Annales scientifiques de l'É.N.S.

LOUIS RAFFY

Recherches sur les surfaces isothermiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 23 (1906), p. 387-428
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__387_0>

RECHERCHES

SUR LES

SURFACES ISOTHERMIQUES,

PAR M. LOUIS RAFFY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

SECONDE PARTIE (1).

Les pages qui suivent ont pour objet principal la détermination de surfaces isothermiques dépendant de fonctions arbitraires.

Toutes les recherches auxquelles donne lieu ce difficile problème sont dominées par un théorème que j'ai fait connaître l'an dernier (2) et qui s'énonce ainsi : *les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles des surfaces isothermiques sont les lignes de courbure et les lignes de longueur nulle*. Il suit de là, en effet, que les arguments des fonctions arbitraires ne peuvent être que les paramètres des lignes de courbure et ceux des lignes de longueur nulle.

Or, en rapprochant de la méthode donnée par M. Darboux, pour l'intégration des équations aux dérivées partielles, certains résultats obtenus plus récemment par M. Goursat (3), on arrive à cette conclusion qu'il est possible de déterminer toutes les surfaces telles que les

(1) *Voir*, pour la première Partie, *Annales de l'École normale*, 1905, p. 397.

(2) *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, t. CXL, 26 juin 1905.

(3) *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXV, 1897 et t. XXVIII, 1900.

différentielles de leurs coordonnées s'expriment explicitement au moyen de fonctions arbitraires des paramètres des lignes de longueur nulle et de dérivées, en nombre limité, de ces fonctions arbitraires.

Ces surfaces, que nous nommerons *surfaces de première classe*, pour rappeler une désignation employée par Ampère, se distribuent en genres, d'après le nombre des transformations de Laplace qu'exige l'intégration de l'équation linéaire dont dépend leur détermination.

I. En appliquant (§ VIII) la méthode de Laplace à l'équation dont Ossian Bonnet a fait dépendre le problème de la déformation des surfaces (*équation de déformation*), j'ai été conduit, entre autres résultats, à subdiviser chaque genre en trois espèces, ce qui facilite la recherche des surfaces isothermiques de première classe.

II. L'emploi des invariants h et k de l'équation de déformation permet (§ IX) de donner une forme extrêmement simple à l'équation dont j'ai fait, dans la Note précitée, dépendre la recherche générale des surfaces isothermiques. Connaissant une solution de cette *équation fondamentale*, on est ramené à un système complet dont l'intégrale générale est une fonction linéaire et homogène de deux constantes arbitraires; elle se détermine par une quadrature dès qu'on a pu obtenir une intégrale particulière.

III. L'équation fondamentale intervient efficacement dans la détermination des surfaces isothermiques de première classe. L'évanouissement de l'invariant que j'appelle τ (*voir* n° 27) définit un genre parmi les surfaces de première classe; ce genre se compose (§ X) exclusivement des surfaces minima qui sont isothermiques.

Les surfaces de première classe qui constituent le genre suivant sont définies par l'évanouissement d'un autre invariant τ_1; leur propriété commune consiste (§ XI) en ce que leur élément linéaire devient celui d'une sphère de rayon 1 quand on le multiplie par le carré de la courbure moyenne. On obtient toutes ces surfaces sans difficulté; mais il est beaucoup moins aisé de séparer celles qui sont isothermiques; elles se répartissent en trois espèces et ne forment pas moins de six variétés.

L'espèce pour laquelle les invariants h et k sont tous deux nuls comprend (§ XI) les sphères et les surfaces (B) de Bonnet qu'on déduit des surfaces minima par double inversion singulière.

Quand on en vient (§ XII) à l'espèce pour laquelle un seul des invariants h et k est égal à zéro, on ne trouve qu'une seule variété, composée des surfaces (Θ) de M. Thybaut, surfaces dont les sphères harmoniques sont tangentes à un même plan (non isotrope).

Enfin, l'espèce pour laquelle les deux invariants h et k sont différents de zéro comprend (§ XIII), outre les surfaces (Θ), deux variétés nouvelles, savoir les transformées par normales parallèles (transformation de Bour-Christoffel) des inverses des surfaces minima et des inverses des surfaces (Θ).

Les applications du procédé de recherche systématique qui a donné ces divers résultats ne s'arrêtent point là. Mais les calculs se compliquent considérablement, à mesure que croît le nombre des fonctions arbitraires, qui, pour les surfaces isothermiques, doivent se ramener à deux. J'ai pu néanmoins déterminer complètement celles de ces surfaces pour lesquelles les invariants h_1 et k_{-1} de l'équation de déformation sont tous les deux nuls : ce sont les inverses des surfaces minima et les inverses des surfaces (Θ), avec leurs transformées par coordonnée isotrope commune (transformation définie au n° 37). Je renvoie la démonstration de ce théorème et de divers autres à une troisième Partie.

VIII. — L'équation d'Ossian Bonnet, pour le problème de la déformation, considérée comme une équation de Laplace.

26. Nous avons mentionné (n° 9) l'équation remarquable dont O. Bonnet a fait dépendre la détermination des surfaces admettant l'élément linéaire

$$ds^2 = 4\varphi^2(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta. \tag{1}$$

Si l'on désigne par ξ une coordonnée isotrope, $x + iy$, par exemple, d'une des surfaces cherchées, et si l'on pose

$$p = \frac{\partial\xi}{\partial\alpha}, \qquad q = \frac{\partial\xi}{\partial\beta}, \qquad r = \frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha^2}, \qquad s = \frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \qquad t = \frac{\partial^2\xi}{\partial\beta^2},$$

l'équation d'Ossian Bonnet (*équation de déformation*) s'écrit

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{t}{2q}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\frac{r}{2p}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\frac{rt-s^2}{4pq}\varphi=0.$$

C'est, relativement à la fonction φ, une de ces *équations de Laplace* dont la théorie a été parachevée par M. Darboux (*Théorie des surfaces*, Livre IV). En nous référant à cette exposition, nous établirons diverses propriétés de l'équation (2), considérée comme équation de Laplace.

Étant donnée l'équation

$$(3)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}+a\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+b\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+c\varphi=0,$$

ses *invariants* ont pour expressions respectives

$$(4)\qquad h=ab-c+\frac{\partial a}{\partial\alpha},\qquad k=ab-c+\frac{\partial b}{\partial\beta},$$

$$(5)\qquad h_1=2h-k-\frac{\partial^2\log h}{\partial\alpha\,\partial\beta},\qquad k_{-1}=2k-h-\frac{\partial^2\log k}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(6)\qquad h_{n+1}=h_n+h-k-\frac{\partial^2\log hh_1\ldots h_n}{\partial\alpha\,\partial\beta},\qquad k_{-(n+1)}=k_{-n}+k-h-\frac{\partial^2\log kk_{-1}\ldots k_{-n}}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Or, si l'on rapporte l'équation (2) au type (3), on a immédiatement

$$(7)\qquad a=-\frac{\partial\log\sqrt{q}}{\partial\beta},\qquad b=-\frac{\partial\log\sqrt{p}}{\partial\alpha},\qquad c=ab-\frac{\partial\log\sqrt{p}}{\partial\beta}\frac{\partial\log\sqrt{q}}{\partial\alpha}.$$

Ces valeurs de a, b, c, substituées dans les relations (4), donnent

$$(8)\qquad \begin{cases} h=\dfrac{s^2}{4pq}-\dfrac{\partial^2\log\sqrt{q}}{\partial\alpha\,\partial\beta}=-\dfrac{s}{4q}\dfrac{\partial}{\partial\beta}\log\dfrac{s^2}{pq^2}, \\[2ex] k=\dfrac{s^2}{4pq}-\dfrac{\partial^2\log\sqrt{p}}{\partial\alpha\,\partial\beta}=-\dfrac{s}{4p}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\log\dfrac{s^2}{qp^2}, \end{cases}$$

ou, sous forme explicite,

$$(8)\qquad h=-\frac{1}{2}\left(\frac{s'_\beta}{q}-\frac{s^2}{2pq}-\frac{ts}{q^2}\right),\qquad k=-\frac{1}{2}\left(\frac{s'_\alpha}{p}-\frac{s^2}{2pq}-\frac{rs}{p^2}\right).$$

Au moyen de ces expressions, on reconnaît aisément que, *si l'on effectue sur la coordonnée isotrope ξ une transformation homographique quelconque, les invariants h et k ne changent pas*. En conséquence, la même propriété appartient à tous les invariants successifs de l'équation (2). Elle résulte d'ailleurs de la proposition qui suit :

Si l'on remplace simultanément ξ par $(m'\xi + n') : (m\xi + n)$ et φ par $\varphi : (m\xi + n)$, quelles que soient les quatre constantes m, n, m', n', l'équation (2) *ne cesse pas d'être vérifiée*. C'est ce dont on s'assurera par un calcul très simple, en mettant l'équation (2) sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{p}{\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{q}{\varphi^2}\right) = \frac{s^2}{pq} - 4\frac{\partial^2\log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Cette double substitution n'altère pas non plus l'équation (n° 10)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right)d\alpha^2 - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right)d\beta^2 = 0$$

des lignes de courbure. La transformation correspondante n'est autre que la *double inversion singulière* (n° 22), par laquelle nous avons déduit des surfaces minima les surfaces (B) d'Ossian Bonnet. Pour le prouver, considérons une surface définie par sa coordonnée isotrope ξ et son élément linéaire $4\varphi^2\,d\alpha\,d\beta$. Effectuons sur cette surface une première inversion de pôle (x_1, y_1, z_1) et de puissance μ_1; puis, sur la surface ainsi obtenue, une nouvelle inversion de pôle (x_2, y_2, z_2) et de puissance μ_2. Si l'on désigne par δ la distance P_1P_2 des deux pôles, par x_{-2} l'une des coordonnées de la nouvelle surface et par ds^2_{-2} son élément linéaire, on sait qu'on a

$$x_{-2} = x_2 + \mu_2\frac{(x_1 - x_2)\,\Sigma(x - x_1)^2 + \mu_1(x - x_1)}{\delta^2\,\Sigma(x - x_1)^2 + 2\mu_1\,\Sigma(x_1 - x_2)(x - x_2) + \mu_1^2},$$

$$ds^2_{-2} = \frac{\mu_1^2\mu_2^2\,ds^2}{[\delta^2\,\Sigma(x - x_1)^2 + 2\mu_1\,\Sigma(x_1 - x_2)(x - x_2) + \mu_1^2]^2}.$$

Faisons maintenant

$$l = x_1 - x_2, \qquad m = y_1 - y_2, \qquad n = z_1 - z_2,$$

et supposons les deux pôles *à distance nulle l'un de l'autre*, ou

$\delta^2 = l^2 + m^2 + n^2 = 0$; enfin considérons la coordonnée isotrope $\xi = lx + my + nz$. La fonction ξ_{-2} qui lui correspond par la double inversion ci-dessus n'est autre que

$$\xi_{-2} = lx_2 + my_2 + nz_2 + \mu_2 \frac{\xi - (lx_1 + my_1 + nz_1)}{2\xi - 2(lx_2 + my_2 + nz_2) + \mu_1},$$

ce qu'on peut écrire

$$\xi_{-2} = c + \frac{\mu_2(\xi - c)}{2(\xi - c) + \mu_1}$$

en posant

$$c = lx_2 + my_2 + nz_2 = lx_1 + my_1 + nz_1.$$

Ainsi la fonction ξ_{-2} se déduit de ξ par une transformation homographique, et l'on voit que les doubles inversions singulières qui correspondent à un système de valeurs données pour μ_1, μ_2 et c sont en nombre plusieurs fois infini.

