ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. TRAYNARD

Sur les fonctions thêta de deux variables et les surfaces Hyperelliptiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 24 (1907), p. 77-177

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1907_3_24__77_0>

SUR LES

FONCTIONS THÊTA DE DEUX VARIABLES

ET LES

SURFACES HYPERELLIPTIQUES,

PAR M. E. TRAYNARD.

INTRODUCTION.

C'est assurément l'une des plus belles découvertes mathématiques de Jacobi que celle des fonctions d'une variable qu'on a appelées depuis *fonctions thêta*. Il les a lui-même présentées sous forme de produits infinis et sous forme de séries et a donné l'expression des fonctions elliptiques au moyen de quotients de séries de cette espèce.

La généralisation de ces résultats pour les fonctions inverses des intégrales hyperelliptiques lui est due également pour le principe. Dans un Mémoire publié dans le *Journal de Crelle* (1), il montre qu'il ne faut pas songer à étudier la fonction $x = \lambda(u)$ définie par l'égalité

$$u = \int \frac{(\alpha + \beta x)\, dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}},$$

car cette fonction admet quatre périodes, ce qui est absurde (2). Au contraire, Z étant un polynome en z du cinquième ou du sixième ordre,

(1) Tome 13, 1835, p. 55.
(2) *Loc. cit.*, p. 71.

il pose

$$\int_a^x \frac{(\alpha+\beta z)\,dz}{\sqrt{Z}} + \int_b^y \frac{(\alpha+\beta z)\,dz}{\sqrt{Z}} = u,$$

$$\int_a^x \frac{(\alpha'+\beta' z)\,dz}{\sqrt{Z}} + \int_b^y \frac{(\alpha'+\beta' z)\,dz}{\sqrt{Z}} = u'.$$

Les fonctions $x=\lambda(u,u')$, $y=\lambda'(u,u')$ ont alors quatre paires de périodes et cela n'a rien d'absurde ([1]).

Mais alors que la théorie des fonctions elliptiques faisait des progrès rapides, celle des nouvelles fonctions, appelées par Jacobi *fonctions abéliennes*, avançait bien lentement. En 1846, l'Académie des Sciences de l'Institut de France, voulant diriger les recherches dans cette voie qu'elle reconnaissait difficile, proposa pour le Grand prix de Mathématiques la question suivante :

Perfectionner dans quelque point essentiel la théorie des fonctions abéliennes, ou plus généralement des transcendantes qui résultent de la considération des intégrales de quantités algébriques ([2]).

Le prix fut décerné en 1849 à G. Rosenhain. Dans le Mémoire qu'il avait déposé ([3]), il donnait les expressions de certaines fonctions symétriques de x et y, en particulier de xy et $x+y$, au moyen de quotients de séries entières analogues aux fonctions thêta d'une variable. Ainsi le problème de l'inversion des intégrales abéliennes était résolu par l'introduction de nouvelles fonctions entières de deux variables qu'on a appelées aussi *fonctions thêta*.

Une autre solution était trouvée en même temps et tout à fait indépendamment par Göpel ([4]).

On trouve dans les deux Mémoires les seize fonctions d'ordre *un* et la démonstration de certaines relations entre les carrés de ces fonctions. Les deux auteurs font remarquer la possibilité de l'extension de cette théorie à plus de deux variables.

([1]) *Loc. cit.*, p. 77.
([2]) *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, 1846, p. 767.
([3]) *Mém. des Sav. étr.*, t. IX, 1851, p. 361 et *Ost. Klas.*, n° 65.
([4]) *Journ. de Crelle*, t. 35, 1847, p. 277 et *Ost. Klas.*, n° 67.

Cette extension peut se faire dans deux voies différentes. On peut introduire les fonctions thêta de plusieurs variables pour l'inversion des intégrales hyperelliptiques de genre supérieur à deux. Je ne m'en occuperai pas ici. On peut aussi les considérer pour la résolution du problème suivant :

Représenter une fonction uniforme de p variables à 2p périodes par le quotient de deux fonctions entières.

Ce problème se présentait tout naturellement à la suite du précédent; les fonctions uniformes xy, $x+y$ des deux variables u, u' étant des quotients de deux fonctions thêta, en était-il de même pour toute fonction $2p$ fois périodique de p variables?

En 1860, Riemann l'affirmait sans le démontrer. Le point capital était l'existence de relations entre les périodes d'une fonction $2p$ fois périodique, puisque les modules des fonctions thêta ne sont pas indépendants. Weierstrass donna des propositions qui conduisaient à la démonstration du théorème. MM. Picard et Poincaré la firent effectivement (*Comptes rendus*, 1883). On en a donné d'autres depuis, parmi lesquelles celles de MM. Appell et Painlevé dont je parle au Chapitre I; citons enfin une démonstration de M. Picard (*Comptes rendus*, t. CXXIV), et une démonstration de M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. XXII).

Les fonctions thêta ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux; on en trouvera une théorie très complète ainsi qu'une bibliographie très riche dans Kraser, *Lehrbuch der Thêtafunctionen*.

Une application extrêmement importante des fonctions thêta de deux variables est la théorie des surfaces hyperelliptiques. Les coordonnées d'un point d'une surface hyperelliptique sont des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres. M. Picard [1] a étudié ces surfaces; il a montré notamment qu'elles admettent deux intégrales de différentielles totales de première espèce, lorsqu'elles sont représentables point par point sur le champ hyperelliptique, et que leur

(1) *Journ. de Math.*, 1885, p. 281 et 1889, p. 223. *Voir* aussi la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, par Picard et Simart, t. II, Chap. XIV.

genre géométrique est égal à l'unité. M. Humbert (1) a donné une théorie fondée entièrement sur la considération des fonctions thêta (2).

Ces recherches ont été faites en considérant les fonctions relatives au Tableau de périodes

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2i\pi, & 0, & a, & b, \\ 0, & 2i\pi, & b, & c. \end{array}\right.$$

Mais, ainsi que je le montre dans le Chapitre I, le théorème général sur la représentation des fonctions quadruplement périodiques de deux variables conduit à considérer des fonctions pour lesquelles la première période est divisée par un entier M.

J'étudie dans ce travail (3) les conséquences de l'introduction de l'entier M. Elles sont assez importantes pour avoir nécessité une revision de la théorie générale. Je fais cette revision dans les trois premiers Chapitres. Le Chapitre I traite du nombre des fonctions thêta, de leur parité, de leurs zéros; je signale un cas tout nouveau à ce point de vue, et à d'autres aussi, celui où l'ordre des fonctions thêta est égal au produit d'un nombre M pair par un nombre impair. Les Chapitres II et III étudient les surfaces hyperelliptiques représentables point par point dans le champ hyperelliptique ou bien à la façon de la surface de Kummer. Les résultats obtenus ne diffèrent pas essentiellement de ceux qui avaient été donnés par M. Humbert, et la plupart du temps j'ai pu simplement les énoncer en renvoyant à son Mémoire pour leur démonstration.

Les Chapitres suivants traitent des applications.

Le Chapitre IV contient les éléments d'une théorie générale des surfaces représentables comme la surface de Kummer dans le cas où M est égal à deux.

Dans le Chapitre V, j'ai établi l'équation de la surface de Kummer sous diverses formes qui devaient me servir dans la suite.

Dans le Chapitre VI, j'étudie une surface hyperelliptique du hui-

---

(1) *Journ. de Math.*, 1893, p. 29.

(2) J'aurai souvent à renvoyer à ce Mémoire; j'ai adopté pour ces renvois un signe spécial : un H suivi du numéro du paragraphe.

(3) Une partie des résultats a été donnée dans des Notes aux *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. CXXXVIII, p. 339; t. CXXXIX, p. 718; t. CXL, p. 218 et 931.

tième degré représentable point par point sur le champ hyperelliptique; je donne la classification complète des courbes tracées sur cette surface.

Dans le Chapitre VII, j'étudie une surface du quatrième degré à 14 points doubles, et je montre que c'est un type défini dont je donne les caractéristiques géométriques.

Le Chapitre VIII contient la même étude pour une surface du quatrième degré à 32 droites, et le Chapitre IX pour une surface du quatrième degré à 15 points doubles.

Enfin, dans un Appendice, je donne dans deux Tableaux les demi-périodes qui annulent les fonctions thêta dans le cas où M est pair; j'indique quelques formules dont j'ai fait usage dans le cours des Chapitres précédents, et je fais des applications numériques pour des surfaces à 14 points doubles ou à 32 droites ayant tous leurs éléments remarquables réels.

Pour les applications l'introduction de l'entier M a une grande importance. Au point de vue des surfaces hyperelliptiques, on a une très grande richesse de combinaisons permettant de trouver des surfaces d'un degré donné; c'est un fait analogue qui se produit avec les fonctions singulières étudiées par M. Humbert, et je rappelle que c'est en se servant de ces fonctions qu'il a donné les premiers exemples de surfaces à 15 points doubles ou à 32 droites [1]. D'autres applications exigent également l'introduction de M; je ne citerai que la suivante : dans son cours du Collège de France (1904-1905), M. Humbert a démontré que les coordonnées d'une tangente à deux quadriques sont fonctions hyperelliptiques de deux variables avec $M = 2$.

On me permettra, en terminant ce travail, de remercier M. Humbert et M. Painlevé auprès desquels j'ai trouvé des encouragements et des conseils précieux et qui ont toujours apporté la plus grande bienveillance à diriger et à faciliter mes recherches.

[1] *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. CXXIX, p. 640; t. CXXXII, p. 72. — Dans une Note récente, M. Rémy montre que les surfaces de M. Humbert sont des cas particuliers de celles que j'étudie ici (*Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. CXLII, p. 768).

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

Introduction du Tableau de périodes T_M.

1. On sait comment la représentation des fonctions quadruplement périodiques de deux variables par le quotient de deux fonctions entières conduit à la considération des fonctions thêta de deux variables.

Je rappelle en particulier que la démonstration de M. Appell [1] introduit la fonction $\Phi_1(x, y)$ satisfaisant aux relations

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x + 2i\pi, y) &= \Phi_1(x, y), \\
\Phi_1(x, y + 2i\pi) &= e^{n\left(x - y\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) + C}\Phi_1(x, y), \\
\Phi_1(x + \alpha_1, y + \beta_1) &= \Phi_1(x, y), \\
\Phi_1(x + \alpha'_1, y + \beta'_1) &= e^{2Mni\pi\frac{y}{\beta_1} + C'}\Phi_1(x, y),
\end{aligned}$$

et la fonction analogue Ψ_1. On a, en outre,

$$\frac{1}{2i\pi}(\beta_1\alpha'_1 - \alpha_1\beta'_1) = 2Mi\pi.$$

En posant alors

$$X = x - \frac{\alpha_1}{\beta_1}y, \qquad Y = \frac{2i\pi}{\beta_1}y,$$

on obtient les fonctions $\Phi_2(X, Y)$, $\Psi_2(X, Y)$, et les relations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\Phi_2(X + 2i\pi, Y) = \Phi_2(X, Y), \\
&\Phi_2\left(X - 2i\pi\frac{\alpha_1}{\beta_1}, Y - \frac{4\pi^2}{\beta_1}\right) = e^{nX + C}\Phi_2(X, Y), \\
&\Phi_2(X, Y + 2i\pi) = \Phi_2(X, Y), \\
&\Phi_2\left(X - \frac{4M\pi^2}{\beta_1}, Y + 2i\pi\frac{\beta'_1}{\beta_1}\right) = e^{MnY + C'}\Phi_2(X, Y).
\end{aligned}\right.$$

---

[1] *Journal de Liouville*, 4e série, t. VII, p. 199.

De même, la démonstration de M. Painlevé ([1]) introduit les fonctions $H(X, Y)$ satisfaisant aux relations

$$(2)\quad \begin{cases} H(X+2i\pi, Y) = H(X, Y) = H(X, Y+2i\pi), \\ H(X+A, Y+B) = e^{nX+C}H(X, Y), \\ H(X+A', Y+B') = e^{MnY+C'}H(X, Y), \end{cases}$$

avec $MB = A'$.

Ces résultats ne diffèrent pas au fond; je les prends sous leur seconde forme; en posant

$$X = -MX_1 + \frac{nA-2C}{2n}, \qquad Y = -Y_1 + \frac{B'}{2} - C', \qquad \frac{A}{M} = -A_1,$$
$$B = -B_1, \qquad B' = -C_1,$$

les relations (2) se transforment dans les suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} H_1\left(X_1 + \frac{2i\pi}{M}, Y_1\right) = H_1(X_1, Y_1) = H_1(X_1, Y_1 + 2i\pi), \\ H_1(X_1 + A_1, Y_1 + B_1) = e^{-Mn\left(X_1+\frac{A_1}{2}\right)}H_1(X_1, Y_1), \\ H_1(X_1 + B_1, Y_1 + C_1) = e^{-Mn\left(Y_1+\frac{C_1}{2}\right)}H_1(X_1, Y_1). \end{cases}$$

D'ailleurs les fonctions H_1 admettent la période $2i\pi, 0$; ce sont des fonctions thêta relatives au Tableau de périodes

$$T\ \begin{cases} 2i\pi, & 0, & A_1, & B_1, \\ 0, & 2i\pi, & B_1, & C_1. \end{cases}$$

Il s'est ainsi introduit un diviseur M de la première période. Je désignerai le nouveau Tableau de périodes par

$$T_M\ \begin{cases} \frac{2i\pi}{M}, & 0, & A_1, & B_1, \\ 0, & 2i\pi, & B_1, & C_1. \end{cases}$$

Je me propose d'examiner les conséquences que l'introduction du diviseur M peut avoir dans la théorie générale des fonctions thêta et dans celle des surfaces hyperelliptiques.

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXXIV, p. 808.

Fonctions thêta relatives au Tableau T_M.

2. Me plaçant au point de vue de cette application géométrique, je limiterai l'étude générale aux fonctions comprises dans la formule (H., 3) :

$$(1)\quad \Theta_{pq}^{(h)}\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}(u, v) = \sum_{\rho}\sum_{\sigma} e^{\left(p+\frac{\omega}{2}+h\rho\right)u+\left(q+\frac{\omega'}{2}+h\sigma\right)v}\, e^{\pi i(\rho\theta+\sigma\theta')}$$
$$\times e^{\frac{1}{2h}\left[a\left(p+\frac{\omega}{2}+h\rho\right)^2+2b\left(p+\frac{\omega}{2}+h\rho\right)\left(q+\frac{\omega'}{2}+h\sigma\right)+c\left(q+\frac{\omega'}{2}+h\sigma\right)^2\right]},$$

où h désigne l'ordre de la fonction; p et q deux entiers positifs ou nuls inférieurs à h; ω, ω', θ, θ' des nombres égaux à 0 ou 1 formant la caractéristique; a, b, c les périodes appelées ci-dessus A_1, B_1, C_1.

Pour que tous les termes de la série précédente aient un même multiplicateur lorsqu'on augmente u de $\frac{2i\pi}{M}$, il faut que h soit un multiple de M, ce que les considérations précédentes avaient déjà montré dans le cas où la caractéristique est nulle. Le plus petit parallélépipède de périodes auquel est relative une fonction thêta s'obtient en prenant pour M le plus grand diviseur de son ordre; le plus petit parallélépipède pour plusieurs fonctions s'obtient en prenant pour M le plus grand commun diviseur de leurs ordres. Je supposerai désormais que cette réduction a été effectuée et je mettrai toujours le coefficient M en évidence.

Les fonctions thêta considérées seront alors dites *réduites* et le Tableau T_M sera qualifié de même; par opposition, les fonctions de la forme (1) et le Tableau T seront dits *ordinaires*.

Caractéristiques réduites.

3. En augmentant u de $\frac{2i\pi}{M}$, la fonction $\Theta_{p,q}^{(hM)}\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}(u, v)$ se reproduit multipliée par $e^{\left(p+\frac{\omega}{2}\right)\frac{2i\pi}{M}}$.

Il semble donc qu'il s'introduise ainsi une infinité de nouvelles caractéristiques; mais la plupart doivent être rejetées en vertu des considérations suivantes : la théorie des surfaces hyperelliptiques introduit d'une part les fonctions à caractéristique nulle, d'autre part les fonctions paires ou impaires à caractéristique quelconque; or, en général, pour obtenir une fonction paire ou impaire, il faut associer par somme ou différence les deux fonctions (II., 4, 5)

$$\Theta_{p,q}(u, v), \quad \Theta_{hM-p-\omega, hM-q-\omega'}(u, v);$$

ces deux fonctions doivent donc avoir même multiplicateur. Je distinguerai alors deux cas :

1° $\omega = 0$. On est conduit à poser :

$$e^{\frac{2pi\pi}{M}} = e^{(hM-p)\frac{2i\pi}{M}}, \qquad e^{\frac{4pi\pi}{M}} = 1, \qquad \frac{4pi\pi}{M} \equiv 0 \pmod{2i\pi}.$$

Cette congruence admet les solutions :

$$p = 0, \qquad p = \frac{M}{2}, \qquad p = M, \qquad p = \frac{3M}{2}, \qquad \ldots, \qquad p = \frac{(2h-1)M}{2}.$$

La moitié seulement, au nombre de h, conviennent au cas de M impair; toutes, au nombre de $2h$, conviennent au cas de M pair.

Pour les solutions kM le multiplicateur est égal à 1; pour les solutions $\frac{(2k-1)M}{2}$ il est égal à -1; je dirai alors que la fonction admet la caractéristique réduite $\begin{vmatrix} 0 & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} 1 & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, sa caractéristique ordinaire étant $\begin{vmatrix} 0 & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$.

2° $\omega = 1$. On est conduit à poser :

$$e^{\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{2i\pi}{M}} = e^{\left(hM-p-\frac{1}{2}\right)\frac{2i\pi}{M}}, \qquad e^{(2p+1)\frac{2i\pi}{M}} = 1, \qquad (2p+1)\frac{2i\pi}{M} \equiv 0 \pmod{2i\pi}.$$

Cette congruence n'a pas de solutions si M est pair, et si M est impair elle admet les suivantes :

$$p = \frac{M-1}{2}, \qquad p = \frac{3M-1}{2}, \qquad \ldots, \qquad p = \frac{(2h-1)M-1}{2},$$

au nombre de h. Le multiplicateur est alors égal à -1 et la caractéristique réduite est $\begin{vmatrix} 1 & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$.

En général, une caractéristique réduite sera désignée par $\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$.

En résumé :

Si M *est pair, on conserve les fonctions de caractéristique ordinaire* $\begin{vmatrix} 0 & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ *pour lesquelles*

$$p = \frac{\lambda M}{2} \ (\lambda = 0, 1, \ldots, 2h-1);$$

$\omega_1 = 0$, *si* λ *est pair*, $\omega_1 = 1$, *si* λ *est impair.*

Si M *est impair, les caractéristiques réduites sont identiques aux ordinaires, et l'on conserve les fonctions pour lesquelles*

$$p = \lambda M \ (\lambda = 0, 1, \ldots, h-1) \quad et \quad p = \frac{(2\lambda+1)M-1}{2} \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, h-1);$$

avec respectivement $\omega_1 = 0$ *et* $\omega_1 = 1$.

On aurait obtenu les mêmes résultats en écrivant que le multiplicateur doit être égal à ± 1.

4. Il y a ainsi seize caractéristiques réduites; pour chacune il existe h^2M fonctions d'ordre hM linéairement indépendantes.

Je vais étudier ce que deviennent ces fonctions lorsque u et v sont simultanément changés de signes.

Je rappelle qu'on a en général (H., 4)

$$\Theta_{p,q}(-u, -v) = \Theta_{h-p,h-q}(u, v),$$

pour une fonction thêta de caractéristique ordinaire nulle et d'ordre h, et qu'on a (H., 5)

$$\Theta_{p,q}(-u, -v) = \Theta_{\varepsilon h-p-\omega, \varepsilon' h-q-\omega'}(u, v)$$

pour une fonction de caractéristique ordinaire $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ et d'ordre h, ε et ε' désignant des nombres égaux à 0 ou 1.

En appliquant ces formules aux fonctions thêta d'ordre $h\mathrm{M}$ relatives au Tableau T_{M}, on trouve que les fonctions thêta d'ordre $h\mathrm{M}$, de même caractéristique réduite, s'expriment en fonction linéaire et homogène d'un certain nombre de fonctions paires et d'un certain nombre de fonctions impaires. Je vais énumérer ces nombres :

1° M *impair*, h *impair* : $\frac{h^2\mathrm{M}+1}{2}$ *fonctions paires*, $\frac{h^2\mathrm{M}-1}{2}$ *impaires ou* $\frac{h^2\mathrm{M}-1}{2}$ *fonctions paires*, $\frac{h^2\mathrm{M}+1}{2}$ *impaires, suivant que* $\omega_1\theta+\omega'\theta'$ *est pair ou impair ;*

2° M *impair*, h *pair* : $\frac{h^2\mathrm{M}+4}{2}$ *fonctions paires*, $\frac{h^2\mathrm{M}-4}{2}$ *impaires pour la caractéristique nulle ;* $\frac{h^2\mathrm{M}}{2}$ *fonctions paires*, $\frac{h^2\mathrm{M}}{2}$ *impaires pour les autres caractéristiques ;*

3° M *pair*, h *pair : mêmes résultats que ci-dessus ;*

4° M *pair*, h *impair* : $\frac{h^2\mathrm{M}+2}{2}$ *fonctions paires*, $\frac{h^2\mathrm{M}-2}{2}$ *impaires ou* $\frac{h^2\mathrm{M}+2}{2}$ *fonctions paires*, $\frac{h^2\mathrm{M}-2}{2}$ *impaires pour les caractéristiques* $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ \theta & 0 \end{vmatrix}$ *suivant que* $\omega_1\theta$ *est pair ou impair ;* $\frac{h^2\mathrm{M}}{2}$ *fonctions paires*, $\frac{h^2\mathrm{M}}{2}$ *impaires pour les autres caractéristiques.*

5. Avant de déterminer les demi-périodes qui annulent certaines fonctions thêta, il importe de bien préciser les différences entre les deux cas : M pair et M impair.

On vient de voir que, dans le cas où M est pair, il ne subsiste que huit caractéristiques ordinaires se partageant en seize caractéristiques réduites ; tandis que, dans le cas où M est impair, il y a seize caractéristiques réduites identiques aux ordinaires. Pour les demi-périodes les circonstances sont analogues ; en effet, on a, si M est impair,

$$\pi i=\frac{\pi i}{\mathrm{M}}+\frac{\mathrm{M}-1}{2}\,\frac{2\pi i}{\mathrm{M}},$$

et, si M est pair,

$$\pi i=\frac{\mathrm{M}}{2}\,\frac{2\pi i}{\mathrm{M}}.$$

Par conséquent, si M est impair, les demi-périodes $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ et $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi i}{\mathrm{M}}, \frac{\beta}{2}$ sont distinctes et au contraire elles sont congruentes si M est pair.

Dans le premier cas, les seize demi-périodes ordinaires sont identiques aux seize demi-périodes réduites; dans le second, les seize demi-périodes ordinaires se confondent deux à deux et il s'introduit huit demi-périodes nouvelles.

6. Pour les étudier, je considère la fonction

$$\Theta_{p,q}^{(h\mathrm{M})}\begin{vmatrix} 0 & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}\left(u + \frac{\pi i}{\mathrm{M}}, v\right),$$

où M est pair et la caractéristique mise sous sa forme ordinaire. Chaque terme de la série étant multiplié par $e^{(p+\mathrm{M}h\rho)\frac{\pi i}{\mathrm{M}}}$, on a la formule

$$\Theta_{p,q}^{(h\mathrm{M})}\begin{vmatrix} 0 & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}\left(u + \frac{\pi i}{\mathrm{M}}, v\right) = e^{\left(\frac{p}{\mathrm{M}}+h\right)\pi i}\,\Theta_{p,q}^{(h\mathrm{M})}\begin{vmatrix} 0 & \omega' \\ \theta + h & \theta' \end{vmatrix}(u, v).$$

Il est important pour ce qui suit de décider si cette formule transforme une fonction d'une certaine parité en une autre de même parité ou de parité différente.

1° h pair; la caractéristique réduite reste la même et à la fonction

$$\Theta_{p,q}^{(h\mathrm{M})}(u, v) + \Theta_{\varepsilon h\mathrm{M}-p,\, \varepsilon' h\mathrm{M}-q-\omega'}^{(h\mathrm{M})}(u, v)$$

correspond la fonction

$$\Theta_{p,q}^{(h\mathrm{M})}(u, v) + e^{-\frac{2p\pi i}{\mathrm{M}}}\,\Theta_{\varepsilon h\mathrm{M}-p,\, \varepsilon' h\mathrm{M}-q-\omega'}^{(h\mathrm{M})}(u, v).$$

D'autre part $p = \frac{\lambda\mathrm{M}}{2}$; par conséquent $e^{-\frac{2p\pi i}{\mathrm{M}}} = e^{\lambda\pi i} = \pm 1$. La parité de la fonction change si λ est impair ($\omega_1 = 1$); elle reste la même si λ est pair ($\omega_1 = 0$).

2° h impair; la caractéristique réduite change et à la fonction

$$\Theta_{p,q}^{(h\mathrm{M})}\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}(u, v) + \Theta_{\varepsilon h\mathrm{M}-p,\, \varepsilon' h\mathrm{M}-q-\omega'}^{(h\mathrm{M})}\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}(u, v)$$

correspond la fonction

$$\Theta^{(hM)}_{p,q}\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega' \\ \theta+1 & \theta' \end{vmatrix}(u,v) + e^{\varepsilon h\pi i - \frac{2p\pi i}{M}}\,\Theta^{(hM)}_{\varepsilon hM-p,\,\varepsilon' hM-q-\omega'}\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega' \\ \theta+1 & \theta' \end{vmatrix}(u,v).$$

Le facteur du second terme est ici égal à $e^{(\varepsilon h-\lambda)\pi i}$. Si λ est impair ($\omega_1 = 1$), ε n'est jamais nul et le facteur est égal à 1; d'autre part θ s'est changé en $\theta + 1$, la fonction change de parité. Si λ est pair ($\omega_1 = 0$), le facteur est égal à $e^{\varepsilon\pi i}$, la fonction ne change pas de parité.

7. Ceci posé, et en se servant des résultats généraux (II., 7), on obtient les conséquences suivantes :

1° M *impair*, h *impair : les fonctions normales paires de caractéristique* $\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ *s'annulent pour six ou dix demi-périodes et les fonctions normales impaires de même caractéristique s'annulent pour les dix ou six autres demi-périodes selon que* $\omega_1\theta + \omega'\theta'$ *est pair ou impair;*

2° M *impair*, h *pair : les fonctions normales paires de caractéristique nulle ne s'annulent pour aucune demi-période et les fonctions normales impaires de caractéristique nulle s'annulent pour les seize demi-périodes; les fonctions normales de même caractéristique non nulle s'annulent pour huit demi-périodes et les fonctions normales impaires de même caractéristique s'annulent pour les huit autres demi-périodes;*

3° M *pair*, h *pair : mêmes résultats que ci-dessus;*

4° M *pair*, h *impair : les fonctions normales paires, ayant une même caractéristique de la forme* $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ \theta & 0 \end{vmatrix}$, *s'annulent pour quatre ou douze demi-périodes et les fonctions normales impaires, de même caractéristique, s'annulent pour les douze ou quatre autres demi-périodes suivant que* $\omega_1\theta$ *est pair ou impair; les fonctions normales paires, de même caractéristique autre que* $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ \theta & 0 \end{vmatrix}$, *s'annulent pour huit demi-périodes et les fonctions normales impaires, de même caractéristique, s'annulent pour les huit autres demi-périodes.*

Ces deux derniers cas sont assez compliqués; on pourra les étudier plus loin sur les Tableaux donnés dans l'Appendice.

Dans la suite de ce travail les demi-périodes seront représentées suivant l'algorithme connu (H., 18). Un symbole (α, α') se rapportera en général à une demi-période du Tableau T_M, le cas contraire devant toujours être expressément spécifié.

Enfin, on peut ici aussi (H., 7) remarquer que si une demi-période annule une fonction thêta normale d'une certaine parité, elle annule toutes les fonctions normales de même parité, de même caractéristique et pour lesquelles h et M ont la même parité.

La demi-période doit ici être considérée uniquement en tant que symbole, car un même symbole représente pour M pair des quantités différentes lorsque M varie.

CHAPITRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES HYPERELLIPTIQUES (I^re PARTIE).

8. Soit S une surface hyperelliptique; les coordonnées homogènes d'un de ses points peuvent se mettre sous la forme (n° 1)

$$\rho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ρ étant un facteur de proportionnalité et les Θ_i des fonctions thêta normales, relatives au Tableau de périodes T_M, de caractéristique nulle [1]. J'emploierai aussi pour désigner ces fonctions coordonnées les notations $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$, $x_4(u, v)$.

[1] C'est la forme la plus générale des coordonnées. En particulier il serait inutile d'introduire des fonctions thêta relatives à un Tableau de périodes

$$\left|\begin{array}{cccc} \dfrac{2i\pi}{M}, & 0, & a, & b, \\ 0, & \dfrac{2i\pi}{N}, & b, & c. \end{array}\right.$$

Sur cette surface (H., 8), l'équation de toute courbe algébrique peut se mettre sous la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

λ et μ étant des constantes et $\Theta(u, v)$ une fonction thêta normale, de caractéristique nulle, relative au Tableau T.

D'ailleurs l'équation de la même courbe est aussi bien

$$\Theta\left(u-\lambda+\frac{2\sigma i\pi}{M}, v-\mu\right)=0 \qquad (\sigma=1, 2, \ldots, M-1).$$

Le quotient des deux premiers membres admet les périodes $2i\pi, 0$; $0, 2i\pi$; b, c; et se reproduit multiplié par $e^{\frac{2\sigma h i\pi}{M}}$ pour la période a, b; h étant l'ordre de la fonction.

