Annales scientifiques de l'É.N.S.

Paul Montel

Sur les suites infinies de fonctions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 24 (1907), p. 233-334
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1907_3_24__233_0>

SUR LES

SUITES INFINIES DE FONCTIONS,

PAR M. P. MONTEL.

INTRODUCTION.

Quand on confond la notion de fonction avec celle de correspondance, on est conduit à dire que l'on a défini une fonction des éléments d'un ensemble donné E, lorsqu'on a établi une loi de correspondance entre les éléments de E et ceux d'un autre ensemble d'éléments F. Si l'ensemble E se compose des points d'un domaine à n dimensions, et l'ensemble F de nombres réels ou complexes, on obtient une fonction de n variables. La théorie des fonctions étudie les propriétés que possède l'ensemble des nombres F suivant la nature de la loi de correspondance.

Lorsque l'ensemble E comprend des courbes ou des surfaces formant une famille déterminée, l'ensemble F étant toujours constitué par des nombres, on a des fonctions de courbes ou de surfaces, et l'étude des propriétés de ces fonctions, suivant la nature de la famille E et suivant le mode de correspondance, fait l'objet du calcul fonctionnel.

Or, un grand nombre de propositions appartenant à la théorie des fonctions se retrouvent sous une forme équivalente dans le calcul fonctionnel (¹). La démonstration de ces théorèmes (sur la continuité,

(¹) *Voir*, par exemple, M. FRÉCHET, *Sur quelques points du Calcul fonctionnel* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1906).

le maximum ou minimum, etc.) exige seulement que l'ensemble E et la loi de correspondance soient assujettis à des conditions que l'on peut définir, abstraction faite de la nature des éléments de E. Pour l'ensemble E, il faut supposer : 1° que, de toute suite infinie d'éléments, on puisse extraire au moins une autre suite infinie ayant un élément limite; 2° que ces éléments limites fassent partie de l'ensemble E, en d'autres termes que cet ensemble soit fermé. Pour la correspondance, il faut, en général, supposer qu'elle soit continue.

Les difficultés que présente, à ce point de vue, le calcul fonctionnel, paraissent se trouver principalement dans la vérification des propriétés que nous venons d'énoncer pour l'ensemble E : je citerai, dans cet ordre d'idées, les travaux de M. Arzelà sur les séries de fonctions, ceux de M. Hilbert sur le problème de Dirichlet traité par la méthode de Riemann, ceux de M. Lebesgue sur le problème de Plateau. Il semble donc utile de connaître des familles de plus en plus étendues de fonctions possédant les propriétés requises pour l'ensemble E.

Dans ce travail, j'ai essayé d'étudier deux familles de fonctions continues remplissant les conditions précédentes : les familles de fonctions de variables réelles également continues, et les familles de fonctions bornées de variables complexes. Pour la définition de la limite, je me suis placé dans le cas le plus simple de la convergence uniforme, cas où les propriétés des fonctions d'une suite se transmettent plus régulièrement à la fonction limite.

Le Chapitre I est consacré à l'étude des fonctions de variables réelles également continues et à celle des conditions sous lesquelles une famille de fonctions possède la continuité égale. Je fais voir, dans le Chapitre suivant, comment l'étude de familles particulières de fonctions également continues permet d'établir, dans toute leur généralité, les théorèmes d'existence des solutions des équations différentielles ou de certaines équations aux dérivées partielles. Pour les équations de la forme

$$y' = f(x, y),$$

je montre, après M. Peano, l'existence du faisceau des intégrales qui passent par un point donné.

L'extension de ces méthodes au cas des équations aux différentielles totales exige l'étude préalable des conditions d'intégrabilité sous la forme la plus générale : le Chapitre III a pour but la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression

$$p\,dx + q\,dy$$

soit une différentielle totale, et cette méthode m'a conduit, incidemment, à quelques résultats relatifs aux conditions que doivent remplir deux fonctions continues u et v de x et y pour que $u + iv$ soit une fonction de $x + iy$.

Dans les deux derniers Chapitres, je m'occupe des familles de fonctions analytiques de z, bornées dans un domaine, et j'applique les résultats obtenus aux séries convergentes de fonctions analytiques : j'établis quelques propositions nouvelles permettant d'affirmer que la somme d'une série, dont les termes sont des fonctions holomorphes, est aussi une fonction holomorphe, et je donne des propriétés de la somme d'une série convergente de fonctions de z, lorsque la convergence n'est pas uniforme. Pour ces dernières séries, dans tout domaine intérieur au domaine de convergence, il en existe un autre où la somme est analytique. Un point autour duquel la convergence n'est pas uniforme est appelé *irrégulier :* je fais voir que l'ensemble des points irréguliers est parfait, continu, non dense et d'un seul tenant avec la frontière du domaine, et j'étudie comment se comporte la série dans le voisinage d'un de ces points.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans des Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (février 1903 et juin 1904).

J'adresse ici l'expression de ma gratitude à MM. Painlevé et Borel pour les encouragements que j'ai reçus d'eux, et je suis heureux aussi de dire tout ce que je dois à M. Lebesgue, non seulement pour le parti que j'ai tiré de l'étude de ses travaux, mais encore pour les conseils et les indications qu'il n'a cessé de me donner.

CHAPITRE I.

LES SUITES DE FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES.

1. Une suite infinie de fonctions de la variable réelle x est dite *convergente,* dans un intervalle (a, b), lorsque le terme général $f_n(x)$ de cette suite a une limite quand n croît indéfiniment et x garde une valeur fixe appartenant à l'intervalle.

Lorsqu'une série de fonctions de x est convergente, la suite formée par les sommes des n premiers termes de cette série est une suite convergente qui a pour limite la somme de la série. Réciproquement, si une suite de fonctions $f_n(x)$ est convergente et a pour limite $f(x)$, on peut considérer $f_n(x)$ comme la somme des n premiers termes de la série

$$f_1(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} [f_{n+1}(x) - f_n(x)]$$

qui est convergente et a pour somme $f(x)$.

Je me servirai indifféremment de la notion de série convergente ou de celle de suite convergente, puisque ces notions se ramènent immédiatement l'une à l'autre.

2. *Fonctions également continues.* — La notion de fonctions également continues a été introduite par M. Ascoli [1] : étant donnée une famille de fonctions $f(x)$, définies et continues dans un intervalle (a, b), on dit que ces fonctions sont également continues si, à chaque nombre ε, positif, arbitrairement choisi, on peut faire correspondre un nombre positif δ, tel que l'inégalité

$$|x' - x''| < \delta$$

[1] *Le curve limiti di una varietà data di curve* (*Memorie della R. Accademia dei Lincei,* Vol. XVIII, 1883).

entraîne

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

pour toutes les fonctions $f(x)$ de la famille; il en résulte, aussitôt, qu'on peut diviser l'intervalle (a, b) en un nombre fini d'intervalles partiels, tels que, dans chacun d'eux, l'oscillation de chaque fonction $f(x)$ ne dépasse pas ε.

M. Arzelà a démontré le théorème suivant [1] : *Si une suite de fonctions continues converge uniformément vers une fonction limite, les fonctions de cette suite sont également continues; réciproquement, de toute suite de fonctions également continues et bornées dans leur ensemble, on peut extraire une nouvelle suite qui converge uniformément vers une fonction limite.* Voici une démonstration de ce théorème :

Supposons que la suite des fonctions

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

converge uniformément vers la fonction $F(x)$, lorsque x varie entre a et b; à partir d'une certaine valeur p de n, on aura

$$|F(x) - f_n(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon,$$

quel que soit x dans (a, b) et ε étant arbitrairement choisi; la fonction $F(x)$ est continue, il existe donc un nombre δ' tel que si

$$|x' - x''| < \delta'$$

on ait

$$|F(x') - F(x'')| < \frac{\varepsilon}{3},$$

et comme

$$|F(x') - f_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |F(x'') - f_n(x'')| < \frac{\varepsilon}{3},$$

il en résulte

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon, \qquad n \geqq p.$$

Les fonctions $f_i(x)$ étant continues, pour chacune d'elles il existe un

---

[1] *Sulle serie di funzioni* (*Memorie della R. Accademia di Bologna*, 5e série, t. VIII).

nombre δ_i tel que, dans tout intervalle de longueur moindre que δ_i, l'oscillation de f_i ne dépasse pas ε. Prenons pour δ le plus ~~grand~~ des nombres $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p, \delta'$. On aura, lorsque

$$|x' - x''| < \delta,$$
$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon,$$

quel que soit l'entier n : les fonctions f sont également continues. Réciproquement, considérons une suite de fonctions également continues

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots,$$

et supposons ces fonctions bornées dans leur ensemble. On a, alors, pour toutes les valeurs de x dans (a, b) et quel que soit n,

$$|f_n(x)| < \mathrm{M}.$$

M est un nombre fixe. Prenons une suite dénombrable de points

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots,$$

partout dense sur le segment (a, b). La suite bornée

$$f_1(x_1), \quad \ldots, \quad f_n(x_1), \quad \ldots$$

a au moins une valeur limite finie u_1 : j'en extrais la suite

$$(1) \qquad f_1^1(x_1), \quad f_2^1(x_1), \quad \ldots, \quad f_n^1(x_1). \quad \ldots,$$

qui converge vers u_1 et telle que, quel que soit n,

$$|u_1 - f_n^1(x_1)| < 1.$$

La suite des nombres

$$f_1^1(x_2), \quad f_2^1(x_2), \quad \ldots, \quad f_n^1(x_2), \quad \ldots,$$

étant bornée, a au moins une valeur limite finie u_2; j'en extrais la suite

$$(2) \qquad f_1^2(x_2), \quad f_2^2(x_2), \quad \ldots, \quad f_n^2(x_2), \quad \ldots,$$

qui converge vers u_2 et telle que, quel que soit n,

$$|u_2 - f_n^2(x_2)| < \frac{1}{2}.$$

De même, de la suite

$$f_1^2(x_3), \quad f_2^2(x_3), \quad \ldots, \quad f_n^2(x_3), \quad \ldots$$

j'extrais une nouvelle suite

$$(3) \qquad f_1^3(x_3), \quad f_2^3(x_3), \quad \ldots, \quad f_n^3(x_3), \quad \ldots,$$

qui converge vers une limite finie u_3 et dont les termes diffèrent de u_3, en valeur absolue, de moins de $\frac{1}{3}$ et ainsi de suite. Je forme ainsi le tableau des fonctions

$$\begin{array}{lllll}
f_1^1(x), & f_2^1(x), & \ldots, & f_n^1(x), & \ldots, \\
f_1^2(x), & f_2^2(x), & \ldots, & f_n^2(x), & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \\
f_1^p(x), & f_2^p(x), & \ldots, & f_n^p(x), & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots.
\end{array}$$

Les fonctions de chaque ligne appartiennent toutes à la ligne précédente : celles de la $p^{\text{ième}}$ ligne forment une suite, convergeant vers $u_1, u_2, \ldots, u_p$ lorsque x est égal, respectivement, à $x_1, x_2, \ldots, x_p$; on a, en outre,

$$|f_n^p(x_i) - u_i| < \frac{1}{i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Considérons maintenant la suite

$$f_1^1(x), \quad f_2^2(x), \quad \ldots, \quad f_n^n(x), \quad \ldots;$$

elle converge, pour les valeurs de x égales à

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots,$$

vers les nombres

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots.$$

En effet, pour $x = x_i$, la suite $f_n^n(x_i)$, étant extraite de la suite $f_n^i(x_i)$, qui converge vers u_i, convergera vers le même nombre.

Il existe une fonction continue $F(x)$ qui, pour $x = x_i$, prend la valeur u_i. En effet, étant donné ε, on peut trouver δ, tel que toutes les fonctions f aient une oscillation moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$ dans tout intervalle de longueur δ au plus. Soient x_i et x_j tels que

$$|x_i - x_j| < \delta,$$

on a, pour n assez grand,

$$|f_n^n(x_i) - u_i| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad |f_n^n(x_j) - u_j| < \frac{\varepsilon}{3};$$

et, comme

$$|f_n^n(x_i) - f_n^n(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

il en résulte

$$|u_i - u_j| < \varepsilon.$$

Soit alors une valeur x de l'intervalle (a, b) distincte des x_i; si l'on prend une suite de points

$$x_{\alpha_1}, \quad x_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad x_{\alpha_n}, \quad \ldots$$

tendant vers x, la suite

$$u_{\alpha_1}, \quad u_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad u_{\alpha_n}, \quad \ldots$$

tendra vers une limite u indépendante du choix de la suite x_{α_n}. En effet, allons assez loin dans la suite des α pour que tous les points x_{α_n} soient à l'intérieur d'un intervalle de longueur δ, dont le milieu est x. On aura, pour deux nombres x_{α_h} et x_{α_k} de cet intervalle,

$$|u_{\alpha_h} - u_{\alpha_k}| < \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite des u_α converge vers une limite u et que, lorsque x_{α_n} est dans l'intervalle précédent, on a

$$|u - u_{\alpha_n}| < \varepsilon.$$

Si, pour une autre suite

$$x_{\beta_1}, \quad x_{\beta_2}, \quad \ldots, \quad x_{\beta_n}, \quad \ldots,$$

convergeant vers x, on obtenait une autre limite u', pour une valeur $\beta_{n'}$ prise dans l'intervalle $\left(x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}\right)$, on aurait

$$|u' - u_{\beta_{n'}}| < \varepsilon,$$

mais

$$|u_{\alpha_n} - u_{\beta_{n'}}| < \varepsilon,$$

puisque x_{α_n} et $x_{\beta_{n'}}$ sont à une distance inférieure à δ, si l'on suppose, ce qui est possible, que x_{α_n} est dans l'intervalle $\left(x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}\right)$. On conclut de là que

$$|u - u'| < 3\varepsilon,$$

et, comme ε est arbitraire, $u = u'$. Soit $F(x)$ la fonction égale à u, en chaque point de (a, b) : cette fonction est continue. Pour le voir, donnons-nous deux valeurs de x : x', x'', dont la distance est plus petite que δ, et soient x'_α et x''_β deux nombres appartenant respectivement à deux suites formées par les x_i et qui convergent l'une vers x' et l'autre vers x''. Nous supposerons

$$|x'_\alpha - x''_\beta| < \delta;$$

alors

$$|u_\alpha - u_\beta| < \varepsilon, \qquad u_\alpha = F(x'_\alpha), \qquad u_\beta = F(x''_\beta);$$

on peut supposer x'_α assez voisin de x' et x''_β assez voisin de x'' pour que

$$|u' - u_\alpha| < \eta, \qquad |u'' - u_\beta| < \eta, \qquad u' = F(x'), \qquad u'' = F(x'').$$

On déduit de là

$$|u' - u''| < 2\eta + \varepsilon,$$

et, comme η est arbitraire,

$$|u' - u''| \leqq \varepsilon.$$

Je dis maintenant que la suite $f''_n(x)$ a pour limite $F(x)$ et que la convergence est uniforme; en effet, soient x un point quelconque de l'intervalle (a, b) et x_α un point de la suite x_i, à une distance de x moindre que δ; on a

$$|F(x) - F(x_\alpha)| < \varepsilon.$$

Pour n assez grand, tous les nombres de la suite

$$f_n^n(x_\alpha),\quad f_{n+1}^{n+1}(x_\alpha),\quad \ldots,\quad f_{n+k}^{n+k}(x_\alpha),\quad \ldots$$

diffèrent de leur limite de moins de ε; car, si $n > p$, les nombres de la suite précédente appartiennent à la suite $f_n^p(x_\alpha)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, dont les éléments diffèrent de leur limite de moins de $\frac{1}{p}$, en valeur absolue; nous prendrons $p < \frac{1}{\varepsilon}$. Donc, pour $n \geqq p$,

$$|\mathrm{F}(x_\alpha) - f_n^n(x_\alpha)| < \varepsilon;$$

d'autre part, les fonctions étant également continues,

$$|f_n^n(x) - f_n^n(x_\alpha)| < \varepsilon,$$

d'où

$$|\mathrm{F}(x) - f_n^n(x)| < 3\varepsilon$$

pour $n \geqq p$, quel que soit x.

3. Nous avons supposé que les fonctions f étaient bornées; il suffit, pour établir le théorème, que, pour une valeur particulière x_0 de l'intervalle (a, b), la suite des nombres

$$f_1(x_0),\quad f_2(x_0),\quad \ldots,\quad f_n(x_0),\quad \ldots$$

n'augmente pas indéfiniment. On pourra alors extraire de cette suite une nouvelle suite ayant une limite finie, ou simplement une suite dont les termes sont, en valeur absolue, inférieurs à un nombre fixe M'. Continuons à appeler

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots$$

les fonctions correspondant à la nouvelle suite, et supposons que

$$m > \frac{|b-a|}{\delta}.$$

Soit x une valeur quelconque dans (a, b); on a

$$|x - x_0| < m\delta;$$

donc

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < m\varepsilon;$$

par suite

$$f_n(x_0) - m\varepsilon < f_n(x) < f_n(x_0) + m\varepsilon,$$

ou

$$|f_n(x)| < \mathrm{M} \qquad \text{si} \qquad \mathrm{M} = \mathrm{M}' + m\varepsilon;$$

les fonctions de la nouvelle suite sont bornées, donc cette suite a au moins une fonction limite. On voit que, dans une famille de fonctions également continues, du fait que les fonctions sont bornées en un point résulte qu'elles sont bornées dans tout l'intervalle où elles sont définies.

4. Soit e l'ensemble des valeurs limites des nombres $f_n(x_0)$; si e ne se réduit pas aux seules valeurs $+\infty$ et $-\infty$, on pourra toujours trouver une fonction limite, continue et bornée, pour la suite $f_n(x)$. Dans le cas contraire, on pourra extraire de la suite $f_n(x_0)$ une suite nouvelle

$$f_{n_1}(x_0), \quad f_{n_2}(x_0), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(x_0), \quad \ldots,$$

qui augmentera indéfiniment, par valeurs positives par exemple. Alors, les fonctions

$$f_{n_1}(x), \quad f_{n_2}(x), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(x) \quad \ldots$$

croîtront indéfiniment, quel que soit x, par valeurs positives; car, à partir d'une certaine valeur de n_p, on aura

$$f_{n_p}(x_0) > \mathrm{A} \qquad (\mathrm{A} \text{ positif, arbitraire}),$$

et, par suite,

$$f_{n_p}(x) > \mathrm{A} - m\varepsilon,$$

quel que soit x.

Si l'on admet comme fonctions limites les fonctions $\mathrm{F}(x) = +\infty$ et $\mathrm{F}(x) = -\infty$, on peut énoncer le résultat suivant : *Toute suite infinie de fonctions également continues admet au moins une fonction limite. S'il existe une valeur de la variable pour laquelle la suite n'augmente pas indéfiniment, il y a toujours au moins une fonction limite finie.*

5. Les fonctions limites $F(x)$ sont également continues et forment, avec les fonctions $f(x)$, une famille de fonctions également continues. Il résulte de là que l'ensemble des fonctions F contient ses fonctions limites. Soit, en effet, $\Phi(x)$, une fonction limite de la suite

$$F_1(x), \quad F_2(x), \quad \ldots, \quad F_n(x), \quad \ldots$$

$F_n(x)$ est limite de la suite de fonctions

$$f_1^n(x), \quad f_2^n(x), \quad \ldots, \quad f_n^n(x), \quad \ldots.$$

Je prends p_n assez grand pour que

$$|F_n(x) - f_{p_n}^n(x)| < \frac{1}{n},$$

la suite

$$f_{p_1}^1, \quad f_{p_2}^2, \quad \ldots, \quad f_{p_n}^n, \quad \ldots$$

a pour limite $\Phi(x)$. Donc Φ appartient à l'ensemble des fonctions F; on peut dire que l'ensemble des fonctions F est fermé. Si l'on appelle *ensemble dérivé des fonctions f* l'ensemble des fonctions F, on voit qu'*une famille de fonctions également continues a, relativement à la classification de ses éléments limites, les mêmes propriétés qu'un ensemble de points.*

6. Je ferai une remarque relative à la nature de la convergence. Une suite de fonctions peut converger vers une fonction continue, la convergence étant *simplement uniforme :* c'est le cas pour lequel, à chaque valeur de ε, on peut faire correspondre *un* entier n, tel que

$$|F(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Ceci posé, supposons que la suite

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

converge vers $F(x)$, la convergence étant simplement uniforme; je puis trouver un entier n_p tel que

$$|F(x) - f_{n_p}(x)| < \frac{1}{p}.$$

Alors, la suite

$$f_{n_1}, \quad f_{n_2}, \quad \ldots, \quad f_{n_p}, \quad \ldots,$$

extraite de la première, converge uniformément vers $F(x)$. Il résulte de là que, pour les théorèmes sur l'existence des fonctions limites, il est indifférent de supposer que la convergence soit simplement uniforme, ou uniforme au sens ordinaire. La remarque précédente peut prendre une autre forme lorsqu'on l'applique aux séries convergentes : on voit que, lorsqu'une série convergente possède la convergence simplement uniforme, il suffit de grouper convenablement les termes de cette série pour obtenir une série uniformément convergente.

7. Un cas important, dans lequel on peut affirmer qu'une famille de fonctions possède l'égale continuité, est celui où toutes les fonctions $f(x)$ ont une dérivée bornée en valeur absolue, la limite supérieure étant commune à toutes ces dérivées. On a

$$|f'(x)| < M,$$

quel que soit x dans (a, b) et quelle que soit f. Il en est de même lorsque toutes les fonctions ont des nombres dérivés bornés dans leur ensemble, c'est-à-dire quand il existe un nombre M pour lequel, quels que soient x et $x + h$ dans l'intervalle, on a

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| < M$$

pour toutes les fonctions f. On peut remplacer ces conditions par d'autres analogues, par exemple

$$|f(x+h) - f(x)| < M\,|h|^{\alpha},$$

ou encore

$$|f(x+h) - f(x)| < \frac{M}{|\log|h||^{\alpha}},$$

M et α étant des nombres positifs quelconques. Dans les seconds membres de ces inégalités, on peut substituer, aux fonctions de h qui s'y trouvent, d'autres fonctions qui décroissent plus lentement vers o avec h. Dans tous les cas où l'on pourra comparer la valeur absolue de $f(x+h)-f(x)$ à une fonction de h tendant vers o avec h, la même quels que soient f et x, la continuité égale sera assurée.

8. On a supposé que les inégalités précédentes étaient vérifiées pour toute l'étendue de l'intervalle (a, b), mais il revient au même de supposer que des critères différents soient applicables à différentes portions de (a, b) en nombre fini ou non. La possibilité de trouver une fonction limite dans une suite infinie de fonctions dépend de la manière dont se comporte, en chaque point, la différence

$$f(x+h)-f(x),$$

dans le voisinage de $h=0$, pour l'ensemble des fonctions de la suite. Nous dirons que des fonctions sont également continues pour une valeur x de la variable si, à chaque nombre ε, on peut faire correspondre un intervalle $(x-\delta, x+\delta)$ à l'intérieur duquel toutes les fonctions aient une oscillation moindre que ε (1). Cela posé, si des fonctions sont également continues pour chaque point d'un intervalle (a, b) (extrémités comprises), elles sont également continues dans tout l'intervalle. En effet, le nombre ε étant choisi, à chaque valeur de x correspond un intervalle $(x-\delta, x+\delta)$ où l'oscillation de chaque fonction ne dépasse pas ε. Il résulte d'un théorème de M. Borel, généralisé par M. Lebesgue, qu'on peut couvrir l'intervalle (a, b) à l'aide d'un nombre fini d'intervalles choisis dans les précédents. Soit d le plus petit d'entre eux: dans tout intervalle d'étendue non supérieure à d, l'oscillation de chaque fonction ne dépasse pas 2ε (2).

9. Les caractères indiqués plus haut, pour reconnaitre si des fonctions sont également continues, sont ceux que l'on emploie pour reconnaître si une fonction est développable en série de Fourier. Lorsqu'un de ces critères est applicable à toutes les fonctions d'une famille,

---

(1) Si x est une extrémité de l'intervalle (a, b), on remplacera l'intervalle $(x-\delta, x+\delta)$ par $(x, x+\delta)$ ou $(x, x-\delta)$.

