

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. LANDAU

Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 24 (1907), p. 179-201

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1907_3_24__179_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES GÉNÉRALISATIONS
DU
THÉORÈME DE M. PICARD,

PAR M. E. LANDAU,

A BERLIN.



En 1904 j'ai démontré ⁽¹⁾ le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Soit une fonction analytique*

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m + \dots,$$

régulière en $x = 0$, pour laquelle

$$a_1 \neq 0.$$

Il existe un cercle

$$|x| < R = R(a_0, a_1),$$

dont le rayon dépend seulement de a_0 et a_1 (et non des autres coefficients $a_2, a_3, \dots, a_m, \dots$), à l'intérieur duquel la fonction $G(x)$ possède un point singulier ou prend au moins une fois l'une des valeurs zéro et un ⁽²⁾.

C'est une généralisation du théorème classique de M. Picard, d'après

⁽¹⁾ *Über eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes (Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, p. 1118-1133).*

⁽²⁾ Il est facile d'introduire dans tous les énoncés deux constantes quelconques a, b (différentes entre elles) au lieu de 0 et 1.

lequel toute fonction entière (qui n'est pas constante) prend au moins une fois l'une des valeurs *zéro* ou *un*.

En 1906 j'ai publié un Mémoire plus étendu ⁽¹⁾; il rend compte des résultats remarquables trouvés récemment par MM. Hurwitz, Schottky et Carathéodory dans le nouvel ordre d'idées indiqué par le théorème I, et il développe certains théorèmes nouveaux. Dans le dernier paragraphe (16), qui ne se rattache que légèrement aux précédents, j'ai démontré, entre autres, ce théorème ⁽²⁾, qui formera le point de départ du travail actuel :

THÉORÈME II. — *Toute équation trinome*

$$a_0 + a_1 x + a_n x^n = 0,$$

où $a_1 \neq 0$ et $n \geq 2$, possède au moins une racine dans un cercle

$$|x| < R = R(a_0, a_1),$$

dont le rayon dépend de a_0 et de a_1 , mais non pas de n et de a_n .

En effet, pour $a_0 = 0$, l'équation possède la racine 0, et pour $a_0 \neq 0$, la substitution

$$x = \frac{a_0}{a_1} y$$

ramène l'équation

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_n x^n = 0$$

à la forme

$$\frac{1}{a_0} F\left(\frac{a_0}{a_1} y\right) = 1 + y + \frac{a_n a_0^{n-1}}{a_1^n} y^n = 0,$$

et j'ai démontré, à l'endroit cité, que l'équation

$$(1) \quad 1 + y + ay^n = 0,$$

où $n \geq 2$, possède au moins une racine qui satisfait à l'inégalité

$$|y| \leq 2.$$

⁽¹⁾ *Über den Picardschen Satz* (Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, t. II, p. 252-318).

⁽²⁾ Théorème XXIX, p. 316.

Quoique la démonstration, qui m'a conduit à cette proposition et que j'ai donnée à l'endroit cité, ne soit longue que de quelques lignes, on peut la simplifier encore. Je profite de cette occasion pour donner une démonstration plus simple, que j'ai apprise par une communication de M. Hurwitz. Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ les racines de (1), rangées suivant l'ordre croissant de leurs modules :

$$|\gamma_1| \leq |\gamma_2| \leq \dots \leq |\gamma_n|.$$

Alors

$$a = \frac{(-1)^n}{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n},$$

donc

$$|1 + \gamma_1| = |-a\gamma_1^n| = \frac{|\gamma_1|^n}{|\gamma_1| \dots |\gamma_n|} = \left| \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right| \dots \left| \frac{\gamma_1}{\gamma_n} \right| \leq 1, 1, \dots, 1 = 1,$$

$$|\gamma_1| = |(1 + \gamma_1) - 1| \leq 1 + 1 = 2.$$

D'autre part, il est bien connu, d'après le théorème de M. Picard, que toute fonction entière et impaire (non identiquement nulle)

$$a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots$$

admet, sans exception, chaque valeur; car elle est égale à zéro pour $x = 0$, et, si elle était, dans tout le plan, différente de a , où $a \neq 0$, elle serait aussi différente partout de $-a$, ce qui est impossible. Ma proposition I fournit, plus précisément, ceci :

THÉORÈME III. — *Toute fonction analytique régulière au point $x = 0$ et impaire*

$$G(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots,$$

pour laquelle $a_1 \neq 0$, est ou bien singulière ou prend la valeur 1 dans un cercle de centre 0 et de rayon $R(a_1)$ ne dépendant que de a_1 et non de a_3, a_5, \dots

Car la fonction

$$\frac{1 + G(x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a_1}{2} x + \dots$$

est, d'après I, singulière, 0 ou 1 dans un cercle $|x| < R$, dont le

rayon ne dépend que de a_1 . $G(x)$ est, dans ce cercle, singulier ou bien égal à ± 1 , donc, dans un certain point de ce cercle, à 1 .

En d'autres termes, la série

$$x + b_1 x^3 + b_2 x^5 + \dots$$

cesse de converger ou prend la valeur 1 dans un cercle de rayon absolument constant.

Comme je l'ai déjà dit, il n'y avait guère de rapport entre le théorème II et les propositions précédentes de mon Mémoire cité. Je viens maintenant de trouver une telle liaison, en établissant un nouveau théorème qui contient en même temps les théorèmes II et III comme cas particuliers.

Avant d'énoncer ce théorème, je vais indiquer comment j'y ai été conduit.