Soit alors $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ l'équation d'une surface passant par la courbe proposée supposée indécomposable; j'appelle $f(u, v)$ le résultat de la substitution à x_1, x_2, x_3, x_4 de leurs expressions en u, v; c'est une fonction thêta qui admet la période $\frac{2i\pi}{M}, 0$; elle est divisible par $\Theta(u-\lambda, v-\mu)$, le quotient étant une fonction thêta, et l'on a

$$f(u, v)=\Theta(u-\lambda, v-\mu)\,\theta_1(u, v)=\Theta\left(u-\lambda+\frac{2i\pi}{M}, v-\mu\right)\theta_2(u, v).$$

Si $\dfrac{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}{\Theta\left(u-\lambda+\frac{2i\pi}{M}, v-\mu\right)}$ n'est pas entier, $\Theta\left(u-\lambda+\frac{2i\pi}{M}, v-\mu\right)$ divise $\theta_1(u, v)$ et l'on a

$$f(u, v)=\Theta(u-\lambda, v-\mu)\,\Theta\left(u-\lambda+\frac{2i\pi}{M}, v-\mu\right)\theta'_1(u, v).$$

Si le quotient précédent est entier, il est nécessairement de la forme $Ae^{-p'u-q'v}$ et les entiers p', q' sont déterminés par les congruences

$$p'b+q'c\equiv 0, \qquad p'a+q'b-\frac{2hi\pi}{M}\equiv 0 \qquad (\text{mod.}\, 2i\pi).$$

La première congruence donne une relation à coefficients entiers entre b, c, $2i\pi$, à moins que $p'=q'=0$. La seconde exige alors que h

soit multiple de M. Enfin en remarquant que, après addition de M fois $\frac{2i\pi}{M}$, on revient à la fonction primitive, on a

$$A^M = 1, \qquad A = e^{-\frac{2ki\pi}{M}},$$

$$\Theta\left(u - \lambda + \frac{2i\pi}{M}, v - \mu\right) = e^{\frac{2ki\pi}{M}} \Theta(u - \lambda, v - \mu).$$

Il est facile de voir que les deux cas sont entièrement différents et que les conséquences obtenues par l'addition de $\frac{2i\pi}{M}$ se reproduisent pour l'addition de tout autre multiple de cette quantité. On a alors dans le premier cas

$$f(u, v) = \theta(u, v) \prod_{m=0}^{m=M-1} \Theta\left(u - \lambda + \frac{2mi\pi}{M}, v - \mu\right).$$

La fonction sous le signe Π est une fonction thêta d'ordre hM admettant la période $\frac{2i\pi}{M}$, o. On peut la considérer comme l'équation de la courbe.

D'autre part, dans le second cas la fonction

$$\Theta(u - \lambda, v - \mu) e^{-ku}$$

est une fonction thêta d'ordre multiple de M, soit hM, et qui admet la période $\frac{2i\pi}{M}$, o; la valeur du paramètre λ devient $\lambda - \frac{ku}{hM}$.

Ainsi : l'équation d'une courbe algébrique tracée sur la surface S *s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta admettant la période* $\frac{2i\pi}{M}$, o. *Elle peut aussi se mettre sous la forme* $\Theta(u - \lambda, v - \mu) = 0$, λ *et* μ *étant des constantes et* $\Theta(u, v)$ *une fonction thêta normale, relative au Tableau* T_M, *de caractéristique réduite nulle.*

9. Je suppose maintenant qu'à un point x_1, x_2, x_3, x_4 ou $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$ de la surface ne correspond qu'un couple de valeurs de u, v dans le parallélépipède construit avec le Tableau T_M.

La surface considérée est de genre 1, comme l'a montré M. Picard; l'intégrale double $\int\int du\, dv$ reste finie sur la surface et elle est de la forme $\int\int \varphi(x, y, z)\, dx\, dy$, φ étant rationnel en x, y, z. Il ne peut exister d'autre intégrale de cette forme restant finie sur la surface.

Une telle intégrale est de la forme

$$\int\int \frac{D(x, y, z)}{S'_z}\, dx\, dy,$$

où $S(x, y, z) = 0$ est l'équation de la surface d'ordre n et $D(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface adjointe d'ordre $n - 4$.

Une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ a donc une seule surface adjointe $\mathfrak{D}$; soient $S = 0$ et $D = 0$ leurs équations respectives. On a

$$\int\int \frac{D}{S'_z}\, dx\, dy = \int\int du\, dv,$$

$$\frac{D}{S'_z}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 1.$$

Les surfaces hyperelliptiques possèdent deux intégrales de différentielles totales de première espèce $\int du$ et $\int dv$ et l'on a

$$du = \frac{B\, dx - A\, dy}{S'_z}, \qquad dv = \frac{B_1\, dx - A_1\, dy}{S'_z},$$

A, B, A_1, B_1 étant des polynomes, d'où

$$DS'_z = BA_1 - AB_1.$$

Ces résultats ont été établis par M. Picard (*Voir* aussi H., 103 et 104).

Soit hM l'ordre des fonctions $x_i(u, v)$. La droite $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, par exemple, coupe la surface aux points dont les arguments sont solutions de

$$x_1(u, v) = 0, \qquad x_2(u, v) = 0.$$

Ces solutions sont au nombre de $2h^2M^2$ relativement au Tableau M et de $2h^2M$ relativement au Tableau T_M. Le degré de la surface est donc $2h^2M$.

Si les quatre coordonnées ont des zéros communs ce degré s'abaisse. Soit u_0, v_0 l'un d'eux: à ce couple correspond une courbe unicursale singulière (H., 105).

La surface $\mathfrak{S}$ est coupée (H., 106) par son adjointe $\mathfrak{V}$ suivant ses courbes multiples et ses courbes unicursales singulières.

Toutes les surfaces hyperelliptiques dont les coordonnées sont relatives au Tableau de période T_M se correspondent point par point. Il n'en est pas de même pour deux surfaces dont les coordonnées sont relatives aux Tableaux T_M et T_N; soient S_M la première et S_N la seconde; il faut introduire le Tableau commun T_D, D étant le plus grand commun diviseur de M et N; à un point de S_M correspondent $\frac{M}{D}$ couples u, v non congruents par rapport à T_D et par suite aussi $\frac{N}{D}$ points de S_N; à un point de S_N correspondent $\frac{N}{D}$ points de S_M.

Je réserve ce dernier cas et je vais pour les surfaces relatives au Tableau de périodes T_M étendre les résultats obtenus par M. Humbert (H., 109 et suiv.).

Géométrie des courbes dans le champ hyperelliptique.

10. On appelle *courbe algébrique* toute courbe qui n'est ni une ligne multiple, ni une courbe unicursale singulière de la surface.

Ces courbes possèdent deux intégrales abéliennes de première espèce n'ayant que quatre paires de périodes : $\int du$ et $\int dv$ (H., 109).

L'équation de toute courbe algébrique peut se mettre sous la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu) = 0,$$

où λ et μ sont des constantes et $\Theta(u, v)$ une fonction thêta de caractéristique nulle, relative au Tableau T_M.

On appelle *courbes de même ordre* les courbes pour lesquelles l'ordre de $\Theta(u, v)$ est le même, *courbes de même famille* les courbes pour lesquelles, l'ordre étant donné, λ et μ sont les mêmes. Les courbes de même ordre sont aussi de même degré.

Deux courbes de même ordre hM (H., 111),

$$\Theta_0(u-\lambda_0, v-\mu_0)=0, \qquad \Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

sont de même famille si l'on a

$$hM(\lambda-\lambda_0)\equiv 0, \qquad hM(\mu-\mu_0)\equiv 0 \qquad (\text{mod. périodes}).$$

On peut, pour étudier les courbes d'un même ordre et d'une même famille, étudier la famille $\lambda=0$, $\mu=0$ (H., 113).

Soient $\Theta_0(u,v)=0$ l'équation d'une courbe sans point singulier et $\Theta(u,v)$ une fonction thêta de même ordre hM que $\Theta_0(u,v)$ et de caractéristique nulle; les intégrales de première espèce le long de la courbe sont de la forme (H., 114)

$$\int \frac{\Theta(u,v)}{\left(\dfrac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)}du.$$

Ces intégrales sont au nombre de h^2M-1; en ajoutant $\int du$ et $\int dv$, on obtient h^2M+1 intégrales de première espèce et le genre de la courbe est h^2M+1.

Sur une courbe fixe (H., 116) les courbes d'un même ordre et d'une même famille découpent des groupes de points équivalents.

Si les courbes sécantes sont d'ordre inférieur à celui de la courbe fixe, les groupes de points appartiennent à un système spécial.

Les conséquences déduites de cette proposition ne subsistent pas dans le cas où, M étant pair, h est impair (H., 117).

Si la courbe $\Theta_0(u,v)=0$ a des points singuliers (H., 119), les intégrales de première espèce relatives à cette courbe sont de la forme

$$\int \frac{\Theta(u,v)}{\left(\dfrac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)}du,$$

où $\Theta(u,v)=0$ est une courbe adjointe à $\Theta_0(u,v)=0$, $\int du$ et $\int dv$ étant mises à part.

On a (H., 120)

$$p=h^2M+1-\frac{1}{2}I(\sigma_0, \sigma'_0),$$

et le nombre $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$ est égal au nombre des conditions linéaires auxquelles équivaut la singularité adjointe σ'_0.

Surfaces adjointes.

11. Je suppose que les quatre fonctions coordonnées aient aux points $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_\rho, v_\rho$ les singularités $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\rho$; le degré de la surface est alors

$$n = 2h^2\mathrm{M} - \sum_k \mathrm{I}(\sigma_k, \sigma'_k).$$

Le genre p des sections planes est

$$p = h^2\mathrm{M} + 1 - \frac{1}{2}\sum_k \mathrm{I}(\sigma_k, \sigma'_k).$$

Toutes les propositions sur les surfaces adjointes d'ordre $n-3$ (H., 124-129) et en général d'ordre $n+q-4$ (H., 131, 132; 134-137) subsistent. Je reprends les énoncés.

Théorème (H., 130). — *Le nombre des surfaces d'ordre $n-3$ adjointes à une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ d'ordre n est égal au genre des sections planes diminué d'une unité.*

Théorème (H., 133). — *Le nombre des surfaces d'ordre $n+q-4$ adjointes à une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ d'ordre n, et dont les sections planes sont de genre p, est égal à*

$$\frac{1}{2}q(q-1)n + q(p-1) + \frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3).$$

Théorème (H., 136). — *Le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ passant par les courbes unicursales singulières de $\mathfrak{S}$ est au moins égal à*

$$\frac{1}{2}q(q+1)n - q(p-1) + \frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3).$$

Je ne reprendrai pas ici les applications géométriques (H., 138-

152). Elles subsistent pour la plupart; il faut en excepter la théorie des courbes γ qui ne peut être conservée, puisque l'équation de ces courbes s'obtient en égalant à zéro une fonction d'ordre *un*.

En particulier, pour les surfaces considérées, le genre géométrique est égal à 1 et le genre numérique à -1.

CHAPITRE III.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES HYPERELLIPTIQUES (2e PARTIE).

12. Je suppose maintenant que, à un point de la surface hyperelliptique, correspondent dans le parallélépipède de périodes construit avec le Tableau T_M deux couples d'arguments u, v, et u', v'. Je désignerai cette surface par $\mathfrak{T}$. En répétant la démonstration de M. Humbert (H., 165), on arrive à la même conséquence (H., 166) :

Après un changement de variables, la surface peut être représentée par des équations de la forme

$$x = F_1(u, v), \qquad y = F_2(u, v), \qquad z = F_3(u, v),$$

où F_1, F_2, F_3 sont des fonctions quadruplement périodiques paires, quotients de deux séries thêta admettant la période $\frac{2i\pi}{M}$, 0 [1].

Soit alors, par exemple,

$$x = \frac{\theta_1(u, v)}{\theta(u, v)} = \frac{\theta_1(-u, -v)}{\theta(-u, -v)};$$

le quotient $\dfrac{\theta_1(u, v)}{\theta_1(-u, -v)}$ doit être entier; il admet les périodes du

(1) Si l'on considère une véritable surface hyperelliptique dont les fonctions coordonnées sont relatives au Tableau T_2, il correspond à un point de la surface, par rapport au Tableau T, les deux couples d'arguments u, v et $u + i\pi$, v; cependant, la surface n'est pas représentable point par point sur la surface de Kummer; cette contradiction apparente vient de ce que, dans le cas où $du = du'$, $dv = dv'$, c'est-à-dire $u = u' + \gamma$, $v = v' + \gamma_1$, γ, γ_1 peut être un couple de périodes différent des couples du Tableau T.

Tableau T_M; il est donc de la forme $Ae^{Mp'u+q'v}$ avec $A = \pm 1$ (H., 10).

La fonction $\theta_1(u, v) e^{-M\frac{p'}{2}u - \frac{q'}{2}v}$ (H., 14) est une fonction thêta normale paire ou impaire relative au Tableau T_M et d'une certaine caractéristique réduite.

Par conséquent (H., 167), les coordonnées d'un point de $\mathfrak{T}$ sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales de même ordre et de même caractéristique, simultanément paires ou impaires, relatives au Tableau T_M.

A un point de $\mathfrak{T}$ correspondent M points de la surface de Kummer. La liaison est remarquable pour $M = 2$ et sera étudiée plus loin.

Sur la surface $\mathfrak{T}$ l'équation de toute courbe algébrique (n° 8) s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta relative au Tableau T_M, et comme on obtient la même courbe en changeant simultanément u et v de signes, il en résulte (H., 14) que l'équation de toute courbe algébrique tracée sur la surface $\mathfrak{T}$ s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta normale, paire ou impaire, d'une certaine caractéristique réduite, relative au Tableau T_M.

13. Toute surface $\mathfrak{T}$ d'ordre n, d'équation $T = 0$, admet une surface adjointe $\mathfrak{D}$ d'ordre $n - 4$ (H., 102), d'équation $D = 0$. En effet, on a

$$\int\int du\, dv = \int\int \frac{dx\, dy}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}},$$

et la fonction $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$ est une fonction quadruplement périodique paire relative au Tableau T_M; elle s'exprime donc rationnellement en fonction de x, y, z; on sait d'autre part sa forme générale et l'on en déduit

$$\int\int du\, dv = \int\int \varphi(x, y, z)\, dx\, dy = \int\int \frac{D(x, y, z)}{T'_z}\, dx\, dy,$$

$$\frac{D}{T'_z}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 1.$$

On démontre, comme dans le cas $M = 1$ (H., 107), que la surface adjointe $\mathfrak{D}$ passe par les courbes unicursales singulières de $\mathfrak{T}$ en introduisant une fonction $F(u, v)$ quadruplement périodique impaire relative au Tableau T_M; il faut ici aussi excepter les courbes unicursales singulières correspondant à des demi-périodes, car $F(u, v)$ est nulle ou infinie pour toutes les demi-périodes.

Soit $\Theta_0(u, v) = 0$ l'équation d'une courbe sans points singuliers, Θ_0 étant une fonction paire ou impaire, d'une certaine caractéristique, relative au Tableau T_M, et soit $\Theta(u, v)$ la fonction la plus générale de même ordre, de même parité, de même caractéristique; l'intégrale

$$\int \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} du$$

est une intégrale abélienne de première espèce le long de la courbe considérée (H., 81 et 92). Toutes les intégrales de première espèce sont de cette forme et le genre de la courbe est égal au nombre diminué de 1 des paramètres homogènes dont dépend $\Theta(u, v)$.

Pour les courbes ayant des points singuliers, on introduira les courbes adjointes.

Parmi les courbes tracées sur les surfaces $\mathfrak{T}$, des courbes remarquables sont les courbes univoques dont l'équation est de la forme

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu)\,\Theta_0(u + \lambda, v + \mu) = 0.$$

La fonction $\Theta_0(u - \lambda, v - \mu)$ n'est ni paire ni impaire (H., 91). En ne considérant par exemple que le premier facteur, il ne correspond à un point de la courbe qu'un couple d'arguments u, v.

Les couples u, v solutions des équations

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0, \qquad \Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu) = 0$$

donnent des points doubles de la courbe.

Les intégrales abéliennes de première espèce le long de la courbe $\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0$ sont

$$\int du, \quad \int dv, \quad \int \frac{\Theta(u - \lambda, v - \mu)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} du,$$

Θ étant de même ordre que Θ_0 et adjointe à Θ_0 (H., 92).

Le genre d'une courbe univoque est égal au nombre des paramètres homogènes dont dépend Θ augmenté de 1.

Le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n-3$ est égal à $p+1$, p étant le genre des sections planes.

Le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ est égal à

$$\frac{1}{2}q(q-1)n+q(p-1)+2+\frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3).$$

Le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ qui passent par les courbes unicursales singulières communes à $\mathfrak{C}$ et à la surface adjointe d'ordre $n-4$ est au moins égal à

$$\frac{1}{2}q(q+1)n-q(p-1)+2+\frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3);$$

elles découpent les courbes

$$\lambda_1\theta_1(u,v)+\lambda_2\theta_2(u,v)+\ldots=0,$$

les fonctions θ_1, θ_2, ... étant de même ordre, de même caractéristique et de même parité que $x_i^q(u,v)$ et ayant les singularités composées $(q\sigma_k)$ (H., 135, 170).

14. Je ne développerai pas davantage ces propriétés générales et je vais m'occuper des surfaces $\mathfrak{C}$ qui sont d'ordre 4.

Ces surfaces n'ont pas de surface adjointe d'ordre $n-4$, par conséquent elles ne peuvent avoir d'autres courbes unicursales singulières que celles qui correspondent à des demi-périodes (H., 171). Les fonctions coordonnées n'ont donc de singularités communes que pour les seize demi-périodes.

Les surfaces d'ordre q adjointes sont toutes les surfaces de l'espace. Les singularités composées des fonctions θ_1, θ_2, ... considérées ci-dessus sont indépendantes. On a ainsi la forme des équations des courbes découpées par les surfaces d'ordre q.

Pour trouver toutes les surfaces $\mathfrak{C}$ d'ordre 4, il suffit donc (H., 172) de satisfaire aux deux relations

$$4=\mathrm{N}-\sum_k c_k,$$

$$4=\frac{1}{2}\left[2h^2\mathrm{M}-\sum_k \mathrm{I}(\sigma_k,\sigma_k)\right],$$

où N désigne le nombre de fonctions d'ordre hM d'une certaine caractéristique et d'une certaine parité, σ_k la singularité commune aux quatre coordonnées pour une demi-période et c_k le nombre de conditions imposées par cette singularité. Je vais examiner les différents cas qui se présentent.

15. $M = 2\mu + 1$, $h = 2\eta + 1$; les fonctions de même parité s'annulent pour six ou dix demi-périodes; elles sont en nombre $\frac{h^2 M + 1}{2}$ ou $\frac{h^2 M - 1}{2}$:

1° Les fonctions s'annulent pour six demi-périodes; on peut les assujettir à avoir des zéros multiples communs pour les seize demi-périodes d'ordres respectifs (H., 173)

$$2k_1, \quad 2k_2, \quad \ldots, \quad 2k_{10}, \quad 2k'_1 + 1, \quad \ldots, \quad 2k'_6 + 1.$$

On a alors les relations

$$\begin{aligned} 4 = {} & 4\eta^2\mu + 4\eta\mu + 2\eta^2 + 2\eta + \mu + 1 - (k_1^2 + \ldots + k_{10}^2) \\ & - [k'_1(k'_1 + 1) + \ldots + k'_6(k'_6 + 1)], \end{aligned}$$

$$4 = \frac{1}{2}[2(2\eta + 1)^2(2\mu + 1) - 4(k_1^2 + \ldots + k_{10}^2) - (2k'_1 + 1)^2 - \ldots - (2k'_6 + 1)^2].$$

Ces deux relations sont identiques et peuvent s'écrire

$$4(k_1^2 + \ldots + k_{10}^2) + (2k'_1 + 1)^2 + \ldots + (2k'_6 + 1)^2 = 2(2\eta + 1)^2(2\mu + 1) - 8.$$

Une surface $\mathfrak{T}$ correspond ainsi à une décomposition du second membre en dix carrés pairs et six carrés impairs.

Si $\eta = 0$, $\mu = 3$, le second membre est égal à 6, ce qui exige

$$k_1 = \ldots = k_{10} = k'_1 = \ldots = k'_6 = 0.$$

La surface a pour coordonnées homogènes les quatre fonctions thêta d'ordre 7, relatives au Tableau T_7, de même parité et de même caractéristique, et qui s'annulent pour six demi-périodes; les courbes unicursales correspondantes sont six droites, il y a dix points doubles.

2° Les fonctions s'annulent pour dix demi-périodes; elles auront pour les seize demi-périodes des zéros communs d'ordres de multiplicité

$$2k_1+1,\quad \ldots,\quad 2k_{10}+1,\quad 2k'_1,\quad \ldots,\quad 2k'_6,$$

avec la condition

$$(2k_1+1)^2+\ldots+(2k_{10}+1)^2+4(k'^2_1+\ldots+k'^2_6)=2(2\eta+1)^2(2\mu+1)-8.$$

Si $\eta=0$, $\mu=4$, le second membre est égal à 10 et la seule décomposition possible est donnée par

$$k_1=\ldots=k_{10}=k'_1=\ldots=k'_6=0.$$

La surface a pour coordonnées homogènes les quatre fonctions d'ordre 9, relatives au Tableau T_9, de même parité et de même caractéristique, s'annulant pour dix demi-périodes; elle a dix droites et six points doubles.

16. $M=2\mu+1$, $h=2\eta$:

1° Les fonctions sont paires de caractéristique nulle; en les assujettissant à avoir les demi-périodes comme zéros communs d'ordres de multiplicité $2k_1$, $2k_2$, ..., $2k_{16}$, on a la relation

$$k_1^2+k_2^2+\ldots+k_{16}^2=2\eta^2(2\mu+1)-2.$$

Si $\mu=1$, $\eta=1$, le second membre est égal à 4. Il y a deux décompositions possibles : 4 et $1+1+1+1$. Pour la première, on a une surface à quinze points doubles (Chap. IX); pour la seconde, on a une surface à douze points doubles et quatre coniques [1].

Si $\mu=2$, $\eta=1$, le second membre est égal à 8. Il y a deux décompositions : $4+4$ et $1+1+1+1+1+1+1+1$. La première donne une surface à quatorze points doubles et la seconde une surface à huit points doubles et huit coniques.

Si $\mu=1$, $\eta=2$, le second membre est égal à 22 qui peut se décomposer en particulier en $9+9+4$; on a alors une surface à treize points doubles.

2° Les fonctions sont impaires de caractéristique nulle; en les assujettissant à avoir les demi-périodes comme zéros communs d'ordres

(1) *Voir* L. Rémy, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXLIII, p. 767.

de multiplicité $2k_1+1, \ldots, 2k_{16}+1$, on a la relation

$$(2k_1+1)^2+\ldots+(2k_{16}+1)^2=8\eta^2(2\mu+1)-8.$$

Si $\mu=1$, $\eta=1$, le second membre est égal à 16, tous les k sont nuls; la surface a pour coordonnées homogènes les quatre fonctions impaires, d'ordre 6, de caractéristique nulle, relatives au Tableau T_3 (Chap. VIII).

3° Les fonctions sont de caractéristique non nulle; en les assujettissant à avoir les demi-périodes comme zéros communs d'ordres de multiplicité $2k_1+1, \ldots, 2k_8+1, 2k'_1, \ldots, 2k'_8$, on a la relation

$$(2k_1+1)^2+\ldots+(2k_8+1)^2+4(k'^2_1+\ldots+k'^2_8)=8\eta^2(2\mu+1)-8.$$

Si $\mu=1$, $\eta=1$, le second membre est égal à 16; on peut prendre $k_1=1$ et les autres nuls, ce qui donne une surface à huit points doubles.

17. $M=2\mu$, $h=2\eta$; les trois cas sont identiques à ceux du numéro précédent, mais le second membre est, pour le premier cas, $4\eta^2\mu-2$ et, pour les deux autres, $16\eta^2\mu-8$:

1° Si $\eta=1$, $\mu=1$, le second membre est égal à 2, il y a une seule décomposition possible : $1+1$; la surface a pour coordonnées homogènes quatre fonctions paires d'ordre 4, de caractéristique nulle, relatives au Tableau T_2, ayant pour zéros doubles communs deux demi-périodes; elle a quatorze points doubles (Chap. VII).

Si $\eta=1$, $\mu=2$, le second membre est égal à 6, on peut le décomposer en $4+1+1$; la surface obtenue a 13 points doubles.

2° Si $\eta=1$, $\mu=2$, le second membre est égal à 24, il y a une seule décomposition possible : $k_1=1$ et les autres k nuls; la surface obtenue a pour courbes unicursales singulières quinze droites et une cubique.

3° Si $\eta=1$, $\mu=1$, le second membre est égal à 8 et il y a une seule décomposition possible où tous les k sont nuls; les surfaces obtenues ont huit points doubles et huit droites, courbes unicursales singulières.

18. $M=2\mu$, $h=2\eta+1$:

1° Les fonctions s'annulent pour quatre demi-périodes; en les assujettissant à avoir les demi-périodes comme zéros communs d'ordres de multiplicité $2k_1, \ldots, 2k_{12}, 2k'_1+1, \ldots, 2k'_4+1$, on a la relation

$$4(k_1^2+\ldots+k_{12}^2)+(2k'_1+1)^2+\ldots+(2k'_4+1)^2=4(2\eta+1)^2\mu-8.$$

Si $\eta=0$, $\mu=3$, le second membre est égal à 4 et tous les k doivent être nuls; la surface obtenue a douze points doubles et quatre droites.

2° Les fonctions s'annulent pour douze demi-périodes; en les assujettissant à avoir les demi-périodes comme zéros communs d'ordres de multiplicité $2k_1+1, \ldots, 2k_{12}+1, 2k'_1, \ldots, 2k'_4$, on a la relation

$$(2k_1+1)^2+\ldots+(2k_{12}+1)^2+4(k_1'^2+\ldots+k_4'^2)=4(2\eta+1)^2\mu-8.$$

Si $\eta=0$, $\mu=5$, le second membre est égal à 12 et tous les k doivent être nuls; la surface obtenue a quatre points doubles et douze droites.

3° Les fonctions s'annulent pour huit demi-périodes; en les assujettissant à avoir les demi-périodes comme zéros communs d'ordres de multiplicité $2k_1+1, \ldots, 2k_8+1, 2k'_1, \ldots, 2k'_8$, on a la relation

$$(2k_1+1)^2+\ldots+(2k_8+1)^2+4(k_1'^2+\ldots+k_8'^2)=4(2\eta+1)^2\mu-8.$$

Si $\eta=0$, $\mu=4$, le second membre est égal à 8, tous les k sont nuls; la surface obtenue a huit points doubles et huit droites [1].

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DU CAS OU M EST ÉGAL A DEUX.

19. On sait qu'en général (H., 16) toute fonction thêta, normale, paire, d'ordre $2h$, à caractéristique nulle, s'exprime linéairement à l'aide des fonctions $\Theta_1^\alpha\Theta_2^\beta\Theta_3^\gamma\Theta_4^\delta$, les Θ_i étant les quatre fonctions thêta,

[1] Il ne correspond pas certainement à toute solution des équations précédentes une surface du quatrième ordre; on en verra des exemples.

normales, paires, d'ordre 2, à caractéristique nulle et la somme $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ étant égale à h.

Parmi les fonctions considérées dans cet énoncé sont les fonctions de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ relatives au Tableau T_2; je rappelle qu'elles sont pour chacune de ces deux caractéristiques au nombre de h^2+2 si h est pair et de h^2+1 si h est impair.

En multipliant celles qui sont de caractéristique réduite $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ par une des fonctions d'ordre 2, paire, de même caractéristique, on obtient une fonction paire, de caractéristique nulle.

Pour les fonctions normales impaires de caractéristique nulle, on les multiplie par le produit des quatre fonctions d'un groupe de Rosenhain (II., 28, 2°), et l'on est ainsi ramené au cas des fonctions paires; en se plaçant au point de vue du Tableau T_2 et remarquant que

$$\mathfrak{S}\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}(u+i\pi, v) = e^{\frac{\omega}{2}i\pi}\,\mathfrak{S}\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta+1 & \theta' \end{vmatrix}(u, v),$$

on constate que l'on peut employer un groupe de Rosenhain de l'un des trois types $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\beta\gamma'$, $\beta\delta'$; $\alpha\alpha'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\alpha'$, $\delta\alpha'$; $\alpha\alpha'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\beta'$, $\delta\beta'$. La caractéristique réduite du produit des quatre fonctions est $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ pour le premier type, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ pour les deux autres. Par conséquent, étant donnée une fonction thêta impaire, d'ordre $2h$, relative au Tableau T_2, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, en la multipliant par le produit des quatre fonctions d'un groupe de Rosenhain, convenablement choisi parmi les types indiqués, on obtient une fonction paire, de caractéristique nulle.

Pour les fonctions paires ou impaires d'ordre $2h$ et de caractéristique réduite $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, on peut toujours trouver (II, 28, 3°) deux fonctions d'ordre 1 dont le produit ait la même parité et qui ait pour caractéristique ordinaire $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$; ce produit est une fonction relative au Tableau T_2, car les caractéristiques des deux fonctions qui le composent sont $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta+1 & \theta' \end{vmatrix}$; sa caractéristique réduite est $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ avec $\omega_1 = \omega$ et l'on a pu se donner ω; en multipliant la fonction d'ordre $2h$ considérée par ce produit, on obtient une fonction paire de caractéristique nulle.

Enfin, pour toutes les caractéristiques qui ne sont pas de la forme $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ \theta & 0 \end{vmatrix}$, il existe une fonction d'ordre 2 pour chaque parité; par conséquent, on peut, en multipliant une fonction d'ordre $2h$, paire ou impaire, pour laquelle on n'a pas simultanément $\omega' = \theta' = 0$, par une fonction d'ordre 2 convenablement choisie, obtenir une fonction paire de caractéristique nulle.

20. Je vais montrer que toute fonction thêta normale paire, d'ordre $2h$, à caractéristique réduite nulle, s'exprime linéairement au moyen de certains des produits $\Theta_1^\alpha \Theta_2^\beta \Theta_3^\gamma \Theta_4^\delta$.

Je suppose que les fonctions Θ_i sont

$$\Theta_{00}(u, v), \quad \Theta_{01}(u, v), \quad \Theta_{10}(u, v), \quad \Theta_{11}(u, v).$$

Les deux premières sont de caractéristique $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, les deux dernières de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$; par conséquent, dans les produits qui entrent dans l'expression des fonctions de caractéristique nulle, la somme $\gamma + \delta$ doit être paire. Cette limitation est nécessaire, je me propose de montrer qu'elle est suffisante.

