutes les dérivées d'ordre n de toutes les inconnues, de sorte que le système est bien de première espèce.

Le nombre des constantes arbitraires est évidemment

$$p\,\varphi_m(n+1) - \mathfrak{N}_n.$$

Or on a

$$p\,\varphi_m(n+1) = p + \varphi_1(n)p + \ldots + \varphi_m(n)p,$$
$$\mathfrak{N}_n = p + I_m + \varphi_1(n)p + \ldots + \varphi_m(n)p,$$

de sorte qu'il se réduit simplement à

$$-I_m;$$

donc :

Pour qu'un système à m variables soit de première espèce, il faut et il suffit que ses invariants $I_0, I_1, \ldots, I_{m-1}$ soient nuls, et le nombre des constantes arbitraires dont dépend l'intégrale générale est $-I_m$.

Considérons ensuite un système de Beudon; on aura, à partir d'une certaine valeur de n,

$$N_n = p\,\varphi_{m-1}(n+1) - 1 = p - 1 + \varphi_1(n)p + \ldots + \varphi_{m-1}(n)p.$$

On en déduit immédiatement

$$I_0 = I_1 = \ldots = I_{m-2} = 0, \qquad I_{m-1} = -1,$$

et la réciproque se démontre toujours de la même façon; donc :

Pour qu'un système à m variables soit un système de Beudon, il faut et il suffit qu'on ait

$$I_0 = I_1 = \ldots = I_{m-2} = 0, \qquad I_{m-1} = -1.$$

En dernier lieu, considérons une seule équation aux dérivées partielles d'ordre μ, à p inconnues et m variables.

Pour n quelconque au moins égal à μ, on aura l'équation proposée et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - \mu$; donc

$$\mathfrak{N}_n = \varphi_m(n - \mu + 1) = \varphi_m(-\mu + 1) + \varphi_1(n)\,\varphi_{m-1}(-\mu + 1) + \ldots + \varphi_m(n).$$

De cette expression générale de $\mathfrak{N}_n$ on déduit immédiatement

$$\begin{aligned}
I_0 &= 1 - p,\\
I_1 &= \varphi_1\,(-\mu + 1) - p,\\
I_2 &= \varphi_2\,(-\mu + 1) - p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
I_m &= \varphi_m(-\mu + 1) - p,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
J_0 &= 1 - p,\\
J_1 &= \varphi_1(-\mu),\\
J_2 &= \varphi_2(-\mu),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
J_m &= \varphi_m(-\mu),
\end{aligned}$$

et, par élimination immédiate de μ,

$$J_0 = 1 - p, \qquad J_1 \text{ entier négatif},$$
$$J_2 = \varphi_2(J_1), \qquad J_3 = \varphi_3(J_1), \qquad \ldots, \qquad J_m = \varphi_m(J_1).$$

Réciproquement, si ces conditions sont réalisées, il y aura, quelle que soit la forme canonique adoptée, $p - 1$ inconnues arbitraires, et, pour chaque valeur de n, les équations S_n seront résolues par rapport à un ensemble canonique E_n formé avec des dérivées d'ordre n de u_1.

Le Tableau de nombres fondamentaux sera de la forme

$$\begin{array}{cccccc} 0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, \\ 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ ., & ., & ., & \ldots, & ., \\ 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \end{array}$$

et les équations d'invariance montrent immédiatement de proche en proche qu'on a

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_m = \mu.$$

ou

$$\alpha_1 = \mu, \qquad \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_m = 0.$$

C'est seulement à partir de l'ordre μ qu'il existe des ensembles canoniques admettant ces indices; soit alors

$$q > \mu$$

l'ordre canonique. Les ensembles E_q, E_{q+1}, ... ont les indices précédents et les fonctions initiales font connaître les valeurs initiales de toutes les dérivées de u_2, ..., u_p et de toutes celles de u_1 qui ne font pas partie des ensembles

$$E^1_{q-1}, \quad E^1_{q-2}, \quad \ldots. \quad E^1_{\mu},$$

admettant les indices de E_q. Puisque $\alpha_m = 0$, c'est que les équations d'ordre inférieur à q font connaître toutes ces dérivées, donc sont résolues par rapport à ces ensembles canoniques. Il en résulte que le système ne possède pas d'équation d'ordre inférieur à μ et qu'il est canonique à l'ordre μ. Comme E^1_{μ} n'a qu'un terme, S_{μ} se compose d'une seule équation et toutes les équations du système s'en déduisent par dérivations successives. La réciproque est donc démontrée. Ainsi :

Pour qu'un système différentiel à p inconnues et m variables se réduise à une seule équation, il faut et il suffit qu'on ait

$$J_0 = 1 - p, \qquad J_1 \text{ entier négatif,}$$
$$J_2 = \varphi_2(J_1), \qquad J_3 = \varphi_3(J_1), \qquad \ldots, \qquad J_m = \varphi_m(J_1),$$

et l'équation obtenue est d'ordre $-J_1$.

10. Un système initial de Cauchy pour p fonctions $u_1, \ldots, u_p$ de m variables $x_1, \ldots, x_m$ est un système de fonctions et constantes initiales se suivant d'après une loi bien déterminée.

Nous savons que, si l'on applique le théorème de Cauchy généralisé à une *forme canonique* d'un système différentiel, les inconnues sont complètement déterminées par un système initial de Cauchy.

Mais il y a ici à faire une remarque extrêmement importante sans laquelle on serait amené à des résultats erronés dans l'application des invariants à bien des questions relatives aux systèmes différentiels.

Considérons, par exemple, une équation

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p} = \frac{\partial^q v}{\partial x^q}$$

à deux inconnues u, v et deux variables x, y.