Quant à l'élément linéaire ds^2_{-2}, il s'écrit maintenant

$$ds^2_{-2} = \frac{\mu_2^2\, ds^2}{[2(\xi - c) + \mu_1]^2} = \frac{4\mu_2^2 \varphi^2\, d\alpha\, d\beta}{[2(\xi - c) + \mu_1]^2}.$$

Si donc on le représente par $4\varphi^2_{-2}\, d\alpha\, d\beta$, on aura

$$\varphi_{-2} = \frac{\mu_2 \varphi}{2(\xi - c) + \mu_1},$$

ce qui est précisément la fonction associée à ξ_{-2} dans la substitution qu'il s'agissait d'interpréter. Or on a vu (n° 9) qu'une surface est déterminée de forme par la connaissance des fonctions ξ et φ. Les surfaces qui correspondent à la substitution considérée sont donc, à la position près, identiques à l'une des transformées par double inversion singulière de la surface initiale (ξ, φ).

Remarquons, en passant, qu'en vertu de ce qui précède, *à toute surface admettant l'élément linéaire* $4\varphi^2\, d\alpha\, d\beta$ *et dont on connaîtra une coordonnée isotrope* ξ, *correspond une surface admettant l'élément linéaire* $4\varphi^2\xi^{-2}\, d\alpha\, d\beta$ *et qu'on déterminera par des quadratures.*

27. Il convient d'associer à l'équation de déformation les deux équations de Laplace qui relient les fonctions $\sqrt{p}$ et $\sqrt{q}$ à la fonction

$$\tau = \frac{s^2}{4pq}, \tag{9}$$

que nous avons déjà considérée (n^{os} 10 et suiv.). Cette fonction τ possède une propriété intéressante que l'on vérifiera sans peine : *une fois choisis les paramètres α et β des lignes de longueur nulle, l'expression de τ est la même, quelle que soit la coordonnée isotrope ξ pour laquelle on la calcule.* D'après sa définition, elle donne lieu aux identités

$$\sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial \sqrt{q}}{\partial \alpha}, \tag{10}$$

$$\sqrt{q} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial \sqrt{p}}{\partial \beta}, \tag{10$'$}$$

dont nous ferons fréquemment usage, et d'où l'on déduit, en éliminant successivement $\sqrt{p}$ et $\sqrt{q}$,

$$\frac{\partial^2 \sqrt{p}}{\partial \alpha\, \partial \beta} - \frac{\tau'_\alpha}{2\tau} \frac{\partial \sqrt{p}}{\partial \beta} - \tau \sqrt{p} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 \sqrt{q}}{\partial \alpha\, \partial \beta} - \frac{\tau'_\beta}{2\tau} \frac{\partial \sqrt{q}}{\partial \alpha} - \tau \sqrt{q} = 0. \tag{11$'$}$$

M. Goursat a fait connaître (*Bull. Soc. math.*, t. XXV, 1897, p. 36) une propriété importante de l'équation en $\sqrt{p}$: si l'on désigne les invariants de cette équation par les lettres h et k affectées de l'indice (p), on a pour tout indice n, positif, nul ou négatif, l'identité

$$k_n^{(p)} = h_{n+1}^{(p)},$$

de sorte que, *si la suite de Laplace relative à l'équation* (11) *se termine dans un sens après n transformations, elle se terminera dans l'autre sens après n* — 1 *transformations.*

Il suffit donc de former les invariants $h_n^{(p)}$. Voici les premiers :

$$h^{(p)} = \tau, \qquad h_1^{(p)} = \tau - \frac{\partial^2 \log \sqrt{\tau}}{\partial \alpha\, \partial \beta}, \qquad h_2^{(p)} = \tau - \frac{\partial^2 \log \tau h_1^{(p)}}{\partial \alpha\, \partial \beta}.$$

On voit que τ est un invariant de l'équation (11). Nous désignerons les deux suivants par τ_1 et τ_2, en posant

$$\tau_1 = \tau - \frac{\partial^2 \log \sqrt{\tau}}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \tag{12}$$

$$\tau_2 = \tau - \frac{\partial^2 \log \tau\tau_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \tau_1 - \frac{\partial^2 \log \tau_1 \sqrt{\tau}}{\partial\alpha\,\partial\beta}. \tag{13}$$

Quant à l'équation (11)′ en $\sqrt{q}$, on verra aisément que ses invariants sont les mêmes que ceux de l'équation (11), mais rangés en ordre inverse. Nous n'avons donc à considérer que les invariants h_n, k_{-n} de l'équation de déformation et les invariants τ, τ_1, τ_2, ... de l'équation en $\sqrt{p}$.

28. Remarquons que τ dépend de s, qui est une dérivée seconde de ξ; que dans h et k figurent des dérivées troisièmes de ξ; dans τ_1 une dérivée quatrième de ξ; dans h_1 et k_{-1} des dérivées cinquièmes de ξ; dans τ_2 une dérivée sixième de ξ; dans h_2 et k_{-2} des dérivées septièmes de ξ; etc.

Il existe entre les invariants τ_n et les invariants h_n, k_{-n} des relations différentielles que nous allons faire connaître et d'où il suivra que, *si la suite de Laplace relative à l'équation de déformation se termine dans un sens après n transformations, elle se terminera dans l'autre sens après n ou n + 1 transformations*. Cette propriété est une conséquence immédiate des théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si τ est nul, h et k sont nuls.*

Théorème II. — *Si h est nul ou si k est nul, τ_1 est nul aussi.*

Théorème III. — *Si τ_1 est nul, on a soit $h = k = 0$; soit $h_1 = 0$ si $h \neq 0$; soit $k_{-1} = 0$ si $k \neq 0$; soit enfin $h_1 = k_{-1} = 0$ si $hk \neq 0$.*

Théorème IV. — *Si h_1 est nul ou si k_{-1} est nul, τ_2 est nul aussi.*

Théorème V. — *Si τ_2 est nul, on a soit $h_1 = k_{-1} = 0$; soit $h_2 = 0$ si $h_1 \neq 0$; soit $k_{-2} = 0$ si $k_{-1} \neq 0$; soit enfin $h_2 = k_{-2} = 0$ si $h_1 k_{-1} \neq 0$.*

29. *Démonstration du théorème I.* — D'après les formules (8)', l'hypothèse $\tau = 0$ ou $s = 0$ entraîne visiblement $h = k = 0$.

Démonstration du théorème II. — En introduisant τ dans les relations (8), on trouve

$$(8)'' \qquad h = -\sqrt{p}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{\frac{\tau}{q}}, \qquad k = -\sqrt{q}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{\frac{\tau}{p}}.$$

La première de ces égalités donne

$$(14) \qquad \frac{h}{\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{q}{p}} = -\sqrt{\frac{q}{\tau}}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{\frac{\tau}{q}} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log\sqrt{\frac{\tau}{q}},$$

d'où l'on déduit par différentiation

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h}{\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{q}{p}}\right) = \frac{\partial^2 \log\sqrt{q}}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial^2 \log\sqrt{\tau}}{\partial\alpha\,\partial\beta};$$

mais la première des équations (8) n'est autre que

$$h = \tau - \frac{\partial^2 \log\sqrt{q}}{\partial\alpha\,\partial\beta};$$

il vient donc

$$(15) \qquad h + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h}{\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{q}{p}}\right) = \tau - \frac{\partial^2 \log\sqrt{\tau}}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \tau_1.$$

On trouverait par des calculs analogues

$$(16) \qquad k + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{k}{\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{p}{q}}\right) = \tau - \frac{\partial^2 \log\sqrt{\tau}}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \tau_1.$$

En conséquence, si h est nul ou si k est nul, τ_1 est nul aussi.

Remarque. — Les égalités (15) et (16) permettent de démontrer une identité qui nous servira plus tard et qu'on pourrait d'ailleurs vérifier directement au moyen des relations (8)'. C'est l'identité

$$(I) \qquad p\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{qh}{p}\right) = q\,\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{pk}{q}\right).$$

Nous l'écrirons comme suit :

$$\sqrt{\frac{p}{q}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\left(\frac{h}{\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)\left(\sqrt{q}\sqrt{\frac{\tau}{p}}\right)\right]=\sqrt{\frac{q}{p}}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\left(\frac{k}{\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{p}{q}}\right)\left(\sqrt{p}\sqrt{\frac{q}{\tau}}\right)\right].$$

Son premier membre, effectué, devient

$$\sqrt{\tau}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h}{\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)+\frac{h}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sqrt{q}\sqrt{\frac{\tau}{p}}\right),$$

ou, en vertu de l'équation (15),

$$\sqrt{\tau}(\tau_1-h)+\frac{h}{\sqrt{\tau}}\left(\sqrt{q}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{\frac{\tau}{p}}+\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{p}}\frac{\partial\sqrt{q}}{\partial\alpha}\right);$$

les derniers termes des deux parenthèses se détruisent, en vertu de l'identité (10); le premier terme de la seconde parenthèse n'est pas autre chose que $-k$, d'après la dernière des identités (8)''; il reste donc simplement

$$\tau_1\sqrt{\tau}-\frac{hk}{\sqrt{\tau}}.$$

En raison de sa symétrie, cette expression représente aussi le second membre de l'identité annoncée.

30. *Démonstration du théorème III.* — Supposons $h\neq 0$; l'équation (15) s'écrit

$$\tau_1=\frac{h}{\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{q}{p}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\left(\frac{h}{\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)+\frac{\sqrt{p}\sqrt{\tau}}{\sqrt{q}}\right],$$

ou, à cause de l'identité (10),

$$\tau_1=\frac{h}{\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{q}{p}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{qh}{\sqrt{p}\sqrt{\tau}}. \tag{17}$$

Si donc τ_1 est nul, mais pas h, on aura

$$\frac{\partial\log\sqrt{\tau}}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{qh}{\sqrt{p}},$$

ou, en différentiant et retranchant τ aux deux membres,

$$\frac{\partial^2 \log\sqrt{\tau}}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \tau = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\log\frac{qh}{\sqrt{p}} - \tau.$$

Le premier membre est maintenant nul, comme étant égal à $-\tau_1$; d'autre part, en vertu des formules (5), (8) et (9), on a

$$h_1 = \tau - \frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\log\frac{qh}{\sqrt{p}}. \tag{18}$$

Donc, si τ_1 est nul et si h ne l'est pas, h_1 est nul.