M. Hurwitz fit, dans une lettre, les réflexions suivantes se rattachant au théorème III. Dans les fonctions impaires, l'exposant parcourt la série arithmétique $1, 3, 5, \dots$ ⁽¹⁾, et l'on peut faire un raisonnement pareil avec toute série arithmétique $1, 1 + \nu, 1 + 2\nu, \dots$, où $\nu > 1$. En effet, si ε est une racine $\nu^{\text{ième}}$ de l'unité supposée différente de 1 , la fonction

$$G(x) = a_1 x + a_{1+\nu} x^{1+\nu} + a_{1+2\nu} x^{1+2\nu} + \dots \quad (a_1 \neq 0)$$

satisfait à l'équation fonctionnelle

$$G(\varepsilon x) = \varepsilon G(x);$$

donc, si, pour $|x| < r$, $G(x)$ est régulier et différent de 1 , $G(x)$ est, dans ce cercle, différent de ε ; par conséquent, r est inférieur à un nombre ne dépendant que de ν et a_1 , et non pas de $a_{1+\nu}$, $a_{1+2\nu}$, \dots .

En posant $a_1 = -1$ ⁽²⁾, on voit que la fonction

$$1 + x - a_{1+\nu} x^{1+\nu} - a_{1+2\nu} x^{1+2\nu} - \dots$$

⁽¹⁾ En d'autres termes, les coefficients des autres puissances de x sont supposés égaux à zéro.

⁽²⁾ Cela ne restreint pas la généralité; car on y ramène le cas général en posant

ou, en d'autres termes, la fonction

$$(2) \quad 1 + x + b_1 x^{1+\nu} + b_2 x^{1+2\nu} + \dots$$

a un point singulier ou un zéro dans un cercle $|x| < R$, dont le rayon ne dépend que de ν et est indépendant de b_1, b_2, \dots . L'entier ν était supposé fixe et > 1 ; pour $\nu = 1$, un tel cercle n'existe évidemment pas.

A la suite de cette communication de M. Hurwitz, je trouvai que la fonction (2) possède un point singulier ou un zéro dans un cercle $|x| < R$ de rayon absolument constant, indépendant de b_1, b_2, \dots et de ν . C'est le nouveau théorème auquel j'ai fait allusion à la page 182, et il est évident qu'il contient comme cas particuliers les propositions II et III ⁽¹⁾. Je dis donc :

THÉORÈME IV. — *Il existe une constante absolue γ telle que toute série de puissances*

$$1 + x + b_1 x^{1+\nu} + b_2 x^{1+2\nu} + \dots,$$

où $\nu > 1$, et qui est convergente pour $|x| < \gamma$, possède au moins un zéro dans ce cercle.

Démonstration. — Soit la fonction

$$F(x) = 1 + x + b_1 x^{1+\nu} + b_2 x^{1+2\nu} + \dots,$$

où $\nu > 1$, régulière et différente de 0, pour $|x| < r$. Soit ε une racine $\nu^{\text{ième}}$ de l'unité, que je suppose choisie de telle façon que son argument soit compris entre $\frac{2}{3}\pi$ (inclusivement) et $\frac{4}{3}\pi$ (exclusivement); ce choix est toujours possible, et je suppose que, d'une façon quelconque, on l'ait fait pour tout $\nu > 1$ ⁽²⁾. Comme

$$F(\varepsilon x) = 1 + \varepsilon[F(x) - 1],$$

⁽¹⁾ On pourrait donc dire qu'il contient II et a, avec I, un diviseur commun qui n'est pas trivial.

⁽²⁾ Ceux qui exigent qu'un choix quelconque soit fixé d'une manière univoque, peuvent prendre toujours celle des racines $\nu^{\text{ièmes}}$ de l'unité dont l'argument est $\geq \frac{2}{3}\pi$ et aussi rapproché de $\frac{2}{3}\pi$ que possible.

on aurait, pour $|x| < r$, non seulement

$$F(x) \neq 0,$$

mais aussi

$$F(x) \neq 1 - \varepsilon;$$

d'où

$$\frac{F(x)}{1 - \varepsilon} = \frac{1}{1 - \varepsilon} + \frac{x}{1 - \varepsilon} + \frac{b_1}{1 - \varepsilon} x^{1+\nu} + \dots \neq 0, \quad \neq 1,$$

par conséquent

$$\frac{F[(1 - \varepsilon)x]}{1 - \varepsilon} = \frac{1}{1 - \varepsilon} + x + \dots \neq 0, \quad \neq 1,$$

pour $|x| < \frac{r}{|1 - \varepsilon|}$ et, *a fortiori*, pour $|x| < \frac{r}{2}$ ⁽¹⁾.

Or, si $\varphi(\alpha)$ désigne ⁽²⁾ la limite supérieure du rayon du cercle de centre 0 dans lequel une fonction

$$\alpha + x + \dots$$

peut être régulière, $\neq 0$ et $\neq 1$, l'on sait que, dans tout domaine fini du plan des α , $\varphi(\alpha)$ est inférieur à un nombre fixe. Ceci a été démontré pour la première fois par M. Hurwitz ⁽³⁾, et j'en ai donné une démonstration plus directe ⁽⁴⁾. Or, comme

$$\varepsilon = e^{i\vartheta}, \quad \frac{2\pi}{3} \leq \vartheta < \frac{4\pi}{3},$$

l'on a

$$|1 - \varepsilon| = |1 - \cos \vartheta - i \sin \vartheta| = \sqrt{2 - 2 \cos \vartheta} \geq \sqrt{3},$$

$$\left| \frac{1}{1 - \varepsilon} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

⁽¹⁾ Car $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{|1 - \varepsilon|}$.

⁽²⁾ Mon théorème I prouve que $\varphi(\alpha)$ est fini.

⁽³⁾ Cela résulte du théorème I de son Mémoire *Über die Anwendung der elliptischen Modulfunktionen auf einen Satz der allgemeinen Funktionentheorie* (*Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, t. XLIX, 1904, p. 246). Ce théorème est reproduit comme théorème VII à la page 262 de mon Mémoire de 1906.

