Émile Borel

Sur les principes de la théorie cinétique des gaz

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 23 (1906), p. 9-32
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__9_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR LES PRINCIPES

DE LA

THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ,

PAR M. ÉMILE BOREL.

La théorie cinétique des gaz et ses applications et extensions diverses sont encore loin d'être acceptées sans difficulté par tous. En particulier, les applications du calcul des probabilités aux calculs statistiques concernant les molécules excitent beaucoup de défiance chez certains esprits. Bien peu sans doute en sont restés à la boutade de Joseph Bertrand, disant que ces problèmes de probabilité ressemblent au problème célèbre de l'*âge du capitaine*, qu'on propose de déterminer, connaissant la hauteur du grand mât. Mais, sans aller jusque-là, on doit reconnaître que l'énoncé même des problèmes manque souvent de précision et que les déductions par lesquelles on arrive à la solution manquent parfois de rigueur.

En faisant cette constatation, je tiens à dire qu'elle ne diminue en aucune manière mon admiration pour les créateurs de la théorie. La route était difficile et ils ont eu raison de ne point s'attarder aux premiers obstacles; le plus pressé était d'arriver à des résultats susceptibles de vérification expérimentale; ces résultats sont un encouragement à persévérer dans la voie ouverte par Maxwell.

Mais cette vérification en quelque sorte *a posteriori* ne satisfait pas tous les esprits et il ne me paraît pas inutile de reprendre les principes de cette théorie cinétique pour chercher à lui donner une base rigoureuse au point de vue mathématique.

Cette tentative n'a pas grand intérêt pour les adeptes convaincus; ils vont de l'avant avec succès; ils perdraient leur temps en retournant en arrière, et je serai le premier à le leur déconseiller.

Aussi c'est à ceux qui jusqu'ici ont plus ou moins partagé sur la théorie cinétique des gaz l'opinion de Joseph Bertrand que je voudrais m'adresser. Leurs scrupules sont légitimes à certains égards : on ne peut reprocher à un mathématicien son amour de la rigueur; mais il ne me paraît pas impossible de les satisfaire.

Tel est le but des pages qui suivent : elles ne font faire aucun progrès *réel* à la théorie, au point de vue du physicien; mais elles auront peut-être pour résultat de convaincre quelques mathématiciens de son intérêt et, en augmentant le nombre des chercheurs, contribueront peut-être indirectement à son développement. S'il en est ainsi, elles n'auront pas été inutiles, indépendamment de l'intérêt esthétique qui s'attache à toute construction logique.

I.

Il me paraît d'abord nécessaire de préciser la notion même de probabilité, qui joue un si grand rôle dans la théorie cinétique. Dans ce but, je vais étudier avec quelque détail un problème simple de probabilités; je m'excuse d'avance de la longueur de ces préliminaires : ils m'ont paru indispensables à la clarté.

Considérons un cercle C sur lequel est marqué un point fixe O; à chaque petite planète nous faisons correspondre un point P, qui se meut sur le cercle C suivant la loi suivante : lorsque la petite planète passe en un point déterminé (1) A de son orbite, le point qui la repré-

(1) Nous laissons de côté les difficultés relatives à la fixation du point A; elles sont de même nature que celles qui sont examinées plus loin (p. 25). Pour fixer les idées, on peut imaginer un demi-plan fixe passant par le centre du Soleil et coupant chaque orbite en un seul point, qui sera le point A.

sente passe en O; il se meut sur le cercle d'un mouvement uniforme dans le sens positif.

Nous avons ainsi sur le cercle C des points P qui se meuvent tous dans le même sens et dont le nombre n est égal au nombre des petites planètes actuellement connues (¹). Soient C_1 et C_2 les deux demi-circonférences séparées par le diamètre de C qui passe en O; nous nous posons la question suivante :

Problème A. — *Quelle est la probabilité pour qu'au 1er janvier 1907 tous les points* P *soient sur le demi-cercle* C_1 ?

Nous devons nous poser une question préalable : l'énoncé du problème A a-t-il un sens (²)? Il est clair que, si nous possédons un annuaire donnant effectivement les longitudes des petites planètes à l'époque indiquée, nous saurons si les points P sont ou ne sont pas sur le demi-cercle C_1; si nous constatons, par exemple, qu'ils n'y sont pas tous, nous devrons dire que la probabilité est égale à *zéro*; s'ils y étaient tous, elle serait égale à *un*, et ce sont les deux seules hypothèses possibles. Ainsi considéré, le problème n'a guère d'intérêt, et son énoncé est peu correct, car il n'est guère raisonnable de parler de probabilités lorsque l'on possède la certitude.

Mais on peut se placer à un point de vue différent et poser le problème A sans donner aucune donnée numérique relative aux petites planètes. On sait seulement quel est leur nombre et que les durées de leurs révolutions sont toutes différentes entre elles, bien que comprises entre des limites assez rapprochées. Dans ces conditions, le problème A doit-il être regardé comme ayant un sens? Il ne me semble pas; ce n'est qu'en vertu d'une *convention* que l'on pourra lui en donner un. Une probabilité, en effet, est une quantité d'une nature particulière, qui ne peut être exprimée qu'au moyen de quantités de

(¹) Le problème se poserait sous une forme un peu différente si l'on faisait intervenir aussi les petites planètes qui seront découvertes d'ici au 1er janvier 1920, par exemple, ou encore toutes les petites planètes à découvrir.