(2) On peut aussi démontrer directement que, si $(x-\delta, x+\delta)$ est le plus grand intervalle de milieu x répondant à la question, le nombre δ qui dépend de x a un minimum non nul dans (a, b).

toutes les séries de Fourier correspondantes ont, à partir d'une même valeur de l'entier n, des restes, $R_n(x)$, inférieurs en module à ε, quel que soit x [1]. Nous dirons que de telles séries sont *également convergentes*. D'une manière générale, on a la proposition suivante : *Si des fonctions bornées, en nombre infini, sont développables en séries de Fourier également convergentes, on peut obtenir au moins une fonction limite, développable en série de Fourier.*

Soit une suite dénombrable de ces fonctions

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_p(x), \quad \ldots$$

avec

$$f_p(x) = a_0^p + a_1^p \cos x + b_1^p \sin x + \ldots + a_n^p \cos nx + b_n^p \sin nx + \ldots$$

pour chaque nombre ε, il existe un nombre entier n, à partir duquel

$$n' \geq n, \qquad |R_{n'}(x)| < \varepsilon,$$

où

$$R_{n'}(x) = \sum_{h=n'}^{h=\infty} a_h^p \cos hx + b_h^p \sin hx,$$

quels que soient x et p. Je suppose, ce qu'il est toujours possible d'obtenir, que l'intervalle (a, b) soit compris dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

On peut facilement démontrer que les fonctions f_p sont également continues et ont par conséquent au moins une fonction limite, mais on ne sait pas ainsi si la fonction limite est développable en série de Fourier. Je donnerai de cette proposition une démonstration dont le principe, très général, s'appliquera, dans la suite, à beaucoup de cas.

Les fonctions f_p étant bornées dans leur ensemble, tous les a_n^p et b_n^p sont bornés quels que soient n et p, comme il résulte immédiatement de leurs expressions par les intégrales d'Euler et de Fourier.

De la suite bornée

$$a_0^1, \quad a_0^2, \quad a_0^3, \quad \ldots, \quad a_0^p, \quad \ldots$$

---

[1] Il suffit de se reporter aux démonstrations classiques de la convergence des séries de Fourier, par la méthode de Dirichlet.

j'extrais la suite

$$a_0^{\alpha_1},\quad a_0^{\alpha_2},\quad a_0^{\alpha_3},\quad \ldots,\quad a_0^{\alpha_p},\quad \ldots$$

ayant une limite finie A_0. De la suite bornée

$$a_1^{\alpha_1},\quad a_1^{\alpha_2},\quad \ldots,\quad a_1^{\alpha_p},\quad \ldots$$

j'extrais une suite

$$a_1^{\beta_1},\quad a_1^{\beta_2},\quad \ldots,\quad a_1^{\beta_p},\quad \ldots$$

ayant une limite finie A_1. De la suite bornée

$$b_1^{\beta_1},\quad b_1^{\beta_2},\quad \ldots,\quad b_1^{\beta_p},\quad \ldots$$

j'extrais la suite

$$b_1^{\beta'_1},\quad b_1^{\beta'_2},\quad \ldots,\quad b_1^{\beta'_p},\quad \ldots$$

ayant une limite finie B_1 et ainsi de suite. Considérons la série de Fourier, définie par les coefficients A_n et B_n, soit

$$A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + \ldots + A_n \cos n x + B_n \sin n x + \ldots.$$

Je dis qu'elle est convergente et égale à la limite de la suite des fonctions

$$f_{\alpha_1},\quad f_{\beta_2},\quad f_{\beta'_2},\quad f_{\gamma_3},\quad f_{\gamma'_3},\quad \ldots.$$

On a d'abord, lorsque m et $m+k$ sont supérieurs à n,

$$|R_m^{m+k}(x)| = \left| \sum_{h=m+1}^{h=m+k} a_h^p \cos h x + b_h^p \sin h x \right| < 2\varepsilon.$$

Or, quand p croît indéfiniment, $R_m^{m+k}(x)$ a pour limite $\mathcal{R}_m^{m+k}(x)$,

$$\mathcal{R}_m^{m+k}(x) = \sum_{h=m+1}^{h=m+k} A_h \cos h x + B_h \sin h x,$$

à condition de ne donner à l'entier p que les valeurs

$$\alpha_1,\quad \beta_2,\quad \beta'_2,\quad \gamma_3,\quad \gamma'_3,\quad \ldots,$$

donc

$$|\mathcal{R}_m^{m+k}(x)| \leqq 2\varepsilon,$$

quel que soit k : la série trigonométrique dont les coefficients sont A_p et B_p est uniformément convergente et a pour somme la fonction continue $F(x)$. On a

$$F(x) - f_p(x) = s_n(x) - S_n(x) + \mathcal{R}_n(x) - R_n(x),$$

n est un entier fixe et choisi assez grand pour que

$$|\mathcal{R}_n(x)| < \varepsilon, \qquad |R_n(x)| < \varepsilon$$

(la seconde inégalité ayant lieu quel que soit p). D'autre part, la somme $S_n(x)$ des $n+1$ premiers termes de la série trigonométrique qui représente f_p a pour limite, lorsque p augmente indéfiniment par les valeurs $\alpha_1, \beta_2, \beta'_2, \gamma_3, \gamma'_3, \ldots$, la somme $s_n(x)$ des $n+1$ premiers termes de la série $F(x)$; on peut prendre p assez grand pour que, quel que soit x dans l'intervalle,

$$|S_n(x) - s_n(x)| < \varepsilon;$$

on aura alors

$$|F(x) - f_p(x)| < 3\varepsilon.$$

Donc $f_p(x)$ a pour limite $F(x)$.

10. Ce mode de démonstration s'applique à un grand nombre de développements en séries; il a l'avantage de permettre d'affirmer, dans chaque cas, que la fonction limite admet le même développement que les fonctions de la suite dont elle est la limite. Par exemple, on peut l'appliquer, comme nous le verrons au Chapitre IV, à des fonctions développables en séries de Taylor également convergentes. Je m'en servirai, actuellement, pour donner une démonstration nouvelle du théorème de l'existence d'une fonction limite dans toute suite possédant la continuité égale. Je ferai usage du procédé de représentation des fonctions continues par la série de Fourier, sommée par la méthode de la moyenne arithmétique, que l'on doit à M. Fejer (1).

(1) *Untersuchungen über Fouriersche Reihen* (*Mathematische Annalen*, Bd. LVIII, p. 51).

Soit $f(x)$ une fonction continue, admettant la série de Fourier

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots.$$

Posons

$$S_n = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

et

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}.$$

On a

$$\sigma_n - f(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 \varphi(t)\,dt,$$

où

$$\varphi(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x).$$

Si $f(x)$ est continue pour la valeur x, on pourra trouver α assez petit pour que, dans l'intervalle $(x-2\alpha, x+2\alpha)$, l'oscillation de f ne dépasse pas ε; alors le module de $\varphi(t)$ reste inférieur à 2ε, et, si l'on désigne par M une limite supérieure de $f(x)$, on a

$$|\sigma_n - f(x)| < \frac{2\varepsilon}{n\pi}\int_0^{\alpha}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt + \frac{4M}{n\pi}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin^2\alpha}.$$

Si l'on remarque que

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = 1,$$

il vient

$$|\sigma_n - f| < 2\varepsilon + \frac{2M}{n\sin^2\alpha};$$

donc $\sigma_n - f$ a pour limite o avec $\frac{1}{n}$. Si $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), que l'on peut toujours supposer compris entre o et 2π, la convergence de la suite σ_n vers f est visiblement uniforme.

Supposons maintenant que l'on ait une famille de fonctions également continues; les suites

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \quad \sigma_n, \quad \ldots$$

relatives à chacune de ces fonctions sont également convergentes, car, ε étant choisi à l'avance, on peut choisir une valeur de α et une valeur de M qui demeurent les mêmes pour toutes les fonctions [1].

Soient alors

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_p, \quad \ldots$$

une suite de fonctions également continues et

$$\sigma_1^p, \quad \sigma_2^p, \quad \ldots, \quad \sigma_n^p, \quad \ldots$$

les sommes σ relatives à la fonction f_p,

$$a_0^p, \quad a_1^p, \quad b_1^p, \quad \ldots, \quad a_n^p, \quad b_n^p, \quad \ldots$$

les coefficients de la série de Fourier correspondante; tous ces nombres sont bornés; il en résulte que l'on peut trouver, par le procédé employé au paragraphe précédent, des nombres

$$A_0, \quad A_1, \quad B_1, \quad \ldots, \quad A_n, \quad B_n, \quad \ldots$$

tels que le nombre A_n, par exemple, soit la limite des nombres

$$a_n^{p_1}, \quad a_n^{p_2}, \quad \ldots, \quad a_n^{p_k}, \quad \ldots$$

lorsque k croît indéfiniment : les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ sont extraits de la suite des nombres entiers, croissent avec leur indice et ne dépendent pas de n. Je dis que la série trigonométrique dont les coefficients sont les A_n et les B_n est sommable par la méthode de la moyenne arithmétique et représente une fonction continue $F(x)$, qui est la limite de la suite des fonctions

$$f_{p_1}(x), \quad f_{p_2}(x), \quad \ldots, \quad f_{p_k}(x), \quad \ldots.$$

Les suites des sommes σ relatives à ces fonctions sont également convergentes; on peut donc, étant donné ε, trouver n assez grand pour que, m étant supérieur à n, on ait

$$|\sigma_{m+h}^{p_k} - \sigma_m^{p_k}| < \varepsilon,$$

---

[1] On suppose que, pour une valeur x_0 au moins de (a, b), les nombres $|f(x_0)|$ ont une plus petite limite finie.

quels que soient h et k. Or, m et h étant fixes, $\sigma_m^{p_k}$ et $\sigma_{m+h}^{p_k}$ ont pour limites, d'une manière uniforme, respectivement, les sommes σ_m et σ_{m+h} relatives à la série trigonométrique de coefficients A_n et B_n. Donc

$$|\sigma_{m+h} - \sigma_m| \leqq \varepsilon \qquad (m \geqq n),$$

et la suite des sommes σ relatives à cette série converge uniformément vers une fonction continue $F(x)$. On aura, pour $m \geqq n$,

$$|f_{p_k} \quad - \sigma_m^{p_k}| \leqq \varepsilon,$$
$$|F(x) - \sigma_m| \leqq \varepsilon;$$

on peut prendre k assez grand, m étant un entier fixe, pour que l'inégalité

$$|\sigma_m - \sigma_m^{p_k}| < \varepsilon$$

soit vérifiée, car les coefficients qui entrent dans la somme $\sigma_m^{p_k}$ ont pour limite, lorsque k croît indéfiniment, ceux de la somme σ_m et sont en nombre fini. On a donc, en définitive,

$$|F(x) - f_{p_k}(x)| < 3\varepsilon$$

pour k assez grand, ce qui démontre le théorème.

11. Nous nous sommes occupés jusqu'à présent des fonctions continues les plus générales : supposons, maintenant, que l'on ait une famille de fonctions $f(x)$, possédant toutes des dérivées $f'(x)$, et que ces fonctions dérivées soient également continues. S'il existe une valeur x_0 pour laquelle la plus petite limite des nombres $|f'(x_0)|$ n'est pas infinie, comme la plus petite limite des nombres $|f(x_0)|$, *de toute suite infinie de fonctions $f(x)$, on pourra extraire une suite nouvelle, convergente, et telle que la suite des dérivées de ses termes converge vers la dérivée de la fonction limite.*

En effet, soit une suite dénombrable de fonctions $f(x)$

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots.$$

la suite

$$f'_1(x), \quad f'_2(x), \quad \ldots, \quad f'_n(x), \quad \ldots$$

est formée de fonctions également continues; on peut, par suite de l'hypothèse faite sur les $f'(x_0)$, en extraire une suite convergente

$$f'_{\alpha_1}(x),\quad f'_{\alpha_2}(x),\quad \ldots,\quad f'_{\alpha_n}(x),\quad \ldots,$$

soit $F'(x)$ la fonction limite.

Choisissons dans la suite

$$f_{\alpha_1}(x_0),\quad f_{\alpha_2}(x_0),\quad f_{\alpha_n}(x_0),\quad \ldots$$

une suite de valeurs convergeant vers une limite finie $F(x_0)$ [ce qui est possible, par suite de l'hypothèse faite sur les $|f(x_0)|$ (¹)], soit la suite

$$f_{p_1}(x_0),\quad f_{p_2}(x_0)\quad \ldots,\quad f_{p_n}(x_0),\quad \ldots.$$

Alors, la suite des fonctions

$$f_{p_1}(x),\quad f_{p_2}(x),\quad \ldots,\quad f_{p_n}(x),\quad \ldots$$

converge vers une fonction continue $F(x)$; en effet, on a

$$f_{p_n}(x) = f_{p_n}(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_{p_n}(x)\,dx;$$

le second membre tend uniformément vers la limite

$$F(x_0) + \int_{x_0}^{x} F'(x)\,dx.$$

On a donc

$$\lim_{p=\infty} f_{p_n}(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} F'(x)\,dx = F(x),$$

et la suite des dérivées $f'_{p_n}(x)$ tend vers $F'(x)$.

Je laisserai de côté le cas où les nombres $|f'(x_0)|$ ou les nombres $|f(x_0)|$ augmentent indéfiniment : ce cas se traite comme au n° 2.

12. On déduit immédiatement de la proposition qui précède que, si les fonctions f ont des dérivées jusqu'à l'ordre k et si la famille des

(¹) Nous avons pris la même valeur x_0 pour f et f'; il est facile de voir que ce n'est pas nécessaire.

dérivées d'ordre k est également continue, *toute suite infinie de fonctions f a au moins une limite et la suite extraite de la première, qui converge vers cette limite, est telle que les suites formées par les dérivées d'ordre* 1, 2, ..., k *de ses termes convergent respectivement vers les dérivées d'ordre* 1, 2, ..., k *de sa fonction limite* ([1]). Pour que la fonction limite soit finie, ainsi que ses dérivées, il faut introduire des hypothèses analogues à celles que l'on a faites au numéro précédent sur les nombres $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

Lorsque les dérivées d'ordre k sont simplement bornées dans leur ensemble, sans être également continues, comme les dérivées d'ordre $(k-1)$ sont alors également continues, la proposition ci-dessus énoncée subsistera, en se limitant aux dérivées d'ordre 1, 2, ..., $(k-1)$.

13. Considérons maintenant une famille de fonctions possédant des dérivées d'ordre quelconque et supposons que toutes les dérivées d'un même ordre soient bornées. Je dis que : *de toute suite infinie de ces fonctions on peut extraire une suite nouvelle, convergeant vers une fonction limite* $F(x)$, *et telle que la suite formée par les dérivées d'un ordre quelconque k de ses termes converge vers la dérivée d'ordre k de* $F(x)$.

On peut d'abord former une suite

$$f_1^1(x),\quad f_2^1(x),\quad \ldots,\quad f_n^1(x),\quad \ldots$$

de fonctions f, convergeant vers $F(x)$; de cette suite on peut extraire la suite

$$f_1^2(x),\quad f_2^2(x),\quad \ldots,\quad f_n^2(x),\quad \ldots,$$

convergeant vers $F(x)$, en même temps que la suite des $f_n'^2(x)$ converge vers $F'(x)$. De cette nouvelle suite $f_n^2(x)$ on peut extraire la suite

$$f_1^3(x),\quad f_2^3(x),\quad \ldots,\quad f_n^3(x),\quad \ldots,$$

qui converge vers $F(x)$ en même temps que la suite des $f_n'^3(x)$ converge vers $F'(x)$ et que la suite des $f_n''^3(x)$ converge vers $F''(x)$. Cela

[1] Ce théorème trouve une application dans le calcul des variations, dans la recherche des maxima ou minima faibles.

résulte immédiatement des remarques faites aux numéros précédents. On continuera ainsi indéfiniment. Considérons alors la suite des fonctions

$$f_1^1(x), \quad f_2^2(x), \quad f_3^3(x), \quad \ldots, \quad f_n^n(x), \quad \ldots;$$

elle converge vers $F(x)$, puisqu'elle est formée de fonctions appartenant à la suite $f_n^1(x)$; la suite $f_n'(x)$ converge vers $F'(x)$, puisqu'elle est formée de fonctions appartenant à la suite $f_n^2(x)$, etc.; la suite $f_n^{(k)n}(x)$ converge vers $F^{(k)}(x)$, car elle est formée de fonctions tirées de la suite $f_n^k(x)$. Le théorème est démontré.

14. Les théorèmes qui précèdent s'étendent facilement au cas où l'on envisage simultanément plusieurs familles de fonctions d'une variable, en d'autres termes, au cas où l'on considère une famille de courbes dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. Je me bornerai, pour simplifier le langage, à l'espace à trois dimensions. Supposons qu'on ait une famille de courbes C

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

f, φ, ψ étant des fonctions, définies pour $0 \leq t \leq 1$ et également continues, quelle que soit la courbe : *De toute suite infinie de courbes* C, *on peut extraire une nouvelle suite ayant une courbe limite* Γ (¹). En effet, soient

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n, \quad \ldots$$

les courbes d'une suite infinie de courbes C, C_i étant définie par les fonctions f_i, φ_i, ψ_i. De la suite des fonctions

$$f_1(t), \quad f_2(t), \quad \ldots, \quad f_n(t), \quad \ldots,$$

on peut extraire une suite

$$f_{\alpha_1}(t), \quad f_{\alpha_2}(t), \quad \ldots, \quad f_{\alpha_n}(t), \quad \ldots$$

(¹) On dit que la courbe Γ est limite d'une suite de courbes C_n définies à l'aide de fonctions f_n, φ_n, ψ_n de la variable t dans l'intervalle (0, 1) lorsque les coordonnées (F, Φ, Ψ) des points de Γ sont respectivement les limites de f_n, φ_n, ψ_n; la convergence étant uniforme. Plus généralement, nous dirons que Γ est limite des C_n, si l'on peut faire correspondre les points de C_n à ceux de Γ, par une loi telle que, pour n assez grand, la distance de deux points correspondants soit inférieure à ε.

ayant une limite $F(t)$. De la suite

$$\varphi_{\alpha_1}(t), \quad \varphi_{\alpha_2}(t), \quad \ldots, \quad \varphi_{\alpha_n}(t), \quad \ldots,$$

on peut extraire une nouvelle suite

$$\varphi_{\beta_1}(t), \quad \varphi_{\beta_2}(t), \quad \ldots, \quad \varphi_{\beta_n}(t), \quad \ldots$$

ayant une limite $\Phi(t)$; enfin, de la suite

$$\psi_{\beta_1}(t), \quad \psi_{\beta_2}(t), \quad \ldots, \quad \psi_{\beta_n}(t), \quad \ldots,$$

on peut extraire une autre suite

$$\psi_{p_1}(t), \quad \psi_{p_2}(t), \quad \ldots, \quad \psi_{p_n}(t), \quad \ldots$$

ayant une limite $\Psi(t)$. Il est alors évident que les courbes

$$C_{p_1}, \quad C_{p_2}, \quad \ldots, \quad C_{p_n}, \quad \ldots$$

ont pour limite la courbe Γ, définie par les coordonnées (F, Φ, Ψ) (1).

15. Considérons une famille de courbes rectifiables C, et supposons que les longueurs de ces courbes aient une limite supérieure finie. Je dis que toute suite infinie de courbes C a au moins une courbe limite rectifiable. On peut, en effet, exprimer les coordonnées d'un point d'une courbe C en fonction de l'arc s et les valeurs de $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ forment des fonctions à nombres dérivés bornés, puisque ces nombres dérivés sont inférieurs à 1, en valeur absolue. Soit L un nombre supérieur à la longueur de toutes les courbes de la famille et l la longueur de la courbe C, faisons le changement de paramètre défini par

$$t = \frac{L}{l} s,$$

les nouvelles fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, définies dans l'intervalle $(0, L)$, auront encore leurs nombres dérivés inférieurs à 1, en valeur absolue.

(1) Si l'on veut que la courbe Γ soit à distance finie, il faut ajouter la condition que, P_n étant le point de C_n qui correspond à $t = t_0$, l'ensemble dérivé de l'ensemble des points P_n a au moins un point à distance finie.

Une suite quelconque C_n de courbes C aura donc au moins une courbe limite $\Gamma[X(t), Y(t), Z(t)]$: les fonctions X, Y, Z sont à nombres dérivés bornés et inférieurs à 1, en valeur absolue, donc Γ est rectifiable et sa longueur ne dépasse pas L.

Comme il y a identité entre les courbes rectifiables et les fonctions à variation bornée de M. Jordan, on peut énoncer la remarque qui précède sous la forme suivante :

Toute suite infinie de fonctions à variations bornées dans leur ensemble admet au moins une courbe limite.

16. Il y a une remarque essentielle à faire, sur la différence qui existe entre des fonctions admettant une fonction limite et des courbes admettant une courbe limite. Si l'on a une suite de fonctions f de x, par exemple, définies dans l'intervalle $(0, 1)$ et dont les courbes représentatives admettent une courbe limite, il n'en résulte pas que ces fonctions possèdent une fonction limite $F(x)$.

Une famille de courbes C_n admet une courbe limite Γ, si l'on peut exprimer les coordonnées d'un point de chaque courbe en fonction d'un paramètre t qui varie entre 0 et 1, de telle sorte que les fonctions $x_n(t)$, $y_n(t)$, $z_n(t)$, correspondant à la courbe C_n, convergent uniformément vers les fonctions X, Y, Z, qui correspondent à la courbe Γ. On voit que, si l'on entoure chaque point de la courbe Γ d'une sphère de rayon ε, ayant ce point pour centre, de manière à définir autour de Γ un domaine D formé par l'ensemble des points situés à l'intérieur de l'une au moins de ces sphères, lorsque n est assez grand, la courbe C_n est tout entière à l'intérieur de D. Bornons-nous au cas du plan, et soit une suite de fonctions $f_n(x)$, à variations, bornées quel que soit n, par un même nombre : les courbes représentatives correspondantes ont une courbe limite qui ne pourra pas toujours être représentée par l'équation $y = F(x)$, F étant une fonction continue de x, et les fonctions f_n n'auront pas toujours une fonction limite.

Ce sera le cas de la famille des fonctions

$$f_n = \frac{1+nx}{2} - \frac{n}{2}\sqrt{\left(x-\frac{1}{n}\right)^2}, \qquad 0 \leqq x \leqq 1,$$

le radical ayant sa valeur arithmétique, on a

$$f_n = nx \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{n},$$

$$f_n = 1 \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1;$$

il n'y a pas de fonction limite pour les f_n, mais il existe une courbe limite, fournie par la ligne brisée

$$x = 0, \qquad 0 \leqq y \leqq 1,$$
$$0 \leqq x \leqq 1, \qquad y = 1.$$

Le même fait se produit lorsqu'on a une série de fonctions continues, convergeant vers une fonction continue, sans que la convergence soit uniforme. Si les sommes sont à variations bornées dans leur ensemble, on pourra obtenir une courbe limite pour toutes ces courbes, en adjoignant à la courbe représentative de la fonction limite des segments rectilignes, parallèles à Oy. Considérons, par exemple, la série dont la somme des n premiers termes est

$$s_n(x) = nxe^{-n^2x^2}.$$

La somme de la série est 0, et la convergence est uniforme, dans tout intervalle ne contenant pas la valeur 0. Les fonctions s_n sont à variations bornées et admettent une courbe limite formée par la ligne brisée

$$x = 0, \qquad 0 \leqq y \leqq \frac{1}{\sqrt{2e}},$$
$$0 \leqq x \leqq 1, \qquad y = 0.$$

17. Examinons maintenant le cas où les fonctions $f(x)$, d'une famille déterminée, ne sont plus définies dans le même intervalle (a, b). Supposons que, étant donnée la suite de fonctions

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots,$$

la fonction $f_n(x)$ soit définie et continue dans l'intervalle (a_n, b_n). Le changement de variable

$$x = a_n + t(b_n - a_n)$$

fait correspondre à la fonction $f_n(x)$ une fonction $\varphi_n(t)$, définie dans l'intervalle (0, 1). Si les fonctions φ_n sont également continues, toute suite de *courbes* $y = f_n(x)$ aura au moins une *courbe limite*. Cette courbe limite aura des points à distance finie, si l'ensemble des points $x = a_n$, $y = f(a_n)$ n'a pas tous ses points limites à l'infini.

Prenons le cas où les différences $b_n - a_n$ n'augmentent pas toutes indéfiniment, en valeur absolue, et n'ont pas toutes pour limite 0. On pourra en choisir une infinité ayant une limite finie et différente de 0 : j'appellerai toujours $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ les fonctions de cette nouvelle suite. Je dirai que ces fonctions sont également continues, si, étant donné le nombre positif ε, on peut lui faire correspondre un nombre δ, tel que dans tout intervalle d'étendue moindre que δ, *choisi à l'intérieur de l'intervalle* (a_n, b_n) *où la fonction* f_n *est définie*, l'oscillation soit inférieure à ε, quelle que soit la fonction.

Les fonctions f_n et φ_n sont également continues en même temps; en effet, supposons les φ_n également continues, on a, quel que soit n,

$$|\varphi_n(t + \Delta t) - \varphi_n(t)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |\Delta t| < \delta',$$

soit

$$f_n(x) = \varphi_n(t), \qquad f_n(x + \Delta x) = \varphi_n(t + \Delta t), \qquad \Delta x = (b_n - a_n)\Delta t,$$

$|b_n - a_n|$ est supérieur ici à un nombre fixe μ, donc, si $|\Delta x| < \mu\delta'$, on en déduit $|\Delta t| < \delta'$ et, par suite,

$$|f_n(x + \Delta x) - f_n(x)| < \varepsilon;$$

on verrait de la même manière que les φ_n sont également continues, lorsque les f_n le sont.