Je ferai tout d'abord la remarque suivante : lorsque $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ est supérieur ou égal à 4, les produits généraux sont liés par des relations de la forme

$$K \varphi_{h-4}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4) = 0,$$

$K = 0$ étant l'équation de la surface de Kummer et φ_{h-4} un polynome homogène de degré $h - 4$. Pour les produits particuliers que je considère, les relations subsistent sous la même forme; en effet la surface de Kummer passe à la fois par les deux points u, v et $u + i\pi$, v; les termes qui entrent dans son équation ont donc l'une des caractéristiques $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, et il est facile de s'assurer (on le verra plus loin) que la caractéristique est $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$; par conséquent, toute relation linéaire entre les produits de degré h et de caractéristique réduite nulle se met sous la forme du produit de K par une fonction linéaire des produits de degré $h-4$ et de même caractéristique.

Ceci posé, il faut distinguer deux cas :

1° h pair; si $\gamma+\delta=2p$, $\alpha+\beta=h-2p$, et le nombre des produits de degré h est égal à

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{p=\frac{h}{2}}(h-2p+1)(2p+1) &= h\sum(2p+1)-\sum(4p^2-1)\\ &= h\left(\frac{h}{2}+1\right)^2-\frac{h}{3}\left(\frac{h}{2}+1\right)(h+1)+\frac{h}{2}+1\\ &= \frac{h^3}{12}+\frac{h^2}{2}+\frac{7h}{6}+1.\end{aligned}$$

D'autre part, il existe entre ces produits des relations linéaires en nombre égal à

$$\frac{(h-4)^3}{12}+\frac{(h-4)^2}{2}+\frac{7(h-4)}{6}+1=\frac{h^3}{12}-\frac{h^2}{2}+\frac{7h}{6}-1.$$

Le nombre des produits linéairement indépendants est égal à la différence

$$h^2+2.$$

Ces produits sont donc toutes les fonctions paires, d'ordre $2h$, de caractéristique nulle.

2° h impair; si $\gamma+\delta=2p$, $\alpha+\beta=h-2p$, et le nombre des produits de degré h est

$$\frac{h^3}{12}+\frac{h^2}{2}+\frac{11h}{12}+\frac{1}{2};$$

le nombre de ceux qui sont linéairement indépendants est

$$h^2+1.$$

Ces produits sont donc toutes les fonctions paires, d'ordre $2h$, de caractéristique nulle.

Théorème. — *Les fonctions normales paires, d'ordre $2h$, de caractéristique réduite nulle, s'expriment linéairement au moyen des produits*

$$\Theta_{00}^{\alpha}\Theta_{01}^{\beta}\Theta_{10}^{\gamma}\Theta_{11}^{\delta} \qquad (\alpha+\beta+\gamma+\delta=h;\ \gamma+\delta \text{ pair}).$$

La proposition analogue n'est pas vraie si la caractéristique est $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

En résumé, une fonction d'ordre $2h$, paire ou impaire, de caractéristique quelconque, relative au Tableau T_2, peut, après avoir été multipliée par une fonction convenable, être exprimée linéairement au moyen des produits

$$\Theta_{00}^{\alpha}\Theta_{01}^{\beta}\Theta_{10}^{\gamma}\Theta_{11}^{\delta} \qquad (\gamma+\delta \text{ pair}),$$

$\Theta_{00}(u,v)$, $\Theta_{01}(u,v)$, $\Theta_{10}(u,v)$, $\Theta_{11}(u,v)$ étant les quatre fonctions du second ordre, de caractéristique ordinaire nulle, et la somme $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ étant égale à h si la caractéristique réduite est nulle et la fonction paire, à $h+2$ si la caractéristique réduite est $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ et la fonction impaire, à $h+1$ dans les autres cas.

21. Cette proposition a une grande importance au point de vue géométrique. Soient en effet

$$\rho x_i = \Theta_i(u,v) \qquad (i=1,2,3,4)$$

les équations qui déterminent une surface hyperelliptique, les $\Theta_i(u,v)$ étant des fonctions d'ordre $2h$, relatives au Tableau T_2, de même parité et de même caractéristique; on a

$$\lambda x_i = S_i(\Theta_{00}, \Theta_{01}, \Theta_{10}, \Theta_{11}),$$

après avoir introduit, s'il est nécessaire, la fonction convenable en facteur commun.

En d'autres termes,

$$X_1=\Theta_{00}(u,v), \qquad X_2=\Theta_{01}(u,v), \qquad X_3=\Theta_{10}(u,v), \qquad X_4=\Theta_{11}(u,v)$$

désignant un point de la surface de Kummer, les coordonnées x_i sont des polynomes homogènes en X_i.

Les fonctions S_i, égalées à o, représentent des surfaces qui sont liées de la façon suivante à la surface de Kummer :

1° Les Θ_i sont paires, de caractéristique nulle; les surfaces $S_i = 0$ sont d'ordre h et n'ont en commun aucune courbe de la surface de Kummer;

2° Les Θ_i sont impaires de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, les surfaces $S_i = 0$ sont d'ordre $h + 2$ et ont en commun les quatre coniques d'un groupe de Rosenhain convenablement choisi;

3° Dans les autres cas, les surfaces $S_i = 0$ sont d'ordre $h + 1$ et ont en commun une biquadratique convenablement choisie. Cette biquadratique peut se décomposer en deux coniques pour les caractéristiques $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

De plus les surfaces $S_i = 0$ sont telles qu'elles restent les mêmes lorsque l'on change X_3 et X_4 de signes. Les intersections de ces surfaces avec la surface de Kummer sont telles que les points X_1, X_2, X_3, X_4 et X_1, X_2, $-X_3$, $-X_4$ font simultanément partie de la courbe; la droite qui les joint rencontre les droites $X_1 = X_2 = 0$ et $X_3 = X_4 = 0$ en deux points conjugués harmoniques par rapport aux deux premiers. Enfin, à ces deux points correspond un seul point de la surface considérée.

Les surfaces $\mathfrak{T}$ relatives au Tableau T_2 *sont les transformées de la surface de Kummer avec correspondance* (1, 2).

22. On ne peut supposer $h = 1$, le nombre des fonctions linéairement indépendantes étant en ce cas insuffisant pour donner une surface; il faut commencer à $h = 2$.

Ce cas $h = 2$, $M = 2$ est particulièrement intéressant lorsqu'on suppose les fonctions coordonnées paires et de caractéristique nulle. Les surfaces $S_i = 0$ sont alors de la forme

$$A X_1^2 + 2 B X_1 X_2 + C X_2^2 + D X_3^2 + 2 E X_3 X_4 + F X_4^2 = 0.$$

Ces quadriques admettent les droites $X_1 = X_2 = 0$ et $X_3 = X_4 = 0$

comme couple de droites conjuguées; cette propriété les caractérise; elles passent à la fois par les deux points X_1, X_2, X_3, X_4 et X_1, X_2, $-X_3$, $-X_4$. Pour une surface particulière les quadriques dépendent de trois paramètres non homogènes.

Deux de ces quadriques se coupent suivant une biquadratique rencontrant la surface de Kummer en seize points auxquels correspondent huit points de la surface $x_i = S_i$. Cette surface est donc en général du huitième ordre.

Si deux des seize points se rapprochent l'un de l'autre, il correspond à l'intersection des deux quadriques une droite coupant la surface en deux points confondus; cela peut se produire de plusieurs manières : si l'un des seize points est un point double de la surface de Kummer, un autre s'est confondu avec lui, la droite est simplement assujettie à passer par le point correspondant et coupe la surface en deux points confondus; ce point est donc double; il y a huit de ces points; si l'un des seize points est sur $X_1 = X_2 = 0$ ou sur $X_3 = X_4 = 0$, il y en a un second confondu avec lui, la biquadratique a un point double en ce point et ses deux branches y sont tangentes à la surface de Kummer; il lui correspond donc une droite passant par le point correspondant et coupant la surface en deux points confondus, ce point est également double et il y a huit de ces points; en dehors de ces deux cas, les deux quadriques doivent être tangentes à une même tangente en un point de la surface de Kummer; il correspond à leur intersection une tangente à la surface en un point ordinaire.

Cette surface générale du huitième degré à seize points doubles peut être particularisée en assujettissant les quadriques S_i à passer par des points fixes de la surface de Kummer. Si les quadriques passent par un point X_1, X_2, X_3, X_4 elles passent aussi par X_1, X_2, $-X_3$, $-X_4$; si l'un des points est double, l'autre l'est aussi. D'autre part, les quadriques S_i doivent dépendre de trois paramètres au moins, on peut donc les assujettir à passer par deux points au plus non conjugués.

Si le point fixe est un point double de la surface de Kummer, parmi les seize points on doit en compter quatre fixes, la surface est ainsi du sixième degré. Si le point fixe est sur $X_1 = X_2 = 0$ ou sur $X_3 = X_4 = 0$, il reste de même douze points variables, la surface est du sixième degré;

de même aussi, il disparaît un point double de la surface. Lorsque le point fixe est quelconque, il reste quatorze points variables et la surface est du septième degré.

A un point fixe correspond une courbe unicursale singulière qui est une conique dans les deux premiers cas, une droite dans le dernier.

On obtient ainsi des surfaces :

Du huitième degré à seize points doubles;
Du septième degré à seize points doubles;
Du sixième degré à seize ou quinze points doubles;
Du cinquième degré à quinze points doubles;
Du quatrième degré à quatorze points doubles.

23. Je vais étudier ces dernières en supposant que les fonctions coordonnées s'annulent pour deux demi-périodes ordinaires et pour les deux qui s'en déduisent par addition de πi, o. Je suppose par exemple qu'elles s'annulent pour $(11')$: o, o, et par suite aussi pour $(21')$: πi, o; par ces deux points doubles de la surface de Kummer passent les deux coniques $31'$, $41'$; si le troisième point fixe des quadriques $S_i = 0$ est sur l'une de ces coniques, il en est de même pour le quatrième. Je suppose d'abord qu'aucun de ces deux points ne soit sur ces coniques; on est ainsi conduit à considérer les trois couples $(12')$, $(22')$; $(13')$, $(23')$; $(14')$, $(24')$, qui forment un octaèdre de Göpel avec $(11')$, $(21')$ (H., 24). Il existe plusieurs familles de biquadratiques tracées sur la surface de Kummer (H., 36) et contenant les quatre points $(11')$, $(21')$, $(12')$, $(22')$. Soit $\theta + \rho\theta' = 0$ l'équation de l'une d'elles; les trois fonctions θ^2, $\theta\theta'$, θ'^2 sont des fonctions du quatrième ordre, relatives au Tableau T_2, admettant les demi-périodes $(11')$, $(12')$ comme zéros doubles; soit θ_1 une fonction de même nature. Les surfaces considérées peuvent être représentées par des équations de la forme

$$x_1 = \theta^2, \qquad x_2 = \theta\theta', \qquad x_3 = \theta'^2, \qquad x_4 = \theta_1,$$

et, par suite, on a

$$x_1 x_3 - x_2^2 = 0.$$

La surface se réduit à un cône et les paramètres sont θ et θ'. Ce n'est pas une surface hyperelliptique.

On doit donc au couple $(11')$, $(21')$ de demi-périodes ordinaires associer le couple $(31')$, $(41')$ par exemple; on obtient ainsi une surface du quatrième degré à quatorze points doubles.

J'appelle A, A', B, B', les points $(11')$, $(21')$, $(31')$, $(41')$ de la surface de Kummer; ils forment un groupe de Rosenhain; par les coniques situées dans deux des plans de ce groupe, passe une infinité de quadriques constituant un faisceau linéaire et qui contiennent les quatre points; il lui correspond une infinité linéaire de plans passant par une droite fixe qui contient trois points doubles de la surface; en se rappelant la forme de l'équation des quadriques S_i, on trouve deux droites contenant l'une les points $(32')$, $(33')$, $(34')$, l'autre les points $(12')$, $(13')$, $(14')$. L'une des quadriques considérées se réduit à l'ensemble des deux plans singuliers contenant les coniques bases du faisceau; il lui correspond un plan tangent le long de la droite des points doubles; ce plan coupe en outre la surface suivant une conique qui est une des courbes unicursales singulières; il en est de même pour l'autre droite.

Les autres points doubles correspondent aux points de la surface de Kummer situés soit sur $X_1 = X_2 = 0$, soit sur $X_3 = X_4 = 0$. Les droites AA', BB' rencontrent ces deux droites; les deux plans déterminés par $X_1 = X_2 = 0$ et par AA', BB' forment une quadrique S_i à laquelle correspond un plan contenant quatre points doubles et coupant par suite la surface suivant deux coniques; on obtient un autre plan en remplaçant $X_1 = X_2 = 0$ par $X_3 = X_4 = 0$.

Il est facile de s'assurer qu'il y a six familles de biquadratiques passant par A, A', B, B' et le long desquelles sont inscrites à la surface de Kummer des quadriques S_i; il leur correspond six plans tangents singuliers à la surface le long de coniques. On pourrait ainsi étendre les applications de cette transformation; je reprendrai plus loin l'étude de cette surface par des moyens tout différents [1].

---

[1] Les considérations qui précèdent m'ont été indiquées par M. Humbert qui les a lui-même développées dans son cours du Collège de France (1904-1905).

En supposant toujours $M = 2$, $h = 2$, on peut maintenant prendre

$$x_i = S_i(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

les surfaces $S_i = 0$ étant des surfaces cubiques qui contiennent une même biquadratique de la surface de Kummer; il faut en outre remarquer que les fonctions de même caractéristique et de même parité, pour lesquelles $h = 1$ et $h = 2$, ont six demi-périodes comme zéros communs; donc les fonctions S_i s'annulent deux fois pour six des demi-périodes qui annulent l'équation de la biquadratique et une fois pour les deux autres. L'intersection de deux surfaces S_i qui, la biquadratique mise à part, est de degré 5, passe donc par douze points fixes; il reste huit points variables, la surface transformée est de degré 4; les hypothèses sont trop compliquées pour permettre une étude facile de ces surfaces par la méthode précédente; à plus forte raison, aurait-on des difficultés considérables si h était supérieur à deux.

CHAPITRE V.

SUR L'ÉQUATION DE LA SURFACE DE KUMMER.

24. Je vais, dans ce Chapitre, donner différentes formes de l'équation de la surface de Kummer, formes d'ailleurs déjà connues, mais en exprimant les coefficients au moyen de paramètres dont l'introduction sera utile par la suite.

Ces paramètres que j'appelle α, β, γ, δ, sont définis par les égalités

$$(1) \qquad \frac{\Theta'^{(2)}_{00}(0,0)}{\alpha} = \frac{\Theta'^{(2)}_{01}(0,0)}{\beta} = \frac{\Theta'^{(2)}_{10}(0,0)}{\gamma} = \frac{\Theta'^{(2)}_{11}(0,0)}{\delta},$$

et, pour plus de simplicité, je supposerai dans la suite que la valeur commune de ces rapports est $+1$. En d'autres termes, le point $x_1 = \alpha$,

$x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$, $x_4 = \delta$ est un point de la surface de Kummer

$$x_1 = \Theta_{00}^{(2)}(u, v), \qquad x_2 = \Theta_{01}^{(2)}(u, v), \qquad x_3 = \Theta_{10}^{(2)}(u, v), \qquad x_4 = \Theta_{11}^{(2)}(u, v).$$

C'est cette surface dont je vais chercher l'équation.

On sait qu'elle admet quinze transformations linéaires en elle-même; l'expression de ces transformations est particulièrement simple, lorsque les coordonnées sont sous la forme actuelle; on a en effet

$$\begin{aligned}\Theta_{pq}^{(2)}&\left(u + h\pi i + \lambda\frac{a}{2} + \mu\frac{b}{2},\ v + k\pi i + \lambda\frac{b}{2} + \mu\frac{c}{2}\right)\\ &= \Theta_{p+\lambda,\,q+\mu}^{(2)}(u, v)\, e^{-\lambda u - \mu v + (ph + qk)i\pi - \frac{1}{4}(a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2)};\end{aligned}$$

en désignant par x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 les valeurs des coordonnées pour les arguments u', v', on obtient les relations suivantes :

$$\begin{array}{lll}
u' = u + i\pi, & v' = v, & \dfrac{x'_1}{x_1} = \dfrac{x'_2}{x_2} = \dfrac{x'_3}{-x_3} = \dfrac{x'_4}{-x_4},\\[2ex]
u' = u, & v' = v + i\pi, & \dfrac{x'_1}{x_1} = \dfrac{x'_2}{-x_2} = \dfrac{x'_3}{x_3} = \dfrac{x'_4}{-x_4},\\[2ex]
u' = u + i\pi, & v' = v + i\pi, & \dfrac{x'_1}{x_1} = \dfrac{x'_2}{-x_2} = \dfrac{x'_3}{-x_3} = \dfrac{x'_4}{x_4};
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
u' = u + \dfrac{a}{2}, & v' = v + \dfrac{b}{2}, & \dfrac{x'_1}{x_3} = \dfrac{x'_2}{x_4} = \dfrac{x'_3}{x_1} = \dfrac{x'_4}{x_2},\\[2ex]
u' = u + \dfrac{b}{2}, & v' = v + \dfrac{c}{2}, & \dfrac{x'_1}{x_2} = \dfrac{x'_2}{x_1} = \dfrac{x'_3}{x_4} = \dfrac{x'_4}{x_3},\\[2ex]
u' = u + \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}, & v' = v + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{2}, & \dfrac{x'_1}{x_4} = \dfrac{x'_2}{x_3} = \dfrac{x'_3}{x_2} = \dfrac{x'_4}{x_1}.
\end{array}$$

Les neuf autres transformations résultent de la combinaison de chacune des trois dernières avec chacune des trois premières. Une quelconque de ces transformations s'obtient en ajoutant une demi-période aux arguments u, v; o, o étant exceptée; elle correspond à la transformation identique. On en déduit très facilement que la relation du quatrième degré entre x_1, x_2, x_3, x_4 est de la forme

$$\begin{aligned}(2)\qquad & a(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4) + 2b(x_1^2x_2^2 + x_3^2x_4^2)\\ &+ 2c(x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2) + 2d(x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2) + 4e\,x_1x_2x_3x_4 = 0.\end{aligned}$$

25. La surface de Kummer a seize points doubles $u = \frac{P}{2}$, $v = \frac{P'}{2}$, P, P′ désignant une période quelconque; α, β, γ, δ sont les coordonnées du point $u = 0$, $v = 0$; en exprimant qu'une surface de la forme précédente admet le point α, β, γ, δ comme point double, j'exprime par là même qu'elle en a seize dont les coordonnées se déduisent de celles du premier en leur appliquant les quinze transformations fondamentales.

On parvient ainsi aux quatre équations suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
&a\alpha^3 + b\alpha\beta^2 + c\alpha\gamma^2 + d\alpha\delta^2 + e\beta\gamma\delta = 0,\\
&a\beta^3 + b\beta\alpha^2 + c\beta\delta^2 + d\beta\gamma^2 + e\alpha\gamma\delta = 0,\\
&a\gamma^3 + b\gamma\delta^2 + c\gamma\alpha^2 + d\gamma\beta^2 + e\alpha\beta\delta = 0,\\
&a\delta^3 + b\delta\gamma^2 + c\delta\beta^2 + d\delta\alpha^2 + e\alpha\beta\delta = 0;
\end{aligned}\right.$$

et l'on a les expressions des coefficients a, b, c, d, e en fonction de quatre paramètres α, β, γ, δ :

$$\begin{aligned}
a &= 2(\alpha^2\beta^2 - \gamma^2\delta^2)(\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\delta^2)(\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2),\\
b &= (\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\delta^2)(\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2)(-\alpha^4 - \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4),\\
c &= (\alpha^2\beta^2 - \gamma^2\delta^2)(\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2)(-\alpha^4 + \beta^4 - \gamma^4 + \delta^4),\\
d &= (\alpha^2\beta^2 - \gamma^2\delta^2)(\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\delta^2)(-\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - \delta^4),\\
e &= \alpha\beta\gamma\delta[(\alpha^4 - \beta^4)^2 + (\gamma^4 - \delta^4)^2 - 2(\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\delta^2)^2 - 2(\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2)^2],\\
e &= \alpha\beta\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2)\\
&\quad \times (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2).
\end{aligned}$$

En donnant à α, β, γ, δ des valeurs numériques quelconques, on déduit de ces expressions des valeurs de a, b, c, d, e, qui, portées dans (2), donnent l'équation d'une surface de Kummer.

On peut dire aussi qu'on a trouvé entre les quatre fonctions normales du second ordre à caractéristique ordinaire nulle la relation

$$(4)\quad \begin{aligned}
&a(\Theta_{00}^4 + \Theta_{01}^4 + \Theta_{10}^4 + \Theta_{11}^4) + 2b(\Theta_{00}^2\Theta_{01}^2 + \Theta_{10}^2\Theta_{11}^2)\\
&\quad + 2c(\Theta_{00}^2\Theta_{10}^2 + \Theta_{01}^2\Theta_{11}^2) + 2d(\Theta_{00}^2\Theta_{11}^2 + \Theta_{01}^2\Theta_{10}^2) + 4e\Theta_{00}\Theta_{01}\Theta_{10}\Theta_{11} = 0.
\end{aligned}$$

26. On obtient l'équation de la surface de Kummer, rapportée à un autre tétraèdre de référence, en posant

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
&x_1 = \beta\Theta_{00} - \alpha\Theta_{01} = \mathrm{L}, \qquad x_2 = \delta\Theta_{00} - \gamma\Theta_{01} = \mathrm{M},\\
&x_3 = \beta\Theta_{10} - \alpha\Theta_{11} = \mathrm{N}, \qquad x_4 = \delta\Theta_{10} - \gamma\Theta_{11} = \mathrm{P}.
\end{aligned}\right.$$

Cette forme n'a pas d'importance en elle-même, mais elle est utile comme intermédiaire.

On déduit des équations (5) les égalités

$$\frac{\Theta_{00}}{\alpha M - \gamma L} = \frac{\Theta_{01}}{\beta M - \delta L} = \frac{\Theta_{10}}{\alpha P - \gamma N} = \frac{\Theta_{11}}{\beta P - \delta N},$$

et, en remplaçant dans la relation (4), Θ_{00}, Θ_{01}, Θ_{10}, Θ_{11} par les quantités proportionnelles, on a la relation entre L, M, N, P,

$$\begin{aligned}(6)\quad & [a(\alpha^4+\beta^4)+2b\alpha^2\beta^2](M^4+P^4)+[a(\gamma^4+\delta^4)+2b\gamma^2\delta^2](L^4+N^4)\\ &+[6a(\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2)+2b(\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2)+8b\alpha\beta\gamma\delta](L^2M^2+N^2P^2)\\ &-4[a(\alpha^3\gamma+\beta^3\delta)+b\alpha\beta(\alpha\delta+\beta\gamma)](LM^3+NP^3)\\ &-4[a(\alpha\gamma^3+\beta\delta^3)+b\gamma\delta(\alpha\delta+\beta\gamma)](L^3M+N^3P)\\ &+2[c(\gamma^4+\delta^4)+2d\gamma^2\delta^2+2e\gamma^2\delta^2]L^2N^2\\ &+2[c(\alpha^4+\beta^4)+2d\alpha^2\beta^2+2e\alpha^2\beta^2]M^2P^2\\ &+2[c(\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2)+d(\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2)+2e\alpha\beta\gamma\delta](L^2P^2+M^2N^2)\\ &-4[c(\alpha^3\gamma+\beta^3\delta)+(d+e)\alpha\beta(\beta\gamma+\alpha\delta)]MP(LP+MN)\\ &-4[c(\alpha\gamma^3+\beta\delta^3)+(d+e)\gamma\delta(\alpha\delta+\beta\gamma)]LN(LP+MN)\\ &\qquad+4[2c(\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2)+4d\alpha\beta\gamma\delta+e(\alpha\delta+\beta\gamma)^2]LMNP=0.\end{aligned}$$

Or les équations (3) donnent les identités

$$a(\alpha^4+\beta^4)+2b\alpha^2\beta^2+c(\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2)+d(\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2)+2e\alpha\beta\gamma\delta=0,$$
$$a(\gamma^4+\delta^4)+2b\gamma^2\delta^2+c(\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2)+d(\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2)+2e\alpha\beta\gamma\delta=0.$$

On peut donc poser

$$\begin{aligned}A_1 &= -a(\alpha^4+\beta^4)-2b\alpha^2\beta^2=-a(\gamma^4+\delta^4)-2b\gamma^2\delta^2\\ &= c(\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2)+d(\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2)+2e\alpha\beta\gamma\delta.\end{aligned}$$

De même, on obtient les identités

$$\begin{aligned}a(\alpha^3\gamma+\beta^3\delta)+b\alpha\beta(\alpha\delta+\beta\gamma)+{}& c(\alpha\gamma^3+\beta\delta^3)\\ &+d\gamma\delta(\alpha\delta+\beta\gamma)+e\gamma\delta(\alpha\delta+\beta\gamma)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(\alpha\gamma^3+\beta\delta^3)+b\gamma\delta(\alpha\delta+\beta\gamma)+{}& c(\alpha^3\gamma+\beta^3\delta)\\ &+d\alpha\beta(\alpha\delta+\beta\gamma)+e\alpha\beta(\alpha\delta+\beta\gamma)=0,\end{aligned}$$

qui permettent de poser

$$B_1 = a(\alpha^3\gamma + \beta^3\delta) + b\alpha\beta(\alpha\delta + \beta\gamma) = -c(\alpha\gamma^3 + \beta\delta^3) - (d+e)\gamma\delta(\alpha\delta + \beta\gamma),$$
$$C_1 = a(\alpha\gamma^3 + \beta\delta^3) + b\gamma\delta(\alpha\delta + \beta\gamma) = -c(\alpha^3\gamma + \beta^3\delta) - (d+e)\alpha\beta(\alpha\delta + \beta\gamma).$$

Enfin soit, pour abréger,

$$D_1 = 6a(\alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2) + 2b(\alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2) + 8b\alpha\beta\gamma\delta,$$
$$E_1 = c(\gamma^4 + \delta^4) + 2(d+e)\gamma^2\delta^2, \qquad F_1 = c(\alpha^4 + \beta^4) + 2(d+e)\alpha^2\beta^2,$$
$$G_1 = 2c(\alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2) + 4d\alpha\beta\gamma\delta + e(\alpha\delta + \beta\gamma)^2.$$

La relation entre L, M, N, P prend alors la forme

$$(7) \qquad \begin{aligned} &A_1[(L^2 - P^2)^2 + (M^2 - N^2)^2] \\ &+ 4B_1[LM(M^2 - N^2) + NP(P^2 - L^2)] \\ &+ 4C_1[LM(L^2 - P^2) + NP(N^2 - M^2)] \\ &- D_1(L^2M^2 + N^2P^2) - 2E_1L^2N^2 - 2F_1M^2P^2 - 4G_1LMNP = 0. \end{aligned}$$

Les coefficients de cette relation peuvent être mis sous des formes simples et il existe entre eux des relations importantes.

Tout d'abord on a

$$2A_1 = 4(\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\delta^2)^2(\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2)^2;$$

en posant

$$A = (\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\delta^2)(\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2),$$

on a

$$A_1 = 2A^2.$$

Mais alors en posant

$$B = 2(\alpha^2\beta^2 - \gamma^2\delta^2)(\alpha^3\gamma + \beta^3\delta) + (-\alpha^4 - \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4)\alpha\beta(\alpha\delta + \beta\gamma),$$
$$C = 2(\alpha^2\beta^2 - \gamma^2\delta^2)(\alpha\gamma^3 + \beta\delta^3) + (-\alpha^4 - \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4)\gamma\delta(\alpha\delta + \beta\gamma),$$

on a

$$B_1 = AB, \qquad C_1 = AC.$$

27. Pour arriver à d'autres propriétés plus cachées, je vais, à l'aide de la relation (7), chercher l'équation de la surface

$$x_1 = \mathfrak{I}_1^2(u, v), \qquad x_2 = \mathfrak{I}_2^2(u, v), \qquad x_3 = \mathfrak{I}_3^2(u, v), \qquad x_4 = \mathfrak{I}_4^2(u, v),$$

$\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_3$, $\mathfrak{I}_4$ désignant les quatre fonctions du premier ordre dont les symboles sont $41'$, $31'$, $21'$, $11'$. En d'autres termes, je vais chercher la relation entre les carrés de quatre fonctions thêta appartenant à un certain groupe de Rosenhain.