(²) *Voir* dans Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, le Chapitre sur le calcul des probabilités. Je ne puis citer à chaque instant ces pages suggestives, dont la lecture m'a été fort utile. Sur plusieurs points, d'ailleurs, j'adopte un point de vue très différent de celui de M. Poincaré.

même nature préalablement connues. Lorsque l'on demande quelle est la probabilité d'un coup de dés déterminé, on fait l'hypothèse que, pour chaque dé, la probabilité de chaque face est la même et que les divers dés sont indépendants. On pourrait être amené, par analogie, à compléter l'énoncé du problème A en ajoutant : 1° que, pour chaque point P, la probabilité d'être sur C_1 est égale à la probabilité d'être sur C_2; 2° que les probabilités relatives aux divers points P sont indépendantes. Or, si la première convention paraîtra sans doute naturelle à tous, la seconde paraîtra arbitraire à beaucoup. En adoptant ces conventions, la solution du problème A est visiblement $\frac{1}{2^n}$. C'est à ce même résultat que nous aboutirons par une autre voie, ce qui montrera l'équivalence de la convention que nous adopterons avec les précédentes, en ce qui concerne le problème A.

Étudions auparavant une forme un peu différente de ce problème.

PROBLÈME A'. — *Dans l'énoncé du problème* A, *on remplace l'époque du* 1er *janvier* 1907 *par une époque antérieure* (*ou postérieure*) *de* 1000 *ans.*

Cet énoncé est moins fictif que A, car les positions des petites planètes il y a 1000 ans (ou dans 1000 ans) sont moins bien connues que les positions actuelles; on conçoit donc qu'il soit plus naturel de se poser à leur égard une question de probabilités : deux astronomes pourraient vouloir engager un pari sur la question qui fait l'objet de l'énoncé A'; ils feraient ensuite les calculs nécessaires pour pouvoir régler ce pari.

Mais la différence essentielle entre A et A', c'est que, pour A, nous sommes obligés ou de supposer une connaissance complète de la situation des petites planètes, ce qui supprime le problème, ou de supposer une ignorance complète, ce qui exige une convention supplémentaire en partie arbitraire. Au contraire, pour A', nous pouvons supposer connus les éléments actuels des petites planètes et demander que l'on réponde sans faire les calculs qui donneraient leurs longitudes dans 1000 ans (ou il y a 1000 ans). Toutefois cette différence est plus apparente que réelle, car on pourrait concevoir un calculateur assez habile pour, à la seule inspection des éléments actuels, calculer les éléments à l'époque indiquée dans l'énoncé de A'; pour ce calculateur, A' ne diffère pas de A.

Nous sommes ainsi conduits à envisager le problème suivant :

PROBLÈME B. — *Quelle est la probabilité pour que les points* P *soient tous sur* C_1 *à une époque t comprise dans un intervalle donné de* 2000 *ans, par exemple entre le* 1^er^ *janvier* 907 *et le* 1^er^ *janvier* 2907; *cette époque t sera déterminée par le sort, de telle manière qu'il y ait des probabilités égales à ce que t soit compris dans deux intervalles de temps égaux quelconques.*

Si nous écartons d'abord l'hypothèse où nous aurions le temps de faire tous les calculs nécessaires à la solution exacte de ce problème B, nous apercevons cependant des cas où la réponse à donner ne sera pas $\frac{1}{2^n}$. Si, par exemple, deux petites planètes ont actuellement [1] des moyens mouvements égaux et des longitudes différant de 180°, il est clair que les points P correspondants ne seront pas simultanément sur C_1; la probabilité demandée est donc *zéro*. Si, au contraire, deux petites planètes ont des moyens mouvements égaux et des longitudes égales, pour que l'une soit sur C_1, il faut et il suffit que l'autre y soit; tout se passe donc comme s'il y avait une petite planète de moins, ce qui conduit à répondre $\frac{1}{2^{n-1}}$ au lieu de $\frac{1}{2^n}$.

Mais la réponse à faire au problème B pourra être bien différente si l'on fait effectivement le calcul des positions des points P dans l'intervalle donné. Il arrivera peut-être [2] que, dans un intervalle de temps déterminé, de 2543 secondes par exemple, les points P seront tous sur C_1; si l'on désigne par N le nombre de secondes contenu dans l'intervalle de temps de 2000 ans visé dans l'énoncé, la réponse

---

[1] En fait, il n'existe pas actuellement deux telles petites planètes; mais on peut en découvrir demain, ce qui suffit à mon raisonnement. On ne peut, en effet, répondre : *cela est peu probable,* comme on le ferait si nous discutions le problème A; nous supposons ici que l'on sait effectivement *ce qui est.*

[2] Sans avoir fait le calcul, je crois pouvoir affirmer que cette circonstance hypothétique ne se présente pas effectivement pour le problème B ici posé; mais elle se présenterait sans doute si, dans l'énoncé de B, on remplaçait la demi-circonférence C_1 par un arc déterminé de 355° de la circonférence C.

est visiblement $\frac{2543}{N}$, car telle est la probabilité pour que l'époque t soit comprise dans l'intervalle favorable.

Si l'on se plaçait à un point de vue purement abstrait, on serait conduit à généraliser ainsi l'énoncé B :

Problème B'. — *On considère un certain nombre de points Q qui se meuvent sur un même cercle d'un mouvement uniforme; connaissant exactement les positions initiales et les vitesses, calculer la probabilité pour que ces points soient tous sur un arc donné à une époque t choisie arbitrairement dans un intervalle donné* (a, b).

Cette probabilité tend-elle vers une limite lorsque l'intervalle a, b *grandit indéfiniment? Quelle est, dans ce cas, cette limite?*

Nous ne discuterons pas ces questions qui n'ont aucun intérêt concret; nous signalons seulement le problème B' à titre de curiosité arithmétique, car sa discussion est, à ce point de vue, intéressante et conduit à des résultats inattendus.