18. La plupart des résultats établis précédemment subsistent avec peu de modifications, pour les familles de fonctions de plusieurs variables. Prenons, par exemple, des fonctions de deux variables (x, y), définies dans un domaine D. Nous dirons que ces fonctions sont également continues, lorsque à tout nombre ε correspond un nombre δ, tel que, le point (x, y) restant à l'intérieur de D dans un cercle quelconque de rayon δ, l'oscillation de chaque fonction f ne dépasse pas ε. Lorsqu'on a une famille de fonctions de deux variables, également

continues dans un domaine D, toute suite infinie de ces fonctions a au moins une fonction limite. La démonstration est analogue à celle que nous avons donnée au paragraphe 2 pour le cas des fonctions d'une variable; il suffit, au lieu de prendre un ensemble de points, partout dense sur le segment (a, b), de choisir un ensemble dénombrable de points, partout dense dans le domaine D : par exemple, l'ensemble des points de D dont les deux coordonnées sont rationnelles.

D'ailleurs, il est facile de ramener le cas des fonctions de plusieurs variables à celui des fonctions d'une variable. Prenons toujours deux variables x et y et supposons, pour simplifier, que le domaine D soit un carré de côté égal à l'unité de longueur. Soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations d'une courbe passant par tous les points du carré, φ et ψ sont des fonctions continues de t dans l'intervalle $(0, 1)$. Faisons correspondre à la fonction $f(x, y)$ la fonction $F(t)$ définie par

$$F(t) = f[\varphi(t), \psi(t)].$$

Je dis que, si les fonctions $f(x, y)$ sont également continues dans le carré D, les fonctions $F(t)$ correspondantes sont également continues sur le segment $(0, 1)$. Donnons-nous ε, il lui correspond δ, tel que, pour

$$|x - x'| < \delta, \qquad |y - y'| < \delta,$$

on ait

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon,$$

quelle que soit f. φ et ψ étant continues, on peut trouver ρ, tel que, si

$$|t - t'| < \rho,$$

on ait

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| < \delta, \qquad |\psi(t) - \psi(t')| < \delta,$$
$$x = \varphi(t), \qquad x' = \varphi(t'), \qquad y = \psi(t), \qquad y' = \psi(t').$$

Donc, si $|t - t'| < \rho$,

$$|F(t) - F(t')| < \varepsilon,$$

quelle que soit F. Cette remarque permet d'employer, pour le cas de deux ou d'un nombre quelconque de variables, les démonstrations qui ont servi pour celui d'une variable.

19. Pour reconnaître si des fonctions de plusieurs variables sont également continues, on pourra se servir de critères analogues à ceux que nous avons utilisés pour les fonctions d'une variable. Supposons, par exemple, que l'on ait dans D

$$|f(x, y) - f(x', y)| < \mathrm{M}\,|x - x'|,$$

quels que soient x, x', y et f, et

$$|f(x, y) - f(x, y')| < \mathrm{M}\,|y - y'|,$$

quels que soient y, y' x et f, c'est-à-dire que la fonction f soit à nombres dérivés partiels bornés, on en déduit aussitôt

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \mathrm{M}[|x - x'| + |y - y'|]$$

et, par suite, si

$$|x - x'| < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{M}}, \qquad |y - y'| < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{M}};$$
$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

20. *Fonction supérieure et fonction inférieure.* — J'introduirai encore, pour une famille de fonctions également continues, la notion de fonction supérieure et de fonction inférieure. Soit une famille de fonctions de la variable réelle x, également continues dans un même intervalle (a, b). Supposons que les valeurs de ces fonctions, pour $x = x_0$, soient bornées, alors les fonctions sont bornées dans leur ensemble, dans tout l'intervalle (a, b). Pour chaque valeur de x de l'intervalle (a, b), soient $\mathrm{M}(x)$ et $m(x)$ la plus grande des limites et la plus petite des limites des nombres $f(x)$. J'appelle *fonction supérieure* la fonction $\mathrm{M}(x)$ et *fonction inférieure* la fonction $m(x)$.

Les fonctions $\mathrm{M}(x)$ *et* $m(x)$ *sont des fonctions continues de* x *dans l'intervalle* (a, b). Prenons par exemple $\mathrm{M}(x)$.

Donnons-nous ε, il existe un nombre δ, tel que, dans tout intervalle de longueur au plus égale à δ, l'oscillation de chaque fonction $f(x)$ soit moindre que ε. Soit x une valeur de l'intervalle (a, b), on a pour une infinité de fonctions f

$$\mathrm{M}(x) - \varepsilon < f(x) < \mathrm{M}(x) + \varepsilon$$

et, pour la valeur $x + h\,(|h| < \delta)$, on a, sauf pour un nombre limité de fonctions,

$$\mathrm{M}(x+h) + \varepsilon > f(x+h);$$

donc

$$\mathrm{M}(x) - \mathrm{M}(x+h) < f(x) - f(x+h) + 2\varepsilon < 3\varepsilon,$$

on aurait de même

$$\mathrm{M}(x+h) - \mathrm{M}(x) < 3\varepsilon,$$

donc, pour $|h| < \delta$, on a

$$|\mathrm{M}(x+h) - \mathrm{M}(x)| < 3\varepsilon,$$

et la fonction $\mathrm{M}(x)$ est continue. Il en est de même pour $m(x)$.

Au sujet des fonctions m et M, on peut énoncer le théorème suivant :

Sauf pour un nombre limité de fonctions f, on a, dans tout l'intervalle (a, b),

$$m(x) - \varepsilon < f(x) < \mathrm{M}(x) + \varepsilon$$

pour chaque valeur de $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisie.

Prenons l'une de ces inégalités $f(x) < \mathrm{M}(x) + \varepsilon$, par exemple : je dis que, si cette inégalité n'était pas vérifiée dans tout l'intervalle pour une infinité de fonctions f, il existerait une valeur x_0 de l'intervalle (a, b) possédant la propriété suivante : dans tout intervalle dont le milieu est x_0 et la longueur aussi petite que l'on veut, l'inégalité n'est pas vérifiée pour une infinité de fonctions. En effet, divisons l'intervalle (a, b) en deux parties égales : dans l'une au moins de ces parties, il y a une infinité de fonctions qui ne vérifient pas toujours l'inégalité. En divisant en deux parties égales l'une des parties où l'exception se produit, on obtiendra un nouvel intervalle de longueur égale à la moitié de celle du précédent et dans lequel l'exception se produira encore, et ainsi de suite. On définit ainsi une suite infinie d'intervalles emboîtés les uns dans les autres et dont la longueur tend vers o : ils ont un point limite $x_0 (a \leqq x_0 \leqq t)$. Le point x_0 possède la propriété énoncée.

Entourons x_0 d'un intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$ assez petit pour que l'oscillation de toutes les fonctions f et $M(x)$ ne dépasse pas $\frac{\varepsilon}{3}$ dans cet intervalle.

Pour une infinité de fonctions f, il existe dans l'intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$ un point x_1 au moins pour lequel

$$f(x_1) > M(x_1) + \varepsilon,$$

et, comme

$$f(x_0) - f(x_1) > -\frac{\varepsilon}{3}, \qquad M(x_1) - M(x_0) > -\frac{\varepsilon}{3},$$

on aura

$$f(x_0) > f(x_1) - \frac{\varepsilon}{3} > M(x_1) + \frac{2\varepsilon}{3} > M(x_0) + \frac{\varepsilon}{3}$$

pour une infinité de fonctions f; ceci est contraire à l'hypothèse que $M(x_0)$ est la plus grande des limites des nombres $f(x_0)$.

21. Supposons que l'on ait une famille de fonctions également continues, croissant avec n, pour chaque valeur de x :

$$f_1 \leqq f_2 \leqq f_3 \ldots \leqq f_n \leqq \ldots,$$

on a évidemment $M(x) = m(x)$ et les fonctions f ont pour limite $M(x)$.

Réciproquement, si des fonctions f_n, ne décroissant pas quand n croît, pour chaque valeur de x, ont pour limite la fonction continue $F(x)$, elles sont également continues : il résulte alors des inégalités écrites plus haut que la convergence est uniforme.

Soit, en effet, x_0 une valeur de l'intervalle (a, b), on a, pour p assez grand,

$$F(x_0) \geqq f_p(x_0) > F(x_0) - \varepsilon,$$

ε étant donné arbitrairement, les fonctions F et f_p étant toutes deux continues, on a, dans un intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$,

$$f_p(x) - f_p(x_0) > -\varepsilon, \qquad F(x_0) - F(x) > -\varepsilon;$$

par conséquent,

$$F(x) \geqq f_p(x) > f_p(x_0) - \varepsilon > F(x_0) - 2\varepsilon > F(x) - 3\varepsilon,$$

et comme, lorsque

$$n > p, \qquad f_n(x) > f_p(x),$$

on a

$$n \geqq p, \qquad F(x) \geqq f_n(x) > F(x) - 3\varepsilon,$$

il résulte de là que, dans l'intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$, l'oscillation de chaque fonction $f_n(x)$ pour $n \geqq p$ ne dépasse pas ε. Donc les fonctions f_n sont également continues en x_0. Cette valeur étant arbitraire, on en conclut, à l'aide du théorème du paragraphe 8, que les fonctions sont également continues dans (a, b). On peut donner de la propriété précédente un énoncé un peu différent : si une série à termes tous positifs a pour somme une fonction continue, elle converge uniformément. En effet, les sommes $f_n(x)$ des n premiers termes croissent avec n, lorsque x est fixe.

CHAPITRE II.

APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

22. La démonstration de l'existence des intégrales de l'équation différentielle

$$y' = f(x, y),$$

dans laquelle $f(x, y)$ est une fonction continue de l'ensemble des deux variables réelles x et y, a fait l'objet des études de M. Arzelà (¹)

(¹) *Sull' integrabilità delle equazioni differenziali ordinarie* (*Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna* (5ᵉ série, t. V, 1895, p. 75-88). — *Sull' esistenza degli integrali nelle equazioni differenziali ordinarie* (*Ibid.*, 5ᵉ série, t. VI, 1896, p. 33-42).

et de M. Peano [1]; en particulier, M. Arzelà a établi l'existence d'une intégrale passant au point donné (x_0, y_0), sous la seule condition de la continuité de $f(x, y)$ et M. Peano a montré, par une méthode différente, l'existence d'un faisceau d'intégrales passant, en général, par le point x_0, y_0. Je me servirai, dans ce qui suit, de la méthode de démonstration de l'existence des intégrales qui est due à Cauchy et dans laquelle on obtient une courbe intégrale par l'approximation de lignes polygonales.

23. J'appellerai *ligne polygonale de Cauchy*, toute ligne brisée $y = \varphi_p(x)$, telle que le coefficient angulaire de chacun de ses côtés soit égal à la valeur que prend $f(x, y)$ à l'une des extrémités de ce côté. Je démontrerai que toute suite infinie de lignes polygonales de Cauchy ayant même origine (dont le nombre des côtés augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers o) a au moins une courbe limite qui est une intégrale de l'équation différentielle et que, réciproquement, toute intégrale peut être obtenue comme la limite d'une suite infinie de telles lignes polygonales.

Soit un point $P(x_0, y_0)$ du plan, supposons que, dans le domaine

$$x_0 - a \leqq x \leqq x_0 + a, \qquad y_0 - b \leqq y \leqq y_0 + b,$$

on ait

$$|f(x, y)| < M,$$

et prenons, en outre, l'intervalle a tel que $aM < b$.

Divisons l'intervalle $(x_0, x_0 + a)$ en intervalles partiels par les points de division $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $X = x_0 + a$, et construisons la ligne polygonale de Cauchy $y = \varphi_p(x)$, passant en P et dont les sommets sont sur les parallèles à Oy d'abscisses $x_0, x_1, \ldots, x_n$, X. Dans l'intervalle (x_k, x_{k+1}), $\varphi_p(x)$ varie linéairement et la pente du côté correspondant de la ligne brisée est égale soit à $f[x_k, \varphi_p(x_k)]$, soit à $f[x_{k+1}, \varphi_p(x_{k+1})]$. Il est facile de voir que toutes les fonctions $\varphi_p(x) - y_0$ sont bornées et inférieures à b, en valeur absolue.

---

(1) *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires* (*Mathematische Annalen*, Bd. 37, 1890). Cet article, écrit à l'aide de symboles logiques, a été traduit en allemand par M. Mie (*Mathematische Annalen*, Bd. 43).

La famille de fonctions, formée par toutes les fonctions φ_p possibles passant en P, est une famille de fonctions également continues, car toutes ces fonctions sont à nombres dérivés bornés (inférieurs à M, en valeur absolue) : par conséquent, de toute suite infinie de fonctions φ_p, on peut extraire une suite nouvelle ayant une fonction limite. Reste à montrer que cette fonction limite est une intégrale lorsque le nombre des côtés des lignes polygonales a augmenté indéfiniment, chacun d'eux tendant vers o.

Soit

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_p, \quad \ldots$$

une suite infinie de fonctions φ_p ayant pour limite la fonction $\varphi(x)$. Appelons $\varphi'_p(x)$, la dérivée à droite, par exemple, de la fonction φ_p. Prenons une valeur x de l'intervalle x_0, x_0+a; x appartient à l'un des intervalles partiels relatifs à la ligne brisée φ_p. Supposons que x_k soit l'un des points de cette division, extrémité de l'intervalle partiel qui contient x et tel que $\varphi'_p(x)$ soit égal à la valeur de $f(x, y)$, au sommet de la ligne polygonale dont l'abscisse est x_k. On a

$$\varphi'_p(x) = f[x_k, \varphi_k(x_k)];$$

ε étant donné, on peut trouver δ tel que, dans tout carré de côté inférieur à 2δ, l'oscillation de f ne dépasse pas ε. Prenons p assez grand pour que

$$|x - x_k| < \delta,$$

$$|\varphi(x_k) - \varphi_p(x_k)| < \frac{\delta}{2}, \qquad |\varphi(x_k) - \varphi(x)| < \frac{\delta}{2},$$

la dernière inégalité est possible, parce que le nombre des points de division x_k augmente indéfiniment avec p tandis que la distance de deux points consécutifs tend vers o. On a alors

$$|\varphi(x) - \varphi_p(x_k)| < \delta$$

et, par suite,

$$|\varphi'_p(x) - f[x, \varphi(x)]| < \varepsilon.$$

Donc les fonctions

$$\varphi'_1(x), \quad \varphi'_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi'_p(x), \quad \ldots$$

tendent uniformément vers la limite

$$f(x, \varphi).$$

Par suite, les fonctions

$$\int_{x_0}^{x} \varphi'_p(x)\,dx$$

tendent uniformément vers

$$\int_{x_0}^{x} f(x, \varphi)\,dx.$$

Or,

$$\varphi_p(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi'_p(x)\,dx.$$

Donc

$$\varphi(x) = \lim_{p=\infty} \varphi_p(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi)\,dx$$

et, par conséquent,

$$\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)].$$

Donc :

Toute suite infinie de lignes polygonales de Cauchy, ayant même origine P, *admet au moins une courbe limite qui est une intégrale passant en* P.

On suppose, bien entendu, que le nombre des côtés de ces lignes brisées ne reste pas fini, et que la longueur d'aucun côté ne reste supérieure à un nombre fixe.

24. Donnons-nous maintenant une intégrale de l'équation passant en P, soit $y = \varphi(x)$. Je divise l'intervalle (x_0, X), en intervalles partiels de longueur moindre que η, η étant un nombre choisi de manière que, dans chaque intervalle partiel, l'oscillation de φ ne dépasse pas ε $\left(\text{il suffit de prendre } \eta < \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}\right)$. Soient x_k et x_{k+1} deux points de divisions consécutifs, abscisses de deux points A et B de la courbe φ.

Supposons d'abord que la droite AB ne rencontre pas la courbe à l'intérieur de l'intervalle (x_k, x_{k+1}). Dans cet intervalle, la courbe est tout entière du même côté de AB, donc les tangentes en A et B à cette courbe se coupent en un point C dont l'abscisse est comprise entre x_k et x_{k+1}. AC et CB seront deux côtés consécutifs d'une ligne polygonale de Cauchy.

Si la droite AB rencontre la courbe en un nombre fini de points dans l'intervalle (x_k, x_{k+1}), on divisera cet intervalle en intervalles partiels tels que dans chacun d'eux la courbe soit tout entière du même côté de AB. On définira ainsi plusieurs côtés consécutifs d'un polygone de Cauchy formé de deux côtés dans chaque intervalle partiel.

Enfin, la droite AB peut rencontrer la courbe en une infinité de points à l'intérieur de (x_k, x_{k+1}). Soit C un de leurs points limites qui peut être A ou B; en C, la droite AB est tangente à la courbe, je prendrai AC ou CB comme côtés consécutifs, d'ailleurs en ligne droite, d'une ligne polygonale de Cauchy.

En opérant ainsi dans tous les intervalles (x_k, x_{k+1}), je puis définir une ligne polygonale $y = \varphi_p(x)$, passant en P. Je dis que $\varphi(x)$ et $\varphi_p(x)$ diffèrent, en valeur absolue, de moins de 2ε.

Prenons un intervalle (x', x'') correspondant à un côté de la ligne polygonale, on a, si $x' \leqq x \leqq x''$,

$$|\varphi_p(x) - \varphi_p(x')| < \mathrm{M}\,|x - x'| < \mathrm{M}\eta < \varepsilon,$$

en supposant que le point $[x', \varphi_p(x')]$ soit sur la courbe intégrale. Or

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| < \varepsilon,$$

donc, comme $\varphi(x') = \varphi_p(x')$,

$$|\varphi(x) - \varphi_p(x)| < 2\varepsilon;$$

le raisonnement est le même si c'est le point $[x'', \varphi_p(x'')]$ qui est situé sur la courbe intégrale. Donc :

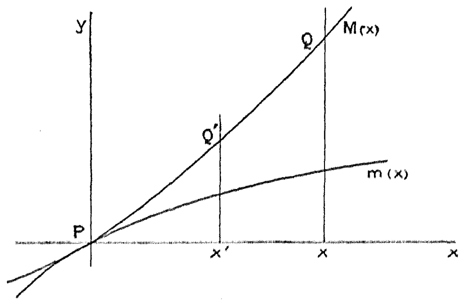
Toute courbe intégrale passant en un point P *est la limite d'une suite infinie de lignes polygonales de Cauchy qui passent par ce point.*

Les mêmes raisonnements et les mêmes résultats sont valables pour l'intervalle $(x_0 - a, x_0)$.

25. Considérons la famille des fonctions intégrales issues de P. C'est une famille de fonctions également continues et comprises entre $y_0 - b$ et $y_0 + b$. Désignons par $M(x)$ et $m(x)$ la fonction supérieure et la fonction inférieure de cette famille. Je dis que M et m sont deux intégrales de l'équation que j'appellerai l'*intégrale supérieure* et l'*intégrale inférieure* relatives au point P. Dans l'intervalle $(x_0, x_0 + a)$ ces intégrales seront appelées *intégrale supérieure à droite* et *intégrale inférieure à droite*, dans l'intervalle $(x_0 - a, x_0)$, ce seront les *intégrales à gauche*.

D'abord, par un point quelconque Q' de $M(x)$ et le point P il passe une intégrale; en effet, le point Q' est un point limite de points d'in-

Fig. 1.



tersection d'intégrales $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$, issues de P, avec la droite $x = x'$ (x' désigne l'abscisse de Q'). De la suite ψ_n on peut extraire une suite nouvelle ayant pour limite une fonction ψ qui est évidemment une intégrale et qui passe aux points P et Q'.

En second lieu, considérons toutes les intégrales de l'équation qui passent en Q', je dis que leur fonction supérieure à droite $(x \geq x')$ est encore $M(x)$; en effet, cette fonction supérieure rencontre la parallèle à Oy d'abscisse $x > x'$ en un point Q_1 d'ordonnée y. Si $y > M(x)$, il passe une intégrale par $Q'Q_1$ et une intégrale par PQ'; l'intégrale $PQ'Q_1$ rencontrerait la parallèle à Oy d'abscisse x en un point Q_1 situé au-dessus du point de rencontre Q de cette droite et de $y = M(x)$. Comme il existe une infinité d'intégrales passant par Q' et des points voisins de Q_1 d'abscisse x, on voit que Q_1 ne serait pas le point correspondant à la plus grande des limites des ordonnées des points de rencontre de QQ_1 avec les intégrales issues de P. Si $y < M(x)$, l'intégrale passant en Q' et Q_1 et l'intégrale passant en P et Q, se croisent en un point R d'abscisse supérieure à x', l'intégrale $Q'RQ$ est une intégrale issue de Q'. Comme on peut remplacer Q par une infinité de points voisins et d'abscisse x, il y aurait une infinité d'intégrales issues de Q' et rencontrant QQ_1 en une infinité de points ayant pour limite Q; Q_1 ne serait donc pas la plus grande des limites des points où les intégrales issues de Q rencontrent la parallèle à Oy d'abscisse x.

Donc

$$y = M(x).$$

Je peux maintenant montrer que $M(x)$ est une intégrale. Soient

$$Q_1, \quad Q_2, \quad \ldots, \quad Q_n, \quad \ldots$$

une infinité de points choisis sur $y = M(x)$ et tels, que leurs abscisses forment dans l'intervalle $(x_0, x_0 + a)$ un ensemble partout dense. Il existe une intégrale passant par P et Q_1, soit $\psi_1(x)$. Prenons Q_1, Q_2 et soit Q' celui de moindre abscisse, Q'' l'autre; il y a une intégrale reliant P et Q' et une intégrale reliant Q' et Q'' d'après les remarques qui précèdent, il y a donc une intégrale $\psi_2(x)$ issue de P et passant par Q_1, Q_2, et ainsi de suite : je dis qu'il y a une intégrale $\psi_n(x)$, issue de P et passant par Q_1, Q_2, ..., Q_n; en effet, soient Q', Q'', Q''', ..., $Q^{(n)}$ ces mêmes points, rangés dans l'ordre des abscisses croissantes, il y a une intégrale reliant PQ', une reliant $Q'Q''$, une reliant $Q''Q'''$, etc., une intégrale reliant $Q^{(n-1)}Q^{(n)}$.

Considérons la suite de fonctions également continues

$$\psi_1(x), \quad \psi_2(x), \quad \ldots, \quad \psi_n(x), \quad \ldots;$$

elle admet au moins une fonction limite $\psi(x)$ qui est une intégrale et qui passe par tous les points Q_n comme la courbe $y = M(x)$. Les deux fonctions continues $\psi(x)$ et $M(x)$ coïncident, puisqu'elles prennent les mêmes valeurs pour un ensemble de valeurs de x partout dense dans $(x_0, x_0 + a)$. Donc, $y = M(x)$ est une intégrale, l'intégrale supérieure. Un raisonnement analogue s'applique à $y = m(x)$.

Les deux intégrales M et m, tangentes en P, limitent une région du plan à l'intérieur de la bande $(x_0 - a, x_0 + a)$. Par tout point A de cette région, il passe au moins une intégrale issue de P. Soit x l'abscisse du point A, supposons, par exemple, $x_0 < x \leqq x_0 + a$. Il existe une intégrale $\psi(x)$, issue de A et définie dans l'intervalle (x_0, x). Si la courbe $y = \psi(x)$ sort de la région comprise entre M et m, elle rencontre M ou m : si elle coupe M en B, l'intégrale PBA, formée par M de P en B et ψ de B en A, est une intégrale reliant P et A.

Si $\psi(x)$ ne sort pas de la région considérée, elle rencontre toutes les parallèles à Oy dont les abscisses sont comprises entre x_0 et x, en des points dont les ordonnées sont comprises en M et m. Donc cette courbe vient aboutir au point P. En définitive, on peut énoncer la proposition suivante :

Il existe deux intégrales issues de P, *l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure, qui limitent la région du plan où passent toutes les intégrales issues de* P. *Par chaque point de cette région, il passe au moins une intégrale issue de* P.

On voit que, sur chaque parallèle à Oy, l'ensemble des points de rencontre de cette droite et des intégrales ψ issues de P comprend tous les points du segment (m, M). Enfin, la démonstration précédente montre que, si l'on se déplace sur l'intégrale supérieure M, par exemple, en un point Q' à droite de P, l'intégrale supérieure à droite de Q' est encore M, en un point Q'' à gauche de P, l'intégrale supérieure à gauche de Q'' est encore M; mais l'intégrale supérieure à gauche de Q' ou l'intégrale supérieure à droite de Q'' ne sont pas nécessairement confondues avec M, comme on le voit aisément sur des exemples.