⁽⁴⁾ Le fait est contenu dans mon théorème XXII de la page 281 du Mémoire de 1906. D'ailleurs les formules (2) à (7) à la page 1121 de mon Mémoire de 1904 prouvent que, pour tout domaine fini et évitant les points 0 et 1 du plan des α , $\varphi(\alpha)$ est borné, ce qui suffirait pour le but actuel.

Donc, puisque

$$r \leq 2\varphi\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right),$$

r est inférieur à une constante absolue γ , ce qui prouve le théorème IV.

Je désigne par λ la constante exacte dont je viens de démontrer l'existence, savoir la limite supérieure du rayon du cercle ⁽¹⁾, dans lequel

$$1 + x + b_1 x^{1+\nu} + b_2 x^{1+2\nu} + \dots$$

peut être convergent et différent de 0. Ce qui précède, prouve que λ est inférieur ou égal à la limite supérieure ⁽²⁾ de $2\varphi\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)$ et même à celle de $|1-\varepsilon|\varphi\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)$ pour $\varepsilon = e^{\Im i}$, $\frac{2\pi}{3} \leq \Im \leq \frac{4\pi}{3}$. Cela conduit à évaluer numériquement une borne supérieure, qui ne sera pas très élevée.

On n'a qu'à trouver un nombre supérieur à $|1-\varepsilon|\varphi\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)$ pour $\varepsilon = e^{\Im i}$, $\frac{2\pi}{3} \leq \Im \leq \frac{4\pi}{3}$. On a ⁽³⁾

$$\varphi\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) = \frac{1}{|1-\varepsilon|^2} \varphi(1-\varepsilon) = \frac{1}{|1-\varepsilon|^2} \varphi(\varepsilon).$$

Donc

$$\lambda \leq \text{limite supérieure de } \frac{1}{|1-e^{\Im i}|} \varphi(e^{\Im i}) \quad \text{pour} \quad \frac{2\pi}{3} \leq \Im \leq \frac{4\pi}{3}.$$

Or, M. Hurwitz ⁽⁴⁾ a prouvé que

$$(3) \quad \varphi(\alpha) \leq 16 \sqrt[3]{|\alpha|^2} \sqrt{|\alpha-1|}.$$

⁽¹⁾ De centre 0.

⁽²⁾ D'ailleurs cette limite supérieure est atteinte par la fonction continue de \Im en question.

⁽³⁾ D'après les propositions XX et XXI de mon Mémoire de 1906, page 280.

⁽⁴⁾ Voir son théorème I à la page 246 de son Mémoire. Il est vrai que M. Hurwitz n'a, dans l'énoncé et dans la démonstration de son théorème, que la constante 22 (au lieu de 16) au second membre de (3); il dit seulement, dans une note au bas de la page 247, qu'il sait abaisser 22 à 16. En voici une démonstration, un peu différente de celle qu'il a sous-entendue. (Pour l'explication des signes, je renvoie à son Mémoire cité). M. Hurwitz fait, dans son texte, la représentation conforme du demi-plan $\Im(\omega) > 0$ sur le cercle de centre 0

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\varphi(\varepsilon) &\leq 16\sqrt[3]{|\varepsilon|^2}\sqrt{|1-\varepsilon|} = 16\sqrt{|1-\varepsilon|}, \\ \frac{1}{|1-\varepsilon|}\varphi(\varepsilon) &\leq \frac{16}{\sqrt{|1-\varepsilon|}}, \\ \lambda &\leq \frac{16}{\sqrt[4]{3}} < 13.\end{aligned}$$

Voici comment on peut procéder sans l'usage de la relation (3) de

et de rayon 1 par la fonction $e^{\frac{\pi i}{3}\omega}$, ce qui donne, en introduisant $\omega = \omega_0 + c_1 a_1 x + \dots$,

$$\begin{aligned}\left| e^{\frac{\pi i}{3}\omega_0} + e^{\frac{\pi i}{3}\omega_0} \frac{\pi i c_1 a_1}{3} x + \dots \right| &< 1, \\ \left| e^{\frac{\pi i}{3}\omega_0} \frac{\pi i c_1 a_1}{3} r \right| &\leq 1, \\ r &\leq \frac{3}{\pi} \frac{e^{\frac{\pi}{3}\Re(\omega_0)}}{|c_1 a_1|}.\end{aligned}$$

Si, au contraire, on représente le demi-plan sur le cercle par la fonction $\frac{\omega - \omega_0}{\omega - \bar{\omega}_0}$, où $\bar{\omega}_0$ désigne le nombre complexe conjugué à ω_0 , on obtient

$$\begin{aligned}\left| \frac{c_1 a_1}{2\Im(\omega_0)} x + \dots \right| &< 1, \\ \frac{|c_1 a_1|}{2\Im(\omega_0)} r &\leq 1, \\ r &\leq \frac{2\Im(\omega_0)}{|c_1 a_1|};\end{aligned}$$

or, pour $p > 0$, on a

$$p \leq \frac{3}{\pi} e^{\frac{\pi}{3}p-1},$$

d'où

$$r \leq \frac{6}{\pi e} \frac{e^{\frac{\pi}{3}\Re(\omega_0)}}{|c_1 a_1|}.$$

Le second membre de l'inégalité de M. Hurwitz peut donc être multiplié par $\frac{2}{e}$; la constante 21,148 que sa démonstration a fournie (22 n'en était qu'une valeur abrégée) peut donc être remplacée par $\frac{2 \cdot 21,148}{e}$, donc, *a fortiori*, par 16.