Si on la considère comme résolue par rapport à $\frac{\partial^p u}{\partial x^p}$, on est conduit à un système initial de Cauchy défini par le Tableau

	α_0.	α_1.	α_2.
u	0	p	0
v	1	0	0

Si on la considère comme résolue par rapport à $\frac{\partial^q u}{\partial x^q}$, on est conduit à un autre système initial de Cauchy défini par

	α_0.	α_1.	α_2.
u	1	0	0
v	0	q	0

Si l'on forme des fonctions invariantes, le premier système initial donne

$$I_0 = -1, \qquad I_1 = -p-1, \qquad I_2 = \frac{p^2-3p-2}{2},$$

et le second

$$I_0 = -1, \qquad I_1 = -q-1, \qquad I_2 = \frac{q^2-3q-2}{2},$$

de sorte que les relations d'invariance établies dans ce Mémoire ne sont pas vraies entre ces deux systèmes initiaux de Cauchy.

On pourrait multiplier les exemples, mais c'est inutile. Supposons qu'après avoir, au besoin, effectué sur le système différentiel une transformation ponctuelle *déterminée*, c'est-à-dire après avoir choisi convenablement inconnues et variables, on soit arrivé à démontrer qu'une intégrale est déterminée par un système initial de Cauchy

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_0^1, & \alpha_1^1, & \ldots, & \alpha_{m-1}^1, & \alpha_m^1, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_0^p, & \alpha_1^p, & \ldots, & \alpha_{m-1}^p, & \alpha_m^p; \end{array}$$

ce système initial partagera les dérivées de toutes les inconnues en deux classes : les dérivées D, dont la valeur initiale est fournie par les fonctions et constantes du système initial de Cauchy considéré, et les dérivées Δ qui sont toutes les autres.

Puisqu'une solution est complètement déterminée par la connaissance des dérivées D, c'est que les équations du système S expriment toutes les dérivées Δ au moyen des dérivées D.

Si nous remarquons que forcément (d'après la nature même du système initial), à partir d'un certain ordre, les dérivées Δ_n d'ordre n forment des ensembles canoniques tels que ceux d'un ordre soient les dérivés de ceux de l'ordre précédent, nous verrons que les équations du système S peuvent se décomposer en groupes T_n analogues aux groupes S_n d'une forme canonique, résolus comme eux par rapport à des ensembles canoniques et donnant lieu aux mêmes propriétés. Mais, et c'est là le point essentiel, *on n'est pas assuré que les seconds membres des équations* T_n *ne contiennent que des dérivées* D *d'ordre au plus égal à* n.

Si cette condition est réalisée, la forme obtenue est canonique; en lui appliquant le théorème de Cauchy généralisé, on retrouvera le système initial de Cauchy considéré, lequel, par suite, satisfera bien aux relations d'invariance.

Si cette condition n'est pas réalisée, comme dans l'exemple considéré plus haut, en supposant l'équation résolue par rapport à $\frac{\partial^p u}{\partial x^p}$ et

$$q > p,$$

la forme sera une *forme pseudo-canonique* et l'on ne peut plus affirmer que ses nombres fondamentaux satisfont aux relations d'invariance.

On peut même démontrer le contraire :

Soient $I_0, I_1, \ldots, I_m$ les invariants de S et $I'_0, I'_1, \ldots, I'_m$ les quantités analogues formées avec les nombres fondamentaux de la forme pseudo-canonique.

Considérons l'ensemble des équations $S_n, S_{n-1}, \ldots$; il ne contient que des dérivées Δ d'ordre au plus égal à n; ces équations sont distinctes par rapport à ces dérivées Δ, sans quoi on obtiendrait des relations entre les dérivées D, ce qui est absurde. Si donc on appelle $\mathfrak{N}'_n$ le nombre de ces dérivées Δ, on a, quel que soit n,

$$\mathfrak{N}'_n \geqq \mathfrak{N}_n;$$

l'égalité ne peut même pas avoir lieu, sans quoi les équations S_n, à partir d'un certain rang, exprimeraient les Δ_n au moyen des dérivées D d'ordre au plus égal à n. Le fait contraire ne pourrait pas non plus se produire pour des dérivées Δ d'ordres inférieurs, car alors, en vertu des dérivations par rapport à x_m, il se perpétuerait pour certaines dérivées Δ d'ordre aussi grand qu'on voudrait, ce qui serait en contradiction avec ce qui précède. Si donc l'égalité avait lieu, la forme serait canonique.

Puisque la forme est supposée pseudo-canonique, on a donc, si grand que soit n,

$$\mathfrak{N}'_n > \mathfrak{N}_n,$$

c'est-à-dire

$$I'_m - I_m + \varphi_1(n)[I'_{m-1} - I_{m-1}] + \ldots + \varphi_m(n)[I'_0 - I_0] > 0.$$

Il est donc impossible que tous les I' soient égaux aux I. Donc :

Si, au moyen des nombres fondamentaux d'un système initial de Cauchy qui correspond à une forme pseudo-canonique, on fait les calculs qui conduisent aux invariants, on n'obtient jamais le système d'invariants du système proposé. On obtient un système de faux invariants.

L'inégalité précédente montre en outre que, *si l'on considère parallèlement le système d'invariants* *d'un système différentiel et un système de faux invariants du même système différentiel*

$$I'_0, \quad I'_1, \quad \ldots, \quad I'_m,$$

le premier terme de la seconde suite qui n'est pas égal au terme correspondant de la première lui est forcément supérieur.

Pour terminer, nous ferons remarquer que la transformation ponctuelle indéterminée conserve toutes les formes canoniques, qu'elle les rassemble, tandis qu'elle disperse toutes les formes pseudo-canoniques et n'en conserve aucune.