Mais l'intérêt de cette discussion réside dans les propriétés *arithmétiques* des rapports des vitesses; or, pratiquement, ces propriétés arithmétiques n'ont aucune existence, car cela n'a aucun sens de dire que deux nombres connus expérimentalement ont un rapport commensurable ou incommensurable. Aussi le problème B' est-il sans intérêt réel; énonçons le problème correspondant en restant dans la réalité :

Problème B''. — *Que devient la probabilité qui fait l'objet de* B *lorsque l'intervalle de temps considéré grandit indéfiniment?*

La grande différence qu'il y a entre B' et B'', c'est que dans B' les vitesses et les positions initiales des points Q sont supposées connues *exactement;* tandis que, dans B'', les vitesses et les positions initiales des points P sont connues seulement à une certaine approximation; de plus les vitesses varient avec le temps suivant une loi imparfaitement connue. Aussi l'énoncé B'' est-il insuffisant; nous allons chercher à le compléter.

Nous ferons, pour abréger, quelques hypothèses dont le lecteur se rendra compte aisément qu'elles ne sont pas essentielles; nous supposerons d'abord les moyens mouvements constants; nous supposerons de plus que l'on connaît pour chacun d'eux un intervalle $a-\varepsilon$, $a+\varepsilon$ dans lequel il est compris, et que toutes les valeurs de cet intervalle sont *également probables*. Cette dernière hypothèse étant entièrement arbitraire, j'insiste sur le point qu'elle n'est pas essentielle; on pourrait supposer, en imitant un calcul de M. Poincaré, que la probabilité pour que le moyen mouvement soit compris entre $a+\theta\varepsilon$ et $a+(\theta+d\theta)\varepsilon$ est de la forme $\varphi(\theta)\,d\theta$, $\varphi(\theta)$ étant une fonction continue positive quelconque, sensiblement nulle pour $|\theta|>1$ et telle que l'on ait

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\theta)\,d\theta=1.$$

Nous prenons pour $\varphi(\theta)$ une fonction discontinue :

$$\begin{aligned}\varphi(\theta)&=\tfrac{1}{2} &&\text{pour}\quad |\theta|<1,\\ \varphi(\theta)&=0 &&\text{pour}\quad |\theta|>1.\end{aligned}$$

Dès lors, au lieu de B″, nous aurons l'énoncé suivant :

Problème C. — *Connaissant à ε près les moyens mouvements des n petites planètes et connaissant exactement* [1] *leurs positions initiales, on désigne par ϖ la probabilité pour qu'à une époque t choisie arbitrairement dans un intervalle a, b tous les points P correspondants soient sur C_1. Quelle est la limite vers laquelle tend ϖ lorsque l'intervalle a, b augmente indéfiniment ?*

La probabilité inconnue se calculera au moyen de probabilités élémentaires supposées connues : 1° la probabilité pour qu'un moyen mouvement ait une valeur déterminée entre $a-\varepsilon$ et $a+\varepsilon$; nous en avons déjà parlé; 2° la probabilité pour que t ait une valeur déterminée comprise entre a et b; nous supposons que la probabilité pour que t soit compris entre c et d est $\frac{d-c}{b-a}$, quels que soient c et d compris entre a et b.

[1] Cette connaissance exacte des positions initiales est encore une hypothèse simplificatrice non essentielle.

Le problème C a maintenant un sens mathématique parfaitement net; il est d'ailleurs aisé de voir que la probabilité limite demandée est $\frac{1}{2^n}$. Le moyen le plus simple pour arriver à ce résultat me paraît être une représentation géométrique dans l'espace à n dimensions que je vais exposer d'abord en supposant, pour plus de clarté, $n = 2$.

Nous désignerons d'une manière générale par $2\pi a_i$ la valeur initiale de l'arc OP_i et par $2\pi b'_i$ la vitesse angulaire du point P_i; la valeur de l'arc OP_i à l'époque t est ainsi $2\pi(a_i + b'_i t)$. Pour que P_i soit sur l'arc C_1 il faut et il suffit que $a_i + b'_i t$ soit compris entre k_i et $k_i + \frac{1}{2}$, k étant un nombre entier quelconque. Nous supposons que l'on a

$$b_i - \varepsilon_i < b'_i < b_i + \varepsilon_i;$$

la vitesse angulaire probable est $2\pi b_i$, à $2\pi\varepsilon_i$ près.

Nous poserons :

$$x_i = a_i + b'_i t$$

et nous supposerons que les x_i sont les coordonnées d'un point ξ dans l'espace à n dimensions.

Considérons, dans cet espace, le solide H limité par les plans

$$x_i = k_i; \qquad x_i = k_i + \frac{1}{2},$$

en désignant par $k_1, k_2, \ldots, k_n$, n nombres entiers quelconques. Pour que tous les points P_i soient sur C, il faut et il suffit que le point ξ soit à l'intérieur de l'un des solides H.

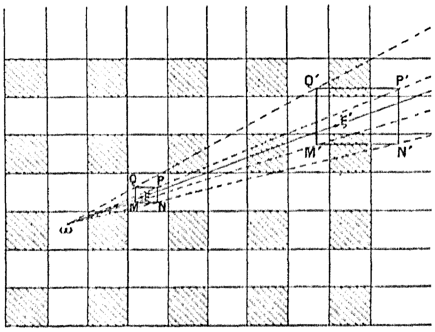
Faisons la figure en supposant $n = 2$; les solides H se réduisent alors à des carrés, que nous couvrons de hachures. Soit ω le point de coordonnées a_1, a_2 et MNPQ le rectangle dont les côtés ont pour équations

$$x_1 = a_1 + b_1 \pm \varepsilon_1,$$
$$x_2 = a_2 + b_2 \pm \varepsilon_2.$$

A l'époque $t = 1$, le point ξ occupe une certaine position à l'intérieur du rectangle MNPQ et, d'après nos hypothèses, toutes les positions y sont également probables, en ce sens que la probabilité pour que ξ se trouve dans une aire d'étendue S est proportionnelle à S.