M. Hurwitz. $\varphi(\varepsilon)$ est la limite supérieure du rayon relatif à

$$\varepsilon + x + \dots \neq 0, \quad \neq 1.$$

Or, si, pour $|x| < r$,

$$\varepsilon + x + \dots \neq 0, \quad \neq 1,$$

on a

$$\varepsilon + x + \dots = e^{\frac{\vartheta}{\varepsilon} + \frac{x}{\varepsilon} + \dots} = e^{g(x)},$$

où $g(x)$ est une fonction régulière et différente (entre autres valeurs) de 0 et de $2\pi i$ pour $|x| < r$. Comme

$$\frac{g(x)}{2\pi i} = \frac{\vartheta}{2\pi} + \frac{x}{2\pi\varepsilon i} + \dots \neq 0, \quad \neq 1,$$

on a

$$\varphi(\varepsilon) \leq |2\pi\varepsilon i| \varphi\left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right) \leq 2\pi\Phi,$$

où Φ est la limite supérieure de $\varphi(\alpha)$ pour $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3}$, ou, ce qui dit la même chose ⁽¹⁾, pour $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3}$. Or, pour $0 < \alpha < 1$, on a ⁽²⁾

$$\varphi(\alpha) = 2 \frac{\log \frac{1}{\alpha} + \log 16 - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha^n}{\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n \alpha^{n-1}},$$

où les β_n sont positifs et $\beta_1 = \frac{1}{2}$; il en résulte, pour $0 < \alpha < 1$,

$$(4) \quad \varphi(\alpha) < 2 \frac{\log \frac{1}{\alpha} + \log 16 - \frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}} = 4 \frac{\alpha}{\alpha + 2} \left(\log \frac{1}{\alpha} + \log 16 - \frac{1}{2}\alpha \right);$$

⁽¹⁾ En vertu de $\varphi(1-\alpha) = \varphi(\alpha)$.

⁽²⁾ Voir page 299 de mon Mémoire de 1906. C'est une interprétation du théorème de M. Carathéodory, qui a déterminé explicitement la fonction $\varphi(\alpha)$.

le troisième membre de (4) croît avec α , pour $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{2}{3}$; donc

$$\Phi < 4 \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 2} \left(\log \frac{3}{2} + \log 16 - \frac{1}{3} \right) = \log 24 - \frac{1}{3} < 2,85,$$

$$\lambda < \frac{1}{\sqrt{3}} 2\pi \cdot 2,85 < 11.$$

On peut, de même que pour la progression arithmétique $1, 1 + \nu, 1 + 2\nu, \dots$, établir un théorème analogue pour toute progression arithmétique $k, k + \nu, k + 2\nu, \dots$, où k et ν sont des entiers positifs tels que k ne soit pas divisible par ν . En laissant k et ν fixes, je dois la connaissance de ce fait à une communication de M. Hurwitz que je rappellerai tout de suite. Plus tard, je démontrerai l'indépendance de la constante en question de k et de ν .

M. Hurwitz observe que la fonction

$$G(x) = a_k x^k + a_{k+\nu} x^{k+\nu} + a_{k+2\nu} x^{k+2\nu} + \dots$$

satisfait à l'identité

$$G(\varepsilon x) = \varepsilon^k G(x),$$

où ε est une racine $\nu^{\text{ième}}$ quelconque de l'unité. Supposons

$$a_k \neq 0;$$

alors le changement de variable

$$x = \frac{y}{\sqrt[k]{a_k}} \quad (1)$$

ramène l'étude de $G(x)$ à celle de

$$F(x) = x^k + b_1 x^{k+\nu} + b_2 x^{k+2\nu} + \dots,$$

et l'on a

$$F(\varepsilon x) = \varepsilon^k F(x).$$

Soit ε une racine $\nu^{\text{ième}}$ de l'unité telle que

$$\varepsilon^k \neq 1 \quad (2).$$

(1) Où $\sqrt[k]{a_k}$ désigne une valeur quelconque de la racine $k^{\text{ième}}$ de a_k .

(2) Ce choix est possible, puisqu'on suppose que k n'est pas divisible par ν .

Si, pour $|x| < r$, $F(x)$ est régulier et $\neq -1$, $F(x)$ serait $\neq -\varepsilon^k$ dans ce cercle ⁽¹⁾; donc, pour $|x| < r$,

$$\frac{1 + F(x)}{1 - \varepsilon^k} = \frac{1}{1 - \varepsilon^k} + \frac{1}{1 - \varepsilon^k} x^k + \frac{b_1}{1 - \varepsilon^k} x^{k+\nu} + \dots \neq 0, \quad \neq 1.$$

Or, si une série

$$(5) \quad c_0 + c_k x^k + c_{k+1} x^{k+1} + \dots,$$

où $k \geq 1$, $c_k \neq 0$, est convergente, $\neq 0$ et $\neq 1$ pour $|x| < r$, r^k est inférieur à une limite ne dépendant que de c_0 et c_k ⁽²⁾. Cela prouve que la série

$$F(x) = x^k + b_1 x^{k+\nu} + b_2 x^{k+2\nu} + \dots$$

est ou bien divergente ou bien égale à -1 pour un point du cercle $|x| < R$, où R ne dépend que de k et de ν .

M. Hurwitz a même prouvé à l'endroit cité que, dans les hypothèses faites sur la série (5),

$$r \leq \sqrt[k]{\frac{16}{|c_k|}} \sqrt[3]{|c_0|^2} \sqrt{|c_0 - 1|}; \quad (3)$$

il s'ensuit que

$$(6) \quad r \leq \sqrt[k]{16 |1 - \varepsilon^k|} \sqrt[3]{\left| \frac{1}{1 - \varepsilon^k} \right|^2} \sqrt{\left| \frac{\varepsilon^k}{1 - \varepsilon^k} \right|} = \sqrt[k]{\frac{16}{\sqrt[3]{|1 - \varepsilon^k|}}}.$$

A cette remarque de M. Hurwitz, j'ajouterai maintenant le théorème :

THÉORÈME V. — *La série*

$$(7) \quad 1 + x^k + b_1 x^{k+\nu} + b_2 x^{k+2\nu} + \dots,$$

(1) Cela prouve entre autres qu'une fonction entière de la forme

$$a_k x^k + a_{k+\nu} x^{k+\nu} + a_{k+2\nu} x^{k+2\nu} + \dots$$

prend toutes les valeurs, si elle n'est pas identiquement nulle.