Démonstration du théorème IV. — Partons de l'équation (17), ainsi écrite :

$$\tau\tau_1\left(h\sqrt{\tau}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{-1} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{qh}{\sqrt{p}} - \frac{\partial\log\sqrt{\tau}}{\partial\alpha}.$$

Différentions ses deux membres par rapport à β et tenons compte de l'identité (18); il vient

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\tau\tau_1\left(h\sqrt{\tau}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{-1}\right] = \tau - h_1 - \frac{\partial^2\log\sqrt{\tau}}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \tau_1 - h_1.$$

Résolvons par rapport à h_1 et multiplions par $h\sqrt{\tau}\sqrt{\frac{q}{p}}$; nous aurons

$$hh_1\sqrt{\tau}\sqrt{\frac{q}{p}} = -h\sqrt{\tau}\sqrt{\frac{q}{p}}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\tau\tau_1\left(h\sqrt{\tau}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{-1}\right] + \tau_1 h\sqrt{\tau}\sqrt{\frac{q}{p}},$$

ou, en effectuant et remplaçant au dernier terme le coefficient de τ_1 par son expression (14),

$$hh_1\sqrt{\tau}\sqrt{\frac{q}{p}} = -\frac{\partial(\tau\tau_1)}{\partial\beta} + \tau\tau_1\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{qh}{\sqrt{p}},$$

ce qui peut s'écrire

$$-\frac{\partial\log\tau\tau_1}{\partial\beta} = \frac{hh_1}{\tau_1\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{q}{p}} - \frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{qh}{\sqrt{p}}.$$

Différentions par rapport à α, en ayant égard à l'identité (18);

nous trouvons

$$\tau_2 = \tau - \frac{\partial^2 \log \tau\tau_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} = h_1 + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{hh_1}{\tau_1\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{q}{p}}\right). \tag{19}$$

On arriverait de même, en partant de l'équation (16), à la suivante :

$$\tau_2 = \tau - \frac{\partial^2 \log \tau\tau_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k_{-1} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{kk_{-1}}{\tau_1\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{p}{q}}\right). \tag{20}$$

Il est maintenant visible que, si h_1 est nul, ou si k_{-1} est nul, τ_2 est nul aussi.

Démonstration du théorème V. — Dans l'identité (19) faisons $\tau_2 = 0$. Si h_1 n'est pas nul, nous pourrons écrire

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{hh_1}{\tau_1\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{q}{p}} = -\tau\tau_1\left(h\sqrt{\tau}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{-1},$$

ou, en tenant compte de la formule (17),

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{hh_1}{\tau_1\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{q}{p}} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{qh}{\sqrt{p}\sqrt{\tau}}.$$

Or cette dernière relation revient à

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{q\sqrt{q}\,h^2h_1}{p} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\log\tau\tau_1.$$

Si l'on différentie les deux membres par rapport à β, en ayant égard à l'hypothèse $\tau_2 = 0$, on trouve

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\log\frac{q\sqrt{q}\,h^2h_1}{p} - \tau = 0. \tag{21}$$

Or, si l'on se reporte à l'expression générale de h_2, savoir :

$$h_2 = h_1 + h - k - \frac{\partial^2 \log hh_1}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

on reconnaîtra, en tenant compte de l'identité (18) et des formules (8), que le premier membre de la relation (21) est égal à $-h_2$. On prouverait de même, en partant de l'identité (20), que, si τ_2 est nul et si k_{-1} ne l'est pas, on a nécessairement $k_{-2}=0$.

31. *Classification des surfaces de première classe.* — Convenons d'appeler *surfaces de première classe* les surfaces telles que les différentielles de leurs coordonnées s'expriment explicitement au moyen de fonctions arbitraires de α et de β, et de leurs dérivées, en nombre limité. La méthode de M. Darboux se confondant, pour les équations du type linéaire considéré ci-dessus, avec la méthode de Laplace, toutes les surfaces de première classe pourront être obtenues successivement par l'intégration de l'équation (11), dans laquelle on supposera d'abord $\tau=0$, puis $\tau_1=0$, puis $\tau_2=0$ et ainsi de suite. M. Goursat a, en effet, indiqué (*Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 1) le moyen d'intégrer les diverses équations $\tau_n=0$.

Il est naturel de répartir les surfaces de première classe en divers genres, d'après le rang de l'invariant τ_n, à l'évanouissement duquel elles correspondent. Ainsi les surfaces pour lesquelles τ est nul, ou surfaces de rang zéro, formeront un genre; les surfaces pour lesquelles τ_1 est nul, ou surfaces de rang 1, formeront un genre, etc.

Mais, d'après les théorèmes que nous venons de prouver, il y a lieu de subdiviser chaque genre en trois espèces. En effet, parmi les surfaces de rang $n+1$ (celles pour lesquelles $\tau_{n+1}=0$), il y en a pour lesquelles les invariants h_n et k_{-n} sont nuls tous les deux; pour d'autres, un seul de ces invariants est nul; pour d'autres enfin, et ce sont les plus générales, les invariants h_n et k_{-n} sont tous les deux différents de zéro. Ces trois propriétés différentes serviront à distinguer les trois espèces du genre défini par l'hypothèse $\tau_{n+1}=0$. Cette division en espèces facilitera la recherche des *surfaces isothermiques de première classe*, qui nous occupera bientôt.

IX. — Une méthode générale de recherche des surfaces isothermiques; l'équation fondamentale et la transformation par coordonnée isotrope commune.

32. Les cinq classes de surfaces que nous avons rapprochées dans la première Partie de ces recherches, savoir les surfaces minima et

leurs inverses, les surfaces (B) d'Ossian Bonnet, les surfaces (Θ) de M. Thybaut et leurs inverses, sont des surfaces isothermiques dont les coordonnées s'expriment d'une manière *entièrement explicite* au moyen de *deux fonctions arbitraires*. Les arguments de ces fonctions arbitraires sont les paramètres des lignes de longueur nulle.

D'autre part, les surfaces de révolution et leurs inverses sont des surfaces isothermiques dont les coordonnées s'expriment aussi d'une manière entièrement explicite au moyen d'*une fonction arbitraire*, dont l'argument est le paramètre d'une des familles de lignes de courbure.

D'après cela, on peut prévoir que *l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, dont dépend la recherche des surfaces isothermiques, admet pour caractéristiques les lignes de longueur nulle et les lignes de courbure.*

Cette proposition se vérifie aisément sur l'équation donnée par M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. II, p. 250). Comme nous la démontrerons un peu plus loin, nous ne ferons ici que l'énoncer. Elle domine toute la recherche des fonctions isothermiques dépendant de fonctions arbitraires, puisqu'elle montre que les arguments des fonctions arbitraires ne peuvent être que les paramètres des lignes de longueur nulle et ceux des lignes de courbure. Elle explique en outre pourquoi l'on n'a pu faire servir à cette recherche l'équation primitivement donnée par M. Weingarten, où les variables sont deux des coordonnées cartésiennes, ni l'équation de M. Darboux, où les variables sont les paramètres des lignes de longueur nulle de la représentation sphérique.

33. Nous emploierons, pour aborder le problème général de la détermination des surfaces isothermiques, l'équation précédemment rappelée (n° 26) dont O. Bonnet a fait dépendre la détermination des surfaces d'élément linéaire $4\varphi^2\,d\alpha\,d\beta$. Ici les variables sont les paramètres des lignes de longueur nulle, et *l'équation de déformation* est la suivante :

$$2\varphi''_{\alpha\beta} = \frac{t}{q}\varphi'_\alpha + \frac{r}{p}\varphi'_\beta + \frac{s^2 - rt}{2pq}\varphi. \tag{1}$$

Quand on connaît une fonction ξ et une fonction φ satisfaisant à cette équation, la surface correspondante s'obtient (n° 9) par des quadratures de différentielles exactes.

Pour que cette surface soit isothermique, il faut et il suffit (n° 10) que l'on ait

$$\frac{1}{A_0(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right)=\frac{1}{B_0(\beta)}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right),\tag{2}$$

$A_0(\alpha)$ et $B_0(\beta)$ étant des fonctions qu'on serait en droit de supposer l'une et l'autre égales à l'unité, comme le fait O. Bonnet, mais auxquelles il convient de laisser toute leur indétermination. On se réservera ainsi la possibilité de grandes simplifications de calcul qui apparaîtront dans la suite.

La *condition d'isothermie* (2) exprime que l'équation différentielle des lignes de courbure est

$$A_0\,d\alpha^2-B_0\,d\beta^2=0;\tag{3}$$

développée, elle s'écrit

$$2(B_0p\varphi'_\alpha-A_0q\varphi'_\beta)+(A_0t-B_0r)\varphi=0.\tag{2)'$$

Nous allons discuter le système formé par les équations (1) et (2)'. Nous ne chercherons pas à en éliminer la coordonnée isotrope ξ, ce qui donnerait pour φ *deux* équations aux dérivées partielles du cinquième ordre. Au contraire, le système étant linéaire par rapport à φ, l'élimination de φ ne présente pas de difficultés et donne, comme on le savait d'avance, *une équation aux dérivées partielles de quatrième ordre* pour la fonction ξ. C'est ce calcul que nous allons exécuter.

34. De l'équation (2)' nous tirons, en ayant égard à l'expression (1) de la dérivée $\varphi''_{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned}-2\varphi''_{\alpha^2}=\frac{r}{p}\varphi'_\alpha-\frac{1}{B_0}\left[A_0\left(\frac{qr}{p^2}+\frac{2s}{p}\right)+2A'_0\frac{q}{p}\right]\varphi'_\beta\\+\frac{1}{B_0}\left(A_0\frac{s'_\beta}{p}-B_0\frac{r'_\alpha}{p}+A_0\frac{rt-s^2}{2p^2}+A'_0\frac{t}{p}\right)\varphi.\end{aligned}\tag{4}$$

Formons maintenant, au moyen de l'équation (1) et de cette dernière, la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi''_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta}\varphi''_{\alpha^2},$$

en remplaçant les dérivées $\varphi''_{\alpha\beta}$ et φ''_{α^2} par leurs expressions (1) et (4). Nous trouvons ainsi, tous calculs faits et après multiplication de tous les termes par $B_0 p$, l'équation suivante :

$$(5)\quad \begin{aligned} 0 = {} & \left[2\left(\frac{s'_\alpha}{p} + \frac{s'_\beta}{q}\right) - \frac{rt+3s^2}{pq} - \frac{4rs}{p^2} - \frac{4ts}{q^2} - 2\frac{A'_0}{A_0}\left(\frac{t}{q} + \frac{2s}{p}\right) - 2\frac{B'_0}{B_0}\left(\frac{r}{p} + \frac{2s}{q}\right) - 4\frac{A'_0 B'_0}{A_0 B_0}\right](B_0 p\varphi'_\alpha - A_0 q\varphi'_\beta) \\ & + \left\{A_0\left[2s''_{\beta^2} + \frac{t}{p}s'_\alpha - \left(\frac{t}{q} + \frac{4s}{p}\right)s'_\beta - \frac{2s}{q}t'_\beta + \frac{s^2-rt}{2p}\left(\frac{t}{q} + \frac{4s}{p}\right)\right] - A'_0 t\left(\frac{t}{q} + \frac{2s}{p}\right) + \frac{B_0 A'_0}{A_0}\left(2s'_\alpha + \frac{rt-s^2}{q}\right) + \frac{2A'_0 B'_0}{A_0}r\right\}\varphi \\ & - \left\{B_0\left[2s''_{\alpha^2} + \frac{r}{q}s'_\beta - \left(\frac{r}{p} + \frac{4s}{p}\right)s'_\alpha - \frac{2s}{p}r'_\alpha + \frac{s^2-rt}{2q}\left(\frac{r}{p} + \frac{4s}{q}\right)\right] - B'_0 r\left(\frac{r}{p} + \frac{2s}{q}\right) + \frac{A_0 B'_0}{B_0}\left(2s'_\beta + \frac{rt-s^2}{p}\right) + \frac{2A'_0 B'_0}{B_0}t\right\}\varphi \end{aligned}$$

Remarquons, avant d'aller plus loin, que cette équation est parfaitement symétrique par rapport aux variables α et β, aux fonctions A_0 et B_0. Si donc on déduisait des équations (1) et (2)′ les expressions des dérivées $\varphi''_{\alpha\beta}$ et φ''_{β^2}, puis qu'on écrivît la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\varphi''_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi''_{\beta^2},$$

on retrouverait la relation (5) elle-même. C'est donc là l'*unique équation du quatrième ordre* qui résulte des équations (1) et (2)′.