Soit $M'N'P'Q'$ le rectangle homothétique de $MNPQ$ dans un certain rapport t, le centre d'homothétie étant ω; il est clair que le point ξ' qui correspond à l'époque t est l'homothétique de ξ par rapport à ω; il occupe donc dans le rectangle $M'N'P'Q'$ la même position que ξ

Fig. 1.



dans $MNPQ$. Par suite, la probabilité pour que ξ' soit dans une certaine aire S' située dans $M'N'P'Q'$ est proportionnelle à S'. Or, lorsque t est très grand, le rectangle $M'N'P'Q'$ est très grand par rapport aux dimensions des carrés; on en conclut aisément que le rapport de la somme des aires des carrés couverts de hachures situés à l'intérieur de $M'N'P'Q'$ à l'aire totale de ce rectangle est très voisin de $\frac{1}{4}$, la différence tendant vers zéro avec $\frac{1}{t}$. On en conclut par un raisonnement facile que nous omettons que la probabilité limite demandée est $\frac{1}{4}$.

Si, au lieu de deux dimensions, il y en avait n, le rapport du volume occupé par les solides II au volume total est $\frac{1}{2^n}$; telle est aussi la probabilité limite cherchée.

On remarquera qu'en même temps que le problème C nous avons résolu un problème un peu différent :

Problème D. — *Les hypothèses étant les mêmes que dans* C, *quelle est la probabilité pour que les points* P *soient tous sur* C_1 *à une époque* t *déterminée, mais très éloignée de l'époque actuelle, par exemple dans* 10^{100} *années, ou il y a* 10^{100} *années.*

On trouve que cette probabilité diffère extrêmement peu de $\frac{1}{2^n}$. Il est d'ailleurs clair que si la probabilité demandée dans D a une limite lorsque t augmente indéfiniment, cette limite est la solution de C. La réciproque est moins évidente, et c'est pourquoi il n'était pas inutile de distinguer les problèmes C et D.

On peut exprimer le résultat obtenu en disant que *la solution exacte des problèmes* C *et* D *est précisément celle que l'on obtiendrait en regardant les petites planètes comme indépendantes*. Il est manifeste que c'est là une loi générale et que tout problème de probabilité tel que le suivant : « *Quelle est la probabilité pour que les points représentatifs de quatre des petites planètes* (non fixées d'avance) *diffèrent respectivement de moins de* 1″ *des sommets d'un carré inscrit* (*non donné d'avance*)? » peut être posé sous une forme analogue à C ou D et admet alors la solution que l'on obtient *en regardant les points* P *distribués par le hasard d'une manière indépendante les uns des autres* (la probabilité pour que l'un d'eux soit sur un arc étant proportionnelle à la longueur de cet arc).

C'est là le résultat essentiel que nous voulions obtenir; il n'est pas inutile d'y ajouter quelques remarques.

Observons d'abord que l'on peut *convenir* de donner au problème A la même réponse qu'au problème D, si l'on suppose que l'on ignore les éléments des petites planètes. En réalité, l'introduction d'un temps très long (futur ou passé) dans l'énoncé de D a pour effet de rendre inutile notre connaissance *approximative* de ces éléments. C'est cette connaissance approximative seule qui distingue une époque actuelle ou rapprochée d'une époque éloignée; il est clair, en effet, qu'une telle distinction ne peut avoir aucun fondement logique. Là où il y a connaissance, il n'y a pas place pour la probabilité : si j'ai pointé les coups d'une partie de pile ou face et si l'on me demande quelle est la probabilité pour que, sur n coups, on ait amené toujours face, je ne devrai pas répondre $\frac{1}{2^n}$, mais bien 1 ou 0 suivant que l'événement s'est ou non effectivement produit. S'il s'agit au contraire d'une partie future, je répondrai $\frac{1}{2^n}$; ma réponse pourra être encore différente s'il s'agit d'une partie commencée.

Si donc la distribution actuelle des petites planètes était *très irrégu-*

lière, si, par exemple, tous les points P étaient sur C_1, on pourrait parier que cette irrégularité cessera dans l'avenir et n'existait pas dans le passé. Mais la longueur du temps n'a par elle-même aucune vertu spéciale pour amener la régularité : la probabilité d'une distribution singulière déterminée reste toujours la même : mais la probabilité disparaît pour faire place à la certitude lorsqu'il s'agit d'un événement accompli (ou connu).

II.

Abordons maintenant les principes de la théorie cinétique. On devine que nous allons chercher à poser sous une forme analogue à C ou D les problèmes que l'on pose habituellement sous une forme analogue à A, à B, ou même à B′.

Précisons d'abord les hypothèses physiques.

Nous considérons un certain nombre de sphères toutes identiques entre elles, supposées parfaitement élastiques, et se mouvant à l'intérieur d'une enceinte rigide et absolument fixe sans être soumises à aucune force extérieure. Lorsqu'une sphère choque les parois ou que deux sphères se choquent entre elles, le mouvement ultérieur est déterminé par les lois du choc des corps parfaitement élastiques, c'est-à-dire qu'il y a à la fois conservation de la quantité de mouvement [1] et conservation de la force vive.

Désignons par x_1, x_2, x_3 les coordonnées du centre de la première sphère, par x_4, x_5, x_6 les coordonnées du centre de la seconde, etc., par x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n} les coordonnées du centre de la $n^{\text{ième}}$. Le fait que les sphères ne peuvent traverser les parois s'exprime par n inégalités de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{r} f(x_1, x_2, x_3) > 0, \\ f(x_4, x_5, x_6) > 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}) > 0. \end{array}\right.$$

De même, si l'on désigne par a le diamètre d'une des sphères, le

(1) Dans le cas du choc contre une paroi, c'est la projection de la quantité de mouvement sur le plan tangent qui reste constante.