26. Voici un exemple simple. Soit l'équation différentielle

$$y' = \sqrt[3]{y}$$

dont l'intégrale générale est

$$y^2 = \left[\frac{2}{3}(x + c)\right]^3$$

et l'intégrale singulière $y = 0$. Par chaque point A du plan, de coordonnées x_1, y_1, vérifiant l'inégalité

$$y_1^2 - \left(\frac{2}{3}x_1\right)^3 < 0,$$

il passe une intégrale issue de l'origine des coordonnées. Soit B le point de rebroussement, situé sur la partie positive de Ox, de l'intégrale générale passant au point A. La courbe formée par le segment OB sur l'axe des x, et le segment curviligne BA de la parabole est une intégrale reliant O et A. L'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure issues de l'origine sont les courbes

$$y = \mathrm{M}(x) = +\sqrt{\left(\frac{2}{3}x\right)^3}, \qquad y = m(x) = -\sqrt{\left(\frac{2}{3}x\right)^3}.$$

On peut prendre, dans ce qui précède, un point quelconque de l'axe des x comme origine des coordonnées.

D'une manière générale, on aura des résultats analogues chaque fois qu'il existera une intégrale singulière, enveloppe de l'intégrale générale. De tout point situé sur l'intégrale singulière partira un faisceau d'intégrales dont chacune est obtenue, en suivant d'abord l'intégrale singulière, puis l'abandonnant et cheminant sur une intégrale ordinaire à partir du point où cette dernière courbe touche son enveloppe. Dans les exemples de ce genre, deux intégrales issues du même point ont toujours une partie commune, qui est un segment de l'intégrale singulière.

27. Je vais maintenant faire voir que les intégrales supérieure et inférieure varient d'une manière continue avec le point $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ d'où elles sont issues. Occupons-nous, par exemple, des intégrales supérieures.

Je suppose que y_0 seul varie; pour le point $\mathrm{P}(x_0, y_0)$, on a l'intégrale supérieure à droite $\mathrm{M}(x)$ et pour le point $\mathrm{P}'(x_0, y_0 + k)$ l'intégrale $\mathrm{M}(x, k)$. Ces deux intégrales ne peuvent se traverser lorsque $x_0 < x < x_0 + a$; par exemple, si $k > 0$ et si $\mathrm{M}(x)$ et $\mathrm{M}(x, k)$ se coupaient au point R, l'intégrale supérieure issue de P' serait formée de l'arc P'R de $\mathrm{M}(x, k)$ et au delà de R coïnciderait avec $\mathrm{M}(x)$; on a donc toujours

$$M(x, k) \geqq M(x)$$

et, pour la même raison, si $k > k'$,

$$M(x, k) \geqq M(x, k').$$

Lorsque k tend vers o, le nombre $M(x, k)$ qui décroît avec $k(k > 0)$ a une limite $M(x_1 + 0)$. Cette fonction limite est une intégrale : en effet, les fonctions $M(x, k)$ sont également continues [je suppose k assez voisin de o pour que $f(x, y)$ reste toujours inférieur à un nombre fixe M_1, en valeur absolue], on déduit de là que l'on peut choisir une suite décroissante de valeurs de k,

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n, \quad \ldots$$

telle que $M(x, k_n)$ tende uniformément vers $M(x_1 + 0)$, on en conclut facilement que $M(x, k)$ tend uniformément vers $M(x_1 + 0)$. Il en résulte que $M(x_1 + 0)$ est une intégrale issue de P et, comme

$$M(x_1 + 0) \geqq M(x),$$

on a nécessairement

$$M(x_1 + 0) = M(x).$$

On arrive au même résultat pour k négatif; donc, étant donné ε, on a, pour k assez petit,

$$|M(x, k) - M(x)| < \varepsilon.$$

Mêmes raisonnements pour les intégrales inférieures et pour les intégrales à gauche. Faisons maintenant varier x_0 seulement. Soient $M(x)$ l'intégrale supérieure issue de P, et $M(x, h)$ l'intégrale supérieure issue de $P'(x_0 + h, y_0)$.

Supposons $h > 0$, par exemple. A droite de P' comme à gauche de P, les intégrales ne peuvent se traverser, mais cela est possible dans la bande du plan comprise entre les parallèles à Oy menées par P et P'. Je prends h assez petit pour que $2hM_1 < \varepsilon$. Alors, entre P et P', on a

$$|M(x, h) - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |M(x) - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc

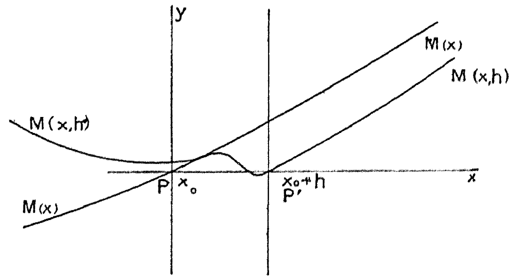
$$|M(x, h) - M(x)| < \varepsilon$$

pour

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + h.$$

Donnons à h une valeur fixe, vérifiant l'inégalité précédente, et considérons toutes les intégrales supérieures passant par les points $(x_0 + \theta h, y_0)$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$. A droite de P′, toutes ces intégrales sont situées dans la bande limitée par $M(x)$ et $M(x, h)$: on démon-

Fig. 2.



trerait comme précédemment que, lorsque θ tend vers o, elles ont pour limite l'intégrale $M(x)$. Il en est de même à gauche de P. Entre P et P′ la différence des valeurs des deux fonctions ne dépasse pas ε en valeur absolue. Ceci suffit à montrer que $M(x, h)$ est une fonction continue de h. En résumé, l'intégrale supérieure $M(x)$ et l'intégrale inférieure $m(x)$ sont des fonctions continues de x_0 et de y_0.

On peut montrer aussi que ce sont des fonctions continues de l'ensemble (x_0, y_0).

Il suffit de remarquer que deux intégrales supérieures M et M′ issues des deux points P et P′ dont les coordonnées sont respectivement x_0, y_0 et $x_0 + h$, $y_0 + k$, ne peuvent se traverser que lorsque x est compris entre les valeurs x_0 et $x_0 + h$.

Prenons alors

$$|k| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ε arbitraire et

$$|h| M_1 < \frac{\varepsilon}{3},$$

on aura, pour x compris entre x_0 et x_0+h,

$$|M-y_0|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$|M'-y_0-k|<\frac{\varepsilon}{3},$$

d'où

$$|M'-M|<\varepsilon.$$

Maintenant, on démontrerait, comme plus haut, que, lorsque θ et θ' tendent vers o, suivant une loi arbitrairement choisie, l'intégrale supérieure issue du point $(x_0+\theta h, y_0+\theta' k)$ $(0\leqq\theta\leqq 1, 0\leqq\theta'\leqq 1)$ tend uniformément vers $M(x)$ en dehors de l'intervalle (x_0, x_0+h); comme dans cet intervalle, ces intégrales diffèrent, comme M et M', de moins de ε, en valeur absolue, on peut affirmer que, lorsque P' tend vers P, l'intégrale supérieure issue de P' tend uniformément vers celle de P. En d'autres termes :

L'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure de l'équation différentielle

$$y'=f(x,y),$$

dans laquelle $f(x, y)$ est une fonction continue de l'ensemble des variables (x, y), sont des fonctions continues de l'ensemble des valeurs initiales.

28. En particulier, si la condition de Lipschitz est remplie, c'est-à-dire, si la fonction f a, par rapport à la variable y, des nombres dérivés bornés, il y a une intégrale unique issue de P. Donc : *l'intégrale générale d'une équation différentielle, dans le cas où elle est déterminée par ses valeurs initiales, est une fonction continue de l'ensemble de ces valeurs.*

Il y a d'autres cas que celui de Cauchy-Lipschitz où l'intégrale est unique et où, par conséquent, le théorème précédent s'applique.

Supposons que, x restant fixe, f soit une fonction de y qui ne croît jamais avec y. Si y_1 et y_2 sont les intégrales supérieure et inférieure issues d'un point, on a

$$y_1\geqq y_2,$$

donc

$$f(x, y_1) \leqq f(x, y_2),$$

c'est-à-dire

$$y'_1 \leqq y'_2,$$

la dérivée de $y_1 - y_2$ est négative ou nulle et, comme cette fonction est nulle en x_0, on a

$$y_1 \leqq y_2.$$

Donc

$$y_1 = y_2,$$

l'intégrale est unique [1].

29. La méthode des lignes polygonales de Cauchy s'étend facilement au cas d'un système de plusieurs équations différentielles du premier ordre [2]. Bornons-nous à deux équations pour avoir encore une image géométrique des constructions employées. Soient les équations

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z),$$

$f(x, y, z)$ et $\varphi(x, y, z)$ étant des fonctions continues de l'ensemble des trois variables x, y, z et inférieures en valeur absolue à M, lorsque le point (x, y, z) est à l'intérieur d'un parallélépipède D de centre $P(x_0, y_0, z_0)$ et dont les côtés sont égaux à $2a$, $2b$, $2c$. Je suppose, en outre, que l'on ait

$$a\text{M} \leqq b, \qquad a\text{M} \leqq c.$$

A chaque point du domaine D, correspond une direction dont les coefficients angulaires sont égaux aux valeurs de f et φ en ce point. J'appelle *ligne polygonale de Cauchy* toute ligne brisée telle, que les coefficients angulaires de chacun de ses côtés soient égaux aux valeurs de f et de φ à l'une des extrémités de ce côté. Considérons les lignes polygonales de Cauchy, ayant leur origine commune en P (elles restent à l'intérieur de D, par suite des inégalités écrites); on peut

(1) PEANO, *Mathematische Annalen, loc. cit.*

(2) Et, par conséquent, aux équations d'ordre supérieur, qui se ramènent à celles-ci.

se borner, ici aussi, à faire varier x dans l'intervalle $(x_0, x_0 + a)$. Si

$$y = \theta_p(x), \qquad z = \psi_p(x)$$

sont les équations d'une de ces lignes polygonales, θ_p et ψ_p sont des fonctions de x à nombres dérivés bornés : donc, toute suite infinie de telles lignes polygonales aura au moins une courbe limite. On pourra obtenir une suite infinie de lignes polygonales, en subdivisant l'intervalle $(x_0, x_0 + a)$ en intervalles partiels et en faisant croître indéfiniment, suivant une loi arbitrairement choisie, le nombre de ces intervalles, la longueur de chacun d'eux tendant vers o : la courbe limite est une intégrale du système. Soit, en effet, la suite infinie des lignes polygonales (θ_p, ψ_p), où p prend toutes les valeurs entières, qui possède la courbe limite

$$y = \theta(x), \qquad z = \psi(x).$$

Soit x une valeur de l'intervalle $(x_0, x_0 + a)$, x est compris entre deux points de division consécutifs x_k, x_{k+1}, relatifs à la subdivision de l'intervalle $(x_0, x_0 + a)$ qui correspond à la $p^{\text{ième}}$ ligne polygonale. Si y'_p et z'_p désignent les dérivées à droite, par exemple, des fonctions θ_p et ψ_p, on a

$$y'_p = f[x_k, \theta_p(x_k), \psi_p(x_k)], \qquad z'_p = \varphi[x_k, \theta_p(x_k), \psi_p(x_k)],$$

en supposant que le côté du $p^{\text{ième}}$ polygone correspondant à x_k, x_{k+1} ait pour coefficients angulaires les valeurs de f et φ à l'extrémité de ce côté dont l'abscisse est x_k.

Les fonctions f et φ étant continues par rapport à l'ensemble (x, y, z), on peut trouver δ, tel que, dans tout cube de côté δ et contenu dans D, l'oscillation de chacune de ces deux fonctions ne dépasse pas ε. Supposons que tous les intervalles (x_k, x_{k+1}) soient moindres que δ. Les fonctions $\theta_p(x)$, $\psi_p(x)$ étant également continues, on peut prendre les intervalles (x_{k-1}, x_{k+1}) assez petits, pour que, dans chacun de ces intervalles, l'oscillation de chaque fonction ne dépasse pas δ. Dans ces conditions, $f[x_k, \theta_p(x_k), \psi_p(x_k)]$ différera de $f[x, \theta_p(x), \psi_p(x)]$ de moins de ε. Lorsque p croît indéfiniment, cette fonction tend uniformément vers $f[x, \theta(x), \psi(x)]$, donc

$$\lim_{p=\infty} y'_p(x) = f(x, \theta, \psi).$$

Comme la convergence est uniforme et que l'on a

$$y_p(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} y'_p(x)\, dx,$$

il en résulte

$$\theta(x) = \lim_{p=\infty} \int_{x_0}^{x} y'_p\, dx + y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, \theta, \psi)\, dx + y_0.$$

Donc

$$\theta'(x) = f[x, \theta(x), \psi(x)]$$

et, de même, on démontrerait que

$$\psi'(x) = \varphi[x, \theta(x), \psi(x)].$$

30. On peut voir que toute intégrale issue de P est la limite d'une suite infinie de lignes polygonales de Cauchy ayant P pour origine; que ces intégrales se distribuent soit sur une portion de surface, soit dans une portion de volume où elles forment un ensemble de courbes partout dense. Pour donner un exemple du premier cas, considérons une congruence de courbes C ayant une surface focale, soit P un point de cette surface; il passe en P, en général, une courbe Γ enveloppe d'une famille de courbes de C et située sur la surface. Les intégrales passant en P, du système d'équations différentielles que définit la congruence, sont formées par une portion PB de la courbe Γ et d'un arc de la courbe C, tangente à Γ en B. Toutes ces intégrales sont situées sur la surface engendrée par les courbes C, tangentes à Γ. Il peut y avoir plusieurs de ces surfaces passant en P.

Un exemple simple du second cas est fourni par un système d'équations dans lequel la première ne dépend pas de z et la seconde ne dépend pas de y.

Enfin, lorsque l'intégrale issue du point P est unique, c'est une fonction continue des valeurs initiales.

31. Les équations aux dérivées partielles qui, au point de vue où nous nous plaçons, sont analogues aux équations différentielles ordi-

naires du premier ordre, sont celles de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y, z),$$

$f(x, y, z)$ étant une fonction continue, dans un certain domaine, de l'ensemble des variables (x, y, z).

Lorsqu'une fonction possède des dérivées partielles du premier ordre continues, la dérivée continue $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ est définie comme la dérivée première de $\frac{\partial z}{\partial x}$ par rapport à y ou de $\frac{\partial z}{\partial y}$ par rapport à x. Pour nous placer dans le cas le plus général, nous définirons cette dérivée seconde, comme la limite, lorsqu'elle existe, du rapport

$$r = \frac{z(x+h, y+k) - z(x+h, y) - z(x, y+k) + z(x, y)}{hk}, \qquad hk \neq 0$$

quand les nombres h et k tendent vers o, indépendamment l'un de l'autre. On voit facilement que, lorsque $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ existent et que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ est continue en x, y, cette définition se ramène à la précédente.

Avec la nouvelle définition, il existe toujours une fonction z, continue en (x, y), qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0$$

qui, pour $y = y_0$, se réduit à la fonction continue $\varphi(x)$ et, pour $x = x_0$, à la fonction continue $\psi(y)$, à condition que l'on ait

$$\varphi(x_0) = \psi(y_0) = z_0.$$

C'est la fonction

$$z_1 = \varphi(x) + \psi(y) - z_0.$$

Alors, si z est une intégrale de l'équation proposée se réduisant à $\varphi(x)$ pour $y = y_0$ et à $\psi(y)$ pour $x = x_0$, la fonction $z - z_1$ sera une intégrale de la même équation nulle pour $x = x_0$ et pour $y = y_0$. Supposons $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. On voit qu'on peut se borner à chercher les intégrales qui passent par Ox et Oy.

Soit M le maximum de la fonction f dans le domaine

$$0 \leqq x \leqq a, \qquad 0 \leqq y \leqq b, \qquad -c \leqq z \leqq +c.$$

Je suppose en outre que $2Mab \leqq c$. Divisons l'intervalle $(0, a)$ en intervalles partiels par les points $x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_n = a$ et l'intervalle $(0, b)$ par les points $y_0 = 0, y_1, y_2, \ldots, y_m = b$. Le rectangle construit sur les segments $(0, a)$ et $(0, b)$ se trouve divisé en rectangles partiels par les parallèles à Oy d'abscisses x_h, x_{h+1} et les parallèles à Ox d'ordonnées y_k, y_{k+1}. Soient A, B, C trois points de l'espace se projetant aux points (x_h, y_k), (x_{h+1}, y_k), (x_h, y_{k+1}). Il existe une infinité de paraboloïdes hyperboliques passant par A, B, C et de plans directeurs zOx et zOy. Pour chacun d'eux le nombre $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ est constant; je détermine un paraboloïde passant par A, B, C par la condition que cette constante soit égale à $f(x_h, y_k, z_{h,k})$, $z_{h,k}$ étant la cote du point A; ce sera la surface

$$\begin{aligned} z = {} & (x - x_h)(y - y_k) f(x_h, y_k, z_{h,k}) \\ & + \frac{x - x_h}{x_{h+1} - x_h}(z_{h+1,k} - z_{h,k}) + \frac{y - y_k}{y_{k+1} - y_k}(z_{h,k+1} - z_{h,k}), \end{aligned}$$

$z_{h+1,k}$ et $z_{h,k+1}$ étant les cotes des points B et C.

Je définis ainsi un premier paraboloïde passant par les points $(0, 0, 0)$, $(x_1, 0, 0)$, $(0, y_1, 0)$, il coupe la droite $x = x_1$, $y = y_1$, au point de cote z_{11}; je définis un second paraboloïde passant par $(x_1, 0, 0)$, $(x_2, 0, 0)$, (x_1, y_1, z_{11}), il passera par le point (x_2, y_1, z_{21}); je continue ainsi jusqu'au paraboloïde passant par les points $(x_{n-1}, 0, 0)$, $(x_n, 0, 0)$, $(x_{n-1}, y_1, z_{n-1,1})$. Je ne considère, pour chaque surface, que le morceau dont les points se projettent à l'intérieur du rectangle qui a servi à sa définition. Je définis maintenant un morceau de paraboloïde passant par $(0, y_1, 0)$, (x_1, y_1, z_{11}), $(0, y_2, 0)$, il passera par le point $(x_1, y_2, z_{1,2})$; je me sers des points $(x_1, y_1, z_{1,1})$, $(x_2, y_1, z_{2,1})$, $(x_1, y_2, z_{1,2})$ pour en définir un second, etc. Je continue ainsi jusqu'au dernier paraboloïde qui passe par les points $(x_{n-1}, y_{m-1}, z_{n-1,m-1})$, $(x_n, y_{m-1}, z_{n,m-1})$ et $(x_{n-1}, y_m, z_{n-1,m})$. Soit $z = \varphi_{n,m}(x, y)$ la surface formée par ces morceaux de paraboloïde. Je dis que, dans le rectangle (o, a), (o, b), on a

$$|z| \leqq c.$$

Dans chaque petit rectangle, l'oscillation de z ne dépasse pas $2M(x_{h+1} - x_h)(y_{k+1} - y_k)$, par conséquent, dans le rectangle $o \leqq x \leqq a$, $y_k \leqq y \leqq y_{k+1}$, l'oscillation est inférieure à $2Ma(y_{k+1} - y_k)$ et, dans le rectangle $o \leqq x \leqq a$, $o \leqq y \leqq b$, elle sera inférieure à $2Mab \leqq c$. Or $z_0 = o$, donc

$$|z| \leqq c.$$

Je dis que les nombres dérivés de $\varphi_{n,m}(x, y)$ par rapport à x et par rapport à y restent, quels que soient m et n, inférieurs à un nombre fixe, en valeur absolue : la section de la surface $\varphi_{n,m}$ par le plan d'ordonnée y, parallèle à zOx, est une ligne polygonale et les valeurs des nombres dérivés par rapport à x sont les coefficients angulaires $q(y)$ des différents côtés de cette ligne; y est compris entre deux valeurs y_k et y_{k+1} : le coefficient angulaire de chaque côté est compris entre les valeurs $q(y_k)$ et $q(y_{k+1})$ des coefficients angulaires des côtés correspondants, dans les polygones de section par les plans parallèles à zOx et d'ordonnées y_k et y_{k+1}. Or

$$|q(y_{k+1}) - q(y_k)| < M(y_{k+1} - y_k)$$

et

$$q(o) = o;$$

donc

$$|q(y)| < Mb.$$

On verrait de même que $|p(x)| < Ma$, $p(x)$ étant le coefficient angulaire d'une des droites parallèles au plan zOy situées sur la surface.

Toutes les fonctions $\varphi_{n,m}(x, y)$ forment une famille de fonctions également continues : toute suite infinie de ces fonctions a au moins une fonction limite φ, qui passe par Ox et Oy, comme toutes les surfaces $z = \varphi_{n,m}(x, y)$. Supposons que φ soit la limite de la suite des fonctions

$$\varphi_1(x, y), \quad \varphi_2(x, y), \quad \ldots, \quad \varphi_p(x, y), \quad \ldots,$$

obtenues en augmentant indéfiniment le nombre des rectangles partiels, les dimensions de chacun d'eux tendant vers o : φ est une intégrale : soit (x, y) un point du rectangle $(0, a)(0, b)$; ce point est à l'intérieur du rectangle partiel $(x_h, x_{h+1})(y_k, y_{k+1})$ appartenant au groupe de ceux qui ont servi à la construction de $\varphi_p(x, y)$. Je désignerai par $\frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x\, \partial y}$ la limite du rapport r pour le point (x, y) et la fonction φ_p, lorsqu'on se borne aux valeurs positives de h et k; cette limite a une valeur constante dans chaque rectangle partiel et l'on a

$$\frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x\, \partial y} = f[x_h, y_k, \varphi_p(x_h, y_k)].$$

On démontre, comme nous l'avons fait dans les paragraphes précédents, que, lorsque p croît indéfiniment, $\frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x\, \partial y}$ tend uniformément vers $f[x, y, \varphi(x, y)]$,

$$\lim_{p=\infty} \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x\, \partial y} = f[x, y, \varphi(x, y)].$$

Or

$$\varphi_p(x, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy;$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \lim_{p=\infty} \varphi_p(x, y) &= \int_0^x \int_0^y \lim \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy \\ &= \int_0^x \int_0^y f[x, y, \varphi(x, y)]\, dx\, dy. \end{aligned}$$

On voit que φ vérifie l'équation différentielle et possède des dérivées du premier ordre continues. Donc :

Par chaque point $P(x_0, y_0, z_0)$ *de l'espace, il passe au moins une surface intégrale de l'équation qui, pour* $x = x_0$, *se réduit à* $\psi(y)$ *et, pour* $y = y_0$, *à* $\varphi(x)$. *Si les fonctions* φ *et* ψ *possèdent des dérivées premières continues, il en est de même de la fonction intégrale.*

On peut ici aussi définir une intégrale supérieure et une intégrale inférieure, parmi celles qui passent par les courbes $x = x_0$, $z = \psi(y)$ et $z = \varphi(x)$, $y = y_0$, et montrer qu'il passe au moins une intégrale par chaque point [1] de la région limitée par les intégrales supérieure et

---

[1] Et même par chaque courbe convenablement choisie.

inférieure. Voici un exemple simple, soit l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \sqrt[3]{z}.$$

Cherchons les intégrales, définies dans le carré $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ et s'annulant sur Ox et Oy. Soit $z = 0$, $x + y = c$ une droite qui découpe, en avant et à droite du carré, un triangle T si $2 \geqq c \geqq 1$. La fonction égale à 0 dans le carré, en dehors de T et égale, à l'intérieur de T, à $\left(\frac{x+y-c}{\sqrt{6}}\right)^3$, s'annule sur Ox et Oy et vérifie l'équation.

CHAPITRE III.

SUR UNE CONDITION D'INTÉGRABILITÉ.

32. Un problème, voisin de ceux étudiés dans le Chapitre précédent, et qui peut être abordé par les mêmes méthodes est celui de la démonstration de l'existence des intégrales d'une équation aux différentielles totales. Prenons, par exemple, l'équation

$$dz = p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy.$$

La première question que l'on doit se poser ici est celle de savoir quelles sont les conditions les plus générales auxquelles il suffit d'assujettir p et q pour qu'il puisse exister une fonction continue $z(x, y)$ vérifiant cette équation.

On sait que, si les fonctions continues p et q admettent des dérivées partielles continues $\frac{\partial p}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$, la condition d'intégrabilité est

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},$$

en tous les points du domaine de définition de z. Cette condition subsistera-t-elle, si l'on fait sur p et q des hypothèses moins restrictives? Supposons simplement que p et q soient des fonctions continues de l'ensemble des variables (x, y).