(2) Voir Hurwitz, page 246, théorème II, reproduit dans mon travail de 1906 comme théorème VIII, à la page 262. D'ailleurs déjà les deux méthodes de mon Mémoire de 1904 fournissent immédiatement ce théorème.

(3) Dans son texte, il met 22; mais 22 peut être remplacé par 16 au moyen de son raisonnement sous-entendu ou comme à la note 4 de la page 185 du travail actuel.

où k et ν sont des entiers positifs tels que ν ne divise pas k , cesse de converger ou possède une racine dans le cercle $|x| < \gamma$, où γ est une constante absolue, indépendante de b_1, b_2, \dots, k et ν .

Démonstration. — Pour tout couple k, ν , le nombre ε peut être choisi de façon que

$$\varepsilon^\nu = 1$$

et qu'en même temps, l'argument de ε^k soit compris entre $\frac{2}{3}\pi$ (inclusivement) et $\frac{4}{3}\pi$ (exclusivement); car, si ε parcourt les racines $\nu^{\text{ièmes}}$ de l'unité, ε^k parcourt les racines $\mu^{\text{ièmes}}$ de l'unité, où μ est égal au quotient de ν par le plus grand commun diviseur de ν et k , μ étant toujours supérieur à 1. Par conséquent, $\frac{1}{|1 - \varepsilon^k|}$ est inférieur ou égal, en valeur absolue, à un nombre fixe $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ indépendant de k et de ν . D'après (6), on a donc

$$r \leq \sqrt[k]{\frac{16}{\nu \sqrt{|1 - \varepsilon^k|}}} \leq \sqrt[k]{\frac{16}{1^2 \sqrt{3}}} \leq \frac{16}{\sqrt[12]{3}} < 15.$$

On peut abaisser la borne trouvée en considérant que

$$1 - \frac{1 - \varepsilon^k}{1 + F(x)} = \varepsilon^k + (1 - \varepsilon^k)x^k + \dots$$

converge et est différent de 0 et de 1 pour $|x| < r$, d'où

$$r \leq \sqrt[k]{\frac{16}{|1 - \varepsilon^k|} \sqrt[3]{|\varepsilon^k|^2} \sqrt{|-1 + \varepsilon^k|}} = \sqrt[k]{\frac{16}{\sqrt{|1 - \varepsilon^k|}}} \leq \sqrt[k]{\frac{16}{\sqrt[4]{3}}} \leq \frac{16}{\sqrt[4]{3}} < 13.$$

Le théorème qui vient d'être démontré prouve que la limite supérieure du rayon du cercle dans lequel la série (7) peut converger et être différente de 0, est finie. En désignant cette constante finie par Δ , il est facile de démontrer ceci : Δ est la limite supérieure de la valeur absolue du plus petit zéro de tous les polynômes de la forme

$$1 + x^k + b_1 x^{k+\nu} + b_2 x^{k+2\nu} + \dots + b_n x^{k+n\nu}.$$

En effet, si je désigne provisoirement cette limite supérieure par Δ ,

on a d'abord évidemment

$$\Lambda' \leq \Lambda;$$

d'autre part, il existe, $\delta > 0$ étant donné et supposé $< \frac{\Lambda}{2}$, une série de puissances de la forme

$$P(x) = 1 + x^k + b_1 x^{k+\nu} + b_2 x^{k+2\nu} + \dots$$

convergente et différente de 0 pour $|x| < \Lambda - \delta$. Comme cette série est uniformément convergente pour $|x| \leq \Lambda - 2\delta$, il existe un nombre positif p et un entier positif n tels que, pour $|x| \leq \Lambda - 2\delta$,

$$|P(x)| > p$$

et

$$|b_{n+1} x^{k+(n+1)\nu} + b_{n+2} x^{k+(n+2)\nu} + \dots| < p.$$

Il s'ensuit que, pour $|x| \leq \Lambda - 2\delta$,

$$|1 + x^k + b_1 x^{k+\nu} + \dots + b_n x^{k+n\nu}| > p - p = 0,$$

ce qui prouve que

$$\Lambda' \leq \Lambda;$$

on a donc

$$\Lambda' = \Lambda \quad (1).$$

Je vais maintenant, pour les fonctions impaires (correspondant à

(1) Pareillement, pour bien des questions analogues, les polynomes fournissent la même limite supérieure que les fonctions entières et les séries de puissances quelconques. Ainsi le théorème III ne dit rien de plus que cette proposition algébrique, que je ne suis pas en état de démontrer directement :

Tout polynome impair de la forme

$$x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots + a_{2n+1} x^{2n+1}$$

(c'est-à-dire où le coefficient de x égale 1) prend la valeur 1 pour au moins une valeur de x dont le module est inférieur à une constante absolue.

Cela rappelle vaguement (mais très vaguement seulement) une proposition démontrée par Tchélychef (voir par exemple *Oeuvres*, t. I, p. 306), qui est beaucoup moins cachée :

Si l'équation

$$x^{2n+1} + Ax^{2n-1} + \dots + Hx^3 + Jx + 2 = 0$$

ne contient que des puissances impaires de x , elle a au moins une racine entre -2 et 2 .

$k = 1, \nu = 2$) et pour tout autre couple de valeurs fixes k, ν où ν , est > 1 et premier avec k , transformer le problème de déterminer la constante absolue correspondante dans un autre qui est moins difficile à résoudre ⁽¹⁾. J'avais communiqué les remarques suivantes à M. Carathéodory, qui, en se servant de méthodes analogues à celles de sa Note précédente, réussit à résoudre le problème transformé de déterminer la constante $\sigma = \sigma(k, \nu)$ du théorème VI qui va suivre; il compte publier prochainement ⁽²⁾ sa solution, au bout de laquelle il est même parvenu à déterminer mes constantes λ et Λ des pages 185 et 190.