Des formules

$$\begin{aligned}
\vartheta_1^2 &= \alpha\Theta_{01} - \beta\Theta_{00} + \gamma\Theta_{11} - \delta\Theta_{10} = -\mathrm{L} - \mathrm{P},\\
\vartheta_2^2 &= \alpha\Theta_{01} - \beta\Theta_{00} - \gamma\Theta_{11} + \delta\Theta_{10} = -\mathrm{L} + \mathrm{P},\\
\vartheta_3^2 &= \alpha\Theta_{11} - \beta\Theta_{10} + \gamma\Theta_{01} - \delta\Theta_{00} = -\mathrm{N} - \mathrm{M},\\
\vartheta_4^2 &= \alpha\Theta_{11} - \beta\Theta_{10} - \gamma\Theta_{01} + \delta\Theta_{00} = -\mathrm{N} + \mathrm{M},
\end{aligned}$$

on tire

$$\mathrm{L} = -\frac{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2}{2}, \qquad \mathrm{M} = -\frac{\vartheta_3^2 - \vartheta_4^2}{2}, \qquad \mathrm{N} = -\frac{\vartheta_3^2 + \vartheta_4^2}{2}, \qquad \mathrm{P} = -\frac{\vartheta_1^2 - \vartheta_2^2}{2}.$$

En substituant à L, M, N, P ces quantités dans la relation (7), on obtient

$$\begin{aligned}
(8)\qquad & 2\mathrm{A}^2(\vartheta_1^4\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4\vartheta_4^4) - \frac{\mathrm{D}_1 + \mathrm{E}_1 + \mathrm{F}_1 + 2\mathrm{G}_1}{8}(\vartheta_1^4\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4\vartheta_4^4)\\
& - \frac{\mathrm{D}_1 + \mathrm{E}_1 + \mathrm{F}_1 - 2\mathrm{G}_1}{8}(\vartheta_1^4\vartheta_4^4 + \vartheta_2^4\vartheta_3^4)\\
& - \frac{\mathrm{E}_1 - \mathrm{F}_1}{4}\vartheta_1^2\vartheta_2^2(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4) - \frac{\mathrm{E}_1 - \mathrm{F}_1}{4}\vartheta_3^2\vartheta_4^2(\vartheta_1^4 + \vartheta_2^4)\\
& + (\mathrm{B}_1 + \mathrm{C}_1)\vartheta_1^2\vartheta_3^2(\vartheta_2^4 + \vartheta_4^4) + (\mathrm{B}_1 - \mathrm{C}_1)\vartheta_1^2\vartheta_4^2(\vartheta_2^4 - \vartheta_3^4)\\
& - (\mathrm{B}_1 - \mathrm{C}_1)\vartheta_2^2\vartheta_3^2(\vartheta_1^4 - \vartheta_4^4)\\
& - (\mathrm{B}_1 + \mathrm{C}_1)\vartheta_2^2\vartheta_4^2(\vartheta_1^4 + \vartheta_3^4) + \frac{\mathrm{D}_1 - \mathrm{E}_1 - \mathrm{F}_1}{2}\vartheta_1^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_4^2 = 0.
\end{aligned}$$

Or on connaît ([1]) la forme générale d'une telle relation; on sait donc que $-\frac{\mathrm{D}_1 + \mathrm{E}_1 + \mathrm{F}_1 + 2\mathrm{G}_1}{16}$ et $-\frac{\mathrm{D}_1 + \mathrm{E}_1 + \mathrm{F}_1 - 2\mathrm{G}_1}{16}$ sont deux carrés parfaits; par suite, G_1 est un produit de deux facteurs. D'autre part, les coefficients des termes qui suivent les trois premiers, le dernier excepté, sont les produits deux à deux des racines carrées des coefficients des trois premiers termes; on voit ainsi que les racines carrées des coefficients du deuxième et du troisième terme sont, à un facteur numérique près, $\mathrm{B} + \mathrm{C}$ et $\mathrm{B} - \mathrm{C}$; donc G_1 est égal, à un facteur

([1]) KUMMER, *Monatsber. zu Berlin*, 1864, p. 249.

numérique près, au produit BC et $E_1 - F_1$ à la différence $B^2 - C^2$. On arrive ainsi aux identités

$$-\frac{D_1+E_1+F_1+2G_1}{16}=\frac{(B-C)^2}{16},\qquad -\frac{D_1+E_1+F_1-2G_1}{16}=\frac{(B+C)^2}{16},$$

$$-(D_1+E_1+F_1)=B^2+C^2,\qquad G_1=BC,\qquad E_1-F_1=B^2-C^2.$$

En posant

$$A=a_1,\qquad \frac{B-C}{4}=a_2,\qquad \frac{B+C}{4}=a_3,\qquad \frac{D_1-E_1-F_1}{8}=\lambda,$$

la relation (8) prend la forme canonique

$$\begin{aligned}(9)\qquad & a_1^2(\vartheta_1^4\vartheta_2^4+\vartheta_3^4\vartheta_4^4)+a_2^2(\vartheta_1^4\vartheta_3^4+\vartheta_2^4\vartheta_4^4)+a_3^2(\vartheta_1^4\vartheta_4^4+\vartheta_2^4\vartheta_3^4)\\ & -2a_2a_3[\vartheta_1^2\vartheta_2^2(\vartheta_3^4+\vartheta_4^4)+\vartheta_3^2\vartheta_4^2(\vartheta_1^4+\vartheta_2^4)]\\ & +2a_1a_3[\vartheta_1^2\vartheta_3^2(\vartheta_2^4+\vartheta_4^4)-\vartheta_2^2\vartheta_4^2(\vartheta_1^4+\vartheta_3^4)]\\ & +2a_1a_2[\vartheta_1^2\vartheta_4^2(\vartheta_2^4-\vartheta_3^4)-\vartheta_2^2\vartheta_3^2(\vartheta_1^4-\vartheta_4^4)]+2\lambda\vartheta_1^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_4^2=0.\end{aligned}$$

Les coefficients de l'équation (7) sont ainsi exprimés en fonction de quatre quantités

$$A_1=2a_1^2,\qquad B_1=2a_1(a_2+a_3),\qquad C_1=-2a_1(a_2-a_3),$$

$$D_1=-4(a_2^2+a_3^2-\lambda),\qquad E_1=-2(a_2^2+a_3^2+\lambda)+8a_2a_3,$$

$$F_1=-2(a_2^2+a_3^2+\lambda)-8a_2a_3,\qquad G_1=-4(a_2^2-a_3^2).$$

Enfin on a

$$\begin{aligned} a_1 &= (\alpha^2\gamma^2-\beta^2\delta^2)(\alpha^2\delta^2-\beta^2\gamma^2),\\ 4a_2 &= 2(\alpha^2\delta^2-\beta^2\gamma^2)[\alpha\gamma(\alpha^2-\gamma^2)+\beta\delta(\beta^2-\delta^2)]\\ &\quad +(-\alpha^4-\beta^4+\gamma^4+\delta^4)(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma),\\ 4a_3 &= 2(\alpha^2\beta^2-\gamma^2\delta^2)[\alpha\gamma(\alpha^2+\gamma^2)+\beta\delta(\beta^2+\delta^2)]\\ &\quad +(-\alpha^4-\beta^4+\gamma^4+\delta^4)(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma),\\ 8\lambda &= 6a(\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2)+2b(\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2)\\ &\quad +8b\alpha\beta\gamma\delta-c(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4)-2(d+e)(\alpha^2\beta^2+\gamma^2\delta^2).\end{aligned}$$

Les relations précédentes ont été établies d'une façon qui peut paraître un peu artificielle; on verra plus loin comment elles s'imposent par des considérations géométriques. On peut d'ailleurs les vérifier par un calcul direct qui n'offre d'autre difficulté que sa longueur.

CHAPITRE VI.

ÉTUDE D'UNE SURFACE HYPERELLIPTIQUE DU HUITIÈME DEGRÉ.

28. Parmi les fonctions thêta relatives au Tableau de périodes

$$T_4 \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{i\pi}{2}, & 0, & a, & b, \\ 0, & 2i\pi, & b, & c, \end{array} \right.$$

je considère les fonctions du quatrième ordre à caractéristique nulle; elles sont au nombre de quatre, comme l'indiquent les formules générales. Ce sont

$$\Theta_{00}^{(4)}(u, v), \quad \Theta_{01}^{(4)}(u, v), \quad \Theta_{02}^{(4)}(u, v), \quad \Theta_{03}^{(4)}(u, v).$$

La surface pour laquelle les coordonnées homogènes d'un point sont

$$x_{r+1} = \Theta_{0r}^{(4)}(u, v) \qquad (r = 0, 1, 2, 3)$$

(en négligeant le facteur de proportionnalité) est d'ordre 8. C'est bien une véritable surface hyperelliptique, car x_1, x_3, $x_2 + x_4$ sont des fonctions paires, $x_2 - x_4$ est une fonction impaire. C'est la seule surface sans courbe unicursale singulière qui soit du huitième ordre; en effet, pour une telle surface, on doit avoir $2h^2 M = 8$; cette équation a pour solutions $h = 1$, $M = 4$ qui donne la surface considérée ici et $h = 2$, $M = 1$ qui donne la surface de Kummer. Les deux intégrales de différentielles totales $\int du$, $\int dv$ ont T_4 pour Tableau de périodes [1].

---

[1] *Voir* dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. CXLIII, p. 637) l'expression de ces intégrales.

29. Pour obtenir son équation, je remarque qu'on a les relations suivantes faciles à déduire des formules générales. Pour simplifier l'écriture de ces relations, je pose

$$\alpha'' = \Theta^{(8)}_{00}, \quad \beta'' = \Theta^{(8)}_{04}, \quad \gamma'' = \Theta^{(8)}_{40}, \quad \delta'' = \Theta^{(8)}_{44}, \quad \varepsilon'' = \Theta^{(8)}_{02} = \Theta^{(8)}_{06}, \quad \zeta'' = \Theta^{(8)}_{42} = \Theta^{(8)}_{46},$$
$$\mathrm{U} = \Theta^{(8)}_{00}(u, v) + \Theta^{(8)}_{04}(u, v), \qquad \mathrm{V} = \Theta^{(8)}_{49}(u, v) + \Theta^{(8)}_{44}(u, v),$$
$$\mathrm{W} = \Theta^{(8)}_{02}(u, v) + \Theta^{(8)}_{06}(u, v), \qquad \mathrm{H} = \Theta^{(8)}_{42}(u, v) + \Theta^{(8)}_{46}(u, v).$$

Les relations annoncées s'écrivent alors

$$(1) \quad \begin{aligned} &x_1^2 + x_3^2 = (\alpha'' + \beta'')\,\mathrm{U} + (\gamma'' + \delta'')\,\mathrm{V}, \qquad &&x_2^2 + x_4^2 = (\alpha'' + \beta'')\,\mathrm{W} + (\gamma'' + \delta'')\,\mathrm{H}, \\ &x_1 x_3 = \varepsilon''\,\mathrm{W} + \zeta''\,\mathrm{H}, &&x_2 x_4 = \varepsilon''\,\mathrm{U} + \zeta''\,\mathrm{V}. \end{aligned}$$

Je considère d'autre part l'équation de la surface de Kummer

$$x = \Theta^{(2)}_{00}(u, v), \qquad y = \Theta^{(2)}_{01}(u, v), \qquad z = \Theta^{(2)}_{10}(u, v), \qquad t = \Theta^{(2)}_{11}(u, v),$$
$$a(x^4 + y^4 + z^4 + t^4) + 2b(x^2y^2 + z^2t^2) + 2c(x^2z^2 + y^2t^2)$$
$$+ 2d(x^2t^2 + y^2z^2) + 4exyzt = 0,$$

et dans cette relation je double les arguments et les périodes; j'obtiens ainsi l'équation de la surface

$$x' = \Theta^{(4)}_{00}(u, v), \qquad y' = \Theta^{(4)}_{02}(u, v), \qquad z' = \Theta^{(4)}_{20}(u, v), \qquad t' = \Theta^{(4)}_{22}(u, v),$$

sous la forme suivante

$$(2) \quad a'(x'^4 + y'^4 + z'^4 + t'^4) + 2b'(x'^2y'^2 + z'^2t'^2) + 2c'(x'^2z'^2 + y'^2t'^2)$$
$$+ 2d'(x'^2t'^2 + y'^2z'^2) + 4e'x'y'z't' = 0,$$

en désignant par a', b', c', d', e' les mêmes fonctions de

$$\alpha' = \Theta^{(4)}_{00}, \qquad \beta' = \Theta^{(4)}_{02}, \qquad \gamma' = \Theta^{(4)}_{20}, \qquad \delta' = \Theta^{(4)}_{22},$$

que a, b, c, d, e l'étaient de α, β, γ, δ.

Mais on a

$$x' = x_1, \qquad y' = x_3,$$
$$(3) \quad x'^2 + y'^2 = (\alpha'' + \beta'')\,\mathrm{U} + (\gamma'' + \delta'')\,\mathrm{V}, \qquad x'y' = \varepsilon''\,\mathrm{W} + \zeta''\,\mathrm{H};$$

en outre on a de même

$$(3) \quad z'^2 + t'^2 = (\alpha'' + \beta'')\,\mathrm{V} + (\gamma'' + \delta'')\,\mathrm{U}, \qquad z't' = \varepsilon''\,\mathrm{H} + \zeta''\,\mathrm{W}.$$

Pour que quatre paramètres seulement entrent dans les formules, je pose

$$\alpha'' + \beta'' = \alpha_1, \qquad \gamma'' + \delta'' = \beta_1, \qquad 2\varepsilon'' = \gamma_1, \qquad 2\zeta'' = \delta_1.$$

Ces paramètres sont liés à α', β', γ', δ' par les relations

$$(4) \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2, \quad 2\alpha'\beta' = \gamma_1^2 + \delta_1^2, \quad \gamma'^2 + \delta'^2 = 2\alpha_1\beta_1, \quad \gamma'\delta' = \gamma_1\delta_1.$$

30. En résumé, il s'agit de remplacer dans (2) les quantités x', y', z', t' par x_1, x_2, x_3, x_4, ces quantités étant liées par les relations (1) et (3) que je récris

$$(1) \quad \begin{cases} x_1^2 + x_3^2 = \alpha_1 \mathrm{U} + \beta_1 \mathrm{V}, & 2x_1x_3 = \gamma_1 \mathrm{W} + \delta_1 \mathrm{H}, \\ x_2^2 + x_4^2 = \alpha_1 \mathrm{W} + \beta_1 \mathrm{H}, & 2x_2x_4 = \gamma_1 \mathrm{U} + \delta_1 \mathrm{V}, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x' = x_1, & z'^2 + t'^2 = \alpha_1 \mathrm{V} + \beta_1 \mathrm{U}, \\ y' = x_3, & 2z't' = \gamma_1 \mathrm{H} + \delta_1 \mathrm{W}. \end{cases}$$

De ces équations on tire

$$(5) \quad \begin{cases} x' = x_1, & z'^2 + t'^2 = \dfrac{2(\alpha_1^2 - \beta_1^2)x_2x_4 - (\alpha_1\gamma_1 - \beta_1\delta_1)(x_1^2 + x_3^2)}{\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1} = \underline{\mathrm{P}}, \\ y' = x_3, & 2z't' = \dfrac{2(\alpha_1\gamma_1 - \beta_1\delta_1)x_1x_3 - (\gamma_1^2 - \delta_1^2)(x_2^2 + x_4^2)}{\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1} = \underline{\mathrm{Q}}; \end{cases}$$

et l'on obtient l'équation cherchée

$$(6) \quad a'\left(x_1^4 + x_3^4 + \underline{\mathrm{P}}^2 - \frac{\underline{\mathrm{Q}}^2}{2}\right) + 2b'\left(x_1^2x_3^2 + \frac{\underline{\mathrm{Q}}^2}{3}\right)$$
$$+ (c' + d')(x_1^2 + x_3^2)\underline{\mathrm{P}} + (c' - d')(x_1^2 - x_3^2)\sqrt{\underline{\mathrm{P}}^2 - \underline{\mathrm{Q}}^2} + 2e'x_1x_3\underline{\mathrm{Q}} = 0,$$

qui s'écrit aussi

$$(7) \quad \begin{aligned} &[\mathrm{A}(x_1^2 + x_3^2)^2 + \mathrm{B}(x_1^2 + x_3^2)x_2x_4 + \mathrm{C}x_2^2x_4^2 \\ &+ \mathrm{A}'(x_2^2 + x_4^2)^2 + \mathrm{B}'(x_2^2 + x_4^2)x_1x_3 + \mathrm{C}'x_1^2x_3^2]^2 \\ &- \lambda^2(x_1^2 - x_3^2)^2 \end{aligned}$$

en posant

$$
\left\{
\begin{aligned}
&A = a'[(\alpha_1\gamma_1-\beta_1\delta_1)^2+(\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1)^2]-(c'+d')(\alpha_1\gamma_1-\beta_1\delta_1)(\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1),\\
&B = -4a'(\alpha_1\gamma_1-\beta_1\delta_1)(\alpha_1^2-\beta_1^2)+2(c'+\delta')(\alpha_1^2-\beta_1^2)(\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1),\\
&C = 4a'(\alpha_1^2-\beta_1^2)^2, \qquad A' = \frac{b'-a'}{2}(\gamma_1^2-\delta_1^2)^2,\\
&B' = 2(b'-a')(\alpha_1\gamma_1-\beta_1\delta_1)(\gamma_1^2-\delta_1^2)-2e'(\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1)(\gamma_1^2-\delta_1^2),\\
&C' = 2(b'-a')[(\alpha_1\gamma_1-\beta_1\delta_1)^2+(\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1)^2]+4e'(\alpha_1\gamma_1-\beta_1\delta_1)(\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1),\\
&\lambda^2 = (c'-d')^2(\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1)^2,\\
&m = -(\alpha_1\gamma_1-\beta_1\delta_1), \qquad n = 2(\alpha_1^2-\beta_1^2), \qquad p = -(\gamma_1^2-\delta_1^2), \qquad q = -2m.
\end{aligned}
\right.
$$

Il est d'ailleurs facile d'exprimer a', $b'-a'$, $c'+d'$, $(c'-d')^2$, e' en fonction de α_1, β_1, γ_1, δ_1. On a ainsi

$$
(9)\quad
\left\{
\begin{aligned}
a' &= \tfrac{1}{2}(\gamma_1^2-\delta_1^2)(\alpha_1^2\gamma_1^2-\beta_1^2\delta_1^2)(\alpha_1^2\delta_1^2-\beta_1^2\gamma_1^2),\\
c'+d' &= \tfrac{1}{2}(\gamma_1^2-\delta_1^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2)\alpha_1\beta_1[-(\alpha_1^2-\beta_1^2)^2+(\gamma_1^2-\delta_1^2)^2],\\
b'-a' &= -(\alpha_1^2-\beta_1^2)^2(\alpha_1^2\gamma_1^2-\beta_1^2\delta_1^2)(\alpha_1^2\delta_1^2-\beta_1^2\gamma_1^2),\\
e' &= \tfrac{1}{2}(\alpha_1^2-\beta_1^2)^2(\gamma_1^2+\delta_1^2)\gamma_1\delta_1[(\alpha_1^2-\beta_1^2)^2-(\gamma_1^2-\delta_1^2)^2],\\
(c'-d')^2 &= \tfrac{1}{4}(\alpha_1^2-\beta_1^2)^4(\gamma_1^2-\delta_1^2)^4[(\alpha_1^2+\beta_1^2)^2-(\gamma_1^2+\delta_1^2)^2](\alpha_1^2\beta_1^2-\gamma_1^2\delta_1^2).
\end{aligned}
\right.
$$

En définitive, à l'aide des formules (8) et (9), les coefficients de l'équation (7) sont exprimés algébriquement au moyen de quatre paramètres homogènes; ils sont exprimés aussi, mais à l'aide de transcendantes, au moyen des trois périodes a, b, c.

31. L'identité facile à vérifier

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_1^2-\beta_1^2)^2(\gamma_1^2+\delta_1^2)\gamma_1\delta_1+(\gamma_1^2-\delta_1^2)^2(\alpha_1^2+\beta_1^2)\alpha_1\beta_1\\
&\quad-(\alpha_1\gamma_1+\beta_1\delta_1)(\alpha_1\delta_1+\beta_1\gamma_1)[(\alpha_1\gamma_1-\beta_1\delta_1)^2+(\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1)^2]=0
\end{aligned}
$$

conduit à la relation

$$C'+4A=0.$$

On voit de suite que l'on a également

$$C+4A'=0,$$

par suite l'équation (8) s'écrit

$$(10)\quad \begin{aligned}[t] &[\mathrm{A}\,(x_1^2 - x_3^2)^2 + \mathrm{B}(x_1^2 + x_3^2)x_2x_4 \\ &+ \mathrm{A}'(x_2^2 - x_4^2)^2 + \mathrm{B}'(x_2^2 + x_4^2)x_1x_3]^2 \\ &- \lambda^2(x_1^2 - x_3^2)^2[m^2(x_1^2 - x_3^2)^2 + 2mn(x_1^2 + x_3^2)x_2x_4 \\ &\qquad + n^2x_2^2x_4^2 - p^2(x_2^2 + x_4^2)^2 + 4mp\,x_1x_3(x_2^2 + x_4^2)] = 0. \end{aligned}$$

D'autres relations apparaissent en faisant la remarque suivante : on a la formule

$$\Theta_{0,r}^{(4)}\left(u + \frac{b}{4},\ v + \frac{c}{4}\right) = e^{-v - \frac{c}{8}}\,\Theta_{0,r+1}^{(4)}(u, v),$$

par suite l'équation (10) s'écrit aussi [1]

$$(11)\quad \begin{aligned}[t] &[\mathrm{A}(x_2^2 - x_4^2)^2 + \mathrm{B}(x_2^2 + x_4^2)x_1x_3 \\ &+ \mathrm{A}'(x_1^2 - x_3^2)^2 + \mathrm{B}'(x_1^2 + x_3^2)x_2x_4]^2 \\ &- \lambda^2(x_2^2 - x_4^2)^2[m^2(x_2^2 - x_4^2) + 2mn(x_2^2 + x_4^2)x_1x_3 \\ &\qquad + n^2x_1^2x_3^2 - p^2(x_1^2 + x_3^2)^2 + 4mp(x_1^2 + x_3^2)x_2x_4] = 0. \end{aligned}$$

On déduit de là les relations

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^2 - \mathrm{A}'^2 - \lambda^2 m^2 &= 0, & \mathrm{B}^2 - \mathrm{B}'^2 - \lambda^2(n^2 - 4p^2) &= 0, \\ \mathrm{AB} - \mathrm{A}'\mathrm{B}' - \lambda^2 mn &= 0, & \mathrm{AB}' - \mathrm{A}'\mathrm{B} - 2\lambda^2 mp &= 0. \end{aligned}$$

Elles ne sont pas indépendantes ainsi qu'on le voit d'après l'identité

$$(\mathrm{A}^2 - \mathrm{A}'^2)(\mathrm{B}^2 - \mathrm{B}'^2) - (\mathrm{AB} - \mathrm{A}'\mathrm{B}')^2 - (\mathrm{AB}' - \mathrm{A}'\mathrm{B})^2 = 0.$$

Les deux dernières permettent d'exprimer B et B' en fonction de A, A',

---

[1] La surface admet quinze transformations linéaires en elle-même. On a en effet

$$\begin{aligned} &u' = u, && v' = v + \frac{i\pi}{2}; && \frac{x_1'}{x_1} = \frac{ix_2'}{x_2} = \frac{-x_3'}{x_3} = \frac{-ix_4'}{x_4}; \\ &u' = u + \frac{b}{4}, && v' = v + \frac{c}{4}; && \frac{x_2'}{x_1} = \frac{x_3'}{x_2} = \frac{x_4'}{x_3} = \frac{x_1'}{x_4}. \end{aligned}$$

Chacune peut être répétée trois fois, ce qui donne six transformations et chacune des trois premières peut s'associer à chacune des trois dernières, ce qui donne neuf transformations.

λ^2, m, n, p; on trouve, en tenant compte de la première,

$$B = \frac{An + 2A'p}{m}, \qquad B' = \frac{2Ap + A'n}{m}.$$

Enfin, remplaçant λ^2 par $\dfrac{A^2 - A'^2}{m}$ l'équation s'écrit définitivement

$$\begin{aligned}(12)\quad & [Am(x_1^2 - x_3^2)^2 + (An + 2A'p)(x_1^2 + x_3^2)x_2x_4 \\ & + A'm(x_2^2 - x_4^2)^2 + (2Ap + A'n)(x_2^2 + x_4^2)x_1x_3]^2 \\ & - (A^2 - A'^2)(x_1^2 - x_3^2)^2[m^2(x_1^2 - x_3^2)^2 + 2mn(x_1^2 + x_3^2)x_2x_4 \\ & + n^2x_2^2x_4^2 - p^2(x_2^2 + x_4^2)^2 + 4mp(x_2^2 + x_4^2)x_1x_3] = 0.\end{aligned}$$

32. Cette surface admet quatre courbes doubles planes. Ce sont

$$\begin{aligned} & x_1 - x_3 = 0, \quad A'm(x_2^2 - x_4^2)^2 + (2Ap + A'n)(x_2^2 + x_4^2)x_1^2 + 2(An + 2A'p)x_1^2x_2x_4 = 0; \\ & x_1 + x_3 = 0, \quad A'm(x_2^2 - x_4^2)^2 - (2Ap + A'n)(x_2^2 + x_4^2)x_1^2 + 2(An + 2A'p)x_1^2x_2x_4 = 0; \\ & x_2 - x_4 = 0, \quad A'm(x_1^2 - x_3^2)^2 + (2Ap + A'n)(x_1^2 + x_3^2)x_2^2 + 2(An + 2A'p)x_2^2x_1x_3 = 0; \\ & x_2 + x_4 = 0, \quad A'm(x_1^2 - x_3^2)^2 - (2Ap + A'n)(x_1^2 + x_3^2)x_2^2 + 2(An + 2A'p)x_2^2x_1x_3 = 0.\end{aligned}$$

L'ensemble de ces quatre courbes constitue la courbe double du 16^e degré que doit posséder la surface, puisqu'elle est hyperelliptique et n'a pas de courbe unicursale singulière. On connaît en même temps la surface adjointe d'ordre $n - 4$; c'est

$$(x_1^2 - x_3^2)(x_2^2 - x_4^2) = 0.$$

Il y a quatre points quadruples

1° $\quad x_1 = x_3 = 0, \quad x_2^2 - x_4^2 = 0;$

2° $\quad x_2 = x_4 = 0, \quad x_1^2 - x_3^2 = 0.$

Ce sont des points doubles de l'adjointe.

Le genre des sections planes est 5, ainsi qu'il ressort des formules générales; d'ailleurs ce sont des courbes de degré 8 à 16 points doubles, et le nombre maximum de points doubles est 21.

Les surfaces adjointes de degré $q + 4$ sont au nombre de

$$4q^2 + \tfrac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3),$$

Pour $q = 1$, il y a 4 surfaces adjointes; elles découpent le système des sections planes; par conséquent ces surfaces se décomposent en cinq plans : le plan de la section et les quatre plans formant la surface adjointe de degré $n - 4$.

33. Soient en général les deux courbes

$$\Sigma_1 = \lambda_1 \Theta_1(u - \lambda, v - \mu) + \lambda_2 \Theta_2(u - \lambda, v - \mu) + \ldots = 0,$$
$$\Sigma'_1 = \lambda'_1 \Theta_1(u + \lambda, v + \mu) + \lambda'_2 \Theta_2(u + \lambda, v + \mu) + \ldots = 0,$$

les Θ désignant des fonctions d'ordre $4q$, de caractéristique réduite nulle. En d'autres termes, soient deux courbes de même ordre et dont les familles correspondent à des paramètres ayant des valeurs opposées.

L'ensemble de ces deux courbes $\Sigma_1 \Sigma'_1 = 0$ est une courbe d'ordre $8q$ appartenant à la famille $0, 0$; cette courbe est donc sur une surface adjointe de degré $2q + 4$; cette surface n'est pas d'ailleurs la plus générale de son degré; la surface la plus générale découpe les courbes les plus générales d'ordre $8q$ et de la famille $0, 0$.

En particulier les courbes pour lesquelles

$$\lambda = \frac{P}{2}, \qquad \mu = \frac{P'}{2},$$

P, P' étant une période ordinaire, sont telles qu'il existe une surface adjointe tangente tout le long de chacune d'elles. Lorsque

$$\lambda = \frac{P}{2} + \frac{i\pi}{2}, \qquad \mu = \frac{P'}{2},$$

il en est de même bien évidemment, puisque les fonctions $\Theta_1(u, v)$, $\Theta_2(u, v)$, ... admettent la période $\frac{i\pi}{2}, 0$; mais on ne peut rien dire pour

$$\lambda = \frac{P}{2} + \frac{i\pi}{4}, \qquad \mu = \frac{P'}{2}.$$

En résumé :

Par toute courbe d'ordre $4q$, de famille $\lambda = 0$, $\mu = 0$, on peut faire passer une adjointe de degré $q + 4$.

Le long de toute courbe d'ordre $4q$, *de famille* $\lambda = \frac{P}{2}$, $\mu = \frac{P'}{2}$, P, P' *étant une période ordinaire, on peut inscrire une adjointe de degré* $2q+4$.

Par une courbe d'ordre $4q$, *de famille* λ, μ *et par une courbe de même ordre, de famille* $-\lambda$, $-\mu$, *on peut faire passer une adjointe de degré* $2q+4$.

34. Cette classification des courbes tracées sur la surface peut encore être faite de la façon suivante : soit donnée la courbe d'ordre $4q$

$$\lambda_0 \Theta_0(u-\lambda, v-\mu) + \lambda_1 \Theta_1(u-\lambda, v-\mu) + \ldots = 0.$$

Je considère la courbe

$$\lambda'_0 \Theta'^{(4)}_{00}(u+q\lambda, v+q\mu) + \lambda'_1 \Theta'^{(4)}_{01}(u+q\lambda, v+q\mu) + \ldots = 0.$$

Il est facile de voir que le produit des deux premiers membres se met sous la forme

$$\lambda'' \Theta(u, v) + \ldots,$$

les Θ étant d'ordre $4(q+1)$. Par conséquent l'ensemble de ces deux courbes est sur une surface adjointe de degré $q+5$.

En d'autres termes, on obtient toutes les courbes d'ordre $4q$:

1° En coupant la surface par une adjointe de degré $q+4$;

2° En coupant la surface par une adjointe de degré $q+5$, passant par une courbe de degré 8 qui n'est pas une section plane.

Remarque. — Dans le deuxième cas, l'adjointe n'est pas la plus générale de son degré, mais il suffit d'exprimer qu'elle passe par une courbe d'ordre 4; en effet la fonction thêta d'ordre $4(q+1)$ qui, égalée à zéro, représente la courbe découpée par l'adjointe la plus générale de degré $q+5$, doit alors contenir en facteur une fonction d'ordre 4, par conséquent l'autre facteur est une fonction d'ordre $4q$. Si la première courbe est de famille λ, μ, la seconde est de famille $\frac{\lambda}{q}$, $\frac{\mu}{q}$. Le premier cas peut aussi rentrer dans le second, l'adjointe de degré $q+5$ se décomposant en une adjointe générale de degré $q+4$ et un plan.