33. Soit $f(x, y)$ une fonction continue de l'ensemble (x, y) dans le domaine D. Formons le rapport

$$r = \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)}{hk} \qquad (hk \neq 0).$$

Lorsque x, y, h et k varient de manière que les points (x, y), $(x+h, y)$, $(x, y+k)$, $(x+h, y+k)$ restent dans un domaine D', intérieur à D, l'ensemble des valeurs de r a un maximum M et un minimum m : supposons que la fonction f admette des dérivées p et q; je dis que, *dans tout domaine, le maximum et le minimum du rapport* r *sont aussi le maximum et le minimum du rapport*

$$\frac{p(x, y+k) - p(x, y)}{k}$$

et du rapport

$$\frac{q(x+h, y) - q(x, y)}{h}.$$

Prenons, par exemple, le maximum M et le rapport

$$\rho = \frac{p(x, y+k) - p(x, y)}{k};$$

il existe une valeur de r, dans le domaine D', supérieure à M $-\,\varepsilon$, ε étant choisi arbitrairement; si l'on pose

$$f(x, y+k) - f(x, y) = \varphi(x),$$

cette valeur de r peut s'écrire

$$r = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{hk} = \frac{\varphi'(x+\theta h)}{k} = \frac{p(x+\theta h, y+k) - p(x+\theta h, y)}{k};$$

donc il existe une valeur de ρ supérieure à M $-\,\varepsilon$ et le maximum M_1 de ρ n'est pas inférieur à M. Il ne lui est pas non plus supérieur; soit, en effet, une valeur de ρ supérieure à $M_1 - \varepsilon$:

$$\rho = \frac{p(x, y+k) - p(x, y)}{}.$$

Je peux, x, y, k étant fixes, choisir h assez voisin de o pour que

$$\left|\frac{f(x+h, y+k)-f(x, y+k)}{h}-p(x, y+k)\right|<\eta,$$

$$\left|\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}-p(x, y)\right|<\eta,$$

d'où

$$|r-\rho|<\frac{2\eta}{|k|},$$

η est aussi petit que l'on veut, donc r est supérieur ou égal à $M_1 - 2\varepsilon$ pour h assez petit. Donc le maximum de r n'est pas inférieur à M_1. En définitive $M = M_1$ et la même démonstration est applicable aux minimums et à la fonction q.

Une conséquence de la proposition qui précède est que, *dans tout domaine, les deux rapports* $\frac{p(x, y+k)-p(x, y)}{k}$ *et* $\frac{q(x+h, y)-q(x, y)}{h}$ *ont même maximum et même minimum.* On peut énoncer ce théorème de la manière suivante : si p et q sont les dérivées partielles d'une même fonction, les nombres dérivés de p par rapport à x et ceux de q par rapport à y ont même maximum et même minimum dans tout domaine. Car, dans chaque domaine, le maximum et le minimum du nombre dérivé supérieur à droite de p (par rapport à y), par exemple, sont les mêmes que ceux du rapport $\frac{p(x, y+k)-p(x, y)}{k}$ [1].

Il résulte de là que le maximum et le minimum sont aussi les mêmes en tout point pour l'un et l'autre rapport et que, par conséquent, les nombres dérivés de p (par rapport à y) et de q (par rapport à x) sont continus ou discontinus en même temps : en un point où ils sont continus, les dérivées $\frac{\partial p}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$ existent et ont la même valeur. Supposons, pour simplifier le langage, que ces dérivées existent en tout point du domaine D; on en conclut qu'en un point où l'une est continue, l'autre est continue aussi et lui est égale; en un point où elles sont discontinues, elles ont même oscillation (et en outre même maximum et même minimum).

---

[1] La démonstration ci-dessus suppose que M et m sont finis : il est très facile de la modifier dans le cas où M par exemple est infini, de manière à étendre la proposition à ce cas.

Réciproquement : *si les fonctions* $\frac{\partial p}{\partial y}$ *et* $\frac{\partial q}{\partial x}$ *sont intégrables au sens de Riemann et ont même maximum et même minimum dans tout domaine* D′ *intérieur à* D, *p et q sont les dérivées partielles d'une même fonction.*

Considérons un domaine D_1, intérieur à D, limité par le contour rectifiable C, les deux intégrales

$$\int\int_{D_1} \frac{\partial q}{\partial x}\,dx\,dy \qquad \text{et} \qquad \int\int_{D_1} \frac{\partial p}{\partial y}\,dx\,dy$$

ont la même valeur. Nous démontrerons plus loin, dans un cas plus général, la validité de la formule

$$\int_C p\,dx + q\,dy = \int\int_{D_1}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)dx\,dy;$$

donc, sur toute courbe rectifiable et fermée C, on a

$$\int_C p\,dx + q\,dy = 0;$$

cela suffit, d'après un raisonnement classique, à montrer que p et q sont les dérivées partielles d'une fonction f qui est déterminée à une constante additive près.

Il est bien manifeste que, dans l'énoncé et la démonstration précédents, on peut remplacer les dérivées de p et de q par des nombres dérivés, par exemple par les nombres dérivés supérieurs à droite.

34. Pour examiner le cas où les fonctions $\frac{\partial p}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$ ne sont pas intégrables au sens de Riemann, mais seulement bornées, je me servirai de la notion d'intégrale qui est due à M. Lebesgue [1]. D'abord les fonctions $\frac{\partial q}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$ sont sommables. En effet la première fonction est la limite, lorsque h tend vers o, de la suite des fonctions

$$\frac{q(x+h, y) - q(x, y)}{h} = \theta(x, y, h),$$

[1] *Intégrale, longueur, aire* (*Annali di Matematica*, 1902).

et la fonction $\theta(x, y, h)$ reste, quels que soient x, y, h, inférieure à un nombre fixe M, en valeur absolue, puisque nous avons supposé bornées les valeurs absolues de $\frac{\partial q}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$. On peut choisir une suite dénombrable de nombres h_n tendant vers o et écrire

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \lim_{n=\infty} \theta(x, y, h_n).$$

D'après un théorème de M. Lebesgue ([1]), la limite d'une suite convergente de fonctions sommables bornées est sommable, et son intégrale est la limite des intégrales des termes de la suite. Par conséquent les expressions

$$\int\int \frac{\partial q}{\partial x}\, dx\, dy, \qquad \int \frac{\partial q}{\partial x}\, dx$$

ont un sens et l'on a

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q}{\partial x}\, dx = \lim_{n=\infty} \frac{1}{h_n} \int_{x_1}^{x_2} [q(x+h_n, y) - q(x, y)]\, dx = q(x_2, y) - q(x_1, y),$$

et, si D_1 est un domaine limité par un contour simple C, coupé aux deux points (x_1, y), (x_2, y) par une parallèle à Ox, d'ordonnée y, on a aussi

$$\int\int_{D_1} \frac{\partial q}{\partial x}\, dx\, dy = \int dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q}{\partial x}\, dx = \int [q(x_2, y) - q(x_1, y)]\, dy = \int_C q\, dy,$$

on a, par suite, la formule

$$\int\int_{D_1} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C p\, dx + q\, dy.$$

Si p et q sont les dérivées partielles d'une fonction $f(x, y)$, le second membre est nul, donc, dans tout domaine D,

$$\int\int_{D_1} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\, dy = o.$$

([1]) *Loc. cit.*

Je dis qu'il en résulte l'égalité

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y},$$

sauf pour un ensemble de points de mesure nulle.

Appelons $\varphi(x, y)$, la différence placée sous le signe $\int\int$ et supposons que D_1 soit un rectangle de côtés parallèles aux axes et de sommets opposés (a, b) et (X, Y). On a

$$\int\int_{D_1} \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_a^X \int_b^Y \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_a^X dx \int_b^Y \varphi(x, y)\, dy = 0,$$

soit

$$\int_b^Y \varphi(x, y)\, dy = \psi(x, Y),$$

on a

$$\int_a^X \psi(x, Y)\, dx = 0.$$

Laissons Y fixe et faisons varier X dans la dernière égalité; $\psi(x, Y)$ étant bornée, il en résulte que l'intégrale $\int_a^X \psi(x, Y)\, dx$ admet $\psi(x, Y)$ comme dérivée, sauf pour un ensemble de valeurs de x de mesure nulle; il en résulte que $\psi(x, Y)$ est nulle, sauf pour ces valeurs : en d'autres termes, la fonction $\psi(x, y)$ est nulle, sur la parallèle à Ox d'ordonnée Y, sauf pour un ensemble de points de cette droite de mesure linéaire nulle et, comme Y est arbitraire, $\psi(x, y)$ est nulle dans D_1 sauf pour un ensemble de points de mesure superficielle nulle. Laissons x fixe, on a

$$\psi(x, Y) = \int_b^Y \varphi(x, y)\, dy = 0,$$

sur chaque parallèle à Ox, sauf pour un ensemble de points qui est, en général, de mesure linéaire nulle sur cette parallèle [car les parallèles pour lesquelles cet ensemble a une mesure différente de o forment un ensemble de mesure nulle, puisque l'ensemble des points où $\psi(x, y)$ est différente de o a une mesure superficielle nulle]. $\psi(x, Y)$ est une fonction continue de Y, donc cette fonction est nulle sur les parallèles à Ox pour lesquelles les points où elle pourrait être différente de o ont une mesure linéaire nulle; donc sur ces droites $\varphi(x, y)$ est nulle, sauf pour un ensemble de mesure linéaire nulle : en résumé $\varphi(x, y)$ est nulle, sauf pour un ensemble de mesure superficielle nulle. On passe facilement du rectangle précédent à un domaine D_1 quelconque.

Réciproquement, si la condition $\varphi = 0$ est remplie, sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle dans le domaine D, p et q sont les dérivées partielles d'une fonction $f(x, y)$, déterminée à une constante additive près, car $\int_C p\,dx + q\,dy = 0$ pour un contour C quelconque. Donc :

Lorsque p et q admettent des dérivées $\frac{\partial q}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$ bornées dans le domaine D, *pour que ces fonctions soient les dérivées partielles premières d'une fonction de x, y, il faut et il suffit que l'ensemble des points où $\frac{\partial q}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$ sont différents soit de mesure nulle dans* D.

Nous avons, dans ce qui précède, supposé l'existence des dérivées $\frac{\partial q}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$; on obtient les mêmes résultats, si l'on introduit les nombres dérivés, supposés bornés. D'ailleurs, puisque ces nombres sont bornés, les dérivées existent, sauf pour un ensemble de points de mesure nulle, sur chaque parallèle à Oy pour la première et sur chaque parallèle à Ox pour la seconde : donc les dérivées existent sauf pour un ensemble de mesure superficielle nulle, et les deux cas se ramènent immédiatement l'un à l'autre.

Voici un exemple de fonction $f(x, y)$ pour laquelle $\frac{\partial q}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$ ne sont pas toujours égaux. Soit

$$\varphi(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

dans le carré $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$, on a

$$|\varphi| < 1, \qquad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| < 2, \qquad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right| < 2,$$

et, pour $x=y=0$,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}=-1, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial x}=+1.$$

Considérons, dans le carré, tous les points ayant leurs coordonnées rationnelles et rangeons-les en une suite simplement infinie; soient α_n, β_n, les coordonnées du n^e. La fonction

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2}\varphi(x-\alpha_n, y-\beta_n)$$

est continue et admet des dérivées partielles p et q continues. En un point α_n, β_n, on a

$$\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{2}{n^2}.$$

35. Supposons maintenant que, en chaque point, les nombres $\frac{\partial q}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$ existent et soient finis, sans être nécessairement bornés dans le domaine D. Les points de ce domaine peuvent alors être séparés en deux groupes : ceux pour lesquels, dans un cercle assez petit, décrit autour de chacun d'eux comme centre, $\frac{\partial q}{\partial x}$ et par suite $\frac{\partial p}{\partial y}$ sont bornées et ceux pour lesquels, quelque petit que soit le rayon du cercle, $\frac{\partial q}{\partial x}$ et par suite $\frac{\partial p}{\partial y}$ ne sont pas bornées; je dirai que, en un point du premier groupe, ces fonctions sont bornées et qu'en un point du second elles ne sont pas bornées. Ces derniers points forment un ensemble E. Je démontrerai dans le Chapitre V que les points où une fonction dérivée finie n'est pas bornée forment un ensemble fermé non dense dans tout domaine. Désignons par σ la mesure superficielle de l'ensemble E dans le domaine D. On peut enfermer tous les points de E, dans un nombre fini de rectangles dont la somme des aires ne dépasse pas $\sigma+\eta$, η étant arbitraire et positif. Pour chaque domaine D_1, extérieur à tous ces rectangles, les fonctions sont bornées, puisqu'elles sont bornées en chaque point de D_1, donc les points où $\frac{\partial q}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$ diffèrent forment dans D_1 un ensemble de mesure nulle. Par conséquent :

Lorsque, en chaque point d'un domaine D, $\frac{\partial q}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial p}{\partial y}$ *sont finies, ces nombres sont égaux, sauf pour un ensemble de points dont la mesure ne dépasse pas celle de l'ensemble fermé non dense des points en lesquels* $\frac{\partial q}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial p}{\partial y}$ *ne sont pas bornées.*

36. Supposons que les fonctions p et q soient, la première, à variation bornée, quel que soit x, lorsqu'on la considère comme une fonction de y, et la seconde à variation bornée, quel que soit y, lorsqu'on la considère comme une fonction de x. Dans ce cas, si l'on suppose les nombres dérivés finis, on sait que $\frac{\partial q}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$ existent, sauf pour un ensemble de points de mesure nulle ([1]), sur chaque parallèle à Ox ou à Oy, et, par conséquent, de mesure nulle dans D. Je supposerai, pour simplifier le langage, que ces dérivées existent partout. Dans ces conditions, une partie du théorème du n° 34 subsiste : *pour que p et q soient les dérivées partielles d'une fonction $f(x, y)$, il suffit que l'ensemble des points où* $\frac{\partial q}{\partial x}$ *diffère de* $\frac{\partial p}{\partial y}$ *soit de mesure nulle.* On a, en effet,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q}{\partial x}\, dx = q(x_2, y) - q(x_1, y);$$

donc

$$\int dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q}{\partial x}\, dx = \int_{C} q\, dy.$$

Je dis que l'intégrale $\int\int_{D_1} \frac{\partial q}{\partial x}\, dx\, dy$ existe et a pour valeur $\int_C q\, dy$. Soit une suite infinie de nombres $\ldots\, l_{-n},\, l_{-(n-1)},\, \ldots,\, l_0,\, l_1,\, \ldots,\, l_n,\, \ldots$ croissant de $-\infty$ à $+\infty$ et tels que $l_{n+1} - l_n < \varepsilon$, et $e_n(y)$, l'ensemble des points de D, où $l_n < \frac{\partial q}{\partial x} \leq l_{n+1}$; lorsque y est fixe, l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q}{\partial x}\, dx$ est la limite, quand ε tend vers o, de la somme $\sum_{-\infty}^{+\infty} l_n m[e_n(y)]$, $m[e_n(y)]$ désignant la mesure linéaire de l'ensemble mesurable $e_n(y)$. Pour définir

---

([1]) Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.*

l'intégrale double, il faut former les expressions $l_n m(e_n)$, où e_n est l'ensemble des points de D_1 pour lesquels $l_n < \frac{\partial q}{\partial x} \leqq l_{n+1}$, on a

$$m(e_n) = \int m[e_n(y)]\, dy;$$

donc

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} l_n m(e_n) = \int \sum_{-\infty}^{+\infty} l_n m[e_n(y)]\, dy,$$

et, lorsque ε tend vers o, le second membre a une limite, donc

$$\int\int_{D_1} \frac{\partial q}{\partial x}\, dx\, dy = \int dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q}{\partial x}\, dx = \int_C q\, dy.$$

Les opérations qu'on vient de faire sont légitimes, parce que toutes les séries dont on se sert ont des sommes bornées, quel que soit y. On a aussi

$$\int\int_{D_1} \frac{\partial p}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_C p\, dx,$$

et la formule

$$\int\int_{D_1} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C p\, dx + q\, dy$$

demeure exacte. On en déduit aussitôt le théorème énoncé.

37. Dans le cas où les fonctions $\frac{\partial q}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$ ne sont pas nécessairement finies en chaque point, je ne puis rien dire, en général : j'énoncerai seulement quelques propositions s'appliquant lorsque l'ensemble des points où ces nombres ne sont pas finis est d'une nature très simple.

Supposons qu'en un seul point P, l'un des nombres $\frac{\partial q}{\partial x}$ ou $\frac{\partial p}{\partial y}$ ne soit pas fini (ou borné), si l'on entoure ce point d'un petit cercle γ et si D_1 est le domaine extérieur à γ et intérieur à C, on a

$$\int_{C+\gamma} p\, dx + q\, dy = \int_{D_1} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\, dy = 0,$$

donc

$$\int_C p\,dx + q\,dy = \int_\gamma p\,dx + q\,dy;$$

puisque p et q sont continues en P [1], $\int_\gamma$ a pour limite o, lorsque le rayon du cercle γ tend vers o, donc

$$\int_C p\,dx + q\,dy = 0.$$

Donc, dans ce cas encore, il faut et il suffit que $\frac{\partial q}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$ soient égaux, sauf pour les points d'un ensemble de mesure nulle. Le théorème subsiste pour un nombre fini de points P : on passe de là au cas où l'ensemble dérivé de l'ensemble des points P se compose d'un nombre fini de points, etc. Par un procédé bien connu, on étend le théorème au cas où l'ensemble (P) est réductible.

On peut aussi supposer que les points P se distribuent sur une courbe rectifiable ou sur un ensemble réductible de courbes rectifiables : la proposition subsiste : il suffit de remplacer dans la démonstration précédente le cercle γ par un contour de longueur finie, entourant une des lignes de points P.

38. Je ferai une dernière remarque : si l'on ne fait sur les fonctions $\frac{\partial p}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$ d'autre hypothèse que celle de leur existence, on peut affirmer que l'ensemble des points où elles sont égales est partout dense dans D, car ces fonctions, étant ponctuellement discontinues dans D, l'une et l'autre, il y a dans tout domaine D_1, contenu dans D, des points où elles sont toutes les deux continues et par conséquent égales.

39. Donnons une application des théorèmes précédents aux fonctions analytiques d'une variable complexe $z = x + iy$. Soient u et v deux fonctions de x, y continues et possédant des dérivées bornées qui

---

[1] Il suffit de supposer que p et q sont bornées en P.

vérifient les relations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

sauf pour les points d'un ensemble de mesure nulle, dans un domaine D. Il en résulte que u et v sont les dérivées partielles d'une fonction $P(x, y)$ et que v et u sont les dérivées partielles d'une fonction $Q(x, y)$. Soit

$$P + iQ = f(z);$$

cette fonction est analytique, il en est donc de même de $u + iv = f'(z)$. Par conséquent : *Pour que la fonction $u + iv$ soit analytique en z, u et v étant des fonctions de x, y à nombres dérivés bornés, il faut et il suffit que les relations de Cauchy soient vérifiées, sauf, peut-être, pour un ensemble de points de mesure nulle.* Proposition à rapprocher de celle de M. Goursat (¹), qui établit que l'existence de la dérivée de $f(z)$ en tout point suffit à montrer que $f(z)$ est analytique et holomorphe dans le domaine. En particulier, soit $f(z)$ une fonction de la variable z, dans un domaine D, pour laquelle le rapport $\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ a un module borné lorsque z et $z + h$ appartiennent à D, pour que cette fonction soit analytique et holomorphe dans D, il faut et il suffit que $f'(z)$ existe, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle; il en résulte que $f'(z)$ existe en tout point de D.

La condition que les nombres dérivés soient bornés est indispensable à l'exactitude du théorème; il est facile de former une fonction de z, continue dans D et analytique, sauf pour un ensemble de points de mesure nulle. Prenons pour D un carré de côté égal à l'unité, par des parallèles aux côtés, divisons-le en 9 carrés partiels égaux, de côté $\frac{1}{3}$, je prends $f(z)$ égale à α_1 dans le carré de côté $\frac{1}{3}$ concentrique au premier. Dans chacun des 8 autres carrés, je fais la même opération et je prends $f(z)$ égale à α_2^i, dans les carrés de côté $\frac{1}{9}$ qui leur sont respectivement concentriques; je continue ainsi indéfiniment, $f(z)$ sera

---

(¹) *Transactions of the american Math. Society*, 1900.

égale à α_n^j dans les 8^{n-1} carrés, de côté égal à $\frac{1}{3^n}$. Les points qui ne sont intérieurs à aucun des carrés T où $f(z)$ a été définie forment un ensemble parfait E de mesure nulle, car la somme des aires de ces carrés T est

$$\frac{1}{9}+\frac{8}{9^2}+\frac{8^2}{9^3}+\ldots=1.$$

Si les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, sont convenablement choisies, il existe une fonction $f(z)$ définie et continue en tous les points du carré de côté égal à un; elle est analytique dans chaque carré T, mais elle n'est pas analytique dans le domaine D.

Dans le cas où les nombres dérivés de u et v ne sont pas bornés, on peut énoncer les remarques suivantes, qui découlent des résultats obtenus au n° 37: si les fonctions u et v satisfont aux relations de Cauchy, sauf pour un ensemble de points de mesure nulle, on peut affirmer que la fonction $u+iv$ est analytique dans D, lorsque les points où les dérivées ne sont pas bornées (ou finies) forment un ensemble réductible de points ou se distribuent sur un ensemble réductible de courbes rectifiables.

40. Considérons maintenant l'intégrale

$$\int\int_S A\,dy\,dz+B\,dz\,dx+C\,dx\,dy$$

prise sur une surface fermée, intérieure au domaine D à trois dimensions, dans lequel $A(x,y,z)$, $B(x,y,z)$, $C(x,y,z)$ sont des fonctions continues de l'ensemble (x,y,z) et admettent des dérivées $\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial z}$, que je suppose bornées dans D. Ces dérivées sont sommables au sens de M. Lebesgue, et des considérations analogues à celles du n° 34 conduisent à la formule

$$\int\int_S A\,dy\,dz+B\,dz\,dx+C\,dx\,dy=\int\int\int_{D_1}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

la surface S limitant le volume D_1. Pour que l'intégrale double étendue à toute surface non fermée et terminée par un contour Γ ne dépende que du contour, il faut et il suffit que l'intégrale triple soit nulle pour tout volume D_1 à l'intérieur de D. En se guidant sur les raisonnements faits au n° 34, on démontre que l'on doit avoir

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

sauf pour un ensemble de points de mesure nulle : la condition est évidemment suffisante. Donc, *pour que l'intégrale*

$$\iint A\, dy\, dz + B\, dz\, dx + C\, dx\, dy,$$

où A, B, C *sont des fonctions continues de* x, y, z, *dans un domaine* D *où elles ont des nombres dérivés bornés, respectivement, en* x, y, z, *étendue à une surface non fermée quelconque limitée par un contour* Γ, *ne dépende que de ce contour, il faut et il suffit que l'ensemble des points où*

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \neq 0$$

ait une mesure nulle. Je rappelle que $\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial z}$ existent, sauf, peut-être, pour un ensemble de mesure nulle. Ces résultats s'étendent à un espace à un nombre quelconque de dimensions.

41. Soit maintenant $u + iv$ une fonction de deux variables complexes $\xi = x + iy$ et $\eta = z + it$, les conditions de Cauchy sont exprimées par les équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial z},$$

si les fonctions u et v sont à nombres dérivés bornés et vérifient ces équations, il en résulte que l'intégrale

$$\iint (u + iv)\, d\xi\, d\eta,$$

prise sur une surface fermée dans l'espace à quatre dimensions, est nulle : on sait, en effet, que cette intégrale peut s'écrire

$$\int\int u(dx\,dz - dy\,dt) - v(dy\,dz + dx\,dt)$$
$$+ i\int\int v(dx\,dz - dy\,dt) + u(dy\,dz + dx\,dt),$$

et cette dernière intégrale est nulle en vertu de la formule du numéro précédent. On conclut de là que $u + iv$ est analytique par rapport à l'ensemble (ξ, η). Par conséquent, *si les fonctions u et v satisfont aux conditions de Cauchy, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle, $u + iv$ est une fonction analytique de l'ensemble* (ξ, η).

42. M. Painlevé a posé la question de savoir si une fonction f des variables complexes ξ, η, analytique par rapport à chacune d'elles, est analytique par rapport à l'ensemble de ces variables : les considérations qui précèdent permettent de répondre affirmativement à cette question ; en effet, on voit immédiatement que f'_ξ et f'_η sont bornées ; en appliquant l'intégrale de Cauchy aux domaines $\eta =$ const. ou $\xi =$ const., il en résulte, puisque les conditions du n° 41 sont vérifiées, que f est une fonction analytique de l'ensemble (ξ, η) (1). Ceci s'applique à un nombre quelconque de variables, donc : *une fonction de plusieurs variables complexes, analytique par rapport à chacune d'elles, est analytique par rapport à l'ensemble de ces variables.*

43. Les résultats obtenus dans ce chapitre permettent de résoudre très simplement un problème étudié par M. Baire (2) au sujet des équations aux dérivées partielles. Prenons, par exemple, l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

---

(1) Le raisonnement précédent suppose bornée la fonction $f(\xi, \eta)$. On voit qu'il en est bien ainsi, en remarquant que cette fonction, continue en ξ et en η, est ponctuellement discontinue en (ξ, η). Il en résulte que tout domaine en contient un autre où elle est bornée : on en déduit qu'elle est bornée partout.

(2) *Sur les fonctions de variables réelles* (*Annali di Mathematica*, 1899).