Remarquons encore qu'elle ne contient les dérivées premières de φ que par le groupe $B_0 p\varphi'_\alpha - A_0 q\varphi'_\beta$, tout comme l'équation (2)′; par suite, il suffit de tirer cette expression de l'équation (2)′ et de la substituer dans la relation (4) pour *éliminer à la fois* φ'_α, φ'_β, *et même* φ, qui se trouve en facteur dans tous les termes. Après division par $A_0 B_0 \varphi$, l'équation résultante prend la forme que voici :

$$(\mathrm{F})\quad \begin{aligned} & \frac{2}{A_0}\left[s''_{\alpha^2} - \frac{s}{p}r'_\alpha - \left(\frac{r}{p} + \frac{2s}{q}\right)s'_\alpha + \left(\frac{r^2}{p^2} + \frac{rs}{pq} + \frac{s^2}{q^2}\right)s\right] - \frac{A'_0}{A_0^2}\left[2s'_\alpha - \left(\frac{s}{q} + \frac{2r}{p}\right)s\right] \\ & = \frac{2}{B_0}\left[s''_{\beta^2} - \frac{s}{q}t'_\beta - \left(\frac{t}{q} + \frac{2s}{p}\right)s'_\beta + \left(\frac{t^2}{q^2} + \frac{ts}{qp} + \frac{s^2}{p^2}\right)s\right] - \frac{B'_0}{B_0^2}\left[2s'_\beta - \left(\frac{s}{p} + \frac{2t}{q}\right)s\right]. \end{aligned}$$

C'est l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, dont dépend la détermination des surfaces isothermiques; nous l'appellerons l'*équation fondamentale*.

Les dérivées quatrièmes de ξ n'y figurent que dans le groupe $B_0 s''_{\alpha^2} - A_0 s''_{\beta^2}$; par suite, l'équation différentielle des caractéristiques se réduit à

$$d\alpha\, d\beta (A_0\, d\alpha^2 - B_0\, d\beta^2) = 0;$$

comparant avec l'équation (3), on voit, comme nous l'avions annoncé au n° 32, que *les caractéristiques de l'équation* (F) *sont les lignes de longueur nulle et les lignes de courbure.*

35. L'introduction des invariants h et k, que nous avons calculés au n° 26 et qui contiennent les dérivées troisièmes de φ, va nous permettre de donner à l'équation fondamentale une forme extrêmement remarquable.

Désignons pour un instant par $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ les coefficients du premier membre de l'équation (F), savoir

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M} = s''_{\alpha^2} - \dfrac{s}{p} r'_\alpha - \left(\dfrac{r}{p} + \dfrac{2s}{q}\right) s'_\alpha + \dfrac{r^2 s}{p^2} + \dfrac{r s^2}{pq} + \dfrac{s^3}{q^2}, \\ \mathfrak{N} = 2 s'_\alpha - s\left(\dfrac{s}{q} + \dfrac{2r}{p}\right), \end{cases}$$

et rappelons la seconde des formules (7) du n° 26

$$(7)\qquad k = -\frac{1}{2}\left(\frac{s'_\alpha}{p} - \frac{s^2}{2pq} - \frac{rs}{p^2}\right).$$

On aperçoit immédiatement l'identité

$$\mathfrak{N} = -4pk.$$

Différentions maintenant la relation (7) par rapport à α et remplaçons s''_{α^2} par son expression tirée de la première des équations (6); nous trouvons

$$-2\frac{\partial k}{\partial \alpha} = \frac{\mathfrak{M}}{p} + \frac{\mathfrak{N}}{2p}\left(\frac{s}{q} - \frac{r}{p}\right),$$

d'où, en raison de la valeur trouvée par $\mathfrak{M}$, résulte

$$\mathfrak{M} = 2p\left[k\left(\frac{s}{q} - \frac{r}{p}\right) - \frac{\partial k}{\partial \alpha}\right].$$

En conséquence, le premier membre de l'équation fondamentale (F) s'écrit, après suppression du facteur -4,

$$\frac{p}{A_0}\left(\frac{\partial k}{\partial \alpha} + \frac{qr - ps}{pq}\right) - \frac{A'_0}{A_0^2}pk = q\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{pk}{A_0 q}\right),$$

et comme cette équation est parfaitement symétrique par rapport à α et β, A_0 et B_0, elle prend la forme définitive

$$(\mathrm{F})' \qquad q\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{pk}{A_0 q}\right) = p\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{qh}{B_0 p}\right),$$

dont la simplicité ne laisse rien à désirer.

Remarque. — On peut retrouver très rapidement cette équation, grâce à l'identité (I) du n° 29. Considérons, en effet, une surface isothermique (Σ) et soit (Σ') l'une de ses transformées par normales parallèles, définie par les formules du n° 15. Pour cette surface (Σ'), les invariants étant h' et k', l'identité (I) s'écrira ainsi :

$$p'\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{q'h'}{p'}\right) = q'\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{p'k'}{q'}\right).$$

Par les substitutions (*voir* la Note, p. 427)

$$p' = \frac{A_0 q}{4\varphi^2}, \qquad q' = \frac{B_0 p}{4\varphi^2}, \qquad h' = k, \qquad k' = h,$$

elle donne immédiatement

$$q\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{pk}{A_0 q}\right) = p\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{qh}{B_0 p}\right),$$

ce qui est l'équation fondamentale pour la surface (Σ).

36. A toute solution (ξ, A_0, B_0) de l'équation fondamentale (F) correspond un système *complètement intégrable*, formé par l'équa-

tion (1), l'équation (2)' et ses deux dérivées premières. Comme ce système détermine les trois dérivées secondes de φ en fonction des dérivées premières et comprend en outre une équation du premier ordre, savoir l'équation (2)', son intégrale générale φ dépend de *deux constantes arbitraires* et pourra être obtenue par la méthode de Mayer ou toute autre équivalente. En raison de la forme linéaire du système, elle sera linéaire et homogène par rapport aux deux constantes arbitraires. Les surfaces isothermiques correspondantes sont en nombre doublement infini; mais nous allons voir qu'il suffit d'en connaître *une seule* pour déterminer *toutes les autres* au moyen d'une quadrature de différentielle exacte.

37. Théorème. — *Étant donnée une solution* (ξ, A_0, B_0) *de l'équation fondamentale, si l'on connaît une solution* φ *du système complet déduit de l'équation de déformation et de l'équation d'isothermie, la solution générale de ce système est* $(C_0 + C_1\xi')\varphi$, *si l'on désigne par* ξ' *la coordonnée isotrope qui correspond à* ξ *dans la transformation par normales parallèles de la surface* (ξ, A_0, B_0, φ), *par* C_0 *et* C_1 *deux constantes arbitraires.*

Soit, en effet, Φ une solution *quelconque* commune à l'équation de déformation et à l'équation d'isothermie. Posons $\Phi = \zeta\varphi$ et substituons dans l'équation d'isothermie (2)

$$B_0 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\Phi^2}\right) = A_0 \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\Phi^2}\right).$$

Si l'on tient compte de l'hypothèse que φ en est une solution, on trouve

$$B_0 \frac{p}{\varphi^2} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) = A_0 \frac{q}{\varphi^2} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\zeta^2}\right).$$

Mais, comme on a, pour la transformation par normales parallèles,

$$(8) \qquad \frac{\partial\xi'}{\partial\beta} = \frac{B_0 p}{4\varphi^2}, \qquad \frac{\partial\xi'}{\partial\alpha} = \frac{A_0 q}{4\varphi^2},$$

la condition précédente exprime que le déterminant fonctionnel de ζ

et de ξ' est nul. Nous poserons en conséquence

$$\zeta = \zeta(\xi'), \qquad \frac{d\zeta}{d\xi'} = \zeta', \qquad \frac{d^2\zeta}{d\xi'^2} = \zeta'',$$

ce qui donnera

$$(9) \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} = \zeta'\frac{\partial\xi'}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial\beta} = \zeta'\frac{\partial\xi'}{\partial\beta}, \qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \zeta''\frac{\partial\xi'}{\partial\alpha}\frac{\partial\xi'}{\partial\beta} + \zeta'\frac{\partial^2\xi'}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Substituons maintenant $\Phi = \zeta\varphi$ dans l'équation de déformation

$$\Phi''_{\alpha\beta} - \frac{t}{2q}\Phi'_\alpha - \frac{r}{2p}\Phi'_\beta + \frac{rt - s^2}{4pq}\Phi = 0;$$

comme φ en est, par hypothèse, une solution, il vient simplement

$$2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{p}{\varphi^2}\right)\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} - \left(\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{q}{\varphi^2}\right)\frac{\partial\zeta}{\partial\beta} = 0,$$

ou, d'après les formules (8),

$$2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\dfrac{\partial^2\xi'}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\dfrac{\partial\xi'}{\partial\beta}}\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} - \frac{\dfrac{\partial^2\xi'}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\dfrac{\partial\xi'}{\partial\alpha}}\frac{\partial\zeta}{\partial\beta} = 0,$$

ou enfin, eu égard aux relations (9),

$$\frac{\partial\xi'}{\partial\alpha}\frac{\partial\xi'}{\partial\beta}\zeta'' = 0.$$

Ainsi ζ est une fonction linéaire de ξ', à coefficients constants, ce qui démontre notre théorème.

Nous dirons que les surfaces qui correspondent à la solution générale

$$\Phi = (C_0 + C_1\xi')\varphi$$

sont les *transformées par coordonnée isotrope commune* de la surface (ξ, φ) qui nous a permis de les déterminer. Cette transformation générale (T_i) des surfaces isothermiques, qui se réduit à une similitude pour $C_1 = 0$, interviendra dans la suite de nos recherches.

On verrait aisément que *le produit de deux transformations* (T_i) *est une transformation* (T_i) *ou une similitude*. Il n'y a donc pas lieu de répéter les transformations (T_i).

Il va de soi que la transformation par coordonnée isotrope commune ne modifie en rien l'équation de déformation ni ses invariants, puisqu'elle ne porte que sur les solutions de cette équation; sa définition même implique la correspondance des lignes de courbure sur la surface (ξ, φ) et sur les surfaces (ξ, Φ).

X. — Problème I : détermination des surfaces pour lesquelles l'invariant τ est nul.

38. Les surfaces pour lesquelles l'invariant τ est nul ne sont autres que les surfaces minima. Nous avons montré, en effet, au n° 10, que la courbure moyenne d'une surface quelconque a pour expression

$$\Omega = \frac{is}{2\varphi\sqrt{pq}} = \frac{i\sqrt{\tau}}{\varphi};$$

elle est donc nulle quand τ est nul. On voit que toutes les solutions de ce premier problème sont des surfaces isothermiques. Il va encore en être de même pour le problème suivant.

XI. — Problème II : détermination des surfaces pour lesquelles l'invariant τ_1 est nul, ainsi que les deux invariants h et k.