35. On obtient une surface de degré 8 en posant

$$X = x_1(x_2 - x_4), \qquad Y = x_3(x_2 - x_4), \qquad Z = (x_2 + x_4)^2, \qquad T = (x_2 - x_4)^2.$$

Elle a pour équation

$$\begin{aligned}
&\Big[Am(X^2 - Y^2)^2 + (An + 2A'p)(X^2 + Y^2)\frac{Z-T}{4}T \\
&\qquad + A'mZT^3 + (2Ap + A'n)XY\frac{Z+T}{2}T\Big]^2 \\
&- (A^2 - A'^2)(X^2 - Y^2)^2\Big[m^2(X^2 - Y^2)^2 + 2mn(X^2 + Y^2)\frac{Z-T}{4}T \\
&\qquad + n^2\frac{(Z-T)^2}{16}T^2 - p^2\frac{(Z+T)^2}{4}T^2 + 4mpXY\frac{Z+T}{2}T\Big] = 0
\end{aligned}$$

A un point correspondent huit couples u, v. En posant $v = v' + \frac{i\pi}{2}$, on obtient une nouvelle expression des coordonnées

$$X = e^{\frac{i\pi}{2}} x_1(x_2 + x_4), \qquad Y = -e^{\frac{i\pi}{2}} x_3(x_2 + x_4),$$
$$Z = -(x_2 - x_4)^2, \qquad T = -(x_2 + x_4)^2.$$

Les fonctions coordonnées apparaissent alors comme ayant la même parité. La surface n'est pas représentable point par point sur le champ hyperelliptique, bien qu'elle ait semblé avoir des coordonnées de parité différente; l'exemple m'a paru assez curieux pour pouvoir être signalé.

CHAPITRE VII.

SUR UNE SURFACE DE DEGRÉ 4 A QUATORZE POINTS DOUBLES.

36. J'ai dit précédemment (n° 17, 1°) que, si l'on prend les coordonnées homogènes d'un point d'une surface proportionnelles à quatre fonctions paires d'ordre 4, de caractéristique nulle, relatives

au Tableau T_2, nulles pour deux demi-périodes ordinaires, la surface hyperelliptique ainsi obtenue est du quatrième ordre et possède quatorze points doubles.

Je me propose actuellement de former effectivement les expressions de ces coordonnées, de trouver l'équation de la surface et d'étudier ses principales propriétés.

La forme générale des coordonnées est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= \lambda_1\,\Theta_{00}^{(2)2}(u,v) + \lambda_2\Theta_{01}^2 + \lambda_3\Theta_{10}^2 + \lambda_4\Theta_{11}^2 + \lambda_5\Theta_{00}\Theta_{01} + \lambda_6\Theta_{10}\Theta_{11},\\
x_2 &= \mu_1\,\Theta_{00}^{(2)2}(u,v) + \mu_2\Theta_{01}^2 + \mu_3\Theta_{10}^2 + \mu_4\Theta_{11}^2 + \mu_5\Theta_{00}\Theta_{01} + \mu_6\Theta_{10}\Theta_{11},\\
x_3 &= \nu_1\,\Theta_{00}^{(2)2}(u,v) + \nu_2\Theta_{01}^2 + \nu_3\Theta_{10}^2 + \nu_4\Theta_{11}^2 + \nu_5\Theta_{00}\Theta_{01} + \nu_6\Theta_{10}\Theta_{11},\\
x_4 &= \rho_1\,\Theta_{00}^{(2)2}(u,v) + \rho_2\Theta_{01}^2 + \rho_3\Theta_{10}^2 + \rho_4\Theta_{11}^2 + \rho_5\Theta_{00}\Theta_{01} + \rho_6\Theta_{10}\Theta_{11}.
\end{aligned}\right.$$

Je vais exprimer, par exemple, qu'elles sont nulles pour $u = 0$, $v = 0$ et pour $u = \frac{a}{2}$, $v = \frac{b}{2}$ (¹); ce qui conduit aux équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + \lambda_3\gamma^2 + \lambda_4\delta^2 + \lambda_5\alpha\beta + \lambda_6\gamma\delta = 0,\\
&\mu_1\alpha^2 + \mu_2\beta^2 + \mu_3\gamma^2 + \mu_4\delta^2 + \mu_5\alpha\beta + \mu_6\gamma\delta = 0,\\
&\nu_1\alpha^2 + \nu_2\beta^2 + \nu_3\gamma^2 + \nu_4\delta^2 + \nu_5\alpha\beta + \nu_6\gamma\delta = 0,\\
&\rho_1\alpha^2 + \rho_2\beta^2 + \rho_3\gamma^2 + \rho_4\delta^2 + \rho_5\alpha\beta + \rho_6\gamma\delta = 0;
\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lambda_1\gamma^2 + \lambda_2\delta^2 + \lambda_3\alpha^2 + \lambda_4\beta^2 + \lambda_5\gamma\delta + \lambda_6\alpha\beta = 0,\\
&\mu_1\gamma^2 + \mu_2\delta^2 + \mu_3\alpha^2 + \mu_4\beta^2 + \mu_5\gamma\delta + \mu_6\alpha\beta = 0,\\
&\nu_1\gamma^2 + \nu_2\delta^2 + \nu_3\alpha^2 + \nu_4\beta^2 + \nu_5\gamma\delta + \nu_6\alpha\beta = 0,\\
&\rho_1\gamma^2 + \rho_2\delta^2 + \rho_3\alpha^2 + \rho_4\beta^2 + \rho_5\gamma\delta + \rho_6\alpha\beta = 0.
\end{aligned}\right.$$

On reconnait facilement que ces équations sont satisfaites pour

$$\begin{array}{llllll}
{}_1 = \beta^2, & \lambda_2 = \alpha^2, & \lambda_3 = -\gamma^2, & \lambda_4 = -\delta^2, & \lambda_5 = -2\alpha\beta, & \lambda_6 = 2\gamma\delta,\\
{}_1 = \delta^2, & \mu_2 = \gamma^2, & \mu_3 = -\beta^2, & \mu_4 = -\alpha^2, & \mu_5 = -2\gamma\delta, & \mu_6 = 2\alpha\beta,\\
{}_1 = \beta\delta, & \nu_2 = \alpha\gamma, & \nu_3 = 0, & \nu_4 = 0, & \nu_5 = -\alpha\delta - \beta\gamma, & \nu_6 = 0,\\
{}_1 = 0, & \rho_2 = 0, & \rho_3 = \beta\delta, & \rho_4 = \alpha\gamma, & \rho_5 = 0, & \rho_6 = -\alpha\delta - \beta
\end{array}$$

ces valeurs constituent quatre solutions indépendantes; par suite, on

(¹) On a vu plus haut les cas à écarter (nº 23).

peut mettre les coordonnées sous la forme

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = (\beta\Theta_{00} - \alpha\Theta_{01})^2 - (\delta\Theta_{10} - \gamma\Theta_{11})^2, \\ x_2 = (\delta\Theta_{00} - \gamma\Theta_{01})^2 - (\beta\Theta_{10} - \alpha\Theta_{11})^2, \\ x_3 = (\beta\Theta_{00} - \alpha\Theta_{01})(\delta\Theta_{00} - \gamma\Theta_{01}), \\ x_4 = (\beta\Theta_{10} - \alpha\Theta_{11})(\delta\Theta_{10} - \gamma\Theta_{11}), \end{cases}$$

ou, en introduisant les fonctions L, M, N, P déjà définies (n° 26),

$$(5)\qquad x_1 = L^2 - P^2, \qquad x_2 = M^2 - N^2, \qquad x_3 = LM, \qquad x_4 = NP.$$

L'équation de cette surface est donc

$$(6)\qquad \begin{aligned} &[A_1(x_1^2 + x_2^2) - 4B_1(x_1x_4 - x_2x_3) + 4C_1(x_1x_3 - x_2x_4) \\ &\quad - D_1(x_3^2 + x_4^2) - 4G_1x_3x_4 - (E_1 + F_1)(x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2)]^2 \\ &= (E_1 - F_1)^2[x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2(x_3^2 + x_4^2) + (x_3^2 - x_4^2)^2]. \end{aligned}$$

37. J'ai déjà donné l'expression de ces coefficients, d'abord en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, puis en fonction de a_1, a_2, a_3, λ; et j'ai à cette occasion établi des relations entre eux. Je vais montrer comment ces relations peuvent être prévues à l'aide des seules propriétés de la surface actuellement considérée.

Les six points doubles correspondant aux six demi-périodes ordinaires autres que $0, 0, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}$, ont pour coordonnées

	$0, i\pi.$	$\frac{a}{2}, \frac{b}{2}+i\pi.$	$\frac{b}{2}, \frac{c}{2}.$	$\frac{b}{2}, \frac{c}{2}+i\pi.$	$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}, \frac{b}{2}+\frac{c}{2}.$	$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}, \frac{b}{2}+\frac{c}{2}+i\pi.$
.	$4(\alpha^2\beta^2-\gamma^2\delta^2)$	0	$(\beta^2-\alpha^2)^2-(\delta^2-\gamma^2)^2$	$(\beta^2+\alpha^2)^2-(\delta^2+\gamma^2)^2$	0	0
.	0	$4(\gamma^2\delta^2-\alpha^2\beta^2)$	0	0	$(\delta^2-\gamma^2)^2-(\beta^2-\gamma^2)^2$	$(\delta^2+\gamma^2)^2 \quad (\beta^2+\alpha^2)^2$
.	$2\alpha\beta(\alpha\delta+\beta\gamma)$	$2\gamma\delta(\alpha\delta+\beta\gamma)$	$(\beta^2-\alpha^2)(\beta\delta-\alpha\gamma)$	$(\beta^2+\alpha^2)(\beta\delta+\alpha\gamma)$	$(\delta^2-\gamma^2)(\beta\delta-\alpha\gamma)$	$(\delta^2+\gamma^2)(\beta\delta+\alpha\gamma)$
.	$2\gamma\delta(\alpha\delta+\beta\gamma)$	$2\alpha\beta(\alpha\delta+\beta\gamma)$	$(\delta^2-\gamma^2)(\beta\delta-\alpha\gamma)$	$(\delta^2+\gamma^2)(\beta\delta+\alpha\gamma)$	$(\beta^2-\alpha^2)(\beta\delta-\alpha\gamma)$	$(\alpha^2+\beta^2)(\beta\delta+\alpha\gamma)$

Les deux premiers, parmi les trois que contient le plan $x_1 = 0$, sont tels que les sommes de leurs coordonnées respectives sont égales aux coordonnées du troisième; ces trois points sont donc en ligne droite, et il en est de même pour les trois points situés dans le plan $x_2 = 0$. Ces deux droites appartiennent à la surface, puisque chacune la coupe en six points.

Or, si l'on fait, par exemple, $x_1 = 0$, dans l'équation (6), on trouve deux coniques dont l'une doit se réduire à une droite double; ceci suffit pour obtenir toutes les relations énoncées plus haut et que je rappelle

$$A_1 = 2A^2, \qquad B_1 = AB, \qquad C_1 = AC,$$
$$-D_1 - 2F_1 = 2B^2, \qquad -D_1 - 2F_1 = 2C^2, \qquad G_1 = BC.$$

Elles permettent d'écrire l'équation (6) sous la forme

$$\begin{aligned}(7) \qquad & [2A^2(x_1^2 + x_2^2) - 4AB(x_1x_4 - x_2x_3) + 4AC(x_1x_3 - x_2x_4) \\ & + (B^2 + C^2)(x_3^2 + x_4^2) - 4BCx_3x_4 + (E_1 + F_1)x_1x_2]^2 \\ & = (B^2 - C^2)^2[x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2(x_3^2 + x_4^2) + (x_3^2 - x_4^2)^2].\end{aligned}$$

Je rappelle aussi que la considération de la relation canonique entre les carrés de quatre fonctions thêta a conduit à mettre ces coefficients sous la forme

$$A_1 = 2a_1^2, \qquad B_1 = 2a_1(a_2 + a_3),$$
$$C_1 = -2a_1(a_2 - a_3), \qquad D_1 + E_1 + F_1 = -8(a_2^2 + a_3^2),$$
$$G_1 = -4(a_2^2 - a_3^2), \qquad E_1 + F_1 = -4(a_2^2 + a_3^2 + \lambda), \qquad E_1 - F_1 = 16a_2a_3.$$

On peut dire que les paramètres sont $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ou bien $a_1, a_2, a_3, \sqrt{\lambda}$ et l'on a ainsi les expressions des coefficients de la surface en fonction homogène de ces deux systèmes de paramètres. Il sera particulièrement commode d'avoir l'équation sous la forme

$$\begin{aligned}(8) \quad & [a_1^2(x_1^2 + x_2^2) - 4a_1(a_2 + a_3)(x_1x_4 - x_2x_3) \\ & - 4a_1(a_2 - a_3)(x_1x_3 - x_2x_4) - 2(a_2^2 + a_3^2 + \lambda)x_1x_2 \\ & + 4(a_2^2 + a_3^2)(x_3^2 + x_4^2) + 8(a_2^2 - a_3^2)x_3x_4]^2 \\ & = 64a_2^2a_3^2[x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2(x_3^2 + x_4^2) + (x_3^2 - x_4^2)^2].\end{aligned}$$

38. J'ai déjà indiqué les positions de six des points doubles; on sait d'autre part que, parmi les huit demi-périodes nouvelles, quatre annulent Θ_{00} et Θ_{01}, les quatre autres annulent Θ_{10} et Θ_{11}; par conséquent, quatre points doubles sont dans le plan $x_3 = 0$ et quatre dans le plan $x_4 = 0$. Chacun de ces plans coupe la surface suivant deux coniques.

Les quatre coordonnées sont nulles pour $u = 0$, $v = 0$ et $u = \frac{a}{2}$, $v = \frac{b}{2}$; il y a deux courbes unicursales singulières; pour trouver la courbe correspondant à $u=0$, $v=0$, je remarque que ces valeurs de u, v annulent L et P et font prendre à M et N des valeurs égales. On a donc

$$\begin{aligned}
L &= \qquad\quad c_1 u^2 + d_1 uv + e_1 v^2 + \ldots,\\
M &= \quad b_2 + c_2 u^2 + d_2 uv + e_2 v^2 + \ldots,\\
N &= - b_2 + c_3 u^2 + d_3 uv + e_3 v^2 + \ldots,\\
P &= \qquad\quad c_4 u^2 + d_4 uv + e_4 v^2 + \ldots.
\end{aligned}$$

On voit ainsi que x_1 est d'ordre 4, x_2, x_3, x_4 étant d'ordre 2. Cette courbe unicursale est donc située dans le plan $x_1=0$; c'est une conique. D'ailleurs, la courbe $L^2-P^2=0$ est une conique, car la demi-période $0,0$ abaisse le degré de quatre unités et la demi-période $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ de deux unités; d'autre part, le plan $x_1=0$ contient une conique et deux fois la droite des trois points doubles; c'est donc cette conique qui est la courbe unicursale singulière, $L^2-P^2=0$ étant la droite des trois points doubles. De même, il y a une autre conique courbe unicursale singulière dans le plan $x_2=0$ et

$$M^2-N^2=0$$

représente la droite des trois points doubles. La droite située dans le plan $x_1=0$ rencontre la conique du plan $x_2=0$ et inversement.

39. Je vais maintenant m'attacher à démontrer un résultat fort important :

La propriété énoncée pour cette surface du quatrième degré à quatorze points doubles est caractéristique.

La surface générale du quatrième degré à quatorze points doubles contient cinq paramètres; le fait de supposer que deux groupes de trois points doubles sont en ligne droite abaisse le nombre des paramètres à trois.

Je m'appuierai dans ce qui va suivre sur des résultats que l'on trouvera développés dans Kummer, *Math. Abhand. d. K. Ak. der Wis. zu Berlin*, 1866, p. 1; Cayley, *Proc. of the Lond. math. Soc.*, vol. III, 1869-1871, p. 234 et *Coll. math. papers*, vol. VII, p. 264; ROHN, *Math. Ann.*, t. XXIX, p. 81.

Je les reproduis dans la forme sous laquelle ils sont exposés par Kummer. L'équation générale de la surface du quatrième degré à quatorze points doubles étant mise sous la forme

$$\sqrt{pq'}+\sqrt{p'q}+\sqrt{mzt}=0,$$

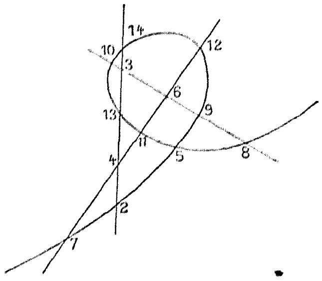
les points doubles sont les suivants (m est une constante) :

1...	$p=p'=z=0$	6...	$p=p'=t=0$	11...	$\begin{cases} p'=q=0 \end{cases}$
2...	$q'=q=z=0$	7...	$q'=p'=t=0$	12...	$\begin{cases} pq'-mzt=0 \end{cases}$
3...	$p=q=z=0$	8...	$p=q=t=0$	13...	$\begin{cases} z=t=0 \end{cases}$
4...	$q'=p'=z=0$	9...	$\begin{cases} p=q'=0 \end{cases}$	14...	$\begin{cases} pq'-p'q=0 \end{cases}$
5...	$q'=q=t=0$	10...	$\begin{cases} qp'-mzt=0 \end{cases}$		

Le cône circonscrit ayant son sommet en l'un des huit premiers points se décompose en trois plans et un cône du troisième degré à génératrice double; le cône circonscrit ayant son sommet en l'un des six derniers points se décompose en deux plans et deux cônes du second degré.

Je représente la trace du cône qui a pour sommet le point 1, en marquant par les numéros correspondants les perspectives des points

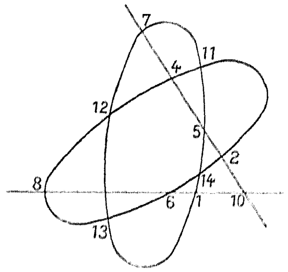
Fig. 1.



doubles. Les positions des trois droites et de la cubique ne sont pas arbitraires, mais ceci n'a aucune importance pour le raisonnement actuel. Si deux points doubles sont en ligne droite avec le point 1, deux des points marqués sur la figure doivent coïncider; mais on s'aperçoit facilement qu'il est impossible que deux seulement viennent en coïncidence; par conséquent, les huit premiers points conduisant évidemment aux mêmes conclusions, il est impossible de comprendre l'un d'eux dans l'un des triplets.

Je représente de même la trace du cône circonscrit qui a pour sommet le point 9. Si deux points doubles sont en ligne droite avec le point 9, deux des points de la figure doivent coïncider; ce ne peuvent d'ailleurs être que deux des points portant les cinq derniers

Fig. 2.



numéros; 10 ne peut être confondu avec aucun des quatre autres; il reste donc à réunir deux des points 11, 12, 13, 14, en supposant par conséquent les deux coniques tangentes. Je vais faire la détermination analytique d'une telle figure.

40. Je rappelle que les deux coniques sont tangentes doublement et les deux droites simplement à une même conique C; on trouve bien facilement que les coniques bitangentes à deux coniques tangentes en un point se partagent en deux séries, l'une formée de coniques qui ne passent pas par le point de contact, l'autre formée de coniques passant par ce point et tangentes à la tangente commune. Or le cône qui a pour sommet le point 9 et pour directrice la conique C n'est autre que le cône des tangentes du point double 9; si C ne passe pas par le point de contact, le cône des tangentes ne contient pas la droite qui passe par le point 9; je considère alors une section par un plan mené par cette droite; ce plan coupe la surface suivant la droite et une cubique qui passe par les points 11, 13 et a un point double en 9; elle se décompose en une conique et une droite

qui se confond nécessairement avec la droite 9, 11, 13; par conséquent, un plan quelconque passant par cette droite la contient deux fois; ceci n'ayant pas lieu en général, on doit choisir l'autre série de coniques bitangentes.

Ceci posé, soient :

$4xy - z^2 = 0$ la conique;
$x = 0$, $y = 0$ les deux tangentes passant par le point 10;
$x + y + z = 0$ la tangente au point 11; ce point est aussi sur la droite $x - y = 0$.

Les deux coniques ont alors pour équations

$$(x+y+z)(ax+by+cz)+(x-y)^2=0,$$
$$(x+y+z)(a'x+b'y+c'z)+(x-y)^2=0.$$

La seconde droite du couple de sécantes communes qui comprend $x + y + z = 0$ est

$$(a-a')x+(b-b')y+(c-c')z=0;$$

elle doit passer par le point 10 : $x = y = 0$; donc $c = c'$.

Les deux coniques doivent être bitangentes à $4xy - z^2 = 0$ et l'on connaît déjà un point de contact; en écrivant que les deux autres points d'intersection se confondent, on a les conditions

$$(c-1)-(a+1)(b+1)=0, \qquad (c-1)-(a'+1)(b'+1)=0;$$

ce qui conduit à poser

$$a+1=\lambda, \qquad a'+1=\mu, \qquad c-1=\nu.$$

Les équations des deux coniques s'écrivent alors sous l'une des formes suivantes :

$$\begin{cases} (x+y+z)(\lambda^2 x+\nu^2 y+\lambda\nu z)-\lambda(4xy-z^2)=0, \\ (x+y+z)(\mu^2 x+\nu^2 y+\mu\nu z)-\mu(4xy-z^2)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} [2\lambda x+2\nu y+(\lambda+\nu)z]^2+[(\lambda-\nu)^2-4\lambda](4xy-z^2)=0, \\ [2\mu x+2\nu y+(\mu+\nu)z]^2+[(\mu-\nu)^2-4\mu](4xy-z^2)=0. \end{cases}$$

La trace du cône circonscrit par le point 9 a donc pour équation

$$xy[(x+y+z)(\lambda^2 x+\nu^2 y+\lambda\nu z)-\lambda(4xy-z^2)]$$
$$\times[(x+y+z)(\mu^2 x+\nu^2 y+\mu\nu z)-\mu(4xy-z^2)]=0.$$

Elle dépend de trois paramètres comme la surface hyperelliptique dont l'équation a été donnée plus haut; par conséquent :

Toute surface du quatrième degré à quatorze points doubles parmi lesquels six se partagent en deux groupes de trois points en ligne droite est une surface hyperelliptique.

41. L'étude des courbes tracées sur cette surface repose sur le théorème suivant :

Soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ l'équation d'une surface de degré p; l'équation hyperelliptique de sa courbe d'intersection avec la surface à quatorze points doubles s'obtient en remplaçant les x_i par leurs valeurs en u, v; soit $f(u, v)=0$ cette équation; le premier membre est une fonction thêta paire, d'ordre $4p$, relative au Tableau T_2, de caractéristique nulle admettant les demi-périodes $(11')$, $(31')$ comme zéros d'ordre $2p$.

La réciproque est vraie :

Toute fonction thêta paire d'ordre $4p$, relative au Tableau T_2, de caractéristique nulle, admettant les demi-périodes $(11')$, $(31')$ comme zéros d'ordre $2p$, représente, lorsqu'on l'égale à zéro, l'intersection complète de la surface à quatorze points doubles et d'une surface de degré p (n° 14).

Le théorème analogue pour la surface de Kummer a permis de donner une classification complète des courbes tracées sur cette surface; il n'est plus de même ici, et la cause en est dans cette condition imposée au premier membre de l'équation de la courbe d'admettre deux demi-périodes comme zéros d'ordre $2p$; lorsqu'on se trouvera en présence d'une courbe $\theta(u, v)=0$, il faudra chercher une fonction θ_1 d'un ordre convenable, de même caractéristique et de même parité, et qui puisse être annulée pour les deux demi-périodes un nombre suffisant de fois. Il est bien évident qu'il est impossible de rien dire qui soit général.

42. Je vais donner quelques indications sur les courbes obtenues en égalant à zéro les fonctions d'ordre 2 et 4.

Je rappelle que la surface a deux courbes unicursales singulières correspondant aux demi-périodes (11′), (31′) et quatorze points doubles; (12′), (13′), (14′) et (32′), (33′), (34′) forment deux triplets en ligne droite; (21′), (22′), (23′), (24′) sont dans $x_4 = 0$; (41′), (42′), (43′), (44′) sont dans $x_3 = 0$.

En consultant le Tableau des fonctions d'ordre 2, on voit que, pour chacune des douze dernières caractéristiques, il y a une fonction de chaque parité; on a ainsi vingt-quatre courbes de la surface. Les fonctions qui s'annulent pour (11′), (31′) donnent des courbes d'ordre $\frac{2.2.4 - 2.1.4}{2.2} = 2$. Il y a six de ces coniques; les fonctions qui s'annulent pour une seule demi-période donnent des courbes d'ordre 3, il y a douze de ces cubiques; enfin celles qui ne sont nulles pour aucune demi-période donnent six quartiques.

Pour les caractéristiques (34′) et (14′), on obtient deux faisceaux linéaires de cubiques et, pour les caractéristiques (44′) et (24′), on obtient deux faisceaux linéaires de quartiques.

43. *Coniques*. — Chaque conique passe par six points doubles; elle est la courbe de contact d'un plan tangent singulier. Voici ces plans singuliers et les points doubles qu'ils contiennent :

43′........	(12′), (32′), (21′), (22′), (43′), (44′)
23′........	(12′), (32′), (23′), (24′), (41′), (42′)
42′........	(13′), (33′), (21′), (23′), (42′), (44′)
22′........	(13′), (33′), (22′), (24′), (41′), (43′)
41′........	(14′), (34′), (21′), (24′), (42′), (43′)
21′........	(14′), (34′), (22′), (23′), (41′), (44′)

Les équations de ces plans sont faciles à trouver; il suffit d'élever au carré la fonction thêta correspondante et d'exprimer ce carré au moyen des coordonnées d'un point de la surface. On peut aussi introduire les coordonnées du point (21′) et, par suite, en même temps, celles des sept autres points doubles du second groupe; il suffit pour cela de poser

$$\frac{\Theta_{00}^{(2)}\left(\frac{\pi i}{2}, 0\right)}{\varepsilon} = \frac{\Theta_{01}^{(2)}\left(\frac{\pi i}{2}, 0\right)}{\eta};$$

ε, η sont liés à α, β, γ, δ par la relation

$$a(\varepsilon^4 + \eta^4) + 2b\varepsilon^2\eta^2 = 0.$$

La seule considération de ces plans singuliers conduit à séparer les quatorze points doubles en deux groupes : d'un côté, les deux triplets; de l'autre, les deux quaternes.

Par un point du premier groupe passent deux plans singuliers; par un point du second groupe passent trois plans singuliers. Il en résulte que si l'on considère le cône circonscrit ayant son sommet en l'un des points doubles, il se décompose, pour un point du premier groupe, en deux plans et deux cônes du second degré et, pour un point du second groupe, en trois plans et un cône du troisième degré à arête double.

Les deux plans singuliers passant par un point d'un triplet passent aussi par un même point de l'autre triplet; on a ainsi trois paires de plans singuliers. Les trois plans singuliers passant par un point d'un quaterne forment un trièdre sur chacune des arêtes duquel est un point singulier de l'autre quaterne; le quatrième point de ce quaterne donne en le joignant au sommet du trièdre l'arête double du cône du troisième ordre; il y a quatre de ces arêtes : (21'), (41'); (22'), (42'); (23'), (43'); (24'), (44'). Par deux points d'un même quaterne passe un seul plan singulier; par deux points appartenant à deux quaternes différents passent deux plans singuliers, sauf pour les couples situés sur les arêtes doubles.

Chaque conique rencontre chaque courbe unicursale singulière en un point; celle-ci est tangente en ce point au plan de la conique.

44. *Cubiques.* — Je considère d'abord les douze cubiques. Chaque cubique passe par sept points doubles; il suffit de lire le Tableau pour en avoir la nomenclature; elles sont données par les fonctions

de caractéristiques $33'$, $13'$, $32'$, $12'$, $31'$, $11'$; on peut les diviser en deux familles : celles qui admettent pour zéro $(11')$ et celles qui admettent pour zéro $(31')$.

Chaque famille comprend six cubiques; deux cubiques de même famille se coupent en trois points singuliers; deux cubiques de famille différente, en quatre points singuliers. Elles n'ont pas d'autre point commun. Une cubique quelconque coupe une conique quelconque en trois points tous singuliers.

Par un point double du premier groupe passent six cubiques, deux d'une famille, quatre de l'autre. Par un point du second groupe passent six cubiques, trois de chaque famille.

Je passe maintenant aux deux faisceaux. On peut rattacher chaque faisceau à une des familles précédentes. Une cubique quelconque d'un des faisceaux passe par les trois points d'un triplet; c'est donc une cubique plane : elle est la section de la surface par un plan passant par l'une des deux droites qui portent les triplets.

Je considère par exemple la cubique

$$\Theta = \lambda_1 \Theta_{00} + \lambda_2 \Theta_{01} = 0,$$

la caractéristique des fonctions étant $31'$. Si l'on écrit que l'équation précédente est satisfaite pour $(11')$, le degré de la courbe s'abaisse à un; on obtient donc ainsi une droite qui ne peut être autre que celle qui porte le triplet, et dont l'équation est par conséquent

$$\Theta_1 = \Theta_{01}(0,0).\Theta_{00}(u, v) - \Theta_{00}(0,0).\Theta_{01}(u, v) = 0,$$

$\Theta\Theta_1$ est une fonction d'ordre 4 à caractéristique nulle, ayant comme zéros doubles $(11')$ et $(31')$; c'est donc une fonction linéaire et homogène de x_1, x_2, x_3, x_4. Θ_1^2 a comme zéro double $(31')$ et comme zéro quadruple $(11')$; elle n'est autre que x_1 à un facteur près.

Je reviens aux douze cubiques considérées en premier lieu; soit $\Theta = 0$ l'équation de l'une d'elles, de la famille qui admet pour zéro $(31')$. Le produit $\Theta\Theta_1$ est une fonction d'ordre 4, à caractéristique non nulle, admettant comme zéros doubles $(11')$ et $(31')$: par conséquent la droite et la cubique forment la courbe de contact d'une certaine quadrique avec la surface. Cette quadrique est un cône. En effet, je considère par exemple la cubique $\Theta_{00}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ qui passe par les points (13′), (14′), (32′), (23′), (24′), (43′), (44′) et je lui associe la droite $\Theta_1 = 0$ qui passe par les points (32′), (33′), (34′). Les deux fonctions thêta qui, égalées à zéro, sont les équations de ces deux courbes, ont comme zéros communs les demi-périodes (11′), (31′); il y a donc, en outre, $\frac{2.2.2 - 2.2}{2.2} = 1$ zéro commun; la droite est ainsi une sécante double de la cubique, et il y a un cône du second degré de sommet (32′) qui contient la droite et la cubique. Ce cône coupe en outre la surface suivant une quartique qui passe une fois par les points doubles situés sur le cône et deux fois par son sommet; or l'équation hyperelliptique de l'ensemble de la droite, de la cubique et de la quartique est $\Theta_0 = 0$, Θ_0 étant une fonction d'ordre 8, de caractéristique nulle; l'équation de la droite et de la cubique est $\Theta_{00}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.\ \Theta_1 = 0$; le premier membre est une fonction d'ordre 4, de caractéristique $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; donc l'équation de la quartique s'obtient en annulant une fonction d'ordre 4, de caractéristique $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ qui satisfait aux conditions énoncées et qui, en outre, admet comme zéros doubles (11′) et (31′).