Si l'on suppose les dérivées premières continues, l'intégrale est une fonction continue de $x-y$, d'ailleurs quelconque; si l'on suppose seulement l'existence des dérivées, les raisonnements que l'on fait habituellement, en se servant du changement de variable, ne sont plus applicables. M. Baire pose la question de savoir si le résultat est encore valable et la résout affirmativement. L'équation précédente est la condition pour que z et $-z$ soient les dérivées partielles d'une même fonction $f(x, y)$

$$f(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} z\,dx - z\,dy,$$

l'intégrale est prise le long d'un chemin quelconque allant de x_0, y_0 à x, y. Déplaçons-nous, sur une parallèle à $x - y = 0$, à partir d'un point quelconque (x_1, y_1), on aura

$$f(x, y) - f(x_1, y_1) = \int_{x_1, y_1}^{x, y} z(dx - dy) = 0,$$

donc la fonction est constante sur toute parallèle à $x - y = 0$, $f(x, y)$ est donc une fonction continue de $x - y$, il en est de même de sa dérivée, prise par rapport à x, qui est la fonction continue z.

CHAPITRE IV.

LES SUITES DE FONCTIONS DE VARIABLES COMPLEXES.

44. Soit une famille de fonctions analytiques de z à l'intérieur d'un domaine D, nous dirons que ces fonctions sont *également continues dans* D, si à tout nombre positif ε correspond un nombre δ, tel que, z et z' étant deux points quelconques à l'intérieur de D dont la distance est inférieure à δ, on a l'inégalité

$$|f(z') - f(z)| < \varepsilon,$$

quelle que soit la fonction f de la famille. Si $f(z) = u + iv$, u et v étant des fonctions réelles de x, $y(z = x + iy)$, on voit que, lorsque les fonctions f sont également continues, il en est de même des fonctions u et des fonctions v et réciproquement.

Supposons que le domaine D soit simplement connexe, je dis que : *si les fonctions $f(z)$ ont leurs modules bornés dans* D, *elles sont également continues dans tout domaine* D′ *intérieur à* D [1].

Supposons que l'on ait pour tout point z à l'intérieur de D et pour toute fonction $f(z)$

$$|f(z)| < \mathrm{M},$$

et soit C′ le contour, que l'on peut toujours supposer simple, limitant D′, soit D_1 un domaine contenant D′ et contenu dans D, limité par un contour simple rectifiable C_1 et h la plus courte distance non nulle des courbes C′ et C_1, on a, pour un point x à l'intérieur de D′,

$$f'(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}_1}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^2}.$$

Donc

$$|f'(x)| < \frac{\mathrm{M}\,l}{2\pi h^2},$$

pour tout point x de D′, l étant la longueur du contour C_1 : il résulte de là que les fonctions f sont également continues dans D′; en effet, les fonctions u et v ont leurs dérivées partielles bornées, elles sont donc également continues, il en est de même des f.

45. Toute suite infinie de fonctions $f(z)$ admet au moins une fonction limite analytique dans D′ : on peut le démontrer directement, en suivant la méthode du n° 2, en choisissant dans la suite une suite nouvelle qui converge pour tous les points d'un ensemble dénombrable partout dense dans D′. On peut aussi remarquer que, si

$$f_p = u_p + iv_p,$$

les fonctions u étant également continues, on peut, de la suite u_p,

---

(1) Je dirai que ces fonctions sont également continues à l'intérieur de D.

extraire une suite nouvelle

$$u_{p_1}, \quad u_{p_2}, \quad \ldots, \quad u_{p_n}, \quad \ldots,$$

qui converge vers u; de même de la suite v_{p_n} on peut extraire une suite

$$v_{q_1}, \quad v_{q_2}, \quad \ldots, \quad v_{q_n}, \quad \ldots,$$

qui converge vers v; il en résulte que la suite f_{q_n} converge vers $f(z) = u + iv$. $f(z)$ est d'ailleurs analytique dans D′, puisque la convergence est uniforme, d'après un théorème de Weierstrass.

Considérons maintenant une suite de contours $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots,$ ayant pour limite le contour C qui limite D, les contours $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ limitant les domaines $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots,$ dont chacun contient le précédent et qui ont pour limite D. Soit une suite de fonctions $f_p(z)$: on peut en extraire une suite $f_n^1(z)$ qui converge dans D_1, vers une fonction limite; de cette suite $f_n^1(z)$, on peut extraire une suite nouvelle $f_n^2(z)$ qui converge dans D_2, etc., on trouvera une suite $f_n^i(z)$, convergente dans D_i et extraite de $f_n^{(i-1)}(z)$. Dans ces conditions, la suite

$$f_1^1(z), \quad f_2^2(z), \quad \ldots, \quad f_n^n(z), \quad \ldots$$

est convergente en tout point intérieur au domaine D. On peut donc énoncer le théorème suivant : *une suite infinie de fonctions analytiques et bornées à l'intérieur d'un domaine simplement connexe* D, *admet au moins une fonction limite à l'intérieur de ce domaine.*

46. On peut donner de cette proposition une autre démonstration qui nous fournira une application nouvelle du principe du n° 9.

Supposons d'abord que le domaine D soit un cercle, chaque fonctions f est développable dans ce cercle par la formule de Taylor : je dis que les séries obtenues sont également convergentes. Soit, en effet,

$$f_p(z) = a_0^p + a_1^p z + a_2^p z^2 + \ldots + a_n^p z^n + \ldots,$$

et M un nombre supérieur au module de toutes les fonctions $f(z)$ sur la circonférence C du cercle D. On a

$$|a_n^p| < \frac{M}{R^n}.$$

Donc, on a, pour le reste $R_n(z)$ de la série, en s'arrêtant au $(n+1)^{\text{ième}}$ terme,

$$|R_n^p(z)| < \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{M}{1-\frac{\rho}{R}} \qquad \text{pour} \qquad |z| < \rho.$$

Soit D′ le cercle de rayon ρ concentrique à D, on peut prendre n assez grand pour que le module du reste ne dépasse pas ε dans D′, quel que soit p.

On peut choisir dans la suite $1, 2, \ldots, p, \ldots,$ une nouvelle suite $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots,$ telle que les nombres

$$a_k^{p_1}, \quad a_k^{p_2}, \quad \ldots, \quad a_k^{p_n}, \quad \ldots$$

aient une limite A_k. Considérons alors la série

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_k z^k + \ldots,$$

on a

$$|A_m z^m + \ldots + A_{m+h} z^{m+h}| = \lim_{n=\infty} |a_m^{p_n} z^m + \ldots + a_{m+h}^{p_n} z^{m+h}| < 2\varepsilon,$$

pour m assez grand, donc

$$|R_m(z)| \leqq 2\varepsilon,$$

lorsque z est situé à l'intérieur de D′; la série $A_k z^k$ est convergente dans D′ et a pour somme $f(z)$: on voit facilement que c'est la limite de la suite $f_{p_n}(z)$. On passe de là au cas du domaine D par le même procédé qu'au numéro précédent.

Si le domaine D n'est pas un cercle, mais un domaine simplement connexe, il suffit de faire la représentation conforme sur un cercle de ce domaine ou d'un domaine intérieur D′, pour retomber dans le cas qui précède.

47. Supposons que D soit un domaine connexe, mais non simplement connexe, et soient $C_1, C_2, \ldots, C_r$ les contours qui le limitent:

le théorème du n° 45 est applicable à ce domaine. Le premier mode de démonstration peut être repris, avec peu de modifications; il suffit de remplacer l'intégrale $\int_C$ qui y figure par la somme

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} + \ldots + \int_{C_r}.$$

Le second mode de démonstration ne s'applique pas immédiatement: le voici sous une forme valable pour tous les cas: A chaque point P du domaine D correspond un cercle Γ de centre P, dont le rayon est la plus courte distance de P aux contours $C_1, C_2, \ldots, C_r$, à l'intérieur duquel toutes les fonctions $f(z)$ sont développables en séries de Taylor également convergentes. Soit D′ un domaine intérieur à D, pour les points de D′ le rayon du cercle a un minimum non nul, on peut donc recouvrir entièrement le domaine D′ à l'aide d'un nombre fini q de cercles Γ; soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$ ces cercles et $f_p(z)$ la suite des fonctions $f(z)$. Je puis trouver une suite $f_n^1(z)$, extraite de la suite $f_p(z)$, qui converge dans Γ_1; puis une suite $f_n^2(z)$, extraite de la suite $f_n^1(z)$, qui converge dans Γ_1 et Γ_2, etc., jusqu'à une suite $f_n^q(z)$, extraite de la suite $f_n^{(q-1)}(z)$, qui convergera dans $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$, c'est-à-dire dans D′. On passe de D′ à D par la méthode du n° 45 [1].

48. On peut remplacer par des conditions analogues la condition que les $f(z)$ aient leurs modules bornés dans D : *S'il existe un nombre a tel que le module de $f(z) - a$ reste, quel que soit z dans* D, *supérieur à un nombre fixe k, les fonctions $f(z)$ sont également continues dans tout domaine* D′ *intérieur à* D.

Soit $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z) - a}$, les fonctions φ sont analytiques dans D et

---

[1] On peut aussi remarquer que l'on peut trouver une infinité dénombrable de cercles Γ, soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q, \ldots$, tels que tout point intérieur à D soit intérieur à l'un au moins de ces cercles. On définit alors, quel que soit l'entier q, une suite $f_n^q(z)$ convergente dans $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$. Si l'on prend la suite

$$f_1^1(z), \quad f_2^2(z), \quad \ldots, \quad f_n^n(z), \quad \ldots,$$

elle converge en tout point intérieur à D et uniformément dans tout domaine D′.

leurs modules sont inférieurs à $\frac{1}{k}$, donc elles sont également continues. De toute suite infinie de fonctions φ on peut extraire une suite nouvelle

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_p, \quad \ldots,$$

ayant une fonction limite $\Phi(z)$; soit D' un domaine intérieur à D; dans D', Φ est analytique et, si cette fonction n'est pas identiquement nulle, elle n'a dans D' qu'un nombre fini de zéros; si donc on pose

$$F(z) = a + \frac{1}{\Phi(z)},$$

$F(z)$ n'a dans D' qu'un nombre fini de pôles. Pour un point z de D' qui n'est pas un pôle de F, la suite

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_p, \quad \ldots$$

a pour limite $F(z)$, car l'on a

$$f_p(z) = a + \frac{1}{\varphi_p(z)}.$$

Soit Γ un contour simple quelconque intérieur à D', contenant des pôles de F à son intérieur, mais ne passant par aucun d'eux; on peut entourer chaque point z de Γ, d'un cercle de centre z, dans lequel F n'ait pas de pôle et la suite $\varphi_p(z)$ converge uniformément; dans ces conditions, la suite $f_p(z)$ converge uniformément dans le cercle : en effet, prenons p assez grand pour que

$$|\varphi_p - \Phi| < \varepsilon,$$

ε positif quelconque, inférieur au minimum positif μ de $\Phi(z)$ dans le cercle; on a

$$F(z) - f_p(z) = \frac{1}{\Phi(z)} - \frac{1}{\varphi_n(z)} = \frac{\varphi_n(z) - \Phi(z)}{\Phi(z)\,\varphi_n(z)}.$$

Donc

$$|F(z) - f_p(z)| < \frac{\varepsilon}{\mu(\mu - \varepsilon)}.$$

Ceci posé, on peut entourer chaque point z de Γ, d'un cercle de centre z dans lequel les $f_p(z)$ convergent uniformément, le rayon de ce cercle a un minimum non nul (à condition de prendre pour chaque point le plus grand rayon possible); donc on peut recouvrir Γ à l'aide d'un nombre fini de cercles. Il en résulte que la suite $f_p(z)$ converge uniformément sur le contour Γ, elle converge donc uniformément à l'intérieur de ce contour et sa limite $F(z)$ est analytique : elle n'a donc pas de pôles dans Γ. Γ étant quelconque, on voit que $F(z)$ n'a pas de pôle à l'intérieur de D. Dans ces conditions $\Phi(z)$ n'a pas de zéros dans D et son module a par conséquent un minimum μ différent de o dans tout domaine D' intérieur à D; pour p assez grand on aura, dans D',

$$|\varphi_p - \Phi| < \varepsilon,$$

ε positif arbitraire et inférieur à μ; donc

$$|F(z) - f_p(z)| < \frac{\varepsilon}{\mu(\mu - \varepsilon)},$$

dans D' et, par suite, la suite f_p converge uniformément dans D'.

Si $\Phi(z)$ était identiquement nulle, la suite $f_p(z)$ augmenterait indéfiniment pour toute valeur de z dans D. Pour qu'une suite de fonctions $f(z)$ ait au moins une fonction limite il faut et il suffit que, pour un point z_0, la suite des nombres $f(z_0)$ n'augmente pas indéfiniment en valeur absolue; en d'autres termes que la plus petite limite des nombres $|f(z_0)|$ soit finie.

Je dis que les fonctions $f(z)$ sont également continues dans D' : cela va résulter du théorème suivant :

49. *Si une famille de fonctions f jouit de la propriété que, de toute suite infinie de ces fonctions, on puisse en extraire une nouvelle,* (uniformément) *convergente, les fonctions de cette famille sont également continues.*

Soit $f(z)$ une fonction de la famille et ε un nombre positif arbitraire; il lui correspond un nombre σ tel que, dans tout cercle de rayon inférieur ou égal à σ, l'oscillation [1] de $f(z)$ ne dépasse pas ε.

---

[1] J'appelle ainsi le maximum de $|f(z) - f(z')|$, z et z' étant deux points du cercle.

Je prends pour σ la plus grande valeur possible. Si les fonctions $f(z)$ sont également continues, les nombres σ relatifs à toutes les fonctions ont, pour chaque valeur de ε, un minimum non nul. Dans le cas contraire, il existe un nombre ε tel que le minimum de σ soit nul. Dans ces conditions, si $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$, sont des nombres positifs ayant pour limite o, on peut trouver $f_1(z)$, telle que le rayon σ relatif à cette fonction $f_1(z)$ soit plus petit que σ_1, puis $f_2(z)$ telle que le rayon σ relatif à $f_2(z)$ soit plus petit que σ_2, etc. On forme ainsi la suite

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots.$$

Il est impossible d'extraire de cette suite une nouvelle suite qui ait une limite, car toute suite tirée de la précédente est composée de fonctions qui ne sont pas également continues : or, on démontre comme au n° 2, qu'une suite uniformément convergente de fonctions de variables complexes est composée de fonctions également continues. En résumé, l'hypothèse de la continuité non égale des fonctions $f(z)$ entraîne l'existence d'une suite de ces fonctions dépourvue de fonction limite. Le théorème énoncé résulte de là.

On voit immédiatement que la proposition précédente s'applique à des fonctions d'un nombre quelconque de variables, réelles ou complexes.

50. On peut donner au théorème du n° 48 un énoncé d'une autre forme. Représentons dans un plan les points qui ont pour affixes les valeurs de $f(z)$. Soit E l'ensemble des points qui appartiennent à une fonction $f(z)$, au moins : *si l'ensemble* E *n'est pas partout dense dans le plan, les fonctions sont également continues*. Car, dans ce cas, ou bien on peut trouver un point P d'affixe a dont la distance aux différents points de E a un minimum k, non nul; on a donc, quelle que soit $f(z)$,

$$|f(z) - a| > k,$$

ou bien, il existe un cercle de rayon M qui contient tous les points de E et l'on a

$$|f(z)| < M.$$

Dans les deux cas, les fonctions sont également continues.

Nous venons de voir que des fonctions sont également continues, lorsqu'on peut trouver un point a, tel que le module de $f(z) - a$ reste supérieur à un nombre fixe quels que soient f et z : il en est de même lorsque l'argument de cette différence (compris entre o et 2π) ne prend jamais de valeurs situées dans l'intervalle $(\omega, \omega + h)$, ω étant un nombre de l'intervalle $(0, 2\pi)$ et h un nombre fixe, quelconque $(0 \leqq \omega < 2\pi,\ 0 < \omega + h \leqq 2\pi)$; en effet, si l'on prend un point quelconque d'affixe b à l'intérieur de l'angle formé par les demi-droites d'arguments ω et $\omega + h$, issues de a, le module de $f(z) - b$ restera supérieur à un nombre fixe ([1]).

Réciproquement, si une suite de fonctions $f_p(z)$, analytiques de z, converge uniformément, il existe une infinité de nombres a tels que $f_p(z) - a$ ait un module supérieur à un nombre fixe, car, si $f(z)$ est la fonction limite, il existe, dans le plan où l'on représente les valeurs de $f(z)$ et des $f_p(z)$, un cercle C, de centre origine et de rayon assez grand pour contenir à son intérieur toutes les valeurs de $f(z)$ et, par suite, de $f_p(z)$ pour p assez grand $(p > q)$. Quant aux valeurs de $f_1, f_2, \ldots, f_p$, elles sont à l'intérieur d'un cercle C′ concentrique à C. Pour tout point a, extérieur aux cercles C et C′, $|f_p(z) - a|$ reste, quels que soient p et z, supérieur à un nombre fixe ([2]).

51. Plusieurs des théorèmes précédents sont applicables à des familles de fonctions de variables réelles, formées par des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre du type elliptique, par exemple aux familles de fonctions harmoniques. Prenons, par exemple, le cas de trois variables réelles : si des fonctions harmoniques $V(x, y, z)$ sont bornées dans un domaine D, à trois

---

([1]) Lorsque les fonctions $f(z)$ sont continues dans D et sur le contour C qui limite ce domaine, le maximum de $|f(z)|$ dans D et sur C a lieu en un point de C. On peut donc dire que des fonctions sont également continues *à l'intérieur* de D lorsqu'elles sont bornées sur C. De même des fonctions sont également continues à l'intérieur de D lorsque $|f(z) - a|$ reste sur C, quelle que soit f, supérieur à un nombre fixe.

([2]) Remarquons qu'une famille de fonctions qui ne prennent, dans le domaine D, ni la valeur o, ni la valeur 1 est une famille également continue. Cela résulte, assez facilement, des théorèmes de MM. Schottky et Boutroux relatifs à ces fonctions. *Voir*, par exemple, *Ueber den Picardschen Satz*, par M. E. Landau (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 1906).

dimensions, ces fonctions sont également continues. Il suffit de constater que les dérivées partielles de $V(x, y, z)$ sont bornées dans tout domaine D_1 intérieur à D : la formule de Poisson, appliquée à une sphère tout entière à l'intérieur de D, le montre immédiatement. Si le domaine D est limité par la surface S, on sait que le maximum et le minimum de V (supposée continue dans D et sur S) a lieu sur S; on peut donc dire que des fonctions $V(x, y, z)$ sont également continues à l'intérieur de D, si elles sont bornées sur S.

CHAPITRE V.

APPLICATION AUX SÉRIES CONVERGENTES DE FONCTIONS ANALYTIQUES.

I.

52. Je vais donner quelques applications des théorèmes démontrés au chapitre précédent aux séries convergentes de fonctions analytiques de z. Considérons une suite de fonctions de z, convergente à l'intérieur d'un domaine D où ces fonctions sont analytiques et bornées : je dis que *la fonction limite $f(z)$ est analytique dans* D *et que la convergence est uniforme dans tout domaine* D' *intérieur à* D [1],

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_p(z),\quad \ldots,$$

les fonctions de la suite; ces fonctions sont également continues à l'intérieur de D, on peut donc extraire de la suite $f_p(z)$ une nouvelle suite

$$f_{p_1}(z),\quad f_{p_2}(z),\quad \ldots,\quad f_{p_n}(z),\quad \ldots,$$

qui converge uniformément dans tout domaine D' intérieur à D;

---

[1] La première partie de ce théorème a d'abord été énoncée par M. Osgood (*Annals of Mathematics*, 2e série, t. III, n° 1). — *Voir* aussi Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, t. VIII, 1894).

puisque la première suite est convergente, la seconde a la même limite $f(z)$ que la première : donc $f(z)$ est analytique dans D. En outre, la convergence de $f_p(z)$ est uniforme dans D'. Soit, en effet, un nombre quelconque positif ε. Si la suite $f_p(z)$ ne convergeait pas uniformément, on pourrait en extraire une suite infinie de fonctions

$$f_{\alpha_1}(z), \quad f_{\alpha_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{\alpha_n}(z), \quad \ldots,$$

telles que, pour chacune d'elles, il y ait au moins un point de D', pour lequel la fonction diffère de sa limite de plus de ε, en module, au moins pour une valeur de ε assez petite. Mais de la suite $f_{\alpha_n}(z)$ on peut extraire une suite nouvelle

$$f_{\beta_1}(z), \quad f_{\beta_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{\beta_n}(z), \quad \ldots,$$

qui converge uniformément dans D'; par conséquent, à partir d'un certain rang, le module de la différence $f(z) - f_{\beta_n}(z)$ est moindre que ε et cela quel que soit z dans D' : or, les f_β sont pris parmi les f_α, il y aurait donc dans les f_α des fonctions qui diffèrent de leur limite de moins de ε, en module, quel que soit z dans D'. Cette contradiction démontre le théorème : remarquons que pour l'établir on ne fait aucune hypothèse particulière sur le domaine D.

53. Supposons que le domaine D soit connexe, je dis qu'il suffit de supposer que la convergence ait lieu pour une infinité de points situés, *dans leur ensemble*, à l'intérieur de D. J'entends par cette dernière expression : ont au moins un point limite à l'intérieur de D.

En effet, j'extrais de la suite $f_p(z)$ une suite nouvelle $f_{p_n}(z)$ qui converge dans D, en tout point, ce qui est possible, puisque les fonctions $f_p(z)$ sont également continues. Quelle que soit la suite convergente extraite de $f_p(z)$, la fonction limite est toujours la même. En effet, les points de convergence des $f_p(z)$ ont au moins un point limite ω, situé à l'intérieur de D, deux suites f_{p_n} convergent vers les même valeurs en tous les points de convergence des $f_p(z)$, donc leurs limites, qui sont analytiques, sont égales en ω, ainsi que leurs dérivées de tous les ordres : ces limites sont donc identiques dans tout le domaine D. En résumé :

Si une série de fonctions analytiques converge pour une infinité de points, situés dans leur ensemble à l'intérieur d'un domaine connexe D, *et si la somme des n premiers termes de cette série reste bornée quel que soit n, à l'intérieur de* D, *la série converge uniformément dans tout domaine* D′ *intérieur à* D. *La somme est une fonction analytique dans* D.

Si les fonctions $f_p(z)$ de la suite sont continues dans D et sur C, on peut remplacer la condition que ces fonctions soient bornées dans D par la condition d'être bornées sur C.

De même, *si les sommes* $f_p(z)$ *des n premiers termes de la série restent, dans le domaine* D, *supérieures en module à un nombre fixe, la série converge uniformément dans* D′; *il en est encore ainsi, si les fonctions* $f_p(z) - a$ *restent, en module, supérieures à un nombre fixe, ou bien ont des arguments qui ne sont jamais compris entre* ω *et* $\omega + h$.

54. Voici maintenant une proposition plus générale que celle du numéro 52 :

Si des fonctions $f(z)$ *sont analytiques à l'intérieur d'un domaine* D, *continues dans ce domaine et bornées, dans leur ensemble, sur le contour rectifiable* C *qui limite* D, *toute suite de ces fonctions qui converge sur le contour* C *converge uniformément, à l'intérieur de* D, *vers une fonction analytique.*

Supposons d'abord que le domaine D soit simplement connexe, la formule de Cauchy est applicable au contour C et au domaine D

$$f_p(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f_p(z)\,dz}{z-x},$$

x étant un point de D et z un point de C; supposons que x reste à l'intérieur d'un domaine D_1 intérieur à D et désignons par h la plus courte distance non nulle des frontières de ces domaines. Si les nombres $|f_p(z)|$ sont inférieurs à M, sur C, on a

$$\left|\frac{f_p(z)}{z-x}\right| < \frac{M}{h}.$$

Si les $f_p(z)$ convergent sur le contour C, il est facile d'étendre à cette suite le théorème de M. Lebesgue relatif à l'intégration terme à terme des suites bornées de fonctions de variables réelles : il suffit de se reporter à la définition d'une intégrale de fonction de variable complexe. Si $f_p(z) = u_p + iv_p$, on a

$$\int_C f_p(z)\,dz = \int_C \left(u_p \frac{dx}{ds} - v_p \frac{dy}{ds}\right) ds + i \int_C \left(u_p \frac{dy}{ds} + v_p \frac{dx}{ds}\right) ds,$$

s désignant la longueur de l'arc de la courbe rectifiable C, compris entre le point x, y et une origine arbitraire. Si les $f_p(z)$ sont bornées sur C, il en est de même des u et des v et par conséquent des fonctions qui figurent sous le signe somme dans le second membre; on en conclut que la suite $f_p(z)$ est intégrable terme à terme. On a donc

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{p=\infty} \int_C f_p(z)\,dz = 0.$$

De même, la suite des fonctions $\dfrac{f_p(z)}{z-x}$ est bornée sur C (x étant fixe dans D_1), on a donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \lim_{p=\infty} \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f_p(z)\,dz}{z-x} = \lim_{p=\infty} f_p(x).$$

Donc les fonctions $f_p(x)$ convergent dans D_1, vers la fonction analytique

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

On voit facilement que la convergence est uniforme dans D_1, en remarquant que l'intégrale $\displaystyle\int_C \frac{f_p(z)\,dz}{z-x}$ converge uniformément vers sa limite.