Voici ma transformation :

THÉORÈME VI. — Soit $\rho = \rho(k, \nu)$ la limite supérieure des rayons r tels que la série

$$1 + x^k + b_1 x^{k+\nu} + b_2 x^{k+2\nu} + \dots,$$

où k et $\nu > 1$ sont fixes et premiers entre eux, puisse être convergente et différente de 0 pour $|x| < r$. Soit $\sigma = \sigma(k, \nu)$ la limite supérieure des nombres r tels que la série

$$x^k + b_1 x^{k+1} + b_2 x^{k+2} + \dots$$

puisse être convergente et différente de $(-1)^\nu$ pour $|x| < r$ et n'avoir que des zéros d'ordre divisible par ν pour $0 < |x| < r$. On a alors

$$\rho = \sqrt[\nu]{\sigma}.$$

ρ est certainement fini d'après les développements des pages 188-189 et le fait que σ est fini sera démontré par le théorème VI même ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Le cas général, où k et ν ont le plus grand commun diviseur d (supposé différent de ν) se ramène immédiatement au cas traité dans le texte en posant $x^d = y$. La constante cherchée est la $d^{\text{ième}}$ racine de la constante correspondant aux deux nombres $\frac{k}{d}$ et $\frac{\nu}{d}$ premiers entre eux.

⁽²⁾ Dans les *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences à Paris*.

⁽³⁾ Le nombre σ serait naturellement le même en mettant 1 au lieu de $(-1)^\nu$ dans l'énoncé précédent. La seconde partie de la démonstration montre que σ est fini aussi dans le cas $1 < d < \nu$.

Démonstration. — 1° Soit, pour $|x| < r$, la fonction

$$f(x) = x^k + b_1 x^{k+\nu} + b_2 x^{k+2\nu} + \dots$$

régulière et $\neq -1$. On a, pour $|x| < r$,

$$[f(x)]^\nu = x^{k\nu} (1 + b_1 x^\nu + \dots)^\nu$$

régulier et différent de $(-1)^\nu$. Car autrement, on aurait, dans un certain point de ce cercle,

$$f(x_0) = -\bar{\varepsilon},$$

où

$$\bar{\varepsilon}^\nu = 1,$$

ce qui est en contradiction avec l'identité

$$f(\varepsilon x_0) = \varepsilon^k f(x_0) \quad (\text{pour } \varepsilon^\nu = 1);$$

en effet, puisque k et ν sont premiers entre eux, $\bar{\varepsilon}$ est de la forme ε^{-k} , ε étant une racine $\nu^{\text{ième}}$ convenablement choisie de l'unité, et l'on aurait

$$f(\varepsilon x_0) = -1.$$

En posant $x^\nu = y$,

$$[f(x)]^\nu = y^k (1 + b_1 y + \dots)^\nu = y^k + a_1 y^{k+1} + \dots;$$

cette fonction $g(y)$ est régulière et différente de $(-1)^\nu$ pour $|y| < r^\nu$ et n'a, pour $0 < |y| < r^\nu$, que des zéros d'un ordre de multiplicité divisible par ν . Cela prouve que

$$\rho \leq \sigma^{\frac{1}{\nu}}.$$

2° Soit, pour $|y| < s$, la fonction

$$g(y) = y^k + a_1 y^{k+1} + \dots$$

régulière, $\neq (-1)^\nu$, et n'ayant (abstraction faite du point $y = 0$) que des zéros d'ordre divisible par ν . Alors

$$g(x^\nu) = x^{k\nu} (1 + a_1 x^\nu + \dots)$$

est régulier et $\neq (-1)^v$ pour $|x| < s^{\frac{1}{v}}$ et n'a, pour $|x| < s^{\frac{1}{v}}$ (y compris le point $x = 0$), que des racines d'ordre divisible par v . Donc

$$\sqrt[v]{g(x^v)} = f(x) = x^k + b_1 x^{k+v} + b_2 x^{k+2v} + \dots$$

est régulier et différent de -1 pour $|x| < s^{\frac{1}{v}}$, ce qui entraîne

$$\sigma^{\frac{1}{v}} \leq \rho.$$

Par conséquent

$$\rho = \sqrt[v]{\sigma}.$$

Comme je l'ai déjà dit, M. Carathéodory va publier la détermination de $\sigma(k, v)$ qui fournit, en vertu de VI, celle de $\rho(k, v)$. Ainsi, pour le cas particulier $k = 1$, $v = 2$, il a trouvé le résultat suivant :

La limite supérieure du rayon r du cercle $|x| < r$ dans lequel une fonction impaire

$$x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots$$

peut être régulière et différente de -1 , a pour valeur $2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)^{(1)}$, où $\varphi(\alpha)$ est la fonction que M. Carathéodory avait déterminée dans sa Note de 1905.

Après avoir appris par M. Carathéodory que

$$\rho(1, 2) = 2\varphi\left(\frac{1}{2}\right),$$

j'en ai trouvé la démonstration directe suivante :

1° Soit, pour $|x| < r$, la série

$$F(x) = 1 + x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots$$

(1) D'ailleurs, d'après une remarque de M. Hartogs que j'ai citée à la page 274 de mon travail de 1906,

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8\pi^2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right]^4 = 2,18 \dots$$

convergente et $\neq 0$; elle y sera également $\neq 2$, d'où

$$\frac{F(x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{a_3}{2}x^3 + \frac{a_5}{2}x^5 + \dots \neq 0, \quad \neq 1,$$

$$r \leq 2\varphi\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\rho(1, 2) \leq 2\varphi\left(\frac{1}{2}\right).$$