Il n'y a qu'une quartique de cette espèce; la quartique considérée ne peut en être différente et se décompose en la cubique et la droite précédentes.

Le cône de sommet (32′), ayant pour directrice la cubique

$$\Theta_{00}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

est tangent à la surface le long de cette cubique et de la droite qui passe par ce point.

Les douze cubiques gauches tracées sur la surface sont les courbes de contact des douze cônes du second degré circonscrits des six points doubles du premier groupe. Chacune de ces courbes de contact se complète par la droite menée par le sommet du cône; pour obtenir les deux cônes qui ont pour sommet le même point, on prend les deux cubiques contenant ce seul point de son triplet et deux points de l'autre triplet.

Les six cônes qui ont pour sommet les trois points d'un triplet sont tangents au plan tangent le long de la droite qui porte ce triplet. Au contraire, si l'on considère par exemple la cubique $\Theta_{00}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ et le cône qui l'a pour directrice avec le sommet (13′), il n'est pas tangent au plan tangent le long de la droite (12′), (13′), (14′), et, en effet, le cône de sommet (14′) qui a pour directrice cette cubique le coupe évidemment suivant la cubique elle-même.

45. *Quartiques.* — On a six quartiques fixes et deux faisceaux linéaires. Ce ne sont pas des biquadratiques; chaque faisceau donne par particularisation une courbe décomposée en deux coniques.

46. Les fonctions d'ordre 4 donnent, en dehors des sections planes, des courbes qui sont, en général, de degré 8, 7 ou 6, suivant qu'elles s'annulent pour aucune des demi-périodes (11′), (31′), pour une seule ou pour les deux. Mais on peut particulariser les fonctions de manière à abaisser le degré; les fonctions impaires de caractéristique nulle, pour lesquelles on ne peut rien faire, étant mises à part, chaque fonction générale dépend de trois paramètres; pour celles qui ne s'annulent pas pour (11′), (31′), on peut leur donner des zéros doubles pour chacune de ces demi-périodes; il reste un paramètre et le degré s'est abaissé à 4; il y a sept de ces faisceaux parmi lesquels six contiennent quatre points de chaque groupe et le septième, les huit points du second groupe; pour les fonctions qui s'annulent pour (11′) par exemple, on peut leur donner (11′) comme zéro triple et (31′) comme zéro double; les courbes ainsi obtenues sont des cubiques au nombre de seize se partageant en deux familles; enfin, pour les fonctions qui s'annulent pour les deux demi-périodes, on peut leur donner l'une d'elles comme zéro triple, il reste un paramètre et la courbe est de degré 4; il y a sept de ces faisceaux.

47. *Cubiques.* — L'équation d'une cubique étant $\theta(u, v) = 0$, la fonction θ^2 est paire, d'ordre 8, de caractéristique nulle et admet les

demi-périodes $(11')$ et $(31')$ comme zéros d'ordre 4 au moins; chaque cubique est donc la courbe de contact d'une quadrique avec la surface; l'intersection se complète par la conique singulière correspondant à la demi-période qui est zéro triple de θ. On a donc l'énoncé suivant :

Par chaque conique singulière de la surface, on peut mener huit quadriques inscrites tout le long d'une cubique qui passe par sept points doubles.

Les seize cubiques sont ainsi réparties en deux familles.

48. *Quartiques.* — Je considère d'abord les faisceaux $\theta_1 + \rho\theta_2 = 0$, θ_1 et θ_2 admettant $(11')$ et $(31')$ comme zéros doubles. La fonction $(\theta_1 + \rho\theta_2)(\theta_1 + \rho'\theta_2)$ est paire, d'ordre 8, de caractéristique nulle et admet les demi-périodes $(11')$ et $(31')$ comme zéros quadruples. Les deux courbes $\theta_1 + \rho\theta_2 = 0$, $\theta_1 + \rho'\theta_2 = 0$ sont donc sur une même quadrique; ce sont des biquadratiques; en particulier, la courbe $(\theta_1 + \rho\theta_2)^2 = 0$ est sur une quadrique. On a donc l'énoncé suivant :

Il existe sept familles de quadriques inscrites à la surface le long de biquadratiques passant par huit points doubles; deux de ces courbes passant par les mêmes points sont sur une même quadrique.

Les quatorze points doubles se partagent ainsi en sept groupes de huit points par lesquels on peut mener une infinité double de quadriques [1]. Pour cette répartition, le Tableau des fonctions d'ordre 4 donne les résultats suivants : un premier groupe est constitué par les huit points d'intersection de trois plans singuliers; six autres groupes s'obtiennent en considérant deux paires de plans singuliers : elles se coupent suivant quatre droites, on en choisit deux qui ne sont pas dans un même plan, elles contiennent quatre points qui, avec les quatre points situés sur les axes des deux paires, forment un des groupes cherchés.

---

[1] C'est ce que les géomètres allemands appellent *ein syzygetisches Punktsystem*.

Je considère les faisceaux $\theta_1 + \rho\theta_2 = 0$, θ_1, θ_2 admettant $(11')$ comme zéro simple et $(31')$ comme zéro triple : je considère en même temps le faisceau $\theta'_1 + \rho'\theta'_2 = 0$ obtenu en partant des mêmes fonctions générales, mais en donnant $(11')$ comme zéro triple et $(31')$ comme zéro simple; le produit $(\theta_1 + \rho\theta_2)(\theta'_1 + \rho'\theta'_2)$ est une fonction d'ordre 8, paire, de caractéristique nulle, admettant $(11')$ et $(31')$ comme zéros quadruples; les deux courbes $\theta_1 + \rho\theta_2 = 0$, $\theta'_1 + \rho'\theta'_2 = 0$ sont donc sur une même quadrique et les faisceaux sont composés de biquadratiques. Chaque faisceau comprenant deux familles, on a donc l'énoncé suivant :

Il existe quatorze familles de biquadratiques tracées sur la surface; les courbes d'une même famille passent par six points doubles; par ces six points passent les courbes d'une autre famille associée à la précédente. Une courbe d'une famille et une de la famille associée sont sur une même quadrique.

49. Enfin, je vais donner quelques indications sur les sections planes univoques. Elles ont une équation de la forme

$$\theta(u - \lambda, v - \mu)\,\theta(u + \lambda, v + \mu) = 0,$$

$\theta(u, v)$, étant une fonction normale d'ordre 2, de caractéristique nulle, relative au Tableau T_2; elle est donc de la forme $\Theta_{00} + \rho\Theta_{01}$; elle contient trois paramètres ρ, λ, μ; on peut l'annuler pour $(11')$ et $(31')$, ces zéros sont simples et ce sont aussi des zéros simples de $\theta(u + \lambda, v + \mu)$; par conséquent l'équation d'une section plane univoque est de la forme indiquée avec les conditions :

$$\Theta_{00}(\lambda, \mu) + \rho\Theta_{01}(\lambda, \mu) = 0, \qquad \Theta_{00}\left(\frac{a}{2} + \lambda, \frac{b}{2} + \mu\right) + \rho\Theta_{01}\left(\frac{a}{2} + \lambda, \frac{b}{2} + \mu\right) = 0.$$

Au voisinage de $u = v = 0$, la forme des termes du premier degré dans les deux fonctions $\theta(u - \lambda, v - \mu)$ et $\theta(u + \lambda, v + \mu)$ est la même; par conséquent, les deux points où la conique $(11')$ coupe le plan de la section sont confondus; de même pour l'autre conique. On a donc l'énoncé suivant :

Les plans tangents aux deux coniques singulières découpent les sections planes univoques.

Ces courbes sont de genre 3; parmi les trois intégrales de première espèce qui leur appartiennent, $\int du$ et $\int dv$ ont T_2 comme Tableau de périodes.

50. Je vais maintenant établir entre les fonctions du second ordre et les produits de deux fonctions du premier ordre des relations qui me permettront d'étendre les formules d'inversion aux fonctions du second ordre et en même temps de calculer les équations des plans singuliers de la surface qui vient d'être étudiée.

Je rappelle que, sur la surface de Kummer, les courbes ayant pour équations les fonctions thêta d'ordre 2, d'une même caractéristique non nulle et d'une même parité sont des biquadratiques (H., 36). Parmi les biquadratiques d'une même famille sont quatre couples de deux coniques formant un octaèdre de Göpel. Les quatre produits de deux fonctions du premier ordre ainsi introduits s'expriment linéairement au moyen des deux fonctions du second ordre de la famille; il est donc possible de trouver l'expression de chacune des soixante fonctions du second ordre à caractéristique non nulle sous forme de fonction linéaire de produits de deux fonctions du premier ordre. L'inversion de celles-ci étant effectuée, l'inversion de celles-là l'est aussi.

Quant à l'inversion des fonctions du second ordre à caractéristique nulle, elle est immédiate, car chacune d'elles est fonction linéaire des carrés de quatre fonctions du premier ordre formant par exemple un groupe de Rosenhain.

51. Je vais développer les calculs pour les fonctions impaires de caractéristique ordinaire $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; je serai en même temps conduit à l'équation des plans singuliers $43'$ et $23'$.

D'après la formule générale de multiplication de deux fonctions du premier ordre, on a les relations [1] :

$$\vartheta\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}(u,v)\,\vartheta\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}(u,v)=\Theta^{(2)}_{00}\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}(0,0)\,\Theta_{11}\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}(u,v)-\Theta_{10}\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}(0,0)\,\Theta_{01}\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$$

$$\vartheta\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}(u,v)\,\vartheta\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}(u,v)=\Theta_{00}\,\Theta_{11}(u,v)+\Theta_{10}\Theta_{01}(u,v),$$

$$\vartheta\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}(u,v)\,\vartheta\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}(u,v)=\Theta_{00}\,\Theta_{01}(u,v)-\Theta_{10}\Theta_{11}(u,v),$$

$$\vartheta\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}(u,v)\,\vartheta\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}(u,v)=\Theta_{00}\,\Theta_{01}(u,v)+\Theta_{10}\Theta_{11}(u,v).$$

Je pose

$$\varepsilon_{13}=\Theta_{00}\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}(0,0),\qquad \eta_{13}=\Theta_{10}\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}(0,0),$$

et les relations s'écrivent :

$$\begin{aligned}
2\,\varepsilon_{13}\,\Theta_{11}(u,v)&=\vartheta_{11'}(u,v)\,\vartheta_{12'}(u,v)+\vartheta_{21'}(u,v)\,\vartheta_{22'}(u,v),\\
2\,\eta_{13}\,\Theta_{11}(u,v)&=-\vartheta_{31'}(u,v)\,\vartheta_{32'}(u,v)+\vartheta_{41'}(u,v)\,\vartheta_{42'}(u,v),\\
2\,\eta_{13}\,\Theta_{01}(u,v)&=-\vartheta_{11'}(u,v)\,\vartheta_{12'}(u,v)+\vartheta_{21'}(u,v)\,\vartheta_{22'}(u,v),\\
2\,\varepsilon_{13}\,\Theta_{01}(u,v)&=\vartheta_{31'}(u,v)\,\vartheta_{32'}(u,v)+\vartheta_{41'}(u,v)\,\vartheta_{42'}(u,v).
\end{aligned}$$

J'en déduis d'abord les valeurs de ε_{13}, η_{13} :

$$\frac{\varepsilon_{13}}{\eta_{13}}=\frac{\vartheta_{11'}\vartheta_{12'}+\vartheta_{21'}\vartheta_{22'}}{-\vartheta_{31'}\vartheta_{32'}+\vartheta_{41'}\vartheta_{42'}}=\frac{\vartheta_{31'}\vartheta_{32'}+\vartheta_{41'}\vartheta_{42'}}{-\vartheta_{11'}\vartheta_{12'}+\vartheta_{21'}\vartheta_{22'}},$$

d'où, en prenant u, v égal à (13′),

$$\frac{\varepsilon_{13}}{\eta_{13}}=\frac{c_{14}c_{23}}{c_{13}c_{24}-c_{12}c_{34}}=\frac{c_{13}c_{24}+c_{12}c_{34}}{c_{14}c_{23}},\qquad 2\,\varepsilon_{13}\,\eta_{13}=c_{14}c_{23},$$

$$2\,\varepsilon_{13}^2=c_{13}c_{24}+c_{12}c_{34},\qquad 2\,\eta_{13}^2=c_{13}c_{24}-c_{12}c_{34}.$$

Ceci posé, et en utilisant les formules d'inversion des seize fonc-

---

(1) *Voir* l'Appendice.

tions du premier ordre, on a

$$\frac{\mathfrak{S}_i^2(u,v)}{(z-e_i)(\zeta-e_i)}$$

$$= \frac{\mathfrak{S}_{rs}^2(u,v)(z-\zeta)^2}{c_{rs}^2\left[\sqrt{(z-e_6)(z-e_r)(z-e_s)(\zeta-e_\alpha)(\zeta-e_\beta)(\zeta-e_\gamma)}-\sqrt{(\zeta-e_6)(\zeta-e_r)(\zeta-e_s)(z-e_\alpha)(z-e_\beta)(z-e_\gamma)}\right]^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2(c_{13}c_{24}+c_{12}c_{34})}\,\Theta_{01}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}(u,v)(z-\zeta)}{[c_3c_{35}(z-e_3)+c_2c_{25}(z-e_2)]\sqrt{(z-e_6)(z-e_5)(\zeta-e_1)(\zeta-e_2)(\zeta-e_3)(\zeta-e_4)}-[c_3c_{35}(\zeta-e_3)+c_2c_{25}(\zeta-e_2)]\sqrt{(\zeta-e_6)\ldots}}$$

$$= \frac{\sqrt{2(c_{13}c_{24}-c_{12}c_{34})}\,\Theta_{11}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}(u,v)(z-\zeta)}{[c_2c_{25}(z-e_2)-c_3c_{35}(z-e_3)]\sqrt{(z-e_6)(z-e_5)(\zeta-e_1)(\zeta-e_2)(\zeta-e_3)(\zeta-e_4)}-[c_2c_{25}(\zeta-e_2)-c_3c_{35}(\zeta-e_3)]\sqrt{(\zeta-e_6)\ldots}}$$

52. Je reviens maintenant à la formule fondamentale

$$2\eta_{13}\Theta_{01}(u,v)=\mathfrak{S}_{21'}\mathfrak{S}_{22'}-\mathfrak{S}_{11'}\mathfrak{S}_{12'}.$$

On sait d'autre part que $\Theta_{01}(u,v)=0$ est l'équation d'une conique de contact; donc $\Theta_{01}^2(u,v)$ est une fonction linéaire de $x_1=L^2-P^2$, $x_2=N^2-M^2$, $x_3=LM$, $x_4=NP$. En d'autres termes, on a

$$4\eta_{13}^2\Theta_{01}^2(u,v)=Ax_1+Bx_2+Cx_3+Dx_4,$$

A, B, C, D étant des constantes que je vais déterminer en prenant u, v égaux à des demi-périodes.

En choisissant les demi-périodes (12′), (32′), (13′), (33′), on a les équations

$$\begin{aligned}
0 &= 4Ac_{25}^2c_{35}^2+Cc_{15}^2(c_{25}^2+c_{35}^2)+Dc_{15}^2(c_{25}^2-c_{35}^2),\\
0 &= -4Bc_{25}^2c_{35}^2+Cc_{15}^2(c_{25}^2-c_{35}^2)+Dc_{15}^2(c_{25}^2+c_{35}^2),\\
4(c_{13}^2c_{24}^2-c_{12}^2c_{34}^2) &= 4Ac_{12}^2c_{13}^2+Cc_{23}^2(c_{12}^2+c_{13}^2)-Dc_{23}^2(c_{12}^2-c_{13}^2),\\
4(c_{13}c_{24}-c_{12}c_{34})^2 &= -4Bc_{12}^2c_{13}^2-Cc_{23}^2(c_{12}^2-c_{13}^2)+Dc_{23}^2(c_{12}^2+c_{13}^2).
\end{aligned}$$

Elles donnent les coefficients A, B, C, D en fonction de α, β, γ, δ; je ne m'arrêterai pas à leur résolution.

En procédant de même sur les équations des autres coniques, on obtient les équations des six plans singuliers; par conséquent, on sait actuellement calculer l'équation de la surface à quatorze points doubles correspondant à un système de valeurs de α, β, γ, δ et l'on connaît les plans tangents suivant des coniques. On peut donc calculer les coordonnées des points doubles des deux quaternes qui n'étaient pas connues jusqu'à présent. En d'autres termes, on peut calculer en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les quantités désignées plus haut par

$$\varepsilon = \Theta_{00}\left(\frac{\pi i}{2}, 0\right), \qquad \eta = \Theta_{01}\left(\frac{\pi i}{2}, 0\right).$$

Enfin, la connaissance des coefficients A, B, C, D permet de donner une nouvelle forme de l'inversion de la fonction $\Theta_{01}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(u, v)$. On a, en effet,

$$\mathfrak{I}_1^2 = -\mathrm{N} - \mathrm{M}, \qquad \mathfrak{I}_2^2 = -\mathrm{L} - \mathrm{P}, \qquad \mathfrak{I}_3^2 = -\mathrm{L} + \mathrm{P}, \qquad \mathfrak{I}_{45}^2 = -\mathrm{N} + \mathrm{M};$$

d'où

$$x_1 = -\mathfrak{I}_2^2 \mathfrak{I}_3^2, \qquad x_2 = -\mathfrak{I}_1^2 \mathfrak{I}_{45}^2,$$
$$x_3 = \frac{(\mathfrak{I}_2^2 + \mathfrak{I}_3^2)(\mathfrak{I}_1^2 - \mathfrak{I}_{45}^2)}{4}, \qquad x_4 = \frac{(\mathfrak{I}_2^2 - \mathfrak{I}_3^2)(\mathfrak{I}_1^2 + \mathfrak{I}_{45}^2)}{4},$$

on peut donc écrire les rapports égaux

$$\frac{\mathfrak{I}_i^4(u, v)}{c_i^4(z - c_i)^2(\zeta - c_i)^2} = \frac{\mathfrak{I}_{rs}^4(u, v)(z - \zeta)^4}{c_{rs}^4\left[\sqrt{\ldots} - \sqrt{\ldots}\right]^4}$$
$$= \frac{2(c_{13}c_{24} - c_{12}c_{34})\Theta_{01}^2(u, v)}{-\mathrm{A}c_2^2c_3^2(z - c_2)(z - c_3)(\zeta - c_2)(\zeta - c_3) - \mathrm{B}\ldots}.$$

Les formules obtenues par cette méthode ne doivent pas différer des précédentes; elles ne s'appliquent qu'à six fonctions.

53. Le type de surface à quatorze points doubles qui vient d'être étudié est le seul dont les fonctions coordonnées sont paires, d'ordre 4, relatives au Tableau T_2, de caractéristique nulle, admettant deux demi-périodes comme zéros doubles; on pourrait prendre, en effet, deux des demi-périodes que j'ai appelées *nouvelles*, mais ceci ne donne pas un type différent, les six autres demi-périodes nouvelles donnant deux triplets de points en ligne droite; on pourrait aussi supposer que les fonctions coordonnées sont nulles, par exemple, pour les demi-périodes $(11')$ et $(21')$; une des formes des coordonnées de

cette surface est la suivante :

$$x_1 = (\delta\Theta_{10} - \gamma\Theta_{11})^2,$$
$$x_2 = (\delta\Theta_{10} - \gamma\Theta_{11})(\beta\Theta_{10} - \alpha\Theta_{11}),$$
$$x_3 = (\beta\Theta_{00} - \alpha\Theta_{01})(\eta\Theta_{00} - \varepsilon\Theta_{01}),$$
$$x_4 = (\gamma^2 + \delta^2)(\eta^2\Theta_{00}^2 - \varepsilon^2\Theta_{01}^2) - (\alpha^2\eta^2 - \beta^2\varepsilon^2)(\Theta_{10}^2 + \Theta_{11}^2),$$

ε et η étant les quantités définies par l'équation

$$\frac{\Theta_{00}\left(\frac{i\pi}{2}, 0\right)}{\varepsilon} = \frac{\Theta_{01}\left(\frac{i\pi}{2}, 0\right)}{\eta}$$

et qui sont liées à α, β, γ, δ par la relation

$$a(\varepsilon^4 + \eta^4) + 2b\varepsilon^2\eta^2 = 0.$$

On constate alors que les points $(22')$, $(23')$, $(24')$ sont sur la droite $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et que les points $(12')$, $(13')$, $(14')$ sont aussi en ligne droite. Cette surface n'est donc pas distincte de la précédente.

CHAPITRE VIII.

SUR UNE SURFACE DU QUATRIÈME DEGRÉ A TRENTE-DEUX DROITES.

54. Les fonctions thêta que je considérerai dans ce Chapitre sont relatives au Tableau de périodes

$$T_3 \left\{ \begin{matrix} \frac{2i\pi}{3}, & 0, & a, & b, \\ 0, & 2i\pi, & b, & c. \end{matrix} \right.$$

Les formules montrent que, parmi ces fonctions, celles qui sont impaires, d'ordre 6, de caractéristique nulle, sont au nombre de quatre. Elles s'annulent pour les seize demi-périodes. En les prenant pour coordonnées homogènes d'un point, la surface obtenue est d'ordre

$$\frac{2.6.6-1.16.3}{2.3}=12-8=4.$$

C'est cette surface que je me propose d'étudier. Je prendrai en général ses coordonnées sous la forme suivante :

$$x_1=\Theta_{01}-\Theta_{03},\qquad x_2=\Theta_{02}-\Theta_{04},\qquad x_3=\Theta_{31}-\Theta_{35},\qquad x_4=\Theta_{32}-\Theta_{34}.$$

Cette surface jouit de propriétés très remarquables dont je vais énoncer de suite les plus faciles à obtenir.

Elle admet, comme la surface de Kummer, seize collinéations fondamentales correspondant à l'addition au couple d'arguments u, v des seize demi-périodes. Voici le Tableau auquel donnent lieu ces transformations :

(11').	(21').	(12').	(22').	(31').	(41').	(32').	(42').	(13').	(23').	(14').	(24').	(33').	(43').	(34').	(44').
x_1	x_1	$-x_1$	$-x_1$	x_3	x_3	$-x_3$	$-x_3$	$-x_2$	$-x_2$	x_2	x_2	$-x_4$	$-x_4$	x_4	x_4
x_2	x_2	x_2	x_2	x_4	x_4	x_4	x_4	$-x_1$	$-x_1$	$-x_1$	$-x_1$	$-x_3$	$-x_3$	$-x_3$	$-x_3$
x_3	$-x_3$	$-x_3$	x_3	x_1	$-x_1$	$-x_1$	x_1	$-x_4$	x_4	x_4	$-x_4$	$-x_2$	x_2	x_2	$-x_2$
x_4	$-x_4$	x_4	$-x_4$	x_2	$-x_2$	x_2	$-x_2$	$-x_3$	x_3	$-x_3$	x_3	$-x_1$	x_1	$-x_1$	x_1

Ces seize homographies sont identiques à celles qui sont relatives à la surface de Kummer.

55. La surface admet seize courbes unicursales singulières correspondant aux seize demi-périodes qui annulent les quatre coordonnées; ce sont des droites, car ces zéros sont d'ordre *un*. Il y a donc seize droites sur la surface.

Je considère maintenant les fonctions thêta d'ordre *trois* qui s'annulent pour dix demi-périodes, il y en a une pour chaque caractéristique. En les égalant à zéro, on obtient des courbes de degré égal à $\frac{2.3.6-10.3}{2.3}=1$. On a ainsi seize autres droites dont chacune rencontre dix des premières.

Ce système de trente-deux droites peut être figuré symboliquement suivant les règles employées pour les points doubles et les plans singuliers de la surface de Kummer.

Soient α, β, γ, δ; α', β', γ', δ' deux séries de caractères; en combinant un caractère de la première série avec un de la seconde, par exemple $\beta\gamma'$, on obtient seize symboles. On représentera les seize droites courbes unicursales singulières par les symboles des demi-périodes correspondantes, c'est-à-dire par un symbole entre parenthèses, et les seize autres droites par les symboles des caractéristiques des fonctions correspondantes, symboles qui sont sans parenthèses (H., 18).

Ceci posé, la relation entre les trente-deux droites s'exprime ainsi : la droite $(\alpha\alpha')$ rencontre les droites

$$\alpha\alpha', \quad \beta\beta', \quad \beta\gamma', \quad \beta\delta', \quad \gamma\beta', \quad \gamma\gamma', \quad \gamma\delta', \quad \delta\beta', \quad \delta\gamma', \quad \delta\delta';$$

la droite $\alpha\alpha'$ rencontre les droites

$$(\alpha\alpha'), \quad (\beta\beta'), \quad (\beta\gamma'), \quad (\beta\delta'), \quad (\gamma\beta'), \quad (\gamma\gamma'), \quad (\gamma\delta'), \quad (\delta\beta'), \quad (\delta\gamma'), \quad (\delta\delta').$$

En d'autres termes, si à chacune des seize droites $(\alpha\alpha')$ on fait correspondre un des seize points doubles de la surface de Kummer, on peut faire correspondre à chacune des seize droites $\alpha\alpha'$ un plan singulier de la même surface, de telle façon que la droite $(\alpha\alpha')$ soit rencontrée par les dix droites correspondant aux dix plans singuliers qui qui ne passent pas par le point double $(\alpha\alpha')$. Cette liaison entre les deux systèmes de droites est évidemment réciproque, j'en montrerai plus loin la raison.

56. Je considère maintenant les cent soixante points de rencontre des droites deux à deux; ils forment une configuration remarquable composée de dix configurations de Kummer.

En effet, je pars des dix points situés sur la droite $44'$, par exemple. Ce sont les points de rencontre de cette droite avec

$$(44'), \quad (31'), \quad (32'), \quad (33'), \quad (21'), \quad (22'), \quad (23'), \quad (11'), \quad (12'), \quad (13'),$$

et j'ajoute aux arguments u, v une demi-période quelconque; la fonction $44'$ se transforme en une autre analogue de caractéristique $\alpha\alpha'$ et les dix points situés sur la droite $44'$ se transforment dans les dix points situés sur la droite $\alpha\alpha'$. On obtient ainsi dix configurations de

Kummer dont voici le Tableau :

	44'.	34'.	43'.	33'.	24'.	14'.	23'.	13'.	42'.	32'.	41'.	31'.	22'.	12'.	21'.	11'.
.	(44')	(34')	(43')	(33')	(24')	(14')	(23')	(13')	(42')	(32')	(41')	(31')	(22')	(12')	(21')	(11')
.	(31')	(41')	(32')	(42')	(11')	(21')	(12')	(22')	(33')	(43')	(34')	(44')	(13')	(23')	(14')	(24')
.	(32')	(42')	(31')	(41')	(12')	(22')	(11')	(21')	(34')	(44')	(33')	(43')	(14')	(24')	(13')	(23')
.	(33')	(43')	(34')	(44')	(13')	(23')	(14')	(24')	(31')	(41')	(32')	(42')	(11')	(21')	(12')	(22')
.	(21')	(11')	(22')	(12')	(41')	(31')	(42')	(32')	(23')	(13')	(24')	(14')	(43')	(33')	(44')	(34')
.	(22')	(12')	(21')	(11')	(42')	(32')	(41')	(31')	(24')	(14')	(23')	(13')	(44')	(34')	(43')	(33')
.	(23')	(13')	(24')	(14')	(43')	(33')	(44')	(34')	(21')	(11')	(22')	(12')	(41')	(31')	(42')	(32')
.	(11')	(21')	(12')	(22')	(31')	(41')	(32')	(42')	(13')	(23')	(14')	(24')	(33')	(43')	(34')	(44')
.	(12')	(22')	(11')	(21')	(32')	(42')	(31')	(41')	(14')	(24')	(13')	(23')	(34')	(44')	(33')	(43')
.	(13')	(23')	(14')	(24')	(33')	(43')	(34')	(44')	(11')	(21')	(12')	(22')	(31')	(41')	(32')	(42')

Il est bien clair d'ailleurs que la manière dont les points se partagent entre les dix configurations est complètement indépendante de la droite choisie à l'origine.

57. L'étude plus étendue des courbes tracées sur la surface que je vais faire maintenant repose sur le théorème suivant, qui se démontre par un raisonnement déja employé :

Toute fonction d'ordre $6p$, *relative au Tableau* T_3, *ayant la parité de* p, *de caractéristique nulle, admettant chaque demi-période comme zéro d'ordre* p, *représente, lorsqu'on l'égale à zéro, l'intersection complète de la surface avec une surface d'ordre* p.

Revenons aux fonctions thêta d'ordre 3, il y en a pour chaque caractéristique deux qui s'annulent pour six demi-périodes; on obtient ainsi seize faisceaux linéaires de cubiques. Ces courbes sont planes; en effet, si l'on multiplie la fonction thêta qui, égalée à zéro, est l'équation de l'une d'elles, par la fonction thêta de même caractéristique qui est l'équation d'une droite, le produit est une fonction impaire, d'ordre 6, de caractéristique nulle, s'annulant pour les seize demi-périodes; l'ensemble des deux courbes est donc dans un plan; d'ailleurs on peut voir directement que la droite et la cubique se coupent en trois points.

Soit $\Theta(u, v) = 0$ l'équation d'un faisceau de cubiques; si l'on écrit que $\Theta(u, v)$ s'annule pour une septième demi-période, ce zéro est double et le degré de la courbe s'abaisse à 2. Le plan correspondant coupe la surface suivant deux droites et une conique; je désignerai cette conique par l'ensemble des symboles des deux droites situées dans son plan. Ces coniques sont au nombre de 160.

On obtient seize autres faisceaux linéaires de cubiques planes de la façon suivante : soit $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$ l'équation d'une section plane quelconque, on peut lui donner une demi-période comme zéro triple, il reste un paramètre et le degré s'est abaissé à 3. Ce faisceau est composé de courbes rencontrant en trois points la droite correspondant à la demi-période choisie. En particularisant le paramètre, on retrouve les cent soixante coniques précédentes.

Je désignerai chaque faisceau de cubiques par le symbole de la droite qui en est l'axe.