La démonstration qui précède est applicable au théorème du n° 52.

55. Le théorème que je viens de démontrer cesse d'être exact, si les fonctions $f_p(z)$ de la suite ne sont plus bornées sur la courbe C : on peut construire une série de polynomes en z, convergeant en tous les

points de la circonférence C d'un cercle D, sans converger à l'intérieur. Supposons que le cercle soit de rayon *un* et ait pour centre le point $z = 0$, autour du point 1 comme centre, je décris une circonférence γ, de rayon $\frac{1}{2n}$ et une autre de rayon $\frac{1}{n}$; autour du point $z = 0$ comme centre, je trace les circonférences de rayons $1 + \frac{1}{2n}$ et $1 - \frac{1}{2n}$ et je les limite à leurs points de rencontre avec la circonférence précédente de rayon $\frac{1}{n}$, de manière à former, avec deux arcs de cette dernière circonférence, une bande circulaire γ', non fermée. Enfin soit γ_1, le cercle de centre $z = 0$ et de rayon $1 - \frac{1}{n}$. Soit $F(z)$ une fonction analytique dans un domaine comprenant la circonférence de rayon 1. D'après un théorème de Weierstrass [1] on peut trouver un polynome $P_{2n}(z)$ qui, dans γ et γ', diffère de $F(z)$ de moins de $\frac{1}{n}$, en valeur absolue, et dans γ_1 ait un module inférieur à $\frac{1}{n}$; on peut de même trouver un polynome $P_{2n+1}(z)$ qui dans γ et γ' diffère de $F(z)$ de moins de $\frac{1}{n+1}$, en valeur absolue, et dans γ_1 diffère de 1 de moins de $\frac{1}{n+1}$, en valeur absolue. La suite des polynomes $P_k(z)$ converge vers $F(z)$, sur le cercle C et ne converge en aucun point du domaine D. Sur le cercle C, les polynomes ont leurs modules bornés sur tout arc ne comprenant pas le point $z = 1$.

56. Nous avons supposé, dans la démonstration du théorème du n° 54, que le domaine D était simplement connexe; la démonstration demeure la même, lorsque le domaine D est connexe et limité par plusieurs contours; il suffit d'appeler C, l'ensemble des contours limitant D.

On peut même supposer que le domaine D est formé par la réunion d'un certain nombre de domaines connexes.

Lorsque les conditions du n° 54 sont remplies, les suites formées par les dérivées des fonctions $f_p(z)$ convergent uniformément dans

(1) *Sur la théorie des fonctions* (*Monatsberichte d. Berliner. Akad.*, août 1880).

tout domaine D′; on a en effet

$$\frac{d^k f_p(z)}{dz^k} = \frac{k!}{2i\pi}\int_C \frac{f_p(z)\,dz}{(z-x)^{k+1}},$$

les fonctions $\frac{f_p(z)}{(z-x)^{k+1}}$ étant bornées, lorsque z est sur C et x dans D′, les intégrales $\int_C \frac{f_p(z)\,dz}{(z-x)^{k+1}}$ convergent uniformément, lorsque x est dans D′, vers la limite

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{k+1}} = \frac{2i\pi}{k!}\frac{d^k f(z)}{dz^k}.$$

Les résultats sont les mêmes avec les hypothèses du n° 52, il suffit de prendre, pour C, une courbe comprise entre les frontières de D′ et de D.

57. Considérons une série de fonctions harmoniques, continues dans un domaine D où la série est convergente. Formons la suite des sommes des termes de cette série; soit $V_p(x, y, z)$, la somme des p premiers termes, en prenant, par exemple, le cas de trois variables : *si les fonctions* $V_p(x, y, z)$ *sont bornées dans le domaine* D, *la série converge uniformément vers une fonction harmonique, dans tout domaine* D′ *intérieur à* D. La démonstration est tout à fait analogue à celle du n° 52, relative aux séries de fonctions analytiques de z.

Supposons, en particulier, que le domaine D soit celui d'une sphère dont la surface est S : *si la suite des fonctions* $V_p(x, y, z)$, *bornées sur* S, *est convergente en tous les points de cette surface* S, *elle converge uniformément à l'intérieur de* D. Il suffit, pour le voir, d'appliquer à la formule qui donne la valeur de V_p à l'intérieur de D, à l'aide des valeurs que prend cette fonction sur S, les remarques que nous avons faites au n° 54, sur l'intégrale de Cauchy.

58. Bornons-nous aux fonctions harmoniques de deux variables (x, y); supposons que le domaine D soit tel qu'on puisse en faire la représentation conforme sur un cercle, le théorème qui précède subsistera. Donc : *si une série de fonctions de deux variables, har-*

moniques dans un domaine D *dont on peut faire la représentation conforme sur un cercle, converge sur le contour* C *de ce domaine, et, si la somme des n premiers termes de la série est bornée sur* C, *quel que soit n, la série converge uniformément vers une fonction harmonique dans tout domaine* D′ *intérieur à* D.

59. Supposons qu'il existe un nombre réel A tel que $V_p(x,y) - A$ reste, en valeur absolue, supérieure à un nombre fixe; *si les* V_p *convergent dans un domaine* D, *la convergence est uniforme dans tout domaine* D′ *situé dans* D. Associons à la fonction $V_p(x,y)$ la fonction harmonique $U_p(x,y)$, définie à une constante additive près, telle que

$$f_p = V_p + iU_p$$

soit une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$. On a

$$|f_p(z) - A| \geqq |V_p(x,y) - A|,$$

donc le module de $f_p(z) - A$ reste supérieur à un nombre fixe; de toute suite des $f_p(z)$, on peut en extraire une autre qui converge uniformément dans D′, il en est donc de même de la suite correspondante des $V_p(x,y)$; donc la limite de la suite des fonctions V_p est harmonique dans D. En outre, comme, de toute suite tirée des V_p, on peut en extraire une autre qui converge uniformément dans D′, il résulte, à l'aide d'un raisonnement identique à celui du n° 52, que les V_p convergent uniformément dans D′.

Il n'est pas nécessaire que les $V_p(x,y)$ convergent en tous les points de D, pour qu'on puisse en conclure que la convergence est uniforme: il suffit que la convergence ait lieu pour une infinité de points formant un ensemble partout dense dans D. En effet, deux suites quelconques convergentes extraites des V_p convergent vers deux fonctions continues qui sont égales en tous les points de l'ensemble: ces fonctions sont identiques; on en conclut que les V_p convergent dans tout le domaine D.

60. Arrêtons-nous un instant sur un cas particulier: soit une série de fonctions harmoniques toutes positives, les sommes $V_p(x,y)$ des n

premiers termes croissent avec p et par conséquent restent toutes supérieures à un nombre négatif quelconque; en outre, ou elles ont une limite, ou elles augmentent indéfiniment avec p en chaque point (x, y) de D. Il résulte de là que, ou bien les fonctions V_p augmentent indéfiniment en tout point de D, ou bien elles convergent uniformément dans tout domaine D′, vers une fonction harmonique. Pour que ce dernier cas se présente il faut et il suffit qu'en un point particulier de D, les $V_p(x, y)$ soient bornées, c'est-à-dire que la série soit convergente. Donc : *si une série de fonctions harmoniques et positives dans un domaine* D *converge en un point de ce domaine, elle converge uniformément vers une fonction harmonique à l'intérieur de* D. On retrouve ainsi un théorème de M. Harnack.

Plus généralement, supposons que les termes d'une série

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_p, \quad \ldots$$

soient des fonctions harmoniques dont les minima dans D sont

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_p, \quad \ldots.$$

Les fonctions $v_p - m_p$ sont harmoniques et non négatives dans D. Supposons que la série m_p soit convergente; si, en un point de D, les sommes $v_1 + v_2 + \ldots + v_p$ sont bornées, quel que soit p, en ce point la série $v_p - m_p$ est convergente, elle converge donc uniformément à l'intérieur de D; il en est de même de la série v_p. Donc : si la série m_p est convergente et si en un point de D les sommes $v_1 + v_2 + \ldots + v_p$ sont bornées, la série v_p converge uniformément dans D.

Supposons que la série v_p converge en un point de D et que les sommes $m_1 + m_2 + \ldots + m_p$ soient bornées, alors la série $v_p - m_p$ converge au même point que la série v_p et le résultat subsiste : la série v_p converge uniformément à l'intérieur de D.

Je ferai remarquer, en terminant, que, dans tous les théorèmes qui précèdent où l'on a montré la convergence d'une série de fonctions harmoniques dans un domaine D, les séries formées par les dérivées partielles d'un ordre déterminé de ces fonctions convergent vers les dérivées partielles correspondantes de la somme de la série.

II.

61. Je me propose de donner quelques propriétés des sommes de séries de fonctions analytiques de z, dans le cas où la convergence n'est pas uniforme. Les fonctions de z, somme de telles séries, c'est-à-dire limite de fonctions analytiques, seront appelées *fonctions de z de première classe*, en adoptant une dénomination analogue à celle que M. Baire a introduite pour les fonctions de variables réelles.

Une fonction de première classe peut toujours être considérée comme la limite d'une suite de polynomes en z. Soient en effet

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots$$

les fonctions analytiques qui ont pour limite la fonction $F(z)$ dans un domaine D limité par le contour C. Désignons par

$$C_1,\quad C_2,\quad \ldots,\quad C_n,\quad \ldots$$

une suite infinie de contours fermés, intérieurs à D et ayant pour limite le contour C; on peut trouver un polynome $P_n(z)$ qui, dans le domaine D_n, limité par le contour C_n, diffère de $f_n(z)$ de moins de $\frac{1}{n}$, en valeur absolue. La suite des polynomes $P_n(z)$ a même limite que la suite $f_n(z)$ en tout point intérieur à D, car ce point appartient à tous les D_n, lorsque n est assez grand et la différence $P_n(z) - f_n(z)$ a pour limite o lorsque n croit indéfiniment. On peut dire aussi que $F(z)$ est la somme de la série de polynomes

$$P_1(z) + \sum_{n=1}^{n=\infty} [P_{n+1}(z) - P_n(z)].$$

Considérons une fonction de z de première classe $F(z)$, je dis que, *dans tout domaine, on peut en trouver un autre où cette fonction est analytique* (¹) *et où la suite qui a pour limite* $F(z)$ *converge uniformé-*

(¹) Ce théorème a été obtenu indépendamment par M. Lebesgue et par moi.

ment; en d'autres termes, dans le domaine D, dans lequel $F(z)$ est définie, il y a une infinité dénombrable de domaines δ où elle est analytique.

62. Je démontrerai d'abord le théorème suivant : *Si, pour une suite infinie de fonctions continues, en chaque point d'un domaine* D, *la plus grande des limites des modules des valeurs de ces fonctions est finie, dans tout domaine* D_1, *intérieur à* D, *on peut trouver un autre domaine dans lequel les modules de toutes les fonctions sont bornés* (c'est-à-dire : ont une même limite supérieure).

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ les fonctions de la suite; si, dans le domaine D_1, les $|f_n|$ sont inférieurs à 1, le théorème est démontré; sinon, il existe une fonction f_{n_1} qui, en un point de D_1, vérifie l'inégalité

$$|f_{n_1}| > 1;$$

comme f_{n_1} est continue, cette inégalité sera vérifiée dans un domaine Δ_1, intérieur à D_1. Considérons la suite

$$f_{n_1+1}, \quad f_{n_2+1}, \quad \ldots, \quad f_{n_1+k}, \quad \ldots.$$

Si les modules de ces fonctions sont inférieurs à 2 dans Δ_1, le théorème en résulte, sinon, on peut trouver un domaine Δ_2, intérieur à Δ_1, dans lequel, pour une fonction $f_{n_2} (n_2 > n_1)$, on a

$$|f_{n_2}| > 2,$$

etc.; en continuant ainsi, on arrive à un domaine Δ_{p-1}; si les fonctions $f_{n_{p-1}+k}$ n'ont pas toutes leurs modules inférieurs à p, dans ce domaine, on trouvera une fonction $f_{n_p} (n_p > n_{p-1})$ et un domaine Δ_p contenu dans Δ_{p-1}, pour lequel

$$|f_{n_p}| > p.$$

On doit nécessairement aboutir ainsi à un domaine Δ_r, dans lequel toutes les fonctions f_{n_r+k} ont leurs modules inférieurs à r, car, dans le cas contraire, on définirait une suite infinie de domaines

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \ldots, \quad \Delta_p, \quad \ldots$$

emboîtés chacun dans le précédent et ayant, par suite, au moins un point limite P. En ce point on aurait

$$|f_{n_1}| > 1, \qquad |f_{n_2}| > 2, \qquad \ldots, \qquad |f_{n_p}| > p, \qquad \ldots;$$

par conséquent la plus grande des limites des $|f_n|$ ne serait pas finie.

La démonstration qui précède est indépendante du nombre des variables dont dépendent les f, elle s'applique aux fonctions de variables réelles comme aux fonctions de variables complexes [1]. En outre, on peut remplacer le domaine D_1 par un ensemble parfait quelconque, composé de points intérieurs à D : les domaines Δ_p sont alors des ensembles fermés dont chacun contient tous les suivants.

63. Nous dirons qu'une suite de fonctions f_n est bornée en un point P, si l'on peut entourer ce point d'une sphère, de centre P et de rayon assez petit, pour que dans cette sphère les modules de toutes les f_n soient inférieurs à un nombre fixe.

Dans le cas où cette sphère n'existe pas, nous dirons que la suite f_n n'est pas bornée en P. L'ensemble des points en chacun desquels une suite n'est pas bornée est évidemment fermé, le théorème précédent montre qu'il n'est dense dans aucun domaine, lorsque la suite est finie en chaque point. Nous dirons aussi que la suite est bornée en un point P d'un ensemble parfait E, sur cet ensemble E, lorsque dans une sphère assez petite de centre P, et pour tous les points de l'ensemble qu'elle contient, les modules des f_n sont bornés; l'ensemble des points où une suite, finie en chaque point, n'est pas bornée sur un ensemble parfait E est un ensemble fermé, non dense par rapport à E.

On peut dire aussi, en désignant par F la fonction qui est égale en chaque point à la plus grande des limites des $|f_n|$, que l'ensemble des points où cette fonction F n'est pas bornée par rapport à un ensemble parfait quelconque est un ensemble fermé non dense sur E.

En particulier, si une suite f_n converge en tout point du domaine D,

---

(1) Si l'on se borne aux fonctions de variables réelles, le théorème s'applique encore à la plus grande des limites des valeurs positives ou à la plus petite des limites des valeurs négatives.

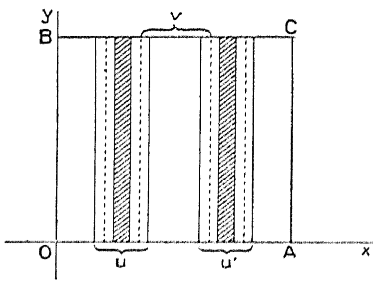
vers une fonction F, on voit que la fonction limite est bornée dans D, sauf aux points d'un ensemble fermé, non dense dans D [1].

64. Voyons quelles conséquences vont résulter du théorème précédent, lorsqu'on l'applique à une suite de fonctions analytiques $f_n(z)$, convergente dans le domaine D.

Soit D_1 un domaine contenu dans D, dans D_1 se trouve un domaine δ où les $|f_n(z)|$ sont bornés, donc dans δ la suite converge uniformément et la limite $F(z)$ est analytique : c'est la proposition énoncée au début.

Il est facile de former de telles suites : soit un carré OABC dont les côtés OA et OB sont sur les axes Ox et Oy. Sur le côté OA je considère une infinité dénombrable d'intervalles u partout denses sur OA.

Fig. 3.



Les points de OA qui ne sont pas à l'intérieur d'un intervalle u forment un ensemble parfait E, si l'on suppose que les intervalles u n'ont, deux à deux, aucun point commun. Je considère les rectangles tels que (u), ayant pour base l'intervalle u et pour hauteur OB. Soient

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

---

[1] Le théorème des nos 62 et 63 comporte de nombreuses applications; pour me borner au cas d'une variable réelle, considérons une fonction continue, ayant en chaque point ses nombres dérivés à droite, finis. Ces nombres dérivés sont alors bornés sauf aux points d'un ensemble e, fermé et non dense dans l'intervalle (a, b) où $f(x)$ est définie. Dans chaque intervalle contigu à e, les nombres dérivés étant bornés, la fonction admet une dérivée, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle. Les intervalles contigus étant en infinité dénombrable, on voit que l'ensemble des points où $f(x)$ n'a pas de dérivée a une mesure au plus égale à celle de l'ensemble e.

les intervalles u rangés dans un ordre quelconque, et considérons les n premiers $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Dans chaque rectangle $(u_1), (u_2), \ldots, (u_n)$, je mène deux parallèles à Oy, à des distances des côtés égales à $\frac{1}{n}$, et deux autres à des distances égales à $\frac{1}{2n}$ [1]. J'appelle

$$(u'_1), \quad (u'_2), \quad \ldots, \quad (u'_n), \quad \ldots$$

les rectangles intérieurs (couverts de hachures sur la figure) et (v) les rectangles qui empiètent sur deux rectangles voisins et qui sont limités par les parallèles menées aux distances $\frac{1}{2n}$ (il peut y avoir, à droite et à gauche, des rectangles (v), limités l'un à AC, l'autre à OB). Soient $\varphi(x)$ une fonction continue et définie pour les points de l'ensemble E et $\psi_1(z), \psi_2(z), \ldots, \psi_n(z), \ldots$ une infinité de fonctions analytiques dans le rectangle, d'ailleurs arbitraires.

D'après le théorème de Weierstrass, rappelé précédemment, il existe un polynome en z, $P_n(z)$, qui, dans le rectangle (u'_1), diffère de $\psi_1(z)$ de moins de $\frac{1}{n}$ en module; dans le rectangle (u'_2) diffère de $\psi_2(z)$ de moins de $\frac{1}{n}$ en module, etc.; dans le rectangle (u'_n) diffère de $\psi_n(z)$ de moins de $\frac{1}{n}$ en module et qui, en outre, dans chacun des rectangles (v) diffère de moins de $\frac{1}{n}$, en module, de la valeur $\varphi(x_0)$, que prend la fonction $\varphi(x)$, en un point quelconque x_0 de E, situé sur la base du rectangle (v) qui est sur Ox.

La suite des polynomes $P_n(z)$ est convergente dans le carré OABC. Dans chaque rectangle (u) elle converge uniformément vers une fonction analytique $\psi(z)$ et sur chaque parallèle à Oy, menée par un point de E d'abscisse x, elle converge vers $\varphi(x)$. En effet : soit P un point appartenant à un rectangle (u_i), pour n assez grand ce point appartient à un rectangle (u'_i); il suffit que $n > \frac{1}{h}$, h étant la plus petite des distances de P aux côtés du rectangle, parallèles à Oy; alors

---

[1] Si un des intervalles $u_1, \ldots, u_n$ a une longueur moindre que $\frac{2}{n}$, on pourra diminuer les distances des parallèles aux côtés.

le module de la différence $P_n(z) - \psi_i(z)$ est moindre que $\frac{1}{n}$, donc au point P, $P_n(z)$ a pour limite $\psi_i(z)$.

Soit P un point situé sur un côté parallèle à Oy d'un des rectangles (u), ou situé hors de tous ces rectangles : ce point P se projette sur Ox en un point p de E d'abscisse x. Le point p est situé entre deux des intervalles $u_1, u_2, \ldots, u_n$, dont la distance a pour limite o avec $\frac{1}{n}$ et, par conséquent, si x_0 est l'abscisse d'un point quelconque de E situé entre ces deux intervalles, la différence $x - x_0$ et, par conséquent aussi, la différence $\varphi(x) - \varphi(x_0)$ tendent vers o avec $\frac{1}{n}$ [1]. Le point p est toujours dans un intervalle v, et la valeur de $P_n(z)$ en P diffère, en module, de moins de $\frac{1}{n}$ de la valeur $\varphi(x_0)$. Donc $P_n(z)$ a même limite que $\varphi(x_0)$, c'est-à-dire a pour limite $\varphi(x)$. Par conséquent la limite de la suite $P_n(z)$ ou la somme de la série

$$P_1(z) + \sum_{n=1}^{n=\infty} [P_{n+1}(z) - P_n(z)]$$

est analytique dans une infinité de domaines, partout denses dans le carré. On voit en outre qu'une suite de polynomes en z peut représenter, dans une infinité de domaines δ, des fonctions analytiques *distinctes*.

65. Soit P un point quelconque du domaine D, dans lequel une suite $f_n(z)$ converge vers la fonction $F(z)$. Je dirai que le point P est un point de convergence régulière pour la suite $f_n(z)$, ou plus brièvement un *point régulier*, si, dans un cercle de rayon assez petit et de centre P, les fonctions $f_n(z)$ convergent uniformément. Dans le cas contraire, le point P sera dit un *point irrégulier*. Soit E l'ensemble des points irréguliers dans le domaine D, il résulte de ce qui précède

---

[1] Si p est le point O ou le point A, il suffit de considérer l'intervalle u qui est le plus voisin à sa droite et qui fait partie de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, dans le premier cas, et le plus voisin à sa gauche, dans le second.

que cet ensemble est non dense dans E. Je dis que c'est un ensemble parfait :

D'abord, c'est un ensemble fermé ; en effet tout point P, limite de points irréguliers, est un point irrégulier; car, dans un petit cercle décrit autour d'un point régulier comme centre, tous les points sont réguliers. En outre, l'ensemble E n'a pas de points isolés. Soit, en effet, un point P, supposé irrégulier et isolé; je peux décrire une circonférence γ de centre P et de rayon assez petit, pour que tous les points de cette circonférence soient réguliers.

Soit A l'un d'entre eux; dans un cercle de centre A et de rayon ρ la série converge uniformément; je prends pour ρ la plus grande valeur possible. A chaque point A de la circonférence γ correspond un nombre ρ non nul : ces nombres ρ ont un minimum δ différent de o, car on peut trouver sur γ un point ω tel que, dans tout arc de milieu ω, le minimum soit encore δ; or, au point ω, ρ a une valeur ρ_0 non nulle; donc, pour tous les points d'un arc de milieu ω situé à l'intérieur du cercle de centre P et de rayon $\frac{\rho_0}{2}$, ρ reste toujours supérieur à $\frac{\rho_0}{2}$, donc δ, qui est son *minimum*, est supérieur à $\frac{\rho_0}{2}$. Il résulte de là que je peux recouvrir entièrement la circonférence γ, avec un nombre fini de cercles de rayons δ : soient $C_1, C_2, \ldots, C_p$ ces cercles. On peut trouver n_1 tel que dans C_1 on ait

$$|f-f_n|<\varepsilon$$

pour $n \geqq n_1$, ε étant arbitrairement choisi; de même, on peut trouver $n_2, \ldots, n_p$, tels que

$$\begin{array}{llll} \text{dans } C_2 & |f-f_n|<\varepsilon & \text{pour} & n \geqq n_2, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \text{dans } C_p & |f-f_n|<\varepsilon & \text{pour} & n \geqq n_p. \end{array}$$

Si n' est le plus grand des nombres $n_1, n_2, \ldots, n_p$, on aura pour $n \geqq n'$

$$|f-f_n|<\varepsilon$$

en tous les points de la circonférence γ. Donc, les fonctions $f_n(z)$ convergent uniformément sur γ; comme elles sont régulières dans le cercle γ, on en conclut qu'elles convergent uniformément dans ce cercle et que, par suite, le point P ne peut être irrégulier : *L'ensemble* E *est un ensemble parfait, non dense.*

66. Je dis maintenant que cet ensemble est continu et d'un seul tenant avec la frontière C du domaine D.

Supposons d'abord que l'ensemble E ne soit pas d'un seul tenant et soit E_1 une partie de E telle que la distance mutuelle d'un point de E_1 et d'un point de $E - E_1$ ait un minimum h non nul. L'ensemble E_1 est fermé, puisque l'ensemble E est fermé et que les ensembles E_1 et $E - E_1$ sont séparés. Je décris, autour de chaque point de E_1 comme centre, un cercle de rayon $\frac{h}{2}$; d'après un théorème de MM. Borel et Lebesgue, on peut, à l'aide d'un nombre fini k de ces cercles, enfermer tous les points de E_1. L'ensemble des points situés à l'intérieur de l'un au moins de ces cercles forme un ou plusieurs domaines connexes : soit Δ l'un de ces domaines et Γ le contour limitant le domaine Δ à l'extérieur, c'est-à-dire que tous les points de Γ peuvent être joints au point à l'infini du plan par un chemin ne rencontrant pas Δ. Si je mène le contour Γ' parallèle au contour Γ, vers l'extérieur et à une distance de Γ moindre que $\frac{h}{2}$, le domaine annulaire compris entre Γ et Γ' ne contient aucun point de E. Traçons entre Γ et Γ' une courbe γ que l'on peut supposer rectifiable ou même analytique.