fait que deux sphères ne peuvent pas se pénétrer s'exprime par $\frac{n(n-1)}{2}$ inégalités de la forme

$$
(2)\quad \left\{
\begin{array}{l}
(x_1-x_4)^2+(x_2-x_5)^2+(x_3-x_6)^2-a^2 > 0, \\
(x_1-x_7)^2+(x_2-x_8)^2+(x_3-x_9)^2-a^2 > 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
(x_1-x_{3n-2})^2+(x_2-x_{3n-1})^2+(x_3-x_{3n})^2-a^2 > 0, \\
(x_4-x_7)^2+(x_5-x_8)^2+(x_6-x_9)^2-a^2 > 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
(x_{3n-5}-x_{3n-2})^2+(x_{3n-4}-x_{3n-1})^2+(x_{3n-3}-x_{3n})^2-a^2 > 0.
\end{array}
\right.
$$

Si l'on regarde les x_i comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $3n$ dimensions, les inégalités (1) et (2) définissent dans cet espace un certain domaine D d'un seul tenant. A chaque point P de ce domaine correspond une situation bien déterminée pour l'ensemble des sphères, et réciproquement. Comment varie le point P lorsque les sphères se déplacent suivant les lois indiquées plus haut?

Il est bien clair d'abord que, tant qu'il n'y a pas choc, le mouvement de P est rectiligne et uniforme; si l'on désigne par v_1, v_2, v_3 les projections de la vitesse du point x_1, x_2, x_3, etc., il est clair que la vitesse v du point P a pour projections sur les $3n$ axes : $v_1, v_2, \ldots, v_{3n}$ et par suite que l'on a

$$v^2=\sum_1^{3n} v_i^2.$$

Cette vitesse v est donc constante, puisque la force vive totale des sphères se conserve.

Supposons maintenant que la sphère x_1, x_2, x_3 heurte la paroi; le point P rencontrera alors la surface limite du domaine D

$$f(x_1, x_2, x_3)=0.$$

Le point P se réfléchira donc sur cette paroi.

Nous allons voir que les lois de cette réflexion, dans l'espace à $3n$ dimensions, sont la généralisation des lois dans l'espace ordinaire.

Considérons une surface quelconque

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)=0$$

en posant, pour abréger, $m = 3n$, et soient $v_1, v_2, \ldots, v_m$ les projections de la vitesse du point P qui heurte cette surface en un point de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Les lois de la réflexion seront les suivantes : *la trajectoire incidente, la trajectoire réfléchie et la normale à la surface réfléchissante sont dans un même plan à deux dimensions, dans lequel la normale est bissectrice de l'angle des deux trajectoires ; la valeur absolue de la vitesse reste constante.*

Les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}.$$

On a, par suite, pour les projections $w_1, w_2, \ldots, w_m$ de la vitesse après réflexion

$$w_1 = \lambda v_1 + \mu \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad w_m = \lambda v_m + \mu \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}.$$

On déterminera λ et μ par la condition que les cosinus des angles de la direction incidente et de la direction réfléchie avec la normale sont égaux, ce qui donne l'équation

$$\frac{\sum v_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{\pm\sqrt{\sum v_i^2 \sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2}} = \frac{\sum w_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{\pm\sqrt{\sum w_i^2 \sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2}},$$

et par la condition

$$\sum v_i^2 = \sum w_i^2,$$

qui exprime que le carré de la vitesse reste constant. En tenant compte de cette seconde relation, la première devient (1)

$$(\lambda + 1)\sum v_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \mu \sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 = 0,$$

(1) Une discussion facile montre que l'on doit prendre des signes différents devant les deux radicaux.

et, d'autre part, la seconde développée s'écrit

$$(\lambda^2-1)\sum v_i^2+2\lambda\mu\sum v_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\mu^2\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2=0.$$

Ces équations admettent la solution à écarter $\lambda=-1$, $\mu=0$; l'autre solution est

$$\lambda=1,\qquad \mu=\frac{-2\sum v_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{\sum\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\right)^2}.$$

Il est d'ailleurs aisé de vérifier que la trajectoire incidente et la trajectoire réfléchie sont situées du même côté de la surface

$$\varphi=0,$$

comme cela doit être.

On a ainsi les formules de la réflexion sous la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} w_1=v_1-\dfrac{2\sum v_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ w_m=v_m-\dfrac{2\sum v_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_m}. \end{cases}$$

Appliquons ceci au cas où $m=3n$ et où φ se réduit à

$$f(x_1,x_2,x_3)=0;$$

nous aurons

$$(4)\qquad \begin{cases} w_1=v_1-\dfrac{2\left(v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2}\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\\ w_2=v_2-\dfrac{2\left(v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \end{cases}$$

$$
(4)\ (suite)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
w_3 &= v_3 - \frac{2\left(v_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + v_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + v_3\dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2}\,\frac{\partial f}{\partial x_3},\\
w_4 &= v_4,\\
w_5 &= v_5,\\
&\ldots\ldots,\\
w_{3n} &= v_{3n}.
\end{aligned}
\right.
$$

Or ces équations (4) correspondent bien aux vitesses ultérieures des centres des sphères dans l'espace ordinaire, lorsque l'une d'elles s'est réfléchie sur la paroi.

Supposons maintenant qu'il y ait un choc entre deux sphères, les deux premières, par exemple; le point P heurte alors la surface

$$
\varphi = (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2 - a^2 = 0.
$$

Si nous substituons cette valeur de φ dans les équations (3), nous obtenons, après des réductions faciles, des formules qui peuvent se mettre sous la forme

$$
(5)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
w_1 &= v_1 - \frac{x_1 - x_4}{a^2}\,S,\\
w_2 &= v_2 - \frac{x_2 - x_5}{a^2}\,S,\\
w_3 &= v_3 - \frac{x_3 - x_6}{a^2}\,S,\\
w_4 &= v_4 + \frac{x_1 - x_4}{a^2}\,S,\\
w_5 &= v_5 + \frac{x_2 - x_5}{a^2}\,S,\\
w_6 &= v_6 + \frac{x_3 - x_6}{a^2}\,S,\\
w_7 &= v_7,\\
&\ldots\ldots,\\
w_{3n} &= v_{3n},
\end{aligned}
\right.
$$

en posant

$$
S = (x_1 - x_4)(v_1 - v_4) + (x_2 - x_5)(v_2 - v_5) + (x_3 - x_6)(v_3 - v_6).
$$

Or, on constate aisément que ces formules (6) sont bien celles qui déterminent les vitesses des centres des sphères, dans l'espace ordinaire, après le choc de deux d'entre elles.