Une cubique du faisceau $\alpha\alpha'$ et une du faisceau $(\beta\beta')$, c'est-à-dire deux cubiques appartenant à des faisceaux dont les bases se coupent, se rencontrent en trois points.

Une cubique du faisceau $\alpha\alpha'$ et une du faisceau $(\alpha\beta')$ se rencontrent en $\dfrac{2.3.6-3.3-5.3}{2.3} = 2$ points. Une cubique du faisceau $\alpha\alpha'$ et une du faisceau $\beta\beta'$ se rencontrent en $\dfrac{2.3.3-2.3}{2.3} = 2$ points. Une cubique du faisceau $(\alpha\alpha')$ et une du faisceau $(\beta\beta')$ se rencontrent en

$$\frac{2.6.6-3.2.3-14.3}{2.3} = 2 \text{ points.}$$

Donc deux cubiques appartenant à des faisceaux dont les bases ne se coupent pas se rencontrent en deux points.

Pour étudier les points d'intersection de deux coniques, je les prendrai sous la forme où leur équation est du troisième ordre; elles font ainsi partie de faisceaux de cubiques dont les bases ne se coupent pas. Soient $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ ces bases.

1° Les secondes droites sont confondues, par exemple $\alpha\alpha'(\beta\beta')$ et $\beta\beta'(\beta\beta')$ qui se rencontrent en $\dfrac{2.3.3-2.3-4.3}{2.3} = 0$ point;

2° Les secondes droites coupent les deux bases, par exemple $\alpha\alpha'(\alpha\alpha')$ et $\beta\beta'(\beta\beta')$ qui se rencontrent en $\dfrac{2.3.3-2.3}{2.3} = 2$ points;

3° Une seule des secondes droites coupe les deux bases, par exemple $\alpha\alpha'(\alpha\alpha')$ et $\beta\beta'(\gamma\alpha')$ qui se rencontrent en $\frac{2.3.3 - 2.3 - 2.3}{2.3} = 1$ point;

4° Aucune des secondes droites ne coupe les deux bases, par exemple $\alpha\alpha'(\beta\gamma')$ et $\beta\beta'(\gamma\alpha')$ qui se rencontrent en

$$\frac{2.3.3 - 2.3 - 2.2.3}{2.3} = 0 \text{ point.}$$

De ces résultats on déduit très aisément la disposition des points de la surface situés sur les intersections des plans des courbes considérées.

58. On peut voir directement qu'il existe des groupes de droites de la surface situés en même temps sur des quadriques. La théorie de ces groupes présente des analogies remarquables avec celle des groupes de points ou de coniques de la surface de *Kummer*. Les groupes de moins de cinq droites ne présentant rien de particulier, il reste à étudier les groupes de cinq, six, sept et huit droites. D'ailleurs les groupes de sept et huit droites se confondent ainsi que ceux de cinq et six droites; car si une quadrique coupe la surface suivant sept droites, l'intersection se complète par une huitième droite, et si elle la coupe suivant cinq droites, l'intersection se complète par une cubique située sur la quadrique, et cette cubique est nécessairement décomposée en une conique et une droite, puisque les cubiques de la surface sont planes.

59. 1° *Groupes de six droites.* — Si une quadrique coupe la surface suivant six droites, l'intersection se complète par une conique. Le produit des fonctions thêta qui, égalées à zéro, sont les équations de la conique et des droites qui ont une équation, doit être une fonction d'ordre 12, paire, à caractéristique nulle, admettant chaque demi-période comme zéro double.

Je considère alors une conique sous la forme du troisième ordre; les droites ayant aussi des équations du troisième ordre, il faut associer à cette conique trois droites telles que la somme des trois caractéristiques soit nulle. D'ailleurs la caractéristique de la conique est différente des caractéristiques des droites, le contraire conduisant à une conique et une droite situées dans un même plan et, par suite, à une quadrique décomposée.

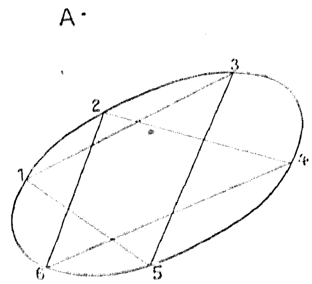
Si je remplace la conique par la droite de même caractéristique, la parité du produit des quatre fonctions change et devient impaire; par conséquent les groupes cherchés correspondent aux groupes de Rosenhain (H., 20). En effet, la parité des fonctions thêta d'ordre impair ne dépend que de la caractéristique et les fonctions que l'on doit égaler à zéro pour avoir, d'une part, les coniques de la surface de Kummer et, d'autre part, les droites de la surface actuelle, sont de parité différente. L'ensemble de trois coniques d'un groupe de Rosenhain admet comme zéros treize demi-périodes, une comme triple, trois comme doubles, neuf comme simples; par conséquent, les droites correspondantes ne s'annulent pas pour une demi-période, en admettent trois comme zéros simples, neuf comme zéros doubles, trois comme zéros triples. D'autre part, la quatrième conique du groupe de Rosenhain s'annule pour les trois demi-périodes qui n'annulent pas les trois premières coniques et pour les trois demi-périodes zéros doubles; il en est de même pour le faisceau linéaire de cubiques correspondant; les quatre fonctions ont ainsi douze zéros doubles et trois quadruples; reste une demi-période qui n'annule aucune des fonctions, en la prenant comme zéro double, elle détermine la conique. Les trois zéros quadruples donnent trois droites qui complètent le groupe de six droites cherché.

En d'autres termes, pour obtenir un groupe de six droites et d'une conique situés sur une quadrique, on considère un groupe de Rosenhain; à trois des plans de ce groupe correspondent trois droites; en prenant la conique dont le premier symbole est celui du quatrième plan du groupe, et dont le second est celui du point commun aux trois premiers plans du groupe, on a le groupe cherché; il se complète par les trois droites correspondant aux trois points qui ne sont pas dans les trois premiers plans du groupe.

Il y a quatre-vingt groupes de Rosenhain; on obtient donc ainsi trois cent vingt quadriques; elles sont distinctes; en effet, je choisis une face et le sommet opposé d'un tétraèdre de Rosenhain, ce qui revient à me donner une conique de la surface actuelle; il y a deux tétraèdres admettant ces éléments, donc deux quadriques passant par la conique choisie. Il y a donc bien trois cent vingt quadriques coupant la surface suivant six droites et une conique.

Je considère les deux quadriques passant par une même conique Γ_1 de la surface; elles se coupent suivant une seconde conique Γ_2. Je figure la conique C et le sommet A, éléments communs aux deux tétraèdres de Rosenhain correspondants. L'un de ces tétraèdres a pour faces A, 1, 3; A, 3, 5; A, 5, 1, par exemple, et l'autre A, 2, 4;

Fig. 3.



A, 4, 6; A, 6, 2. La première quadrique a pour génératrices les droites A, 1, 3; A, 3, 5; A, 5, 1, d'une part et (2), (4), (6), d'autre part; la seconde a pour génératrices A, 2, 4; A, 4, 6; A, 6, 2 et (1), (3), (5). Chaque génératrice de la première rencontre une génératrice de la seconde : A, 1,3, par exemple, rencontre (5) en un point qui est sur l'une des deux coniques formant l'intersection des deux quadriques; il n'est pas sur Γ_1 : en effet la conique Γ_1 et la droite A, 1, 3 ont comme zéros simples communs les demi-périodes (2), (4), (5), (6). Elles se coupent en un nombre de points égal à $\frac{2.3.3-4.3}{2.3} = 1$ et ce point est distinct des précédents. Par conséquent, les six points d'intersection des génératrices des deux quadriques sont sur une conique; on s'assure facilement que c'est l'une des coniques des configurations de Kummer signalées plus haut. Ainsi à chaque conique de la surface correspond une conique d'une des configurations de Kummer formées par les cent soixante points d'intersection des droites deux à deux.

Je considère maintenant une conique sous la forme du sixième ordre; il faut associer deux droites telles que le produit de leurs équations donne une fonction impaire, d'ordre 6, de caractéristique nulle; cette condition ne peut être remplie.

60. 2° *Groupes de huit droites.* — Ces groupes comprennent nécessairement quatre droites ayant des équations, puisque le produit des premiers membres doit être d'ordre 12; il doit être en outre pair de caractéristique nulle; les caractéristiques des quatre droites sont celles de quatre plans d'un groupe de Göpel (II., 23). Or les quatre plans d'un tétraèdre de Göpel passent deux fois par douze des points doubles et ne passent pas par les quatre autres. Donc l'ensemble des quatre droites correspondantes admet douze demi-périodes comme zéros doubles et quatre comme zéros quadruples. Par conséquent, à chaque tétraèdre de Göpel, correspond un groupe de huit droites situé sur une quadrique et composé des quatre droites correspondant aux quatre plans du tétraèdre et des quatre droites correspondant aux quatre points non situés dans les plans du tétraèdre. Ces groupes sont au nombre de soixante.

61. Je considère les fonctions d'ordre 6, de caractéristique non nulle; pour une caractéristique donnée, les fonctions de même parité sont au nombre de six; elles ont huit demi-périodes comme zéros simples et l'on peut les assujettir à avoir quatre autres demi-périodes comme zéros doubles; il reste un paramètre, le degré s'est abaissé à quatre; on a un faisceau linéaire de quartiques. On peut assujettir les mêmes fonctions générales à admettre les quatre demi-périodes non encore considérées comme zéros doubles et l'on a un autre faisceau linéaire de quartiques; le produit des premiers membres des équations de deux courbes de ces faisceaux est pair, d'ordre 12, de caractéristique nulle, et admet les seize demi-périodes comme zéros doubles; ces deux courbes sont donc sur une même quadrique, ce sont des biquadratiques.

Il y a trente familles de quadriques coupant la surface suivant deux biquadratiques. Les biquadratiques données par une même famille de quadriques se répartissent elles-mêmes en soixante-dix familles deux à deux associées; les intermédiaires entre ces familles sont fournis par les cubiques que l'on obtient en donnant une nouvelle demi-période comme zéro double; il y a cinquante-six de ces cubiques pour chaque famille de quadriques.

62. J'arrive maintenant à une proposition très importante :

La surface du quatrième degré sur laquelle sont tracées trente-deux droites se rencontrant de la façon indiquée plus haut dépend de trois paramètres.

Je suppose que, sur une surface de degré 4, soient tracés deux groupes de seize droites, désignées les unes par les symboles $\alpha\alpha'$, les autres par les symboles $(\alpha\alpha')$, de telle façon que la droite $(\alpha\alpha')$ rencontre les droites

$$\alpha\alpha', \quad \beta\beta', \quad \beta\gamma', \quad \beta\delta', \quad \gamma\beta', \quad \gamma\gamma', \quad \gamma\delta', \quad \delta\beta', \quad \delta\gamma', \quad \delta\delta'.$$

De ces hypothèses on déduit immédiatement les résultats relatifs aux groupes de six et huit droites de la surface situés sur des quadriques; je ne les démontrerai pas de nouveau.

Je considère, par exemple, les deux quadriques

$$\begin{aligned} Q_1 &: \beta\gamma', \quad \beta\delta', \quad \alpha\beta', \quad (\alpha\beta'), \quad (\gamma\alpha'), \quad (\delta\alpha'); \\ Q_2 &: \beta\alpha', \quad \gamma\beta', \quad \delta\beta', \quad (\beta\alpha'), \quad (\alpha\gamma'), \quad (\alpha\delta'). \end{aligned}$$

Q_1 coupe en outre la surface suivant une conique C; cette conique est rencontrée en deux points par les droites $\alpha\alpha'$ et $(\beta\beta')$ qui ne rencontrent pas les génératrices de Q_1; elle est donc dans leur plan, et Q_2 coupe la surface suivant cette même conique; Q_1 et Q_2 ayant en commun la conique C se coupent suivant une autre conique C'.

La génératrice $\beta\gamma'$, par exemple, de Q_1 rencontre $(\alpha\delta')$ de Q_2; ce point A de l'intersection est, soit sur C, soit sur C'. Je suppose qu'il soit sur C; le plan tangent en A à la surface est le plan $\beta\gamma'(\alpha\delta')$; il contient la tangente en A à C; d'autre part, le plan tangent à Q_1 contient cette tangente et $\beta\gamma'$, et le plan tangent à Q_2 contient cette tangente et $(\alpha\delta')$. Q_1 et Q_2 sont alors tangentes au point A qui est donc aussi sur C'. Dans tous les cas, C' contient donc les six points où chaque génératrice de Q_1 coupe une des génératrices de Q_2. On en déduit que les cent soixante points d'intersection des droites deux à deux se partagent en dix configurations de Kummer et l'on peut en former un Tableau identique à celui qui a été donné plus haut.

63. Ceci posé, soit l'une de ces configurations représentées de la façon suivante :

	11'(21').	21'(21').	12'(12').	22'(22').	31'(31').	41'(41').	32'(32').	42'(42').	13'(13').	23'(23').	14'(14').	24'(24').	33'(33').	43'(43').	34'(34').	44'(44')
x_1...	α	α	α	α	γ	γ	γ	γ	β	β	β	β	δ	δ	δ	δ
x_2...	β	β	$-\beta$	$-\beta$	δ	δ	$-\delta$	$-\delta$	α	α	$-\alpha$	$-\alpha$	γ	γ	$-\gamma$	$-\gamma$
x_3...	γ	$-\gamma$	γ	$-\gamma$	α	$-\alpha$	α	$-\alpha$	δ	$-\delta$	δ	$-\delta$	β	$-\beta$	β	$-\beta$
x_4...	δ	$-\delta$	$-\delta$	δ	β	$-\beta$	$-\beta$	β	γ	$-\gamma$	$-\gamma$	γ	α	$-\alpha$	$-\alpha$	α

On sait que, par les points 11'(11'), 21'(21'), 12'(12'), 22'(22'), 33'(33'), 43'(43'), 34'(34'), 44'(44'), passent une infinité de quadriques parmi lesquelles sont les suivantes :

$$11',\quad 21',\quad 12',\quad 22',\quad (33'),\quad (43'),\quad (34'),\ (44');$$
$$33',\quad 43',\quad 34',\quad 44',\quad (11'),\quad (21'),\quad (12'),\ (22').$$

Soit C leur biquadratique d'intersection; elle contient aussi les points

$$11'(22'),\quad 21'(12'),\quad 12'(21'),\quad 22'(11'),\quad 33'(44'),\quad 43'(34'),\quad 34'(43'),\quad 44'(33')$$

qui, dans une autre configuration, forment un groupe analogue au précédent. Je rappelle que si la biquadratique C est représentée elliptiquement de façon que la somme des arguments de quatre points situés dans un même plan soit nulle, les arguments du premier groupe de huit points sont :

$$\begin{array}{llll} 11'(11'):a_1, & 21'(21'):a_2, & 33'(33'):a_3, & 34'(34'):a_4, \\ 22'(22'):a'_1, & 12'(12'):a'_2, & 44'(44'):a'_3, & 43'(43'):a'_4, \end{array}$$

avec les relations

$$a'_i = a_i + \omega_1, \qquad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0.$$

En outre les droites $a_1 a'_1$, $a_2 a'_2$, $a_3 a'_3$, $a_4 a'_4$ s'appuient sur deux droites fixes qui sont les deux directrices de l'une des congruences fondamentales. Ceci posé, je considère les arguments du second groupe de points

$$\begin{array}{llll} 11'(22') : b_1, & 21'(12') : b_2, & 33'(44') : b_3, & 34'(43') : b_4; \\ 22'(11') : b'_1, & 12'(21') : b'_2, & 44'(33') : b'_3, & 43'(34') : b'_4. \end{array}$$

On a, par le même raisonnement que pour les points précédents,

$$b'_i = b_i + \omega_2.$$

Je dis que $\omega_2 = \omega_1$. En effet, les droites $11'$ et $(33')$, par exemple, se rencontrent et l'on a

$$a_1 + b_1 + a_3 + b'_3 = 0, \qquad a_1 + b_1 + a_3 + b_3 + \omega_2 = 0.$$

De même, les droites $11'$ et $(44')$; d'où

$$a_1 + b_1 + a'_3 + b_3 = 0, \qquad a_1 + b_1 + a_3 + b_3 + \omega_1 = 0.$$

Par conséquent, il y a entre les points des deux lignes du second groupe les mêmes relations qu'entre les points des deux lignes du premier. En d'autres termes, la transformation homographique

$$\frac{x_1}{x'_1} = \frac{x_2}{-x'_2} = \frac{x_3}{-x'_3} = \frac{x_4}{x'_4},$$

appliquée aux points

$11'(11')$, $21'(21')$, $33'(33')$, $34'(34')$, $11'(22')$, $21'(12')$, $33'(44')$, $34'(43')$,

donne les points

$22'(22')$, $12'(12')$, $44'(44')$, $43'(43')$, $22'(11')$, $12'(21')$, $44'(33')$, $43'(34')$

et inversement.

En opérant de même avec les quadriques

$$\begin{array}{llllllll} 31', & 41', & 32', & 42', & (13'), & (23'), & (14'), & (24'), \\ 13', & 23', & 14', & 24', & (31'), & (41'), & (32'), & (42'), \end{array}$$

on démontre que la même propriété s'applique aux points d'intersection des génératrices de ces deux quadriques.

La transformation considérée, appliquée à la droite $11'$ par exemple, donne $22'$. On en déduit que les dix configurations de Kummer ont en commun les directrices $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$.

En partant des quadriques

$$\begin{matrix} 11', & 12', & 31', & 32', & (23'), & (24'), & (43'), & (44'), \\ 23', & 24', & 43', & 44', & (11'), & (12'), & (31'), & (32'), \end{matrix}$$

on démontre le même fait pour une autre paire de directrices; et en procédant ainsi de proche en proche, on obtient ce fait fondamental :

Les dix configurations de Kummer ont les mêmes directrices.

64. Je considère deux de ces configurations :

	11'(11').	21'(21').	12'(12').	22'(22').	31'(31').	41'(41').	32'(32').	42'(42').	13'(13').	23'(23').	14'(14').	24'(24').	33'(33').	43'(43').	34'(34').	44'
.	α	α	α	α	γ	γ	γ	γ	β	β	β	β	δ	δ	δ	
.	β	β	$-\beta$	$-\beta$	δ	δ	$-\delta$	$-\delta$	α	α	$-\alpha$	$-\alpha$	γ	γ	$-\gamma$	$-$
.	γ	$-\gamma$	γ	$-\gamma$	α	$-\alpha$	α	$-\alpha$	δ	$-\delta$	δ	$-\delta$	β	$-\beta$	β	$-$
.	δ	$-\delta$	$-\delta$	δ	β	$-\beta$	$-\beta$	β	γ	$-\gamma$	$-\gamma$	γ	α	$-\alpha$	$-\alpha$	

	11'(22').	21'(12').	12'(21').	22'(11').	31'(42').	41'(32').	32'(41').	42'(31').	13'(24').	23'(14').	14'(23').	24'(13').	33'(44').	43'(34').	34'(43').	44'
.	α'	α'	α'	α'	γ'	γ'	γ'	γ'	β'	β'	β'	β'	δ'	δ'	δ'	
.	β'	β'	$-\beta'$	$-\beta'$	δ'	δ'	$-\delta'$	$-\delta'$	α'	α'	$-\alpha'$	$-\alpha'$	γ'	γ'	$-\gamma'$	$-$
.	γ'	$-\gamma'$	γ'	$-\gamma'$	α'	$-\alpha'$	α'	$-\alpha'$	δ'	$-\delta'$	δ'	$-\delta'$	β'	$-\beta'$	β'	$-$
.	δ'	$-\delta'$	$-\delta'$	δ'	β'	$-\beta'$	$-\beta'$	β'	γ'	$-\gamma'$	$-\gamma'$	γ'	α'	$-\alpha'$	$-\alpha'$	$'$

Il s'agit maintenant de satisfaire aux relations qui doivent exister entre les droites ainsi déterminées. Il suffit d'exprimer que $11'$ rencontre les dix droites $(11')$, $(22')$, $(23')$, $(24')$, $(32')$, $(33')$, $(34')$, $(42')$, $(43')$, $(44')$. Or $11'$ rencontre $(11')$ et $(22')$ par suite même des données; cette droite doit rencontrer $(23')$; d'où la condition

$$) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \beta & \alpha & -\delta & -\gamma \\ \beta' & -\alpha' & \delta' & -\gamma' \end{vmatrix} = (\alpha\gamma' + \beta'\delta)^2 - (\alpha'\gamma + \beta\delta')^2 + (\alpha\delta' - \alpha'\delta)^2 - (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 = 0.$$

$11'$ rencontre $(24')$; d'où la condition

$$) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \beta & -\alpha & -\delta & \gamma \\ \beta' & \alpha' & \delta' & \gamma' \end{vmatrix} = (\alpha\gamma' - \beta'\delta)^2 - (\alpha'\gamma - \beta\delta')^2 - (\alpha\delta' - \alpha'\delta)^2 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 = 0$$

$11'$ rencontre $(32')$; d'où la condition

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \gamma & -\delta & \alpha & -\beta \\ \gamma' & \delta' & -\alpha' & -\beta' \end{vmatrix} = (\alpha'\beta + \gamma\delta')^2 - (\alpha\beta' + \gamma'\delta)^2 - (\alpha\delta' - \alpha'\delta)^2 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 = 0.$$

$11'$ rencontre $(42')$; d'où la condition

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \gamma & -\delta & -\alpha & \beta \\ \gamma' & \delta' & \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = (\alpha'\beta - \gamma\delta')^2 - (\alpha\beta' - \gamma'\delta)^2 + (\alpha\delta' - \alpha'\delta)^2 - (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 = 0.$$

$11'$ rencontre $(33')$ et $(44')$; d'où la condition

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \delta & \pm\gamma & \pm\beta & \alpha \\ \delta' & \mp\gamma' & \mp\beta' & \alpha' \end{vmatrix} = \pm\alpha^2\beta'^2 \mp \alpha'^2\beta^2 \mp \alpha^2\gamma'^2 \pm \alpha'^2\gamma^2 \pm \beta^2\delta'^2 \mp \beta'^2\delta^2 \mp \gamma^2\delta'^2 \pm \gamma'^2\delta^2 = 0.$$

$11'$ rencontre $(34')$ et $(43')$; d'où la condition

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \delta & \mp\gamma & \pm\beta & -\alpha \\ \delta' & \pm\gamma' & \mp\beta' & -\alpha' \end{vmatrix} = \mp\alpha^2\beta'^2 \pm \alpha'^2\beta^2 \mp \alpha^2\gamma'^2 \pm \alpha'^2\gamma^2 \pm \beta^2\delta'^2 \mp \beta'^2\delta^2 \pm \gamma^2\delta'^2 \mp \gamma'^2\delta^2 = 0.$$

On a ainsi six relations. La comparaison de (5) et (6) donne

$$\alpha^2\beta'^2 - \alpha'^2\beta^2 - \gamma^2\delta'^2 + \gamma'^2\delta^2 = 0, \tag{7}$$
$$\alpha^2\gamma'^2 - \alpha'^2\gamma^2 - \beta^2\delta'^2 + \beta'^2\delta^2 = 0, \tag{8}$$

qui les remplacent et, en tenant compte de celles-ci, les quatre premières se réduisent à

$$(\alpha\delta' - \alpha'\delta)^2 - (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 + 2\alpha\beta'\gamma'\delta - 2\alpha'\beta\gamma\delta' = 0. \tag{9}$$

Les trois relations (7), (8), (9) permettent de calculer α', β', γ', δ' en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et, par suite, de construire un système de trente-deux droites satisfaisant aux conditions proposées. Les solutions se groupent deux par deux de telle façon que si α', β', γ', δ' est une solution, α', $-\beta'$, $-\gamma'$, δ' en est une autre. Les deux systèmes ainsi obtenus ne diffèrent que par le changement suivant : la droite $\alpha\alpha'$ du premier est devenue la droite $(\alpha\alpha')$ du second et inversement. D'ailleurs, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha, -\beta, -\gamma, \delta$ est une solution évidemment à rejeter et il y a, par suite, trois systèmes distincts de trente-deux droites satisfaisant aux conditions proposées. Il n'y a d'ailleurs qu'une surface de degré 4 qui contienne l'un de ces systèmes de trente-deux droites, si toutefois il y en a une, ce que j'admets pour le moment.

Dans ces conditions, si je choisis les périodes a, b, c des fonctions hyperelliptiques de telle façon que le point $11'(11')$ ait pour coordonnées $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, j'obtiens un système de trente-deux droites satisfaisant aux mêmes conditions que le précédent et se transformant en lui-même par les quinze collinéations fondamentales; il ne peut donc être distinct de l'un des précédents; la surface de degré 4 contenant les trente-deux droites de ce système se confond avec la surface hyperelliptique.

65. *Voici une autre méthode pour parvenir au même résultat :*

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} + \frac{x_4^2}{d^2} = 0$$

étant l'équation de la quadrique

$$11',\quad 21',\quad 12',\quad 22',\quad (33'),\quad (43'),\quad (34'),\quad (44'),$$

on en déduit celles des quadriques

$$\begin{array}{llllllll}
33', & 43', & 34', & 44', & (11'), & (21'), & (12'), & (22'),\\
31', & 41', & 32', & 42', & (13'), & (23'), & (14'), & (24'),\\
13', & 23', & 14', & 24', & (31'), & (41'), & (32'), & (42').
\end{array}$$

On se donne en même temps la configuration qui comprend le point $11'(11')$: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; ceci permet d'écrire les trente-deux droites sous forme explicite. On a alors trois équations qui donnent a, b, c, d en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; il y a trois solutions véritables et une étrangère.

66. Reste à démontrer qu'il y a bien une surface du quatrième degré contenant l'un quelconque des trois systèmes de trente-deux droites ainsi déterminés.

Je remarque que si ce système est sur une surface du quatrième degré, comme il se transforme en lui-même par les quinze collinéations fondamentales, il en est assurément de même de la surface. Son équation a donc la forme générale trouvée par celle de la surface de Kummer et qui contient cinq coefficients homogènes

$$\begin{aligned} &a(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4) + 2b(x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) \\ &\quad + 2c(x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2) + 2d(x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) + 4e x_1 x_2 x_3 x_4 = 0. \end{aligned}$$

Ceci posé, il suffit d'exprimer que cette surface contient les deux droites $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', -\beta', -\gamma', \delta'$, ce qui donne huit équations linéaires en a, b, c, d, e et algébriques en $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$. Il reste alors quatre conditions algébriques en $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$. Elles sont satisfaites en supposant les équations (7), (8), (9) vérifiées, au moins pour une des trois solutions; et, comme en général les équations sont irréductibles, elles sont satisfaites pour les trois solutions. La vérification en serait d'ailleurs bien facile, si l'on ne voulait pas avoir recours à ces considérations d'Algèbre supérieure un peu éloignées des raisonnements habituels dans ces recherches.

On peut donc enfin énoncer ce théorème général :

Toute surface du quatrième degré sur laquelle sont tracées trente-deux droites partagées en deux groupes tels qu'une droite d'un des groupes rencontre dix droites de l'autre groupe, est une surface hyperelliptique.

CHAPITRE IX.

SUR UNE SURFACE DU QUATRIÈME DEGRÉ A QUINZE POINTS DOUBLES.

67. La recherche générale des surfaces hyperelliptiques du quatrième degré a montré qu'on ne pouvait avoir de surfaces à quinze points doubles que si les fonctions coordonnées sont paires, de caractéristique nulle, d'ordre $(2\mu+1)2\eta$ (n° 16, 1°) ou $4\mu\eta$ (n° 17, 1°). Les nombres $2\eta^2(2\mu+1)-2$ ou $4\eta^2\mu-2$ doivent être carrés parfaits; pour le second, ce n'est pas possible, car il serait carré d'un nombre pair et l'on aurait

$$4\eta^2\mu-2=4\lambda^2 \quad (^1), \qquad 2\eta^2\mu-1=2\lambda^2;$$

le premier membre serait impair, le second étant pair.

Le nombre $2\eta^2(2\mu+1)-2$ ne peut être carré parfait que si η est impair, ainsi qu'il résulte de l'égalité $\eta^2(2\mu+1)-1=2\lambda^2$; je vais alors examiner ce qui se passe pour les différentes valeurs de η.

Si $\eta=1$, $\mu=\lambda^2$; en particulier $\mu=1$.

Si $\eta=3$, $\mu=\dfrac{\lambda^2-4}{9}$; en particulier $\mu=0$.

Si $\eta=5$, $\mu=\dfrac{\lambda^2-12}{25}$; cette fraction n'est jamais égale à un nombre entier.

Si $\eta=7$, $\mu=\dfrac{\lambda^2-24}{49}$; la conclusion est la même.

Si $\eta=9$, $\mu=\dfrac{\lambda^2-40}{81}$; en particulier $\mu=1$, etc.

On obtient ainsi une infinité de surfaces hyperelliptiques du quatrième degré à quinze points doubles.

---

(1) λ est un entier.

68. J'examine d'abord la solution $M = 1$, $h = 6$; les fonctions coordonnées sont paires, d'ordre 6, de caractéristique nulle et admettent une demi-période comme zéro d'ordre 8. Une quelconque d'entre elles est une fonction du troisième degré des coordonnées d'un point de la surface de Kummer de la forme

$$x_i = S_i(X_1, X_2, X_3, X_4).$$

Les surfaces cubiques $S_i = 0$ doivent avoir un point quadruple en l'un des points doubles de la surface de Kummer, ce qui est impossible. Il ne correspond pas de surface à la solution considérée. Ce serait d'ailleurs la seule surface à quinze points doubles relative au Tableau T.

69. Je passe maintenant à la surface obtenue pour $M = 3$, $h = 2$. Les fonctions coordonnées sont paires, d'ordre 6, relatives au Tableau T_3, de caractéristique nulle et admettent une demi-période comme zéro quadruple. Cette demi-période sera par exemple (11').

Les courbes tracées sur cette surface sont de degré pair. En effet, en égalant à zéro une fonction d'ordre $3h$, admettant (11') comme zéro d'ordre k, on a l'équation d'une courbe de degré

$$\frac{2.6.3h - k.4.3}{2.3} = 2(3h - k).$$

En égalant à zéro (n° 14), une fonction paire, d'ordre $6p$, relative au Tableau T_3, de caractéristique nulle, admettant la demi-période (11') comme zéro d'ordre $4p$, on obtient l'équation d'une courbe qui est l'intersection complète de la surface avec une surface d'ordre p.