2° La fonction

$$F(x) = 2\lambda \left\{ i \frac{1 - \frac{x}{2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}}{1 + \frac{x}{2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}} \right\},$$

où λ est pris dans l'acception des pages 257 et 270 de mon Mémoire cité, est régulière, $\neq 0$ et $\neq 2$ pour $|x| < 2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$; de plus, dans le développement

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

on a

$$a_0 = 2\lambda(i) = 1,$$

$$a_1 = 2\lambda'(i) \frac{-i}{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\lambda'(i) \frac{-i}{2 \left| \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) \right|}$$

$$= -i\lambda'(i) \left| \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) \right| = -i\lambda'(i) i \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda'(i) \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = 1;$$

enfin, ce qui est l'essentiel, en vertu de l'identité connue

$$\lambda(y) + \lambda\left(-\frac{1}{y}\right) = 1,$$

l'on a

$$F(x) + F(-x) = 2\lambda \left\{ i \frac{1 - \frac{x}{2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}}{1 + \frac{x}{2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}} \right\} + 2\lambda \left\{ i \frac{1 + \frac{x}{2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}}{1 - \frac{x}{2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}} \right\} = 2,$$

ce qui prouve que $F(x)$ ne contient, abstraction faite du terme constant, que des puissances de x à exposant impair; cela entraîne

$$\rho(1, 2) \geq 2 \varphi\left(\frac{1}{2}\right),$$

donc

$$\rho(1, 2) = 2 \varphi\left(\frac{1}{2}\right).$$

J'arrive maintenant à une proposition d'une autre nature que celles qui précèdent, mais qui fait aussi suite à ma généralisation I du théorème de M. Picard. La fonction $\varphi(\alpha)$ satisfait aux relations (1) faciles à démontrer

$$\varphi(1 - \alpha) = \varphi(\alpha),$$

$$\varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{|\alpha|^2} \varphi(\alpha).$$

L'ensemble des valeurs dérivant de α par la composition de ces deux transformations est, comme l'on sait, fini. Voici maintenant une équation fonctionnelle pour $\varphi(\alpha)$ donnant lieu à un ensemble infini :

$$(8) \quad \varphi(\alpha^2) = \frac{|\alpha| |1 + \alpha|^2}{2 |1 - \alpha|} \varphi\left[\frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}\right].$$

J'y suis parvenu en partant de la formule de M. Carathéodory, qui, selon M. Hartogs (2), peut s'écrire

$$(9) \quad \varphi(\alpha) = \frac{8}{\pi} |K|^2 \Re\left(\frac{K'}{K}\right) |\alpha| |1 - \alpha|,$$

où

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\alpha t^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)[1-(1-\alpha)t^2]}},$$

En appliquant à (9) des propriétés connues des intégrales elliptiques, je suis arrivé à (8). Après avoir découvert cette équation fonc-

(1) Voir la page 280 de mon Mémoire de 1906.

(2) Voir la page 274 du même Mémoire.

tionnelle de la façon indiquée, j'ai pu construire une démonstration directe, qui me semble présenter quelque intérêt et que voici :

La fonction algébrique

$$z = \frac{4\sqrt{y}}{(1+\sqrt{y})^2} = \Phi(y)$$

et son inverse

$$y = \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2}{z}\sqrt{1-z}\right)^2 = \Psi(z)$$

possèdent toutes les deux la propriété d'être régulières et différentes de 0 et de 1 pour toute valeur finie de la variable qui est différente de 0 et de 1. Si maintenant la fonction

$$G(x) = \alpha + x + \dots$$

est régulière, $\neq 0$ et $\neq 1$ pour $|x| < r$, il en est de même de

$$F(x) = \Phi[G(x)] = \Phi(\alpha) + \Phi'(\alpha)x + \dots$$

et inversement : si

$$F(x) = \Phi(\alpha) + \Phi'(\alpha)x + \dots$$

est régulier, $\neq 0$ et $\neq 1$ pour $|x| < r$, il en est de même de

$$\Psi[F(x)] = \Psi[\Phi(\alpha)] + \Psi'[\Phi(\alpha)]\Phi'(\alpha)x + \dots = \alpha + x + \dots$$

Donc

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{|\Phi'(\alpha)|} \varphi[\Phi(\alpha)] = \frac{|\sqrt{\alpha}| |1+\sqrt{\alpha}|^3}{2|1-\sqrt{\alpha}|} \varphi\left[\frac{4\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\right],$$

et, en remplaçant α par α^2 , on obtient l'égalité (8), qu'il fallait démontrer.

Par exemple, pour $\alpha = 3$,

$$\varphi(9) = 48 \varphi\left(\frac{3}{4}\right) = 48 \varphi\left(\frac{1}{4}\right) = 48 \frac{1}{16} \varphi(4) = 3 \varphi(4).$$

Je reviens au point de départ du travail actuel. C'était ma proposition sur l'équation trinôme

$$1 + x + ax^n = 0.$$

Je rappelle que dans mon travail de 1906 ⁽¹⁾ j'ai démontré aussi que l'équation quadrinome

$$1 + x + bx^m + ax^n = 0 \quad (1 < m < n)$$

possède une racine dans un cercle de rayon constant ⁽²⁾, à savoir pour

$$|x| \leq 8.$$

On peut se demander maintenant si une proposition pareille subsiste pour l'équation quinine

$$1 + x + cx^l + bx^m + ax^n = 0 \quad (1 < l < m < n),$$

et généralement pour l'équation k -nome

$$1 + x + a_1 x^{n_1} + \dots + a_k x^{n_k} = 0 \quad (1 < n_1 < \dots < n_k),$$

où k est un nombre fixe, donné d'avance. Je ne mentionne cette question que pour dire que je n'en connais pas la réponse et pour diriger l'attention des lecteurs sur ce problème. Je crois que sa solution est beaucoup plus facile que celle du problème algébrique mentionné à la fin de mon travail précédent ⁽³⁾.