Par conséquent, *le mouvement du point* P *dans le domaine* D, *défini par les relations* (1) *et* (2), *est le mouvement d'un point libre qui se réfléchit sur les parois suivant les lois classiques.*

C'est là un problème que l'on peut étudier sous une forme générale, indépendamment du nombre des dimensions de l'espace considéré, nombre d'où ne résulte pas de difficulté nouvelle [1]. Pour préciser la forme sous laquelle peuvent se poser des problèmes de probabilité relatifs à un tel mouvement, il sera plus commode de nous placer simplement dans l'espace ordinaire à trois dimensions.

III.

Considérons donc, dans l'espace ordinaire, un domaine limité d'un seul tenant D. Dans ce domaine se déplace un point matériel P, qui n'est soumis à aucune force extérieure et se réfléchit sur les parois suivant la loi classique. La vitesse du point P est donc constante; si on la représente par un vecteur d'origine O, l'extrémité V de ce vecteur sera sur une certaine sphère S de centre O. A un instant t, le point P occupe une certaine position dans D et le point V une certaine position sur S.

On peut dès lors se poser le problème suivant :

Problème E. — *Sachant simplement que le domaine* D *a un certain volume* v *et la sphère* S *une certaine surface* σ, *on demande quelle est la probabilité pour que le point* P *appartienne à un certain élément de volume* $d\tau$ *de* D *et que le point* V *appartienne à un certain élément de volume* $d\omega$ *de* S.

---

[1] On pourrait penser qu'une difficulté pourrait provenir du fait que les surfaces (1) et (2) sont des sortes de surfaces cylindriques, chaque équation ne renfermant qu'un petit nombre de coordonnées; mais cette difficulté n'a rien d'essentiel.

Il est clair que la seule réponse que l'on puisse faire, *si l'on en fait une*, est que ces probabilités sont $\frac{d\tau}{\varphi}$ et $\frac{d\omega}{\sigma}$; mais on peut très légitimement refuser de répondre, en considérant les données comme insuffisantes; nous pourrions répéter ici les remarques faites plus haut à propos du problème A (p. 11).

Nous allons donc transformer l'énoncé E en nous restreignant, pour abréger, à la considération du point V.

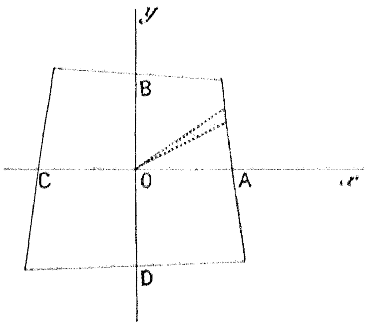
Problème F. — *Étant donnée la forme exacte du domaine* D, *la position et la vitesse exactes du point* P *dans le domaine* D, *quelle est la probabilité pour que le point* V *appartienne à un certain élément* $d\omega$ *de* S, *à une époque t, à choisir arbitrairement dans un certain intervalle; cette probabilité tend-elle vers une limite lorsque l'intervalle de temps considéré augmente indéfiniment?* Cet énoncé est l'analogue de B'. La probabilité, suivant les données effectives que l'on possède, peut avoir des valeurs très diverses. Par exemple, si le domaine D est un cube, la probabilité aura la valeur *zéro* pour certains domaines $d\omega$ et sera égale à une fraction finie pour certains autres domaines infiniment petits.

Mais ce problème F me paraît dénué d'intérêt, parce qu'il ne correspond à rien de réel. Je ne m'arrêterai pas à une première difficulté, qui cependant ne me paraît pas négligeable : les données que l'on suppose *exactement connues* dans l'énoncé F peuvent-elles être, je ne dis pas calculées, mais même *définies* avec une précision absolue? J'accorde pour l'instant que l'on peut concevoir ces données comme connues à une époque t. Mais, sans parler des forces extérieures qu'il n'est pas possible de supprimer complètement, la rigidité absolue de la paroi est une hypothèse absolument irréalisable. Supprimerait-on toutes les actions des corps rapprochés, ou arriverait-on à en tenir compte, un phénomène tel que les variations de l'attraction des étoiles, sur lequel on n'a aucun renseignement, exerce une influence, extrêmement faible il est vrai, mais qui suffit pour que tout raisonnement basé sur le fait que deux nombres sont commensurables, par exemple, soit complètement inadmissible. Nous sommes ainsi amenés à modifier l'énoncé F en cherchant à y introduire cette indétermination nécessaire des données. On peut, par exemple, lui donner la forme suivante :

PROBLÈME G. — *Les données étant les mêmes que dans F, on admet de plus que la position de tout ou partie de la paroi, ainsi que les données initiales, ne sont connues qu'à une certaine approximation ; on demande de calculer la probabilité que le point V soit dans $d\omega$ à une époque t comprise entre des limites connues (que l'on fera ensuite grandir indéfiniment), en fonction des probabilités élémentaires, supposées connues, que les données aient telles valeurs comprises entre les limites qui leur sont assignées.*

Pour plus de netteté, nous allons donner un énoncé de G pour un cas particulier précis, en nous bornant à l'espace à deux dimensions.

Fig. 2.