Chacun des points de γ est un point régulier ; en reprenant le raisonnement qui a été fait au paragraphe précédent dans le cas d'un cercle γ, on démontrera que la suite converge uniformément sur la courbe γ. Il en résulte qu'elle converge uniformément dans Δ et que, par suite, ce domaine ne contient aucun point de E, ce qui est impossible, puisque le centre de chacun des cercles qui ont servi à définir Δ est un point de E_1, donc de E. Ainsi l'ensemble E est d'un seul tenant.

On démontre de même qu'il est impossible que l'ensemble E soit séparé de la frontière C de D ; il suffit de faire jouer, au minimum non nul de la distance d'un point de E à un point de C, le rôle que joue le nombre h dans la démonstration ci-dessus.

Enfin, l'ensemble E est un ensemble continu : en effet, s'il était discontinu, il existerait au moins deux points P et P' de cet ensemble et un nombre ε tels qu'il soit impossible de construire une ligne polygonale ayant pour sommets des points de E, pour extrémités les points P et P' et dont chaque côté ait une longueur moindre que ε. Autour de chaque point de E comme centre, décrivons un cercle de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$; on peut enfermer tous les points de E dans un nombre fini k de ces cercles : l'ensemble des points intérieurs à l'un au moins de ces k cercles ne peut pas être d'un seul tenant, sinon on pourrait joindre P à P' par une ligne polygonale remplissant les conditions précédentes. Il en résulte que l'ensemble E est formé au moins de deux ensembles séparés : nous savons que cela est impossible, donc E est continu.

En résumé, on peut énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une série de fonctions analytiques de z dans un domaine D, *convergente dans ce domaine, l'ensemble des points irréguliers est parfait, non dense dans* D, *continu et d'un seul tenant avec la frontière du domaine.*

67. Que peut-on dire de la fonction $F(z)$, sur l'ensemble E des points irréguliers ? La fonction $F(z)$ est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait et par suite sur E. En effet, si l'on pose

$$f_n(z) = u_n(x, y) + i v_n(x, y),$$
$$F(z) = U(x, y) + i V(x, y),$$

les fonctions u_n et v_n ont respectivement pour limites U et V; il en résulte, d'après un théorème de M. Baire (¹), que ces fonctions U et V sont ponctuellement discontinues sur tout ensemble parfait et, par conséquent, il en est de même de $F(z)$.

Je vais donner une démonstration directe très simple de cette proposition, pour une suite de fonctions d'un nombre quelconque de variables.

(¹) *Sur les fonctions de variables réelles* (*Annali di Matematica*, 1899).

Considérons une suite infinie de fonctions continues f_1, f_2, ..., f_n, ..., dépendant d'un nombre quelconque de variables réelles ou complexes, et convergeant, dans un domaine D, vers la fonction F. Je dis que : *dans tout domaine* D_1, *intérieur à* D, *on peut en trouver un autre pour lequel*

$$|F - f_n| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad n > p,$$

ε *étant un nombre positif choisi à l'avance.*

D'abord, dans tout domaine, il en existe un autre où les $|f_n|$ sont bornés; nous supposerons donc qu'il en est ainsi dans D_1. Donnons-nous ε, si l'on peut trouver un nombre p tel que, dans D_1, pour n et n' supérieurs à p, on ait

$$|f_n - f_{n'}| < \varepsilon,$$

le théorème est démontré, car il suffit de faire croître n' indéfiniment pour obtenir, en chaque point de D_1, l'inégalité

$$|f_n - F| \leq \varepsilon.$$

Dans le cas contraire, il existe un point P dans D_1 et deux nombres n_1 et n'_1 tels que, en P,

$$|f_{n_1} - f_{n'_1}| > \varepsilon, \qquad n'_1 > n_1.$$

Les f_n étant continues, cette inégalité a lieu pour tous les points d'un domaine Δ_1, entourant P. Considérons, dans Δ_1, la suite

$$f_{n'_1}, \quad f_{n'_1+1}, \quad f_{n'_1+2}, \quad \ldots, \quad f_n, \quad \ldots,$$

si, à partir d'un rang p, on a, pour tous les points de Δ_1,

$$|f_n - f_{n'}| < \varepsilon \qquad n, n' > p,$$

le théorème est démontré, sinon, il existe un domaine Δ_2, intérieur à Δ_1 et deux nombres n_2 et n'_2, ($n'_1 \leq n_2 < n'_2$), tels que

$$|f_{n_2} - f'_{n'_2}| > \varepsilon,$$

dans Δ_2, etc.; en continuant ainsi, on arrivera nécessairement à un domaine Δ_r, dans lequel l'inégalité sera vérifiée; sinon, on définirait une suite infinie de domaines, chacun contenu dans le précédent, qui auraient, par suite, au moins un point commun ω. En ce point ω on aurait les inégalités

$$\begin{gathered} |f_{n_1} - f_{n'_1}| > \varepsilon, \\ |f_{n_2} - f_{n'_2}| > \varepsilon, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |f_{n_r} - f_{n'_r}| > \varepsilon, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

les nombres n_1, n'_1, n_2, n'_2, ..., n_r, n'_r, ... croissant indéfiniment avec r. Mais ceci est impossible, car, la suite f_n étant convergente en ω, on a, à partir d'un certain rang,

$$|f_n - f_{n'}| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs n et n' qui dépassent ce rang.

Dans le domaine D_1, on peut donc trouver un domaine D'_1, en tous les points duquel on ait, pour n assez grand,

$$|F - f_n| < \varepsilon.$$

La fonction f_n étant continue dans D'_1, on pourra trouver dans ce domaine un domaine D''_1 tel que, si f'_n et f_n sont deux valeurs quelconques de la fonction f_n dans D''_1, on ait

$$|f'_n - f_n| < \varepsilon;$$

on déduit de là $|F - F'| < 3\varepsilon$, F' étant la limite des f'_n. Ceci posé, considérons une suite infinie de nombres positifs décroissant jusqu'à 0, par exemple,

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots.$$

Dans D_1, je puis trouver un domaine D' dans lequel l'oscillation de F, c'est-à-dire le maximum du module de $F - F'$, ne dépasse pas 1; dans D', je puis trouver un domaine D'' où l'oscillation de F ne dépasse pas $\frac{1}{2}$, etc.; dans $D^{(n-1)}$, on peut trouver un domaine $D^{(n)}$ où l'oscillation de F ne dépasse pas $\frac{1}{n}$. On forme ainsi une suite dénombrable de domaines

$$D', \quad D'', \quad \ldots, \quad D^{(n)}, \quad \ldots,$$

dont chacun est compris dans le précédent et qui ont au moins un point limite P (1). Au point P, la fonction F est continue, car, étant donné le nombre α, si P' est un point situé à l'intérieur d'une sphère de centre P, contenue tout entière dans $D^{(n)}\left(n > \frac{1}{\alpha}\right)$, on aura

$$|F(P') - F(P)| < \alpha.$$

La fonction F possède dans tout domaine D_1 intérieur à D des points de continuité, elle est ponctuellement discontinue dans D.

Dans la démonstration précédente, on peut remplacer le domaine D_1 par un ensemble parfait quelconque, tous les résultats subsistent, en adoptant, pour la continuité d'une fonction en un point d'un ensemble, les définitions bien connues pour les fonctions de variables réelles qui s'étendent immédiatement au cas des variables complexes. Donc la fonction F est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.

En particulier, *une fonction de première classe* F (z) *est ponctuellement discontinue sur l'ensemble parfait* E *des points irréguliers.*

68. Donnons un exemple : je reprends le carré OABC de l'exemple du paragraphe 64, menons des segments parallèles à OA, aux distances $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ de ce côté. On peut construire une série de polynomes en z qui, sur chaque segment $y = \frac{1}{n}$, converge vers une fonction de première classe $\varphi_n(x)$; sur OA, converge vers une fonction de première classe φ_0 et, dans la bande comprise entre les droites $y = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{1+n}$, converge vers une fonction analytique $\psi_n(z)$.

En effet, menons les droites $y = \pm\frac{1}{n}$, qui limitent un rectangle R''_0 avec les droites OB et AC supposées prolongées au-dessous de Ox. En dehors de ce rectangle se trouvent $(n-1)$ des segments situés sur

(1) Pour éviter toute difficulté relative au cas où P serait sur les frontières des domaines $D^{(n)}$, on peut toujours supposer que $D^{(n)}$ est complètement intérieur à $D^{(n-1)}$.

les droites

$$y = 1, \quad y = \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad y = \frac{1}{n-1}.$$

Prenons l'un d'entre eux d'ordonnée $\frac{1}{k}$, menons les segments parallèles d'ordonnées $\frac{1}{k} \pm \frac{1}{2n^2}$, qui, avec les droites OB et AC, déterminent un rectangle R''_k. De même les segments dont les ordonnées sont $\frac{1}{k} - \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n^2}$ définissent un rectangle R'''_k. Soit, d'autre part,

$$Q_1^k(x), \quad Q_2^k(x), \quad \ldots, \quad Q_p^k(x), \quad \ldots$$

une suite de polynomes convergeant vers $\varphi_k(x)$. Ceci posé, il existe un polynome $P_n(z)$ qui, dans les rectangles

$$R''_0, \quad R''_1, \quad R''_2, \quad \ldots, \quad R''_k, \quad \ldots, \quad R''_{n-1},$$

diffère en module de moins de $\frac{1}{n}$, respectivement, des fonctions

$$Q_n^0(z), \quad Q_n^1(z), \quad \ldots, \quad Q_n^k(z), \quad \ldots, \quad Q_n^{n-1}(z)$$

et qui, dans les rectangles

$$R'''_1, \quad R'''_r, \quad \ldots, \quad R'''_{n-1},$$

diffère en module de moins de $\frac{1}{n}$, respectivement, des fonctions

$$\psi_1(z), \quad \psi_2(z), \quad \ldots, \quad \psi_{n-1}(z).$$

Lorsque n croît indéfiniment, les polynomes $P_n(z)$ ont pour limite, dans le carré OABC, une fonction $F(z)$, analytique entre deux quelconques des segments tracés parallèlement à Ox et qui, sur chacun d'eux et sur OA, converge vers une fonction de première classe. L'ensemble des points irréguliers est formé ici par tous les segments parallèles à Ox et le segment OA.

69. Voyons maintenant comment se comportent les fonctions $f_n(z)$ dans le voisinage d'un point irrégulier P. Je dis que ces fonctions s'approchent autant qu'on le veut d'une valeur quelconque a. D'une manière précise, étant donnés un nombre a et un nombre positif ε arbi-

trairement petit, pour tout cercle γ de centre P, *il y a une infinité de fonctions $f_n(z)$ qui prennent, à l'intérieur du cercle, des valeurs différant de a de moins de ε.* On peut ajouter que, parmi ces valeurs, *il y en a toujours une infinité pour lesquelles l'argument de $f_n(z) - a$ est aussi voisin qu'on le veut d'un argument quelconque.*

En effet, s'il n'y avait qu'un nombre fini de fonctions $f_n(z)$, pour lesquelles la différence $f_n(z) - a$ ait dans le cercle γ un module minimum inférieur ou égal à ε, à partir d'un certain rang, on aurait toujours, à l'intérieur du cercle,

$$|f_n(z) - a| > \varepsilon;$$

la convergence serait uniforme dans le cercle et le point P ne serait pas irrégulier.

De même, s'il n'y avait qu'un nombre fini de fonctions f_n pour lesquelles l'argument de $f_n(z) - a$ puisse prendre (z étant dans le cercle γ) des valeurs comprises entre $\omega - \delta$ et $\omega + \delta$, en prenant un point b dans le demi-angle formé parmi les demi-droites issues de a qui ont pour arguments $\omega - \delta$ et $\omega + \delta$, on aurait à partir d'un certain rang

$$|f_n(z) - b| > k,$$

k étant un nombre fixe et la convergence serait uniforme à l'intérieur de γ.

70. Considérons maintenant l'équation

$$f_n(z) = a;$$

elle admet dans le domaine D un certain nombre de racines; supposons que l'on ait marqué tous les points racines des équations obtenues en donnant à n toutes les valeurs entières et soit E_a l'ensemble dérivé de ces points racines [1]. Je dis que, si en un point régulier $F(z)$ prend la valeur a, ce point appartient à l'ensemble E_a. En effet, si ce point P n'appartenait pas à E_a, il n'y aurait pas, dans le voisinage de P, une infinité de points racines et l'on pourrait tracer un cercle γ de

(1) Si un point est racine pour une infinité de valeurs de n, je le considère comme faisant partie de E_a.

centre P et de rayon assez petit pour que, à l'intérieur et sur la circonférence de ce cercle, il n'y ait pas de point racine, lorsque n est assez grand, de l'équation

$$f_n(z) = a.$$

D'autre part, la fonction $F(z)$ étant analytique au point P, on peut choisir le rayon du cercle γ de manière qu'il n'y ait pas, sur la circonférence, de point pour lequel $F(z)$ prenne la valeur a; alors sur la circonférence γ, $F(z) - a$ a un minimum non nul, k. Comme les $f_n(z)$ convergent uniformément autour de P, on peut supposer que le rayon de γ est assez petit pour que la convergence soit uniforme sur la circonférence; à partir d'un certain rang, $f_n(z)$ diffère de $F(z)$, sur cette circonférence et en valeur absolue, de moins de $\frac{k}{2}$, donc pour n assez grand

$$|f_n(z) - a| > \frac{1}{2} k$$

sur la circonférence γ, et, en outre, l'équation $f_n(z) = a$ n'a pas de racines dans γ.

Le minimum du module des valeurs de $f_n(z) - a$ à l'intérieur et sur la circonférence du cercle γ est atteint, dans ces conditions, pour un point de la circonférence, et l'inégalité qui précède est vérifiée pour tous les points du cercle. La convergence étant uniforme, on aurait dans le cercle

$$|F(z) - a| \geqq \frac{1}{2} k,$$

ce qui contredit l'hypothèse que $F(z) = a$ au point P. Donc P appartient à E_a. Par suite :

Tout point régulier appartient à un E_a et un seul, et par conséquent, si un point de D appartient à la fois à E_a et à E_b, c'est un point irrégulier. Les points communs aux deux ensembles E_a et E_b, a et b étant deux nombres quelconques, font partie de l'ensemble E des points irréguliers [1].

[1] On peut d'ailleurs démontrer que, réciproquement, autour de chaque point irrégulier, les équations $P_n(z) = a$ ont une infinité de racines, sauf peut-être pour une seule valeur de a; en d'autres termes, un point irrégulier appartient à E_a, pour toutes les valeurs de a, sauf peut-être une valeur exceptionnelle.

III.

71. Dans quel cas peut-on affirmer que la limite d'une suite convergente de fonctions analytiques représente une fonction analytique? Tout d'abord, il en est ainsi chaque fois que l'on peut reconnaître que la convergence est uniforme ou qu'elle est simplement uniforme : par exemple, la limite sera analytique lorsque les fonctions de la suite sont bornées en module ou, plus généralement, si l'on peut extraire de la suite donnée une suite nouvelle dont les termes $f_n(z)$ ont des modules bornés ou sont tels que les modules des différences $f_n(z) - a$ restent supérieurs à un nombre fixe.

Mais il n'est pas nécessaire qu'une série de fonctions analytiques converge uniformément pour qu'elle représente une fonction analytique. Une condition nécessaire est que la somme de la série soit une fonction continue de z. Pour cela, il faut et il suffit, comme l'a montré M. Arzelà dans le cas des suites de fonctions de variables réelles ([1]), que la convergence soit quasi-uniforme, c'est-à-dire que, étant donnés ε positif arbitrairement petit et un nombre p aussi grand que l'on veut, on puisse recouvrir tout domaine intérieur D à l'aide d'un nombre fini m de rectangles de côtés parallèles aux axes (ou de tous autres domaines), D_1, D_2, ..., D_m tels que, dans D_1,

$$|F - f_{n_1}| < \varepsilon,$$

dans D_2,

$$|F - f_{n_2}| < \varepsilon,$$

et dans D_m,

$$|F - f_{n_m}| < \varepsilon,$$

les nombres n_1, n_2, ..., n_m étant supérieurs à p. Voici une démonstration simple de cette proposition.

La condition est nécessaire : en effet, soit z_0 un point d'un domaine D' intérieur à D où la suite $f_n(z)$ converge vers la fonction analytique $F(z)$. On a, dans un cercle de centre z_0 et de rayon ρ et pour n

---

([1]) *Sulle serie di funzioni* (*Memorie della R. Accademia di Bologna*, serie 5, tomo VIII).

assez grand et fixe,

$$|F(z_0)-f_n(z_0)|<\varepsilon,$$
$$|F(z)-F(z_0)|<\varepsilon,$$
$$|f_n(z)-f_n(z_0)|<\varepsilon,$$

donc $|F(z)-f_n(z)|<3\varepsilon$, ε étant donné. Nous prendrons pour n un des nombres supérieurs à un nombre donné p, pour lesquels la première inégalité a lieu et pour ρ la grande valeur possible. Chaque point de D′ peut ainsi être entouré d'un cercle de rayon ρ, il en résulte, d'après un théorème déjà cité de M. Borel, généralisé par M. Lebesgue, qu'on peut couvrir le domaine D′ à l'aide d'un nombre fini m de ces cercles, soient $D_1, D_2, \ldots, D_m$, auxquels correspondent les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_m$ tous supérieurs à p. On a, dans le cercle D_i, l'inégalité

$$|F(z)-f_{n_i}(z)|<3\varepsilon,$$

la convergence est donc quasi-uniforme.

Réciproquement, supposons que la convergence soit quasi-uniforme; donnons-nous un nombre ε; un point z_0 du domaine D appartient à un domaine D_i, à l'intérieur duquel

$$|F(z)-f_{n_i}(z)|<\varepsilon,$$

et nous pouvons supposer que n_i est supérieur au nombre entier p à partir duquel on a

$$|F(z_0)-f_n(z_0)|<\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad n>p.$$

D'autre part, dans un cercle de centre z_0 intérieur à D_i et assez petit, on aura

$$|f_{n_i}(z)-f_{n_i}(z_0)|<\varepsilon,$$

donc, puisque

$$|F(z_0)-f_{n_i}(z_0)|<\varepsilon,$$

on obtient

$$|F(z)-F(z_0)|<3\varepsilon;$$

comme ε est arbitraire, $F(z)$ est continue en z_0 et, par suite, dans tout le domaine D.

Cette convergence quasi-uniforme suffit dans certain cas pour qu'on puisse affirmer que la fonction limite est analytique. Supposons, par exemple, que l'ensemble E se compose d'une courbe rectifiable et sépare le domaine D en un nombre fini de domaines partiels. La fonction $F(z)$ est analytique dans D, sauf peut-être sur E ; elle est partout continue ; d'après un théorème de M. Painlevé, elle est analytique dans tout le domaine D. Il en est de même, lorsque l'ensemble E est formé d'un ensemble réductible de courbes analogues.

72. La convergence quasi-uniforme ne suffit pas dans tous les cas : en d'autres termes, une série convergente de fonctions analytiques peut représenter une fonction $F(z)$ continue dans D mais non analytique dans tout ce domaine. Reprenons l'exemple du paragraphe 64 et supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction continue de x sur OA, constante dans chaque intervalle ω (¹). Je prendrai, pour la fonction $\psi_k(z)$, la valeur constante de la fonction $\varphi(x)$, dans l'intervalle u_k. Dans ces conditions, la fonction limite $F(z)$ des polynomes $P_n(z)$, définis dans ce paragraphe, est une fonction continue dans le carré, constante et par conséquent analytique dans chaque rectangle (u_k), sans être constante partout dans le domaine OABC (²).

73. Un problème qui se rattache étroitement à celui qui précède est celui de la recherche des conditions auxquelles doit satisfaire une fonction $F(z)$ pour qu'on puisse la représenter par la somme d'une série de fonctions analytiques de z. Toute fonction de première classe doit posséder les propriétés suivantes :

1. Dans tout domaine intérieur à son domaine d'existence, on peut en trouver un autre, dans lequel $F(z)$ est analytique.

2. La fonction $F(z)$ doit être de première classe en $x, y (z = x + iy)$, c'est-à-dire doit être ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.

(¹) Par exemple, si l'ensemble E du paragraphe 64 n'est pas de mesure nulle, on pourra prendre pour $\varphi(x)$ le nombre qui mesure l'ensemble des points de E situés sur le segment (O, x) de l'axe Ox.

(²) Une condition suffisante pour que $f(z)$ soit analytique est que la suite $f_n(z)$ soit intégrable terme à terme, mais cette condition n'est pas nécessaire. Voir P. MONTEL, *Sur les suites de fonctions holomorphes* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1906).

Je ne sais pas si ces propriétés caractérisent les fonctions de première classe en z. Il semble que l'étendue et la structure de l'ensemble des points où la fonction n'est pas analytique doivent ici jouer un rôle. Une des principales difficultés des démonstrations que l'on peut faire pour essayer de démontrer que ces propriétés sont suffisantes provient de ce que, au contraire de ce qui se passe pour les fonctions de variables réelles, une série uniformément convergente de fonctions de première classe en z n'a pas nécessairement pour somme une fonction de première classe en z. Par exemple, une fonction continue quelconque de z peut être représentée par une série uniformément convergente de fonctions de première classe en z (¹).

74. Les conditions I et II sont suffisantes lorsque l'ensemble T des points où la fonction $F(z)$ n'est pas analytique est un ensemble dénombrable. L'ensemble T est fermé pour toute fonction $F(z)$, donc il est réductible lorsqu'il est dénombrable. Je me bornerai au cas où l'ensemble T se compose d'un nombre fini de points, on passera ensuite au cas général par un procédé bien connu. Supposons, pour simplifier, que le domaine D où la fonction $F(z)$ est définie soit le plan tout entier et marquons les points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ de l'ensemble T. Formons l'étoile relative aux points A_i, et à un point quelconque O du plan qui n'est pas en ligne droite avec deux des points A, et autour de chaque point A_i comme centre, traçons un cercle de rayon $\frac{1}{n}$; sur le segment de la droite OA_i qui est au delà de A_i, construisons un rectangle, limité par des parallèles à cette droite aux distances $\frac{1}{n}$ et des perpendiculaires, menées aux distances $\frac{2}{n}$ et n du point A_i. Soit enfin, D_n, le domaine connexe, situé à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon n, qui laisse à son extérieur les rectangles précédents et qui est limité par des arcs du cercle de rayon n, des parallèles aux droites OA_i à des distances $\frac{2}{n}$ de ces droites et des demi-cercles de centre A_i et de rayon $\frac{2}{n}$, tournant leur convexité vers O. Il existe un polynome

(¹) Voir LEBESGUE, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. XXVII, mars 1903.

$P_n(z)$, qui dans chaque rectangle et dans D_n diffère, en module, de $F(z)$ de moins de $\frac{1}{n}$, et qui, dans les cercles de centre A_i et de rayon $\frac{1}{n}$, diffère, en module, de moins de $\frac{1}{n}$, des valeurs a_i que prend $F(z)$ en A_i. La suite $P_n(z)$ a pour limite $F(z)$.

Les points A_i peuvent être des points singuliers d'une fonction analytique $F(z)$; on peut alors choisir arbitrairement les valeurs a_i (1).

On a une démonstration analogue à la précédente, lorsque l'ensemble T se distribue sur un ensemble réductible de lignes, il suffit de réunir ces lignes à la frontière du domaine D par des lignes supplémentaires, de manière à obtenir pour l'ensemble E des points irréguliers un ensemble d'un seul tenant avec la frontière. Nous avons un exemple de cette nature au paragraphe 68. En particulier, l'ensemble T peut être constitué par l'ensemble des points singuliers d'une fonction analytique de $F(z)$, on pourra alors se donner arbitrairement les valeurs de $F(z)$ sur les lignes de points singuliers en les choisissant de manière que ces valeurs forment, sur chaque ligne, une fonction de première classe en (x, y). On peut même supposer que l'ensemble T est discontinu, mais placé sur une courbe simple.

75. La plupart des résultats obtenus dans l'étude des suites convergentes de fonctions analytiques s'appliquent aux suites convergentes de fonctions harmoniques d'un nombre quelconque de variables. En particulier, l'ensemble des points irréguliers est parfait, non dense, continu et d'un seul tenant avec la frontière du domaine. Dans chaque domaine, intérieur à celui où la suite converge, on peut en trouver un autre où la convergence est uniforme et où, par conséquent, les suites formées par les dérivées d'ordre quelconque des termes de la première suite convergent aussi uniformément.

Enfin, l'extension est facile des résultats précédents au cas des suites de fonctions de plusieurs variables complexes.

---

(1) Si ces points sont des pôles, on peut déterminer les $P_n(z)$ de manière que leur suite augmente indéfiniment en A_i, il suffit de prendre $|P_n(z)| > n$ dans chacun des cercles de centre A_i et de rayon $\frac{1}{n}$.