Je vais étudier les courbes les plus simples tracées sur la surface.

70. Pour une caractéristique donnée, il y a deux fonctions d'ordre 3 qui s'annulent pour six demi-périodes et une qui s'annule pour dix demi-périodes; je considère les fonctions paires qui s'annulent pour six demi-périodes; en leur donnant (11') comme zéro double, les courbes obtenues sont des coniques au nombre de dix. Elles sont les courbes de contact de dix plans tangents singuliers; par chaque point

passent quatre plans ; en voici la liste

11'.........	(12'), (13'), (14'), (21'), (31'), (41')
22'.........	(12'), (23'), (24'), (21'), (32'), (42')
23'.........	(13'), (22'), (24'), (21'), (33'), (43')
24'.........	(14'), (22'), (23'), (21'), (34'), (44')
32'.........	(12'), (33'), (34'), (31'), (22'), (42')
33'.........	(13'), (32'), (34'), (31'), (23'), (43')
34'.........	(14'), (32'), (33'), (31'), (24'), (44')
42'.........	(12'), (43'), (44'), (41'), (22'), (32')
43'.........	(13'), (42'), (44'), (41'), (23'), (33')
44'.........	(14'), (42'), (43'), (41'), (24'), (34')

Les trois premiers et les trois derniers points de chaque ligne forment deux triplets ; par deux points d'un même triplet passe un plan singulier ; par deux points de deux triplets différents passent deux plans singuliers. Chaque point appartient à quatre triplets.

Les fonctions impaires qui s'annulent pour six demi-périodes donnent des courbes du quatrième degré formant six faisceaux linéaires dont chacun passe par cinq points doubles. Voici ces faisceaux :

12'...............	(13'), (14'), (22'), (32'), (42')
13'...............	(12'), (14'), (23'), (33'), (43')
14'...............	(12'), (13'), (24'), (34'), (44')
21'...............	(22'), (23'), (24'), (34'), (44')
31'...............	(32'), (33'), (34'), (21'), (41')
41'...............	(42'), (43'), (44'), (21'), (31')

On peut donner chacune des dix autres demi-périodes comme zéro double et l'on obtient ainsi soixante biquadratiques ayant un point double en un point double de la surface et passant par cinq autres points doubles. Le cône qui a pour sommet le point double d'une de ces courbes et pour directrice la courbe elle-même coupe en outre la surface suivant une seconde biquadratique de même nature et dont l'équation s'obtient en égalant à zéro une fonction impaire, d'ordre 9, admettant la demi-période (11') comme zéro d'ordre 7. Chaque point double de la surface est point double pour quatre courbes différentes.

Les fonctions qui s'annulent pour dix demi-périodes donnent des quartiques ou des sextiques sans particularités.

71. Pour l'ordre 6 il y a, pour chaque caractéristique non nulle, six fonctions paires nulles pour huit demi-périodes; en leur donnant (11′) comme zéro quadruple, on obtient quinze faisceaux de courbes de degré 4 qui sont des biquadratiques ainsi qu'on le démontre par un raisonnement déjà plusieurs fois employé; on a ainsi la répartition des quinze points doubles en quinze systèmes de huit points par lesquels passent une infinité double de quadriques. Chaque système comprend les huit points qui forment triplet avec un point donné.

Le long de chaque biquadratique on peut inscrire une quadrique tangente à la surface le long de cette courbe; on a ainsi quinze familles de quadriques inscrites.

Soit $\theta_1 + \rho\theta_2 = 0$ l'équation d'une biquadratique d'une famille donnée; en annulant $\theta_1 + \rho\theta_2$ pour la demi-période qui donne le point double avec lequel on a formé le système des huit points de la famille considérée, on obtient la courbe de contact du cône du second degré qui a son sommet en ce point et qui, avec les quatre plans passant par ce point forme la courbe de contact du cône circonscrit de ce point à la surface.

Les fonctions impaires d'ordre 6, de caractéristique quelconque, donnent des sextiques, si elles ont (11′) comme zéro triple.

72. La surface générale à quinze points doubles dépend de quatre paramètres. La trace sur un plan quelconque du cône circonscrit d'un point double à la surface se décompose en quatre droites et une conique C tangentes à une même conique Γ en tous les points où elles la rencontrent.

Soient $4xy - z^2 = 0$ l'équation de Γ; $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 0$, $m^2x + y + mz = 0$, les équations des quatre droites;

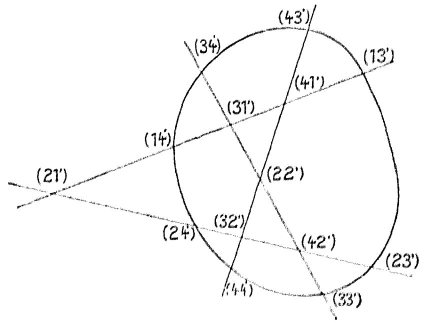
$$4xy - z^2 + (ax + by + cz)^2 = 0$$

l'équation de C.

Je suppose que ce soit la trace du cône circonscrit du point (12′); les points doubles ont alors la disposition ci-contre. Mais en outre il existe sur la surface actuelle quatre biquadratiques ayant un point double au point $(12')$ et qui se projettent de ce point suivant des coniques. Ce sont les suivantes :

$$\begin{array}{lllll}
(13'), & (14'), & (22'), & (32'), & (42'), \\
(22'), & (23'), & (24'), & (31'), & (41'), \\
(32'), & (33'), & (34'), & (21'), & (41'), \\
(42'), & (43'), & (44'), & (21'), & (31').
\end{array}$$

Fig. 4.



Ces coniques passent par les sommets d'un des triangles formés par les quatre droites et par les points d'intersection de la droite non employée et de la conique C. En outre elles lui sont tangentes. Je vais chercher la conique circonscrite au triangle formé par les droites

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad x + y + z = 0.$$

Son équation est de la forme

$$\alpha xy + \beta x(x + y + z) + \gamma y(x + y + z) = 0.$$

D'autre part, un de ses couples de sécantes communes avec C est formé par $m^2x + y + mz = 0$ et par une tangente à C, $ux + vy + wz = 0$. On a donc

$$\begin{aligned}
&\alpha xy + \beta x(x + y + z) + \gamma y(x + y + z) \\
&\quad \equiv 4xy - z^2 + (ax + by + cz)^2 + (m^2x + y + mz)(ux + vy + wz).
\end{aligned}$$

D'où les équations d'identification

$$\beta = a^2 + m^2u, \qquad \gamma = b^2 + v, \qquad 0 = -1 + c^2 + mw,$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 4 + 2ab + m^2v + u, \qquad \gamma = 2bc + mv + w,$$
$$\beta = 2ac + m^2w + mu.$$

Ces équations permettent de calculer α, β, γ, u, v, w. On a, en particulier,

$$u = \frac{m(1-c^2)+2ac-a^2}{m(m-1)}, \qquad v = \frac{mb(b+2c)+c^2-1}{m(m-1)}, \qquad w = \frac{1-c^2}{m},$$

et, en exprimant que la droite u, v, w est tangente à C, on obtient une relation entre a, b, c, m : $\varphi(u, v, w) = 0$.

La figure dépend donc ainsi de trois paramètres; par conséquent :

La surface du quatrième degré à quinze points doubles telle que la trace d'un cône circonscrit présente la disposition expliquée est hyperelliptique (¹).

73. Les considérations précédentes permettent de faire l'inversion de certaines fonctions du troisième ordre et de donner une forme simple aux irrationnalités attachées à la surface à quinze points doubles.

Je pose

$$\frac{y}{x} = tt', \qquad \frac{z}{x} = t + t';$$

d'où

$$\frac{x+y+z}{x} = (t+1)(t'+1), \qquad \frac{m^2x+y+mz}{x} = (t+m)(t'+m),$$

$$\frac{(ax+by+cz)^2+4xy-z^2}{x^2} = [c(t+t')+btt'+a]^2-(t-t')^2.$$

Il résulte des propriétés de la surface que les quantités

$$tt', \qquad t+t', \qquad (t+1)(t'+1), \qquad (t+m)(t'+m),$$
$$\sqrt{[c(t+t')+btt'+a]^2-(t-t')^2}$$

sont des fonctions quadruplement périodiques (²) se mettant sous la forme de quotients de fonctions thêta relatives au Tableau T_3.

(¹) Ceci montre que l'existence des quatre coniques résulte de l'existence de l'une d'elles.

(²) Les caractéristiques des deux termes de la fraction étant différentes, les multiplicateurs sont ± 1; la périodicité est assurée pour le Tableau

$$\begin{cases} 4i\pi, & 0, & 2a, & 2b, \\ 0, & 4i\pi, & 2b, & 2c. \end{cases}$$

En outre il serait facile de trouver en fonction de a, b, c, m les équations des perspectives des six coniques singulières de la surface qui ne passent pas par $(12')$; on aurait six nouveaux radicaux en t, t' égaux à des fonctions quadruplement périodiques. Enfin les équations des quatre coniques perspectives de biquadratiques qui ont servi à caractériser la surface donnent des fonctions de t, t' qui se décomposent en deux facteurs correspondant l'un à la fonction du troisième ordre et l'autre à celle du neuvième ordre.

APPENDICE.

Les deux Tableaux suivants donnent les demi-périodes qui annulent les fonctions thêta paires, de caractéristique quelconque, dans le cas où M est pair et h pair ou impair. Je rappelle que les symboles des demi-périodes nouvelles (commençant par 2 ou 4) désignent des quantités différentes suivant la valeur de M. Pour avoir les demi-périodes qui annulent une fonction impaire d'une certaine caractéristique, on prend toutes celles qui n'annulent pas les fonctions paires de même caractéristique.

Tableau I.

M *pair*, h *impair*.

Caractéristique.	Demi-périodes ordinaires.	Demi-périodes réduites.
$44' \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$......	aucune	$(41')$, $(42')$, $(43')$, $(44')$
$34' \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$......	$(31')$, $(32')$, $(33')$, $(34')$	aucune
$24' \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$......	aucune	$(21')$, $(22')$, $(23')$, $(24')$

TABLEAU I (*suite*).

M *pair*, *h impair*.

Caractéristique.	Demi-périodes ordinaires.	Demi-périodes réduites.
$14' \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$(31')$, $(32')$, $(33')$, $(34')$	toutes
$43' \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$(13')$, $(14')$, $(33')$, $(34')$	$(23')$, $(24')$, $(41')$, $(42')$
$33' \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$(13')$, $(14')$, $(31')$, $(32')$	$(23')$, $(24')$, $(43')$, $(44')$
$23' \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$(13')$, $(14')$, $(33')$, $(34')$	$(21')$, $(22')$, $(43')$, $(44')$
$13' \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$(13')$, $(14')$, $(31')$, $(32')$	$(21')$, $(22')$, $(41')$, $(42')$
$42' \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(14')$, $(32')$, $(34')$	$(22')$, $(24')$, $(41')$, $(43')$
$32' \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(14')$, $(31')$, $(33')$	$(22')$, $(24')$, $(42')$, $(44')$
$22' \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(14')$, $(32')$, $(34')$	$(21')$, $(23')$, $(42')$, $(44')$
$12' \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(14')$, $(31')$, $(33')$	$(21')$, $(23')$, $(41')$, $(43')$
$41' \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(13')$, $(32')$, $(33')$	$(22')$, $(23')$, $(41')$, $(44')$
$31' \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(13')$, $(31')$, $(34')$	$(22')$, $(23')$, $(42')$, $(43')$
$21' \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(13')$, $(32')$, $(33')$	$(21')$, $(24')$, $(42')$, $(43')$
$11' \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(13')$, $(31')$, $(34')$	$(21')$, $(24')$, $(41')$, $(44')$

TABLEAU II.

M *pair*, *h pair*.

Caractéristique.	Demi-périodes ordinaires.	Demi-périodes réduites.
$44' \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	aucune	aucune
$34' \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$(31')$, $(32')$, $(33')$, $(34')$	$(41')$, $(42')$, $(43')$, $(44')$
$24' \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	aucune	toutes
$14' \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$(31')$, $(32')$, $(33')$, $(34')$	$(21')$, $(22')$, $(23')$, $(24')$
$43' \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$(13')$, $(14')$, $(33')$, $(34')$	$(23')$, $(24')$, $(43')$, $(44')$
$33' \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$(13')$, $(14')$, $(31')$, $(32')$	$(23')$, $(24')$, $(41')$, $(42')$
$23' \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$(13')$, $(14')$, $(33')$, $(34')$	$(21')$, $(22')$, $(41')$, $(42')$
$13' \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$(13')$, $(14')$, $(31')$, $(32')$	$(21')$, $(22')$, $(43')$, $(44')$
$42' \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(14')$, $(32')$, $(34')$	$(22')$, $(24')$, $(42')$, $(44')$
$32' \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(14')$, $(31')$, $(33')$	$(22')$, $(24')$, $(41')$, $(43')$
$22' \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(14')$, $(32')$, $(34')$	$(21')$, $(23')$, $(41')$, $(43')$
$12' \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(14')$, $(31')$, $(33')$	$(21')$, $(23')$, $(42')$, $(44')$
$41' \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(13')$, $(32')$, $(33')$	$(22')$, $(23')$, $(42')$, $(43')$
$31' \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(13')$, $(31')$, $(34')$	$(22')$, $(23')$, $(41')$, $(44')$
$21' \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(13')$, $(32')$, $(33')$	$(21')$, $(24')$, $(41')$, $(44')$
$11' \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$(12')$, $(13')$, $(31')$, $(34')$	$(21')$, $(24')$, $(42')$, $(43')$

Produits et carrés de fonctions du premier ordre.

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{S}\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega'_1 \\ \theta_1 & \theta'_1 \end{vmatrix}(u, v)\,\mathfrak{S}\begin{vmatrix} \omega_2 & \omega'_2 \\ \theta_2 & \theta'_2 \end{vmatrix}(u, v) \\
&\quad = \sum\sum e^{\pi i[\rho'(\theta_1-\theta_2)+\sigma'(\theta'_1-\theta'_2)]}\, e^{\frac{1}{4}\left[a\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}+2\rho'\right)^2+2b\ldots\right]} \\
&\qquad \times \sum\sum e^{\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+2\rho\right)u+\left(\frac{\omega'_1+\omega'_2}{2}+2\sigma\right)v}\, e^{\pi i[\rho(\theta_1+\theta_2)+\sigma(\theta'_1+\theta'_2)]}\, e^{\frac{1}{4}\left[a\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+2\rho\right)^2+\ldots\right]} \\
&\qquad + e^{\pi i\theta_1}\sum\sum e^{\pi i[\rho'(\theta_1-\theta_2)+\sigma'(\theta'_1-\theta'_2)]}\, e^{\frac{1}{4}\left[a\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}+1+2\rho'\right)^2+\ldots\right]} \\
&\qquad \times \sum\sum e^{\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+1+2\rho\right)u+\left(\frac{\omega'_1+\omega'_2}{2}+2\sigma\right)v}\, e^{\pi\ldots} \\
&\qquad + e^{\pi i\theta_2}\sum\sum e\ldots\sum\sum e\ldots + e^{\pi i(\theta_1+\theta_2)}\sum\sum e\ldots\sum\sum e\ldots.
\end{aligned}
$$

Voici maintenant les carrés des seize fonctions du premier ordre. J'ai écrit les fonctions dans la notation des caractéristiques et dans celle de Reichardt; je rappelle que dans cette notation on a posé $c_{rs} = \mathfrak{S}_{rs}(0, 0)$. Les formules suivantes donnent les expressions des c_{rs}^2. Je rappelle aussi que l'on a :

$$
\alpha = \Theta_{00}^{(2)}(0, 0), \qquad \beta = \Theta_{01}, \qquad \gamma = \Theta_{10}, \qquad \delta = \Theta_{11},
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\mathfrak{S}_{24}^2(u, v) & = \mathfrak{S}_{44'}^2(u, v) & = \alpha\Theta_{00}(u, v) & + \beta\Theta_{01}(u, v) & + \gamma\Theta_{10}(u, v) & + \delta\Theta_{11}(u, v), \\
\mathfrak{S}_{34}^2 & = \mathfrak{S}_{34'}^2 & = \alpha\Theta_{00} & + \beta\Theta_{01} & - \gamma\Theta_{10} & - \delta\Theta_{11} \\
\mathfrak{S}_{13}^2 & = \mathfrak{S}_{43'}^2 & = \alpha\Theta_{00} & - \beta\Theta_{01} & + \gamma\Theta_{10} & - \delta\Theta_{11} \\
\mathfrak{S}_{12}^2 & = \mathfrak{S}_{33'}^2 & = \alpha\Theta_{00} & - \beta\Theta_{01} & - \gamma\Theta_{10} & + \delta\Theta_{11} \\
\mathfrak{S}_{14}^2 & = \mathfrak{S}_{24'}^2 & = \alpha\Theta_{10} & + \beta\Theta_{11} & + \gamma\Theta_{00} & + \delta\Theta_{01} \\
\mathfrak{S}_{5}^2 & = \mathfrak{S}_{14'}^2 & = \alpha\Theta_{10} & + \beta\Theta_{11} & - \gamma\Theta_{00} & - \delta\Theta_{01} \\
\mathfrak{S}_{23}^2 & = \mathfrak{S}_{23'}^2 & = \alpha\Theta_{10} & - \beta\Theta_{11} & + \gamma\Theta_{00} & - \delta\Theta_{01} \\
\mathfrak{S}_{6}^2 & = \mathfrak{S}_{13'}^2 & = \alpha\Theta_{10} & - \beta\Theta_{11} & - \gamma\Theta_{00} & + \delta\Theta_{01} \\
\mathfrak{S}_{25}^2 & = \mathfrak{S}_{42'}^2 & = \alpha\Theta_{01} & + \beta\Theta_{00} & + \gamma\Theta_{11} & + \delta\Theta_{10} \\
\mathfrak{S}_{35}^2 & = \mathfrak{S}_{32'}^2 & = \alpha\Theta_{01} & + \beta\Theta_{00} & - \gamma\Theta_{11} & - \delta\Theta_{10} \\
\mathfrak{S}_{2}^2 & = \mathfrak{S}_{41'}^2 & = \alpha\Theta_{01} & - \beta\Theta_{00} & + \gamma\Theta_{11} & - \delta\Theta_{10} \\
\mathfrak{S}_{3}^2 & = \mathfrak{S}_{31'}^2 & = \alpha\Theta_{01} & - \beta\Theta_{00} & - \gamma\Theta_{11} & + \delta\Theta_{10} \\
\mathfrak{S}_{15}^2 & = \mathfrak{S}_{22}^2 & = \alpha\Theta_{11} & + \beta\Theta_{10} & + \gamma\Theta_{01} & + \delta\Theta_{00} \\
\mathfrak{S}_{4}^2 & = \mathfrak{S}_{12'}^2 & = \alpha\Theta_{11} & + \beta\Theta_{10} & - \gamma\Theta_{01} & - \delta\Theta_{00} \\
\mathfrak{S}_{1}^2 & = \mathfrak{S}_{21'}^2 & = \alpha\Theta_{11} & - \beta\Theta_{10} & + \gamma\Theta_{01} & - \delta\Theta_{00} \\
\mathfrak{S}_{45}^2 & = \mathfrak{S}_{11'}^2 & = \alpha\Theta_{11} & - \beta\Theta_{10} & - \gamma\Theta_{01} & + \delta\Theta_{00}
\end{array}
$$

Produits de fonctions du second ordre.

En doublant les arguments et les périodes dans la formule de ϑ^2_{uv}, on obtient

$$\Theta_{00}^{(2)^2}(u, v) = \Theta_{00}^{(4)}\Theta_{00}^{(4)}(u, v) + \Theta_{02}^{(4)}\Theta_{02}^{(4)}(u, v) + \Theta_{20}^{(4)}\Theta_{20}^{(4)}(u, v) + \Theta_{22}^{(4)}\Theta_{22}^{(4)}(u, v).$$

D'où l'on passe par addition de demi-périodes aux carrés des autres fonctions du second ordre. On a aussi

$$\Theta_{00}^{(2)}(u, v)\,\Theta_{01}^{(2)}(u, v) = \Theta_{01}^{(4)}\left[\Theta_{01}^{(4)}(u, v) + \Theta_{03}^{(4)}(u, v)\right] + \Theta_{21}^{(4)}\left[\Theta_{21}^{(4)}(u, v) + \Theta_{23}^{(4)}(u, v)\right].$$

D'où l'on passe à

$$\Theta_{10}^{(2)}(u, v)\,\Theta_{11}^{(2)}(u, v).$$

Produits de fonctions du quatrième ordre.

$$\Theta_{00}^{(4)^2}(u, v) = \Theta_{00}^{(8)}\Theta_{00}^{(8)}(u, v) + \Theta_{04}^{(8)}\Theta_{04}^{(8)}(u, v) + \Theta_{40}^{(8)}\Theta_{40}^{(8)}(u, v) + \Theta_{44}^{(8)}\Theta_{44}^{(8)}(u, v),$$

$$\Theta_{00}^{(4)}(u, v)\,\Theta_{02}^{(4)}(u, v) = \Theta_{02}^{(8)}\left[\Theta_{02}^{(8)}(u, v) + \Theta_{06}^{(8)}(u, v)\right] + \Theta_{42}^{(8)}\left[\Theta_{42}^{(8)}(u, v) + \Theta_{46}^{(8)}(u, v)\right],$$

$$\Theta_{01}^{(4)^2}(u, v) = \Theta_{00}^{(8)}\Theta_{02}^{(8)}(u, v) + \Theta_{04}^{(8)}\Theta_{06}^{(8)}(u, v) + \Theta_{40}^{(8)}\Theta_{42}^{(8)}(u, v) + \Theta_{44}^{(8)}\Theta_{46}^{(8)}(u, v),$$

$$\Theta_{01}^{(4)}(u, v)\,\Theta_{03}^{(4)}(u, v) = \Theta_{02}^{(8)}\left[\Theta_{00}^{(8)}(u, v) + \Theta_{04}^{(8)}(u, v)\right] + \Theta_{42}^{(8)}\left[\Theta_{40}^{(8)}(u, v) + \Theta_{44}^{(8)}(u, v)\right].$$

Addition d'une demi-période.

$$\vartheta\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}\left(u + h\pi i + \lambda\frac{a}{2} + \mu\frac{b}{2},\ v + \ldots\right)$$
$$= \vartheta\begin{vmatrix} \omega + \lambda & \omega' + \mu \\ \theta + h & \theta' + k \end{vmatrix}(u, v)\, e^{-\frac{1}{2}(\lambda u + \mu v)}\, e^{\pi i(\omega h + \omega' k)}\, e^{-\frac{1}{8}(a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2)},$$

$$\Theta_{pq}^{(2)}\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}\left(u + h\pi i + \lambda\frac{a}{2} + \mu\frac{b}{2},\ v + \ldots\right)$$
$$= \Theta_{p+\lambda,\,q+\mu}^{(2)}\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}(u, v)\, e^{-(\lambda u + \mu v)}\, e^{\pi i\left[\left(p + \frac{\omega}{2}\right)h + \left(q + \frac{\omega'}{2}\right)k\right]}\, e^{-\frac{1}{4}(a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2)}.$$

Applications numériques.

I. — *Surface à quatorze points doubles.*

J'ai cherché à obtenir des points doubles réels dans les plans $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$, ce qui entraîne la réalité des autres ; en particulier, on peut prendre

$$a_1 = 4, \qquad a_2 + a_3 = -3, \qquad a_2 - a_3 = -\tfrac{3}{4}, \qquad a_2^2 + a_3^2 - \lambda = -34.$$

Le plan $x_4 = 0$ a été pris pour plan $x = 0$, le plan $x_3 = 0$ pour plan $z = 0$, le plan $x_1 = 0$ pour plan $y = 0$ et enfin le plan $x_2 = 0$ pour plan $x + y + z - 5 = 0$, ce qui a conduit à la surface

$$\begin{aligned}&(377x^2 + 953y^2 + 665z^2 + 1433yz + 880zx\\ &\quad + 1433xy - 1760x - 4765y - 3200z + 3200)^2\\ &\quad - 135^2[y^2(x+y+z-5)^2 + 2y(x+y+z-5)(x^2+z^2) + (x^2-z^2)^2] = 0.\end{aligned}$$

Les points doubles ont pour coordonnées :

1.	$\frac{5}{3}$,	$\frac{5}{3}$,	0	8.	0,	$\frac{5}{21}$,	$\frac{20}{21}$
2.	$\frac{10}{7}$,	$\frac{5}{7}$,	0	9.	$-\frac{80}{13}$,	0,	$\frac{70}{13}$
3.	$-\frac{10}{3}$,	$\frac{5}{3}$,	0	10.	$\frac{160}{99}$,	0,	$\frac{110}{99}$
4.	$-\frac{20}{13}$,	$\frac{80}{13}$,	0	11.	$\frac{5}{2}$,	0,	$\frac{5}{8}$
5.	0,	5,	-5	12.	$-\frac{70}{17}$,	$\frac{75}{17}$,	$\frac{80}{17}$
6.	0,	$\frac{20}{13}$,	$-\frac{10}{13}$	13.	$\frac{110}{9}$,	-25,	$\frac{160}{9}$
7.	0,	$\frac{20}{7}$,	$\frac{10}{7}$	14.	$\frac{5}{2}$,	$-\frac{15}{2}$,	10

Les plans singuliers et les points doubles qu'ils contiennent sont les suivants :

(1)	1, 2, 7, 8, 9, 12,	$8x - 2y + 11z - 10 = 0$,
(2)	3, 4, 5, 6, 9, 12,	$5x - 2y + 2z + 20 = 0$,
(3)	1, 3, 6, 8, 10, 13,	$6y + 9z - 10 = 0$,
(4)	2, 4, 5, 7, 10, 13,	$11x + 6y + 2z - 20 = 0$,
(5)	1, 4, 6, 7, 11, 14,	$7x + 5y + 4z - 20 = 0$,
(6)	2, 3, 5, 8, 11, 14,	$x + 5y + 4z - 5 = 0$.

II. — *Surface à trente-deux droites.*

Je pars de la configuration définie par

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 2, \qquad \delta = -1,$$

ce qui donne les équations

$$\begin{gathered} \beta'^2 - 4\delta'^2 + \gamma'^2 = 0, \\ \gamma'^2 - 4\alpha'^2 + \beta'^2 = 0, \\ (\alpha' + \delta')^2 - 4\beta'^2 - 2\beta'\gamma' = 0. \end{gathered}$$

D'où, en éliminant α' et δ',

$$6\beta'^3 + 7\beta'^2\gamma' - \gamma'^3 = 0.$$

D'où les trois systèmes de solutions :

$$\begin{array}{lllll} \text{I} \ldots\ldots\ldots & \alpha' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & \beta' = 1, & \gamma' = -1, & \delta' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{II} \ldots\ldots\ldots & \alpha' = \dfrac{\sqrt{10}}{2}, & \beta' = 1, & \gamma' = 3, & \delta' = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ \text{III} \ldots\ldots\ldots & \alpha' = \dfrac{\sqrt{5}}{2}, & \beta' = 1, & \gamma' = -2, & \delta' = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{array}$$

La première configuration est singulière; je choisis la seconde pour construire la surface.

Les dix points de rencontre de deux droites situés sur $11'$ ont pour coordonnées :

	x_1.	x_2.	x_3.	x_4.
$11'(11')$	1	0	2	-1
$11'(22')$	$\sqrt{10}$	2	6	$\sqrt{10}$
$11'(23')$	1	-1	$\sqrt{10}-1$	$-\sqrt{10}-1$
$11'(24')$	$2+\sqrt{10}$	$4+\sqrt{10}$	$6+\sqrt{10}$	$8+3\sqrt{10}$
$11'(32')$	$\sqrt{10}-1$	1	$1+\sqrt{10}$	1
$11'(33')$	$4-\sqrt{10}$	-2	2	$-4-\sqrt{10}$
$11'(34')$	$5-\sqrt{10}$	$1+\sqrt{10}$	3	$5+2\sqrt{10}$
$11'(42')$	$7-\sqrt{10}$	$\sqrt{10}-1$	$2\sqrt{10}+1$	3
$11'(43')$	$5-\sqrt{10}$	-3	$1+\sqrt{10}$	$-5-2\sqrt{10}$
$11'(44')$	$-2+\sqrt{10}$	2	2	$2+\sqrt{10}$

Les dix plans menés par la droite $11'$ et celles qui la rencontrent ont pour équations :

$11'(11')$...... $x_1+3x_2-x_3-x_4=0$

$11'(22')$...... $x_1-\sqrt{10}x_2\quad +x_4=0$

$11'(23')$...... $(6+\sqrt{10})x_1+(6-\sqrt{10})x_2-(2+\sqrt{10})x_3+(2-\sqrt{10})x_4=0$

$11'(24')$...... $(8+\sqrt{10})x_1+(6-3\sqrt{10})x_2-(2+\sqrt{10})x_3+(4-\sqrt{10})x_4=0$

$11'(32')$...... $(2+\sqrt{10})x_1-(6+\sqrt{10})x_2+(2-\sqrt{10})x_3+(6-\sqrt{10})x_4=0$

$11'(33')$...... $(2+\sqrt{10})x_1+\sqrt{10}x_2-\sqrt{10}x_3+(2-\sqrt{10})x_4=0$

$11'(34')$...... $(2+\sqrt{10})x_1-3x_2+(1-\sqrt{10})x_3+(4-\sqrt{10})x_4=0$

$11'(42')$...... $(4+\sqrt{10})x_1-(6+3\sqrt{10})x_2+(2-\sqrt{10})x_3+(8-\sqrt{10})x_4=0$

$11'(43')$...... $(4+\sqrt{10})x_1+3x_2-(1+\sqrt{10})x_3+(2-\sqrt{10})x_4=0$

$11'(44')$...... $(4+\sqrt{10})x_1-\sqrt{10}x_2-\sqrt{10}x_3+(4-\sqrt{10})x_4=0$

Enfin l'équation de la surface est

$$(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4)-10(x_1^2+x_4^2)(x_2^2+x_3^2)$$
$$+62(x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2)-72x_1x_2x_3x_4=0.$$