PROBLÈME G'. — *On considère deux axes rectangulaires et le quadrilatère dont les côtés ont pour équations*

$$\begin{aligned} x &= a + \varepsilon_1 y, \\ x &= -a + \varepsilon_2 y, \\ y &= a + \varepsilon_3 x, \\ y &= -a + \varepsilon_4 x, \end{aligned}$$

dans lesquelles ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 sont des nombres assujettis à être inférieurs à un nombre très petit ε. La probabilité pour que l'un d'eux soit compris entre α et β, α et β étant deux nombres compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, est, par hypothèse, $\frac{\beta-\alpha}{2\varepsilon}$. On considère un point P qui part de l'origine O, avec une vitesse dont on donne la grandeur v et dont on sait que l'angle de sa direction avec Ox est compris entre $\theta - \varepsilon$ et $\theta + \varepsilon$, la probabilité pour que cet angle soit compris entre θ' et θ'' (supposés compris tous deux *entre ces limites) est, par hypothèse,* $\frac{\theta'' - \theta'}{2\varepsilon}\cdot$ *Cela posé, on considère la probabilité pour qu'à une époque t, choisie au hasard dans un intervalle donné, l'angle compris entre zéro et* 2π *que fait la direction de la vitesse avec* Ox *soit compris entre deux limites données* φ *et* $\varphi + \Delta\varphi$, *et l'on demande vers quelle limite tend cette probabilité lorsque cet intervalle grandit indéfiniment suivant une loi quelconque.*

Nous avons choisi à dessein cet exemple, parce que, pour $\varepsilon = 0$, on se trouve dans un cas où la vitesse est nécessairement parallèle à l'une ou l'autre de deux droites fixes; on voit assez aisément que, quelque petit que soit ε, à condition de faire grandir d'autant plus l'intervalle de temps considéré que ε est plus petit, *toutes les directions de vitesse deviennent également probables,* c'est-à-dire que la probabilité limite demandée est $\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\cdot$ Nous ne développerons pas les raisonnements qui conduisent à ce résultat, car ils présentent une assez grande analogie avec ceux qui nous ont donné la solution des problèmes C et D. Retenons seulement le résultat : *toutes les directions sont également probables, pourvu que l'on considère un temps assez long.*

Il y aurait, à ce qu'il me semble, grand intérêt à étendre ce résultat à l'énoncé général du problème G; la principale difficulté paraît être de préciser d'une manière nette la probabilité élémentaire en ce qui concerne la forme du domaine; mais le résultat ne semble pas pouvoir être douteux, quelle que soit d'ailleurs la forme adoptée pour cette probabilité élémentaire, dans laquelle on pourrait, en suivant une méthode de M. Poincaré, introduire une fonction continue arbitraire.

Lorsque nous disons d'ailleurs que toutes les directions de vitesse sont également probables, nous entendons que la probabilité pour que le point V soit sur un élément de surface $d\omega$ de la sphère S, est proportionnelle à $d\omega$. On arriverait à un résultat analogue pour la position du point P dans D. Mais nous nous bornerons au premier résultat, dont nous allons chercher les conséquences au point de vue de la théorie cinétique [1].

---

[1] On pourrait faire l'objection suivante à l'extension du problème G au cas de la théorie cinétique : le domaine D est limité, d'une part par les surfaces (1) et d'autre part par les surfaces (2). Il est assez naturel, d'après les remarques précédentes, de regarder

IV.

Reprenons donc le domaine à $3n$ dimensions, dans lequel les projections sur les axes de la vitesse du point P sont $v_1, v_2, \ldots, v_{3n}$. Si l'on désigne par k^2 la moyenne des carrés des vitesses des molécules, on a d'ailleurs

$$(6)\qquad v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_{3n}^2 = nk^2.$$

L'équation (6) représente une hypersphère dans l'espace à $3n$ dimensions; la probabilité pour que le point V de coordonnées v_1, $v_2, \ldots, v_{3n}$ soit sur un élément de surface $d\varpi$ (à $3n - 1$ dimensions) de cette hypersphère est proportionnelle à $d\varpi$.

Cherchons quelle est la probabilité pour que v_1 soit compris entre u et $u + du$. Cela revient à chercher le rapport de la *zone* de l'hypersphère (6), comprise entre les deux plans

$$v_1 = u, \qquad v_1 = u + du,$$

à la surface totale de la sphère.

Changeant les notations pour un instant, considérons l'hypersphère

$$(6)'\qquad y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2 = r^2$$

---

les surfaces (1) comme partiellement indéterminées, mais ne doit-on pas regarder les surfaces (2) comme absolument fixes? Telle est l'objection. On peut y faire tout d'abord la réponse suivante : dans la réalité, les molécules ne doivent pas être regardées comme rigoureusement sphériques; elles ne le sont qu'approximativement et par suite, lorsqu'elles se choquent, la distance de leurs centres de gravité n'est pas une constante. Ceci revient à dire que les surfaces (2) doivent être remplacées par des surfaces très voisines, mais variables avec le temps, suivant une loi inconnue et arbitraire; on rentre donc bien dans l'énoncé du problème G.

A un autre point de vue, on pourrait conserver les surfaces (2), c'est-à-dire la sphéricité rigoureuse des molécules, et chercher à baser le raisonnement sur le fait que ces surfaces sont *convexes*, et par suite *dispersent* les trajectoires et ne les *concentrent* pas; c'est là une indication qui demanderait à être développée. Les calculs auxquels elle conduirait ne seraient pas sans analogie avec ceux de Boltzmann, mais s'en distingueraient cependant essentiellement, car ils devraient conduire au résultat en s'appuyant seulement sur la *convexité*, c'est-à-dire sur une propriété générale des surfaces (2), et non sur leur forme particulière.

et posons

$$
\begin{aligned}
y_1 &= r\cos\varphi_1,\\
y_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
y_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_{m-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{m-2}\cos\varphi_{m-1},\\
y_m &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{m-2}\sin\varphi_{m-1}.
\end{aligned}
$$