39. Nous allons montrer tout d'abord que *l'hypothèse* $\tau_1 = 0$ *caractérise les surfaces dont l'élément linéaire devient celui d'une sphère de rayon* 1, *quand on le multiplie par le carré de la courbure moyenne*. En effet, d'après l'identité générale

$$ds^2 = -\frac{4\tau\, d\alpha\, d\beta}{\Omega^2},$$

établie au n° 10, le produit de l'élément linéaire ds^2 d'une surface quelconque par le carré Ω^2 de la courbure moyenne n'est autre que $-4\tau\, d\alpha\, d\beta$; en écrivant que la courbure totale de cette forme quadratique de différentielles est égale à 1, nous trouvons pour τ l'équation de Liouville

$$\tau - \frac{\partial^2 \log \sqrt{\tau}}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0,$$

qui exprime précisément que l'invariant τ_1 est nul; réciproquement, si $\tau_1 = 0$, cette courbure totale est égale à 1.

Toutes les intégrales de l'équation ci-dessus rentrent dans le type

$$\tau = \frac{f'(\alpha)\,g'(\beta)}{[f(\alpha)+g(\beta)]^2},$$

où f et g sont deux fonctions arbitraires, f' et g' leurs dérivées. Mais on ne restreint pas la généralité en prenant

$$(1)\qquad \tau = \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}, \qquad \sqrt{\tau} = -\frac{1}{\alpha+\beta},$$

ce que nous ferons dorénavant. En conséquence, la fonction ξ est l'intégrale

$$(2)\qquad \xi = \int p\,d\alpha + q\,d\beta,$$

la dérivée p étant définie par l'équation

$$(3)\qquad \frac{\partial^2\sqrt{p}}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\tau'_\alpha}{2\tau}\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta} - \tau\sqrt{p} = 0;$$

la dérivée q se déduit de p par l'identité générale

$$\sqrt{q} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta}.$$

L'équation en $\sqrt{p}$ a été intégrée par M. Goursat (*Bull. Soc. math. de France,* t. XXV, 1897, p. 36). Elle donne

$$(4)\qquad \sqrt{p} = \frac{A+B}{\alpha+\beta} - A', \qquad \sqrt{q} = \frac{A+B}{\alpha+\beta} - B',$$

A et B désignant deux fonctions arbitraires, l'une de α, l'autre de β, dont A' et B' sont les dérivées. Les dérivées p_1 et q_1 d'une autre coordonnée isotrope seront fournies par les formules

$$(5)\qquad \sqrt{p_1} = \frac{A_1 + B_1}{\alpha + \beta} - A'_1, \qquad \sqrt{q_1} = \frac{A_1 + B_1}{\alpha + \beta} - B'_1,$$

où les lettres nouvelles ont des significations évidentes. L'élément linéaire est alors défini par la relation générale

$$(6)\qquad 2\varphi = \sqrt{p}\sqrt{q_1} - \sqrt{q}\sqrt{p_1},$$

et le problème s'achève (n° 9) par des quadratures. On connaît donc toutes les surfaces pour lesquelles l'invariant τ_1 est nul. Les expressions correspondantes des invariants h et k résultent des formules

$$(7)\qquad h = -\sqrt{p}\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{\frac{\tau}{q}}, \qquad k = -\sqrt{q}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{\frac{\tau}{p}},$$

établies au n° 29 et qui donnent ici

$$(8)\qquad h = \frac{B''\sqrt{p}}{(\alpha+\beta)q}, \qquad k = \frac{A''\sqrt{q}}{(\alpha+\beta)p}.$$

40. Arrivons maintenant à notre problème particulier. La double supposition $h = k = 0$ entraîne $A'' = B'' = 0$. Ainsi A et B sont des fonctions linéaires de leur argument. Si l'on pose $A' = m$, $B' = n$, on trouve, avec une nouvelle constante l,

$$\sqrt{p} = \frac{(n-m)\beta + l}{\alpha + \beta}, \qquad \sqrt{q} = \frac{(m-n)\alpha + l}{\alpha + \beta}.$$

La relation (6) donne alors

$$2\varphi = \frac{(m-n)(A_1 - \alpha A'_1) - lA'_1 + (n-m)(B_1 - \beta B'_1) + lB'_1}{\alpha + \beta},$$

expression qui est de la forme

$$\varphi = \frac{\mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{B}(\beta)}{\alpha + \beta}.$$

Il vient, en conséquence (1),

$$ds^2 = 4\frac{(\mathcal{A} + \mathcal{B})^2}{(\alpha + \beta)^2}\,d\alpha\,d\beta, \qquad \Omega = \frac{i}{\mathcal{A} + \mathcal{B}}. \tag{9}$$

Nous sommes dès maintenant en mesure de prouver que *la développée harmonique des surfaces définies par les formules* (9) *est un plan isotrope ou se réduit à un point.*

En effet, on reconnaît facilement que, si l'élément linéaire d'une surface est ds^2, si Ω est sa courbure moyenne et K sa courbure totale, l'élément linéaire de sa développée harmonique est

$$dS^2 = \left(d\frac{1}{\Omega}\right)^2 + \left(1 - \frac{K}{\Omega^2}\right)ds^2.$$

Or on a ici

$$K = \frac{(\alpha + \beta)^2\mathcal{A}'\mathcal{B}'}{(\mathcal{A} + \mathcal{B})^4} - \frac{1}{\mathcal{A} + \mathcal{B}}, \qquad \frac{i}{\Omega} = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

d'où résulte

$$dS^2 = -(\mathcal{A}'\,d\alpha - \mathcal{B}'\,d\beta)^2.$$

Si les dérivées $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ ne sont pas nulles toutes les deux, le second membre est le carré d'une différentielle exacte, ce qui prouve que la développée harmonique est un plan isotrope. Si $\mathcal{A}' = \mathcal{B}' = 0$, elle se réduit à un point.

Dans le premier cas, la surface considérée est une surface (B) d'Ossian Bonnet; dans le second, c'est une sphère.

Nous pouvons donc conclure : *Les surfaces pour lesquelles l'équation de déformation a ses deux invariants h et k égaux à zéro, τ n'étant pas nul, sont les sphères et les surfaces* (B). En conséquence, les solutions du problème II sont fournies exclusivement, comme celles du problème I, par des surfaces isothermiques.

---

(1) On arrive plus directement à ces résultats en intégrant, dans l'hypothèse $h = k = 0$, les équations (7) et l'équation de déformation. Nous avons préféré les rattacher à une analyse plus générale, qui interviendra nécessairement dans la suite et qui donne à l'exposition plus d'uniformité.

Remarque I. — L'élément linéaire des surfaces (B) dépend de deux fonctions arbitraires; la fonction ξ, qui est l'une de leurs coordonnées isotropes, a une expression analytique indépendante de ces fonctions arbitraires. C'est cette circonstance qui a permis à M. Hazzidakis (*Journal de Crelle*, t. 117) de trouver les coordonnées des surfaces (B) en partant de leur élément linéaire et de leur seconde forme quadratique fondamentale. Le fait s'explique tout naturellement dans le mode d'exposition que nous avons adopté : *à toute équation de déformation pour laquelle la suite de Laplace se termine dans un sens, et par suite dans les deux sens* (n° 28), *correspondent un élément linéaire dépendant de deux fonctions arbitraires et une coordonnée isotrope* ξ *qui n'en dépend pas.* La portée de cette remarque s'étend évidemment bien au delà de l'application présente.

Remarque II. — D'après l'analyse précédente, les sphères et les surfaces (B) ont même coordonnée ξ. Les lignes de courbure de la sphère étant indéterminées, *ces deux variétés de surfaces peuvent être considérées comme se correspondant l'une à l'autre dans la transformation* (T_i) *par coordonnée isotrope commune,* transformation dans la définition de laquelle nous avons impliqué (n° 37) la correspondance entre les lignes de courbure.

XII. — Problème III : détermination des surfaces isothermiques pour lesquelles l'invariant τ_1 est nul, un seul des invariants h et k étant égal à zéro.

41. Les surfaces cherchées sont parmi celles dont nous avons défini (n° 39) deux coordonnées isotropes ξ, η par les formules

$$(1)\qquad \sqrt{p} = \frac{A+B}{\alpha+\beta} - A', \qquad \sqrt{q} = \frac{A+B}{\alpha+\beta} - B',$$

$$(2)\qquad \sqrt{p_1} = \frac{A_1+B_1}{\alpha+\beta} - A'_1, \qquad \sqrt{q_1} = \frac{A_1+B_1}{\alpha+\beta} - B'_1,$$

d'où résultent, pour les invariants h et k, les valeurs

$$(3)\qquad h = \frac{B''\sqrt{p}}{(\alpha+\beta)q}, \qquad k = \frac{A''\sqrt{q}}{(\alpha+\beta)p};$$

le coefficient de l'élément linéaire est toujours fourni par la relation

$$(4)\qquad 2\varphi = \sqrt{p}\sqrt{q_1} - \sqrt{q}\sqrt{p_1}.$$

Exprimons que l'invariant h est nul; la dérivée B'' se réduit à zéro et B est une fonction linéaire $m\beta + n$. Il suffit alors de changer A en $A + m\alpha - n$ dans les formules (1) pour trouver

$$(1)'\qquad \sqrt{p} = \frac{A}{\alpha+\beta} - A', \qquad \sqrt{q} = \frac{A}{\alpha+\beta},$$

et il vient alors

$$(5)\qquad 2\varphi = \frac{AA'_1 - A'A_1 - A'B_1 - AB'_1}{\alpha+\beta} + A'B'_1.$$

L'hypothèse de l'isothermie n'ayant pas été invoquée jusqu'ici, les relations (1)', (2) et (5) définissent de la façon la plus générale les surfaces pour lesquelles on a simultanément $\tau_1 = 0$, $h = 0$, $k \neq 0$.

L'équation d'isothermie

$$(6)\qquad \frac{2p\varphi'_\alpha - r\varphi}{A_0} = \frac{2q\varphi'_\beta - t\varphi}{B_0}$$

contiendrait visiblement *cinq* fonctions différentes, savoir A_0, A, A_1, B_0 et B. C'est pourquoi, avant de la former, nous emploierons l'équation fondamentale

$$(F)'\qquad q\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{pk}{A_0 q}\right) = p\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{qh}{B_0 p}\right),$$

dont le second membre s'évanouit avec h. Dès lors, en ayant égard aux relations (3) et (1)', on conclut

$$0 = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{pk}{A_0 q}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{A''}{(\alpha+\beta)A_0\sqrt{q}}\right] = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{A''}{AA_0}\right).$$

Comme les fonctions A_0 et B_0 ne sont définies qu'à un facteur constant près, nous prendrons

$$(7)\qquad A_0 = \frac{A''}{A}.$$

Formons maintenant l'équation d'isothermie (6); eu égard aux relations (1)', (5) et (4), elle se réduit à

$$(8) \qquad AA'_2 + (\alpha + \beta)(A_2A'' - A'A'_2) = \left(B_1 - \frac{B''_1}{B_0}\right) AA'',$$

la lettre A_2 désignant l'expression $AA'_1 - A'A_1$. Le premier membre de cette égalité étant linéaire en β, le second l'est aussi; on a donc

$$B_1 - \frac{B''_1}{B_0} = l\beta + l_0;$$

mais il suffit de faire rentrer dans la fonction B_1 le binome $l\beta + l_0$, dont les coefficients sont constants, pour être en droit de poser

$$(9) \qquad B_0 = \frac{B''_1}{B_1}.$$

Alors, le second membre de l'équation (8) étant nul, quelle que soit la valeur de β, le premier l'est aussi; on a donc

$$(10) \qquad A_2A'' - A'A'_2 = 0, \qquad A'_2 = 0,$$

équations qui entraînent $A_2 = 0$, car, si l'on supposait $A'' = 0$, on aurait $k = 0$ en vertu de l'une des équations (3), tandis que nous supposons ici $h = 0$ et par suite $k \neq 0$. La fonction A_2 étant identiquement nulle, l'expression (5) de φ se réduit à

$$2\varphi = -\frac{A'B_1 + AB'_1}{\alpha + \beta} + A'B'_1,$$

ce que nous écrirons

$$(11) \qquad \varphi = \frac{AB' + BA' - (\alpha + \beta)A'B'}{\alpha + \beta},$$

en remplaçant B_1 par $-2B$.