Je ne possède même pas une démonstration du théorème sur l'équation quadrinome qui soit aussi simple et aussi algébrique que celle de M. Hurwitz pour l'équation trinome; en outre, je ne possède pas la détermination de la véritable constante pour l'équation quadrinome ⁽⁴⁾. Je ne ferai qu'abaisser un peu plus la borne 8, pour familiariser le lecteur avec ce genre de réflexions et avec la méthode qui m'avait conduit au théorème et que je veux maintenant pousser jus-

⁽¹⁾ Voir pages 317-318, théorème XXX.

⁽²⁾ En d'autres termes, l'équation $a_0 + a_1 x + a_m x^m + a_n x^n = 0$, où $a_1 \neq 0$, possède une racine dont la valeur absolue est inférieure à un nombre indépendant de m, n, a_m, a_n . Sans restreindre la généralité, on peut supposer $a_0 = 1, a_1 = 1$.

⁽³⁾ Voir page 318.

⁽⁴⁾ Pour l'équation trinome, la véritable constante est 2; car elle est ≤ 2 d'après mon théorème antérieur et l'équation $1 + x + \frac{x^2}{4} = 0$ a ses racines égales à -2 .

qu'à sa dernière conséquence, en laissant ouverte la question quant à la véritable constante ⁽¹⁾. D'ailleurs, M. Hurwitz m'avait indiqué, dans une lettre, que ma méthode fournit facilement le nombre 6 (au lieu de 8), et que 6 n'est certainement pas la véritable constante.

Soit α le minimum de la fonction

$$(10) \quad R(\eta) = \frac{1 + 2\eta^2 + \eta^3}{\eta(1 - \eta)}$$

pour $0 < \eta < 1$. (On a ⁽²⁾ $\alpha < 5\frac{2}{3}$, valeur de la fonction $R(\eta)$ correspondant à $\eta = \frac{1}{3}$). Je dis que l'équation

$$(11) \quad 1 + x + bx^m + ax^n = 0 \quad (1 < m < n)$$

a une racine dont le module est $\leq \alpha$.

Démonstration. — 1° Soit

$$|\alpha| \geq \frac{1}{\alpha^n}.$$

Si x_1, \dots, x_n sont les racines de (11), on a

$$|x_1 \dots x_n| = \frac{1}{|a|} \leq \alpha^n;$$

donc, au moins pour un ν ,

$$|x_\nu| \leq \alpha.$$

2° Soit

$$|\alpha| < \frac{1}{\alpha^n}, \quad |b| \geq \frac{2 + \alpha}{\alpha^m}.$$

Alors, pour $|x| = \alpha$,

$$|1 + x + ax^n| < 1 + \alpha + 1 = 2 + \alpha \leq |bx^m|$$

(1) Celle-ci est certainement ≥ 3 , car l'équation quadrimembre $1 + x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27} = 0$ a ses racines égales à -3 .

(2) D'ailleurs le minimum correspond à $\eta_0 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5} - \sqrt{2 + 2\sqrt{5}})$.

D'après un théorème de Rouché ⁽¹⁾, si deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont régulières à l'intérieur d'une courbe fermée et sur cette courbe, et si, sur la courbe,

$$|g(x)| < |f(x)|,$$

les deux équations

$$f(x) = 0$$

et

$$f(x) + g(x) = 0$$

ont, à l'intérieur, le même nombre de racines. En posant

$$1 + x + ax^n = g(x), \quad bx^m = f(x),$$

et en appliquant le théorème de Rouché à la circonférence $|x| = \alpha$, on voit que l'équation

$$f(x) + g(x) = 1 + x + bx^m + ax^n = 0$$

a, pour $|x| < \alpha$, m racines.

3° Soit

$$|a| < \frac{1}{\alpha^n}, \quad |b| < \frac{2 + \alpha}{\alpha^m}.$$

Si η_0 désigne le nombre qui fournit le minimum α de la fonction (10) dans l'intervalle $0 \dots 1$, je considère la circonférence $|x| = \eta_0 \alpha$; sur elle, on a

$$|1 + bx^m + ax^n| < 1 + (2 + \alpha)\eta_0^m + \eta_0^n \leq 1 + (2 + \alpha)\eta_0^2 + \eta_0^3 = \eta_0 \alpha = |x|.$$

(Car

$$\alpha = \frac{1 + 2\eta_0^2 + \eta_0^3}{\eta_0 - \eta_0^2}.)$$

Donc, en vertu du théorème de Rouché, l'équation quadrimembre

⁽¹⁾ *Mémoire sur la série de Lagrange* [Journal de l'École Polytechnique, t. XXII (cahier 39), 1862, p. 217-218.]

donnée α , pour $|x| < \eta_0 \alpha$, autant de racines que l'équation

$$x = 0;$$

elle a donc, pour $|x| \leq \alpha$, au moins une racine, et l'assertion de la page 199 est démontrée dans tous les cas.

On peut encore diminuer α par la réflexion suivante. Pour $n = 4$ et $n = 5$, au moins une racine satisfait à l'inégalité

$$|x_v| \leq 5,$$

puisque

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} = -1.$$

Pour $n \geq 6$, α peut être remplacé, dans la démonstration précédente, par le plus petit nombre β pour lequel l'égalité

$$1 + (2 + \beta)\eta^2 + \eta^6 = \eta\beta$$

a une racine η entre 0 et 1; en d'autres termes, pour $n \geq 6$, α peut être remplacé par le minimum β de

$$\frac{1 + 2\eta^2 + \eta^6}{\eta(1 - \eta)}$$

dans l'intervalle $0 < \eta < 1$. Ce nombre β étant > 5 , on a, dans tous les cas ⁽¹⁾, pour une racine au moins,

$$|x_v| \leq \beta.$$

(1) Aussi dans les cas $n = 4$ et $n = 5$.

Berlin, le 22 janvier 1907.