L'élément de volume dw a évidemment pour expression

$$dw = \frac{r}{y_m}\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{m-1}$$

ou, en exprimant au moyen des φ_i,

$$dw = r^{m-1}\sin^{m-2}\varphi_1\sin^{m-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{m-2}\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_{m-1}.$$

L'aire de la zone que l'on obtient en faisant varier φ_1 entre φ et $\varphi + d\varphi$ est donc égale au produit de $\sin^{m-2}\varphi\,d\varphi$ par une intégrale indépendante de φ. Le rapport de cette aire à l'aire totale de la sphère est

$$\frac{\sin^{m-2}\varphi\,d\varphi}{\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^{m-2}\varphi\,d\varphi}.$$

On évaluerait aisément le dénominateur, dont la valeur asymptotique pour m très grand est d'ailleurs bien connue; mais il est préférable de calculer simplement d'abord une quantité proportionnelle à la probabilité cherchée; nous avons trouvé qu'elle est proportionnelle à

$$\sin^{m-2}\varphi\,d\varphi;$$

si nous remarquons que l'on a

$$
\begin{aligned}
u &= r\cos\varphi,\\
du &= -r\sin\varphi\,d\varphi,
\end{aligned}
$$

nous trouvons qu'elle est proportionnelle à

$$\left(1-\frac{u^2}{r^2}\right)^{\frac{m-3}{2}} du = e^{\frac{m-3}{2}\log\left(1-\frac{u^2}{r^2}\right)}\,du.$$

Reprenons maintenant les notations primitives; nous devons faire

$$m = 3n, \qquad r^2 = nk^2.$$

L'expression de la probabilité élémentaire devient alors

$$e^{\frac{3(n-1)}{2}\left(-\frac{u^2}{nk^2}-\frac{u^4}{2n^2k^4}-\dots\right)}du$$

ou, enfin, en négligeant les termes qui renferment n en dénominateur,

$$e^{-\frac{3u^2}{2k^2}}du.$$

On devrait intégrer entre les limites $-r$ et $+r$, mais, r étant très grand par rapport à k, on peut intégrer entre $-\infty$ et $+\infty$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3u^2}{2k^2}}du = k\sqrt{\frac{2\pi}{3}}.$$

La probabilité pour que v_1 soit compris entre u et $u+du$ est donc finalement

$$\frac{\sqrt{3}}{k\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{3u^2}{2k^2}}du;$$

c'est la loi bien connue de Maxwell.

Je n'insiste pas sur les calculs analogues : probabilité pour que le carré de la vitesse d'une molécule soit compris entre des limites données, etc., préférant terminer en précisant la signification de la loi de Maxwell au point de vue que nous avons adopté.

Le résultat que nous avons obtenu est le suivant : pour chaque molécule prise individuellement la probabilité d'une vitesse donnée est celle qu'a indiquée Maxwell. Un calcul supplémentaire, que nous omettons, montrerait de plus que, si l'on considère n' molécules parmi les n, les probabilités relatives à ces n' molécules peuvent être regardées comme indépendantes à l'approximation que nous avons faite, pourvu que $n - n'$ soit très grand [1].

---

[1] Cette restriction est nécessaire, car il est clair, pour prendre un exemple extrême, que, si l'on connaît les vitesses de $n-1$ molécules, la vitesse de la $n^{\text{ième}}$ est déterminée : il n'y a donc pas place pour la probabilité.

Il résulte dès lors de la loi de Bernoulli que, parmi ces n' molécules, le nombre de celles dont la vitesse a une valeur comprise entre des limites déterminées est sensiblement égal au produit de n' par la probabilité pour que la vitesse d'une molécule soit comprise entre ces limites. Comme on peut supposer le rapport $\frac{n'}{n}$ très voisin de l'unité, tout en supposant $n - n'$ très grand, on ne commet pas une grande erreur en remplaçant dans l'énoncé précédent n' par n. On retrouve ainsi la forme que l'on donne habituellement à la loi de Maxwell.

Cette loi nous apparaît donc ainsi comme étant uniquement une loi de probabilité, et la méthode par laquelle nous l'avons établie permettrait de calculer les écarts probables et la probabilité d'un écart déterminé; c'est là une question sur laquelle je compte revenir. Mais rien n'autorise à dire que la loi de Maxwell *devient* plus probable lorsque le temps croît; tout ce que l'on peut dire, c'est qu'en multipliant les expériences, ou en les prolongeant, on permet à la loi des grands nombres de se manifester malgré les écarts passagers possibles.

Supposons, par exemple, que l'on joue à pile ou face et que je parie que, sur 1 000 000 de parties, on amènera pile plus de 400 000 fois et moins de 600 000. La probabilité pour que je gagne mon pari est colossale; il est cependant *possible* que je le perde. Mais supposons que l'on joue pendant chaque seconde quelques milliards de parties successives; je parie à chaque instant que, parmi le dernier million de parties, on a amené pile plus de 400 000 fois et moins de 600 000.

Il est clair qu'il pourra arriver que je perde mon pari plusieurs fois de suite pendant une fraction de seconde, mais je pourrai affirmer avec certitude qu'il suffit de laisser s'écouler le temps pour que je gagne de nouveau. Le fait que le temps s'écoule ne modifie en rien la probabilité élémentaire; mais le temps permet à la loi des grands nombres de triompher.

Je n'ai pas à discuter ici la loi des grands nombres ni les principes même du calcul des probabilités; je me contente de conclure que la loi de Maxwell doit nous apparaître comme aussi certaine que l'affirmation qu'il y aura la semaine prochaine des décès et des naissances à Paris. Je crois que peu de gens trouveront cette certitude insuffisante; je serais heureux si les remarques précédentes pouvaient avoir le résultat de dissiper les préventions de quelques-uns à l'égard de la théorie cinétique et de décider quelques mathématiciens à approfondir un sujet à la fois intéressant et fécond.