42. De là et des relations (7) et (9) nous allons déduire que *les surfaces isothermiques pour lesquelles l'invariant h est nul, k étant différent de zéro, sont les surfaces* (Θ) *de M. Thybaut.*

Nous avons, en effet, déjà formé (nº 18) la condition qui exprime que les sphères harmoniques d'une surface isothermique d'élément linéaire

$$ds^2 = H^2(d\rho^2 + d\rho_1^2) \tag{12}$$

touchent un plan. Si Ω et Γ désignent la demi-somme et la demi-différence des courbures principales et si Δ_1 est le premier paramètre différentiel relatif à l'élément linéaire (12), on a

$$\frac{H^2\Gamma}{\Omega}(\Omega^2 + \Delta_1 \log H^2\Gamma) = \text{const.} \tag{13}$$

Si l'on introduit (nº 15) les paramètres α et β des lignes de longueur nulle, en posant

$$d\rho + i\,d\rho_1 = \sqrt{A_0}\,d\alpha, \qquad d\rho - i\,d\rho_1 = \sqrt{B_0}\,d\beta,$$

il vient

$$ds^2 = 4\varphi^2(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta, \qquad H^2 = \frac{4\varphi^2}{\sqrt{A_0 B_0}};$$

de sorte que la condition à vérifier prend la forme

$$\frac{\varphi^2\Gamma}{\Omega\sqrt{A_0B_0}}\left(\Omega^2 + \Delta_1 \log\frac{\varphi^2\Gamma}{\sqrt{A_0B_0}}\right) = \text{const.},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\Gamma}{\Omega\sqrt{A_0B_0}}\left(\varphi^2\Omega^2 + \frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{\varphi^2\Gamma}{\sqrt{A_0B_0}}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{\varphi^2\Gamma}{\sqrt{A_0B_0}}\right) = \text{const.} \tag{13'}$$

Or ici, d'après l'équation (11), nous avons

$$\varphi = \frac{\varpi}{\alpha + \beta}, \tag{11'}$$

en posant

$$\varpi = AB' + BA' - (\alpha + \beta)A'B'. \tag{14}$$

La courbure totale K a donc pour expression

$$K = -\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -\frac{(\alpha+\beta)^2}{\varpi^2}\left[\frac{\partial^2\log\varpi}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}\right],$$

ou encore

$$K = -\frac{1}{\varpi^2} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{\varpi^2}\frac{\partial^2 \log\varpi}{\partial\alpha\,\partial\beta}. \tag{15}$$

Mais, d'après l'identité générale du n° 39

$$ds^2 = -\frac{4\tau\, d\alpha\, d\beta}{\Omega^2} = -\frac{s^2}{pq}\frac{d\alpha\, d\beta}{\Omega^2},$$

rapprochée de l'expression actuelle de τ, on a

$$ds^2 = -\frac{4\, d\alpha\, d\beta}{(\alpha+\beta)^2\Omega^2} = 4\varphi^2\, d\alpha\, d\beta = \frac{\varpi^2\, d\alpha\, d\beta}{(\alpha+\beta)^2};$$

d'où l'on conclut simultanément

$$\Omega^2\varphi^2 = \frac{-1}{(\alpha+\beta)^2}, \tag{16}$$

$$\Omega^2\varpi^2 = -1. \tag{17}$$

En conséquence, l'équation (15) s'écrit

$$K = \Omega^2 - \frac{(\alpha+\beta)^2}{\varpi^2}\frac{\partial^2 \log\varpi}{\partial\alpha\,\partial\beta}. \tag{15$'$}$$

Mais on a toujours $K = \Omega^2 - \Gamma^2$; de sorte qu'il vient

$$\Gamma^2 = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\varpi^2}\frac{\partial^2 \log\varpi}{\partial\alpha\,\partial\beta}. \tag{18}$$

Or on trouve aisément, en partant de l'équation (14),

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\alpha} = [(\alpha+\beta)B' - B]A'', \qquad \frac{\partial\varpi}{\partial\beta} = [(\alpha+\beta)A' - A]B'', \qquad \frac{\partial^2 \log\varpi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -\frac{AA''BB''}{\varpi^2}.$$

Il vient, en conséquence, eu égard aux équations (7), (9) et (11)$'$,

$$\frac{\Gamma}{\sqrt{A_0 B_0}} = i\frac{(\alpha+\beta)AB}{\varpi^2}, \tag{19}$$

$$\frac{\varphi^2\Gamma}{\sqrt{A_0 B_0}} = i\frac{AB}{\alpha+\beta}. \tag{20}$$

Substituons dans la condition (13)′ les résultats fournis par les équations (16), (17), (19) et (20); nous trouverons

$$\frac{(\alpha+\beta)\mathrm{AB}}{\varpi}\left[-\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{\mathrm{AB}}{\alpha+\beta}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{\mathrm{AB}}{\alpha+\beta}\right]=\text{const.},$$

ou, en effectuant et réduisant,

$$\frac{(\alpha+\beta)\mathrm{A'B'}-(\mathrm{AB'}+\mathrm{BA'})}{\varpi}=\text{const.},$$

ce qui a bien lieu, puisque le premier membre se réduit à -1, d'après la relation (14), qui définit la fonction ϖ. Le théorème est donc démontré.

43. *Remarque.* — En appliquant la condition d'isothermie, nous avons trouvé

$$\mathrm{AA}'_1-\mathrm{A'A}_1=0,$$

ce qui prouve que les fonctions A_1 et A sont dans un rapport constant m. On a donc, en comparant les formules (1)′ et (2),

$$\sqrt{p_1}=\frac{\mathrm{B}_1}{\alpha+\beta}+m\sqrt{p},\qquad \sqrt{q_1}=\frac{\mathrm{B}_1}{\alpha+\beta}-\mathrm{B}'_1+m\sqrt{q}.$$

Or la formule

$$2\varphi=\sqrt{p}\sqrt{q_1}-\sqrt{q}\sqrt{p_1}$$

montre que l'élément linéaire ne change pas, si l'on remplace respectivement $\sqrt{p_1}$ et $\sqrt{q_1}$ par $\sqrt{p_1}-m\sqrt{p}$ et $\sqrt{q_1}-m\sqrt{q}$. Ce changement équivaut, d'ailleurs, à un simple déplacement. On peut donc prendre

$$\sqrt{p_1}=\frac{\mathrm{B}_1}{\alpha+\beta},\qquad \sqrt{q}=\frac{\mathrm{B}_1}{\alpha+\beta}-\mathrm{B}'_1.$$

Alors la coordonnée isotrope

$$\eta=\int p_1\,d\alpha+q_1\,d\beta$$

satisfait à l'équation $k=0$ (avec $h\neq 0$). On voit donc que si, pour une surface isothermique une coordonnée isotrope vérifie la condition $h=0$, une autre vérifiera la condition $k=0$. C'est ce qui explique que la dissymétrie de l'hypothèse $h=0$, $k\neq 0$ n'affecte pas les solutions trouvées.

Remarquons encore que *toute surface isothermique, pour laquelle τ_1 est nul, admet une coordonnée isotrope telle que h et k soient tous les deux différents de zéro.* Si, en effet, toutes les coordonnées isotropes d'une telle surface et, en particulier, deux d'entre elles, ξ, η, vérifiaient, par exemple, la condition $h=0$, d'après les explications données au début du n° 41, on aurait pour leurs dérivées

$$\sqrt{p}=\frac{A}{\alpha+\beta}-A', \qquad \sqrt{q}=\frac{A}{\alpha+\beta}, \qquad \sqrt{p_1}=\frac{A_1}{\alpha+\beta}-A'_1, \qquad \sqrt{q_1}=\frac{A_1}{\alpha+\beta};$$

l'égalité (4) donnerait alors

$$2\varphi=\frac{AA'_1-A'A_1}{\alpha+\beta},$$

par suite les rapports $q:\varphi^2$ et $q_1:\varphi^2$ ne dépendraient que de α et l'équation d'isothermie ne pourrait être vérifiée, sauf pour les sphères $(A''=A''_1=0)$.

En conséquence, l'une des coordonnées isotropes des surfaces (B) et des surfaces (Θ) n'annule ni h ni k, tout en vérifiant l'équation $\tau_1=0$. Nous devrons donc retrouver les surfaces (B) et les surfaces (Θ) parmi les solutions du problème qui suit.

XIII. — Problème IV : détermination des surfaces isothermiques pour lesquelles l'invariant τ_1 est nul, les deux invariants h et k étant différents de zéro.

44. D'après les résultats mentionnés au n° 41, les surfaces dont il s'agit ici sont parmi celles que définissent les deux coordonnées isotropes

$$\xi=\int p\,d\alpha+q\,d\beta, \qquad \eta=\int p_1\,d\alpha+q_1\,d\beta \tag{1}$$

quand on prend

$$(2)\qquad \sqrt{p}=\frac{A+B}{\alpha+\beta}-A',\qquad \sqrt{q}=\frac{A+B}{\alpha+\beta}-B',$$

$$(3)\qquad \sqrt{p_1}=\frac{A_1+B_1}{\alpha+\beta}-A'_1,\qquad \sqrt{q_1}=\frac{A_1+B_1}{\alpha+\beta}-B'_1,$$

et dont l'élément linéaire $4\varphi^2\,d\alpha\,d\beta$ est fourni par la relation

$$(4)\qquad 2\varphi=\sqrt{p}\sqrt{q_1}-\sqrt{q}\sqrt{p_1}.$$

Rappelons encore les expressions correspondantes des invariants h et k, savoir

$$(5)\qquad h=\frac{B''\sqrt{p}}{(\alpha+\beta)q},\qquad k=\frac{A''\sqrt{q}}{(\alpha+\beta)p}.$$

Nous aurions maintenant, pour exprimer l'isothermie, à écrire que les fonctions p, q et φ satisfont, conjointement avec deux nouvelles fonctions indéterminées $A_0(\alpha)$, $B_0(\beta)$ à la condition

$$(6)\qquad \frac{r\varphi-2p\varphi'_\alpha}{A_0}=\frac{t\varphi-2q\varphi'_\beta}{B_0}.$$

On aurait ainsi une équation aux fonctions mêlées entre trois fonctions A_0, A, A_1 de la variable α et trois fonctions B_0, B, B_1 de la variable β. Nous simplifierons la solution du problème en nous servant d'abord de l'équation fondamentale

$$(F')\qquad q\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{pk}{A_0 q}\right)=p\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{qh}{B_0 p}\right),$$

où ne figureront que *quatre* fonctions A_0, A, B_0, B. Si l'on substitue dans cette équation les expressions (2) et (5), on trouve

$$(7)\qquad \begin{aligned}&[A+B-(\alpha+\beta)B']\left(\frac{A''}{A_0}\right)'-(A'-B')\frac{A''}{A_0}\\ &\quad=[A+B-(\alpha+\beta)A']\left(\frac{B''}{B_0}\right)'-(B'-A')\frac{B''}{B_0}.\end{aligned}$$

Pour tirer A_0 et B_0 de cette équation, nous différentierons ses deux membres successivement par rapport à α et à β, ce qui donne, tous calculs faits,

$$\left(\frac{A''}{A_0}\right)'' B'' = \left(\frac{B''}{B_0}\right)'' A''. \tag{8}$$

Comme nous supposons maintenant $hk \neq 0$, le produit $A''B''$ est différent de zéro, et nous avons

$$\left(\frac{A''}{A_0}\right)'' = lA'', \qquad \left(\frac{B''}{B_0}\right)'' = lB'',$$

l désignant une constante arbitraire. Intégrant deux fois, on trouve, avec quatre nouvelles constantes,

$$\frac{A''}{A_0} = lA + m\alpha + n, \qquad \frac{B''}{B_0} = lB + m'\beta + n'. \tag{9}$$

Substituons ces résultats dans l'équation (7); elle devient

$$(m - m')(A - \alpha A') - (n + n')A' + (m - m')(B - \beta B') + (n + n')B' = 0. \tag{10}$$

Pour que les fonctions A et B restent arbitraires, on doit prendre

$$m' = m, \qquad n' = -n,$$

c'est-à-dire

$$A_0 = \frac{A''}{lA + m\alpha + n}, \qquad B_0 = \frac{B''}{lB + m\beta - n}. \tag{11}$$

Ce résultat nous en fournit immédiatement un autre. En effet, les fonctions ξ et η entrant d'une façon symétrique dans notre analyse, nous aurions pu former l'équation fondamentale avec p_1 et q_1, ainsi que les expressions de h et de k qui correspondent à la fonction η; nous aurions ainsi trouvé les conditions

$$A_0 = \frac{A''_1}{l_1 A_1 + m_1\alpha + n_1}, \qquad B_0 = \frac{B''_1}{l_1 B_1 + m_1\beta - n_1}, \tag{11$'$}$$

dont nous allons faire usage, et qui, rapprochées des relations analogues (11), donnent

$$\frac{A''}{lA + m\alpha + n} = \frac{A''_1}{l_1 A_1 + m_1\alpha + n_1}, \qquad \frac{B''}{lB + m\beta - n} = \frac{B''_1}{l_1 B_1 + m_1\beta - n_1}. \tag{12}$$

45. Rappelons maintenant la condition d'isothermie

$$\frac{r\varphi - 2p\varphi'_\alpha}{A_0} = \frac{t\varphi - 2q\varphi'_\beta}{B_0}. \tag{6}$$

Si l'on y fait la substitution

$$2\varphi = \sqrt{p}\sqrt{q_1} - \sqrt{q}\sqrt{p_1}, \tag{6'}$$

elle peut s'écrire

$$\sqrt{qq_1}\frac{pr_1 - rp_1}{A_0} + \sqrt{pp_1}\frac{qt_1 - tq_1}{B_0} = 0. \tag{13}$$

Dans cette équation générale introduisons les expressions de r, t, r_1, t_1, déduites des formules (2) et (3), savoir

$$-r = 2A''\sqrt{p} + \frac{2p}{\alpha+\beta}, \qquad -t = 2B''\sqrt{q} + \frac{2q}{\alpha+\beta},$$

$$-r_1 = 2A''_1\sqrt{p_1} + \frac{2p}{\alpha+\beta}, \qquad -t_1 = 2B''_1\sqrt{q_1} + \frac{2q_1}{\alpha+\beta}.$$

Il vient ainsi

$$\frac{A''}{A_0}\sqrt{p_1} - \frac{A''_1}{A_0}\sqrt{p} + \frac{B''}{B_0}\sqrt{q_1} - \frac{B''_1}{B_0}\sqrt{q} = 0. \tag{14}$$

Si l'on remplace p, q, p_1, q_1 par leurs expressions (2) et (3) et qu'on tienne compte des relations (12), la condition d'isothermie prendra la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&(lA + m\alpha + n)[A_1 + B_1 - (\alpha+\beta)A'_1] \\
&- (l_1A_1 + m_1\alpha + n_1)[A + B - (\alpha+\beta)A'] \\
&+ (lB + m\beta - n)[A_1 + B_1 - (\alpha+\beta)B'_1] \\
&- (l_1B_1 + m_1\beta - n_1)[A + B - (\alpha+\beta)B'] = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Si l'on différentie successivement par rapport à α et par rapport à β, on trouve, tous calculs faits,

$$(l - l_1)(A' - B')(A'_1 - B'_1) = 0.$$

Or aucune des dérivées A'', B'', A''_1, B''_1 n'est nulle, puisque nous supposons maintenant $hk \neq 0$. En conséquence, les deux facteurs qui multiplient $l - l_1$ sont différents de zéro et il reste $l_1 = l$.

Si l'on fait $l_1 = l$ dans l'équation (15), il vient, après réductions et suppression du facteur $\alpha + \beta$ commun à tous les termes,

$$(15)' \quad \begin{aligned} &A'(lA_1 + m_1\alpha + n_1) - A'_1(lA + m\alpha + n) + mA_1 - m_1 A \\ &+ B'(lB_1 + m_1\beta - n_1) - B'_1(lB + m\beta - n) + mB_1 - m_1 B = 0, \end{aligned}$$

ce qui exige que les termes dépendant de α et les termes dépendant de β soient séparément égaux à deux constantes γ et $-\gamma$ de somme nulle :

$$(16) \quad \begin{cases} A'(lA_1 + m_1\alpha + n_1) - A'_1(lA + m\alpha + n) + mA_1 - m_1 A - \gamma = 0, \\ B'(lB_1 + m_1\beta - n_1) - B'_1(lB + m\beta - n) + mB_1 - m_1 B + \gamma = 0. \end{cases}$$

Ici se présentent deux hypothèses, $l = 0$ et $l \neq 0$, qu'il faut examiner à part.

46. *Première hypothèse :* $l = 0$. — Si l'on fait $l = l_1 = 0$ dans les équations (11) et (11)', elles donnent

$$(17) \quad \begin{cases} A'' = A_0(m\alpha + n), & A''_1 = A_0(m_1\alpha + n_1), \\ B'' = B_0(m\beta - n), & B''_1 = B_0(m_1\beta - n_1). \end{cases}$$

Sans avoir à pousser les calculs plus loin, nous allons prouver que *les surfaces correspondantes sont, ou bien les transformées par normales parallèles des inverses des surfaces minima, ou bien les surfaces* (B).

En effet, si l'on substitue les valeurs (2) de $\sqrt{p}$ et de $\sqrt{q}$ dans l'expression (6)' de φ, on trouve aisément

$$(18) \qquad (\alpha + \beta)\varphi = \varpi,$$

en posant

$$(18)' \quad 2\varpi = (\alpha + \beta)(A'B'_1 - B'A'_1) + (A + B)(A'_1 - B'_1) - (A_1 + B_1)(A' - B');$$

de sorte que l'élément linéaire est

$$(19) \qquad ds^2 = \frac{4\varpi^2\, d\alpha\, d\beta}{(\alpha + \beta)^2},$$

l'équation différentielle des lignes de courbure étant toujours

$$(20) \qquad A_0\, d\alpha^2 - B_0\, d\beta^2 = 0.$$

Or les surfaces inverses des surfaces minima sont caractérisées par la propriété que leurs sphères harmoniques passent toutes par le même point, ce qui s'exprime, en vertu de la condition nécessaire et suffisante $\theta =$ const. établie au n° 2, par l'équation

$$(21)\qquad -\frac{2}{\theta} = H'^2\Gamma'(\Omega'^2 + \Delta'_1 \log H'^2\Gamma') = \text{const.},$$

qui résulte des développements du n° 18; les accents dont nous affectons toutes les lettres sont destinés à rappeler qu'il s'agit des transformées par normales parallèles des surfaces (S), auxquelles se rapportent les relations (19) et (20).

Pour introduire dans la condition (21) les éléments analytiques relatifs à ces surfaces (S), nous emploierons les identités

$$H'^2\Gamma' = \Omega, \qquad \Omega'^2 = \frac{16\varphi^4\Gamma^2}{A_0 B_0}, \qquad \Delta'_1\psi = \frac{16\varphi^4}{A_0 B_0}\Delta_1\psi,$$

rappelées ou signalées au n° 18. Il vient ainsi

$$(22)\qquad \frac{\varphi^4\Omega}{A_0 B_0}(\Gamma^2 + \Delta_1 \log\Omega) = \frac{\varphi^2\Omega}{A_0 B_0}\left(\varphi^2\Gamma^2 + \frac{\partial \log\Omega}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\log\Omega}{\partial\beta}\right) = \text{const.}$$

Éliminant Γ au moyen de la formule générale

$$\Gamma^2 = \Omega^2 - K = \Omega^2 + \frac{1}{\varphi^2}\,\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

où K désigne la courbure totale, nous aurons

$$\frac{\varphi^2\Omega}{A_0 B_0}\left[\varphi^2\Omega^2 + \frac{\partial^2\log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial\log\Omega}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\log\Omega}{\partial\beta}\right] = \text{const.}$$

Remplaçons maintenant φ par son expression (18)

$$\varphi = \frac{\varpi}{\alpha+\beta}.$$

En vertu de la formule $\Omega^2\varpi^2 = -1$ du n° 42, nous aurons

$$(23)\qquad \Omega = \frac{i}{\varpi},$$

et l'équation (22) deviendra

$$\frac{\varpi^2\Omega}{(\alpha+\beta)^2 A_0 B_0}\left[-\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}+\frac{\partial^2\log\varpi}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{\partial^2\log(\alpha+\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial\log\varpi}{\partial\alpha}\frac{\partial\log\varpi}{\partial\beta}\right]=\text{const.}$$

Cette condition se réduit visiblement à

$$(24)\qquad \frac{\varpi''_{\alpha\beta}}{A_0 B_0(\alpha+\beta)^2}=\text{const.}$$

Tout revient donc à vérifier cette dernière relation. Or l'équation (18)' qui définit ϖ donne, par un calcul facile,

$$2\varpi''_{\alpha\beta}=(\alpha+\beta)(A''B''_1-B''A''_1);$$

et, si l'on tient compte des formules (17), il vient

$$2\varpi''_{\alpha\beta}=-(mn_1-nm_1)A_0B_0(\alpha+\beta)^2,$$

ce qui vérifie la condition (24) caractéristique des surfaces inverses des surfaces minima.

Notre conclusion ne tombe en défaut que si la dérivée $\varpi''_{\alpha\beta}$ est nulle : de là résulte pour φ l'expression déjà trouvée au n° 40, qui ne convient qu'aux sphères et aux surfaces (B) d'Ossian Bonnet. Or les transformées par normales parallèles des sphères sont les surfaces minima, dont toute coordonnée isotrope annule τ, contrairement à notre hypothèse actuelle. Les sphères étant ainsi écartées, il reste les surfaces (B), dont les transformées par normales parallèles sont d'autres surfaces (B), comme nous l'avons démontré au n° 17.

47. *Seconde hypothèse :* $l\neq 0$. — Nous pouvons maintenant, dans les formules (11) et (11)', faire $l=l_1=1$, puisque A_0 et B_0 ne sont déterminées qu'à un facteur constant près. En outre, les numérateurs de ces formules ne contenant que les dérivées secondes A'', B'', A''_1, B''_1, on peut faire rentrer les binomes $m\alpha+n$, $m\beta-n$, $m_1\alpha+n_1$, $m_1\beta-n_1$ respectivement dans les fonctions A, B, A_1, B_1, ce qui revient à supposer nulles les quatre constantes m, n, m_1, n_1 et à prendre

$$(11)''\qquad A_0=\frac{A''}{A}=\frac{A''_1}{A_1},\qquad B_0=\frac{B''}{B}=\frac{B''_1}{B_1}.$$

Alors les équations (16) se simplifient et deviennent

$$(16)' \qquad AA'_1 - A'A_1 = B'B_1 - BB'_1 = C = \text{const.}$$

Je vais prouver que *les surfaces correspondantes sont les transformées par normales parallèles des surfaces* (Θ), *si la constante* C *est nulle; de leurs inverses, si cette constante est différente de zéro* [1]. En d'autres termes, les sphères harmoniques de leurs transformées par normales parallèles sont toutes tangentes à un plan, si $C = 0$; elles sont toutes tangentes à une sphère, si $C \neq 0$.

Pour que la seconde nappe de l'enveloppe de sphères tangentes à une surface (S) soit une sphère de rayon $\frac{1}{\omega}$ (un plan si $\omega = 0$), il faut et il suffit, comme on l'a vu au n° 2, que l'on ait

$$\frac{\lambda\left(\frac{1}{l^2} + \Delta_1 \log\lambda\right)}{\frac{1}{l} - \omega} = \text{const.}$$

Mais ici la sphère enveloppée est la sphère harmonique de la surface (S), qui est isothermique; on a donc (n° 8)

$$l = \frac{1}{\Omega}, \qquad \lambda = H^2\Gamma.$$

Il vient, en conséquence,

$$\frac{H^2\Gamma(\Omega^2 + \Delta_1 \log H^2\Gamma)}{\Omega - \omega} = \text{const.},$$

le paramètre différentiel Δ_1 se rapportant à l'élément linéaire

$$ds^2 = H^2(d\rho^2 + d\rho_1^2) = 4\varphi^2\, d\alpha\, d\beta$$

de la surface (S), dont les lignes de courbure ont pour équation

$$A_0\, d\alpha^2 - B_0\, d\beta^2 = 0.$$

(1) Les fonctions A, B, A_0, B_0 étant les mêmes que l'on suppose $C = 0$ ou $C \neq 0$, les deux variétés de surfaces $C = 0$ et $C \neq 0$ ont même coordonnée isotrope ξ et même équation différentielle pour leurs lignes de courbure; elles se correspondent donc dans la transformation par coordonnée isotrope commune.

Appliquons ce résultat à la surface (S′), transformée de (S) par normales parallèles. Il viendra

$$(25)\qquad \frac{H'^2\Gamma'(\Omega'^2+\Delta'_1\log H'^2\Gamma')}{\Omega'-\omega}=\text{const.}$$

Le paramètre Δ'_1 se rapporte maintenant à l'élément linéaire de (S)′

$$ds'^2=H'^2(d\rho^2+d\rho_1^2)=\frac{A_0B_0}{4\varphi^2}d\alpha\,d\beta.$$

Or nous avons déjà (n° 46) exprimé le numérateur du rapport (25) au moyen de symboles relatifs à la surface (S) et obtenu, à un facteur constant près,

$$\frac{\varpi''_{\alpha\beta}}{A_0B_0(\alpha+\beta)^2}.$$

Quant au dénominateur du rapport (25), d'après une formule établie au n° 15, on a

$$\Omega'=\frac{4\varphi^2\Gamma}{\sqrt{A_0B_0}}=\frac{4\varphi^2}{\sqrt{A_0B_0}}\sqrt{\Omega^2-K}=\frac{4\varphi^2}{\sqrt{A_0B_0}}\sqrt{\Omega^2+\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial^2\log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}}.$$

Mais les relations (18) et (23) donnent

$$\varphi=\frac{\varpi}{\alpha+\beta},\qquad \Omega=\frac{i}{\varpi}.$$

Il vient donc

$$\Omega^2+\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial^2\log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\varpi^2}\frac{\partial^2\log\varpi}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

En conséquence, nous avons

$$\Omega'-\omega=\frac{4\sqrt{\varpi\varpi''_{\alpha\beta}-\varpi'_\alpha\varpi'_\beta}}{(\alpha+\beta)\sqrt{A_0B_0}}-\omega,$$

et la condition (25) se réduit finalement à

$$(25)'\qquad \frac{\varpi''_{\alpha\beta}}{A_0B_0(\alpha+\beta)\left[4\sqrt{\dfrac{\varpi\varpi''_{\alpha\beta}-\varpi'_\alpha\varpi'_\beta}{A_0B_0}}-\omega(\alpha+\beta)\right]}=\text{const.}$$

Telle est la relation qu'il s'agit de vérifier. Reportons-nous à l'équation (18)′ qui définit ϖ,

$$2\varpi = (\alpha+\beta)(A'B'_1 - B'A'_1) + (A+B)(A'_1 - B'_1) - (A_1+B_1)(A'-B').$$

Par des calculs faciles, on en déduit les identités générales

$$2\varpi''_{\alpha\beta} = (\alpha+\beta)(A''B''_1 - B''A''_1),$$
$$4(\varpi\varpi''_{\alpha\beta} - \varpi'_\alpha\varpi'_\beta) = \{A''[A_1+B_1-(\alpha+\beta)A'_1] - A''_1[A+B-(\alpha+\beta)A']\} \times \{B''[A_1+B_1-(\alpha+\beta)B'_1] - B''_1[A+B-(\alpha+\beta)B']\}.$$

Si maintenant on tient compte des équations (11)″ et (16)′, il vient

$$2\varpi''_{\alpha\beta} = A_0B_0(\alpha+\beta)(AB_1 - BA_1),$$
$$4(\varpi\varpi''_{\alpha\beta} - \varpi'_\alpha\varpi'_\beta) = -A_0B_0[AB_1 - BA_1 - C(\alpha+\beta)]^2,$$

de sorte que la condition (25)′ prend la forme définitive

$$\frac{AB_1 - BA_1}{2i(AB_1 - BA_1) - (\omega + 2iC)(\alpha+\beta)} = \text{const.}$$

On voit que, pour la vérifier, il suffit de prendre

$$\omega = -2iC.$$

Ainsi toutes les sphères harmoniques des surfaces (S′), transformées par normales parallèles des surfaces considérées (S), seront tangentes à une sphère de rayon fini si $C \neq 0$, à un plan si $C = 0$. Dans ce dernier cas, les surfaces (S) sont les transformées par normales parallèles des surfaces (Θ) de M. Thybaut; par suite (n° 18), elles sont elles-mêmes des surfaces (Θ) : le fait avait été prévu et expliqué à la fin du n° 43.

48. *Remarque.* — En rapprochant les solutions des problèmes II, III, IV, nous trouvons, pour composer l'ensemble des surfaces isothermiques dont l'élément linéaire devient celui d'une sphère de rayon 1, quand on le multiplie par le carré de la courbure moyenne :

1° Les sphères;
2° Les surfaces (B) d'Ossian Bonnet;

3° Les surfaces (Θ) de M. Thybaut;

4° Les transformées par normales parallèles des surfaces inverses des surfaces minima;

5° Les transformées par normales parallèles des inverses des surfaces (Θ).

D'après cela, on aura l'ensemble des surfaces isothermiques qui jouissent de la propriété qu'exprime (n° 16) l'égalité

$$K[\Gamma^2 ds^2] = 1$$

en prenant les transformées par normales parallèles des cinq variétés de surfaces énumérées ci-dessus, ainsi que nous l'avons expliqué au n° 25. Comme la sphère donne toutes les surfaces minima, nous retrouvons bien les cinq variétés de surfaces obtenues au dernier paragraphe de la première Partie.

NOTE.

L'équation de déformation pour les surfaces isothermiques et la transformation (conforme) par normales parallèles.

Considérons une surface isothermique (Σ) : soit $4\varphi^2 \, d\alpha \, d\beta$ son élément linéaire; soient ξ l'une de ses coordonnées isotropes et

$$A_0 \, d\alpha^2 - B_0 \, d\beta^2 = 0$$

l'équation différentielle de ses lignes de courbure. Si l'on se réfère aux n^os^ 14 et 15 où nous avons étudié la transformation (conforme) par normales parallèles en prenant pour variables les paramètres des lignes de longueur nulle, on verra que l'une des surfaces (Σ') déduite de (Σ) par cette transformation a l'une de ses coordonnées isotropes définie par la formule

$$d\xi' = \frac{A_0 q}{4\varphi^2} \, d\alpha + \frac{B_0 p}{4\varphi^2} \, d\beta.$$

Or, l'équation de déformation pour la surface (Σ) peut (n° 15) s'écrire

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{p}{\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{q}{\varphi^2}\right) = \frac{s^2}{4pq} - \frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} \qquad \left(p = \frac{\partial\xi}{\partial\alpha},\ q = \frac{\partial\xi}{\partial\beta}\right),$$

et, d'après les relations (8) du n° 26, ses invariants sont

$$h = -\frac{s}{4q}\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{s^2}{pq^2}, \qquad k = -\frac{s}{4p}\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{s^2}{qp^2}.$$

Désignons comme toujours par des lettres accentuées les fonctions relatives à la surface transformée (Σ'). Nous aurons, pour les dérivées de ξ',

$$p' = \frac{A_0 q}{4\varphi^2}, \qquad q' = \frac{B_0 p}{4\varphi^2},$$

et, pour les invariants de l'équation de déformation relative à (Σ'),

$$h' = -\frac{s'}{4q'}\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{s'^2}{p'q'^2}, \qquad k' = -\frac{s'}{4p'}\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{s'^2}{q'p'^2}.$$

Nous allons calculer h'. Les expressions de p' et de q' donnent

$$\frac{s'}{q'} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{p}{\varphi^2}, \qquad \frac{s'^2}{p'q'^2} = \frac{4\varphi^2}{A_0 q}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{p}{\varphi^2}\right)^2.$$

De là résulte

$$h' = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{p}{\varphi^2}\left(\frac{2\dfrac{\partial^2\log p}{\partial\alpha\,\partial\beta} - 4\dfrac{\partial^2\log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\log\dfrac{p}{\varphi^2}} - \frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{q}{\varphi^2}\right).$$

Mais, en vertu de l'équation de déformation, cette expression de h' se réduit à

$$\frac{s^2}{4pq} - \frac{\partial^2\log\sqrt{p}}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -\frac{s}{4p}\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{s^2}{qp^2} = k.$$

Un calcul analogue prouverait que k' est égal à h. Il est d'ailleurs connu que la double hypothèse $h' = k$, $k' = h$ entraîne l'égalité, à l'ordre près, de tous les invariants successifs des deux équations. D'où ce théorème :

Théorème. — *L'équation de déformation relative à une surface isothermique* (Σ'), *transformée par normales parallèles d'une surface* (Σ), *a les mêmes invariants, rangés en ordre inverse, que l'équation de déformation relative à la surface* (Σ).

Nous avons déjà fait (n° 35, *Remarque*) une application de cet énoncé; nous aurons encore à l'invoquer dans la troisième Partie de ces *Recherches*.

(*A suivre.*)