ÉMILE PICARD

Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce relatives à une surface algébrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 22 (1905), p. 69-100
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1905_3_22__69_0>

SUR LA FORMULE GÉNÉRALE

DONNANT LE NOMBRE DES

INTÉGRALES DOUBLES DISTINCTES DE SECONDE ESPÈCE

RELATIVES A UNE SURFACE ALGÉBRIQUE,

PAR M. ÉMILE PICARD.

Dans deux Mémoires publiés en 1903, dans ces *Annales*, j'ai établi une formule donnant le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce relatives à une surface algébrique. Cette formule a été établie dans l'hypothèse où certaines circonstances exceptionnelles ne se présentaient pas; il a été supposé que la connexion linéaire de la surface était égale à l'unité, et qu'une certaine équation différentielle linéaire E n'admettait pas comme solution un polynome en y. Je ferai connaître ici la formule générale applicable à tous les cas, telle que je l'ai donnée dans les *Comptes rendus* (21 novembre et 5 décembre 1904).

J'ai besoin de m'appuyer sur un théorème, important par lui-même, relatif à une forme remarquable de la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface ait une connexion linéaire supérieure à *un : l'équation* E, *à laquelle je viens de faire allusion, devra avoir comme solutions distinctes autant de polynomes qu'il y a d'intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce.*

Quant à *la formule générale donnant le nombre* ρ_0, on peut l'écrire :

$$\rho_0 = \mathrm{N} + d - 4p - (m-1) + 2r - (\rho - 1).$$

La démonstration de cette formule est le principal objet de ce travail. Au lieu de renvoyer pour les citations aux Mémoires que j'ai publiés dans différents recueils sur la théorie des surfaces algébriques, je prie le lecteur de se reporter aux Tomes I et II de la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, que j'ai rédigée avec la collaboration de M. Simart; je la désignerai par *F. A.*

I. — Sur une propriété des surfaces dont la connexion linéaire est supérieure à *un*.

1. Dans mes recherches antérieures j'ai supposé que l'on avait à faire à une surface, pour laquelle ne se présentaient pas certaines circonstances exceptionnelles. On supposait que la connexion linéaire de la surface était égale à l'*unité* (*F. A.*, t. II, p. 377), et, en outre, (p. 327) que l'équation E n'admettait pas comme solution un polynome en y. Examinons de plus près ces deux conditions; cette étude va nous conduire d'abord à une propriété intéressante caractéristique des surfaces dont la connexion linéaire dépasse l'unité.

2. Reprenons l'équation différentielle linéaire E, déjà tant de fois considérée, à laquelle satisfont les périodes de l'intégrale abélienne arbitraire de seconde espèce

$$\int \frac{Q(x, y, z)\, dx}{f'_z} \tag{1}$$

relative à la courbe entre x et z

$$f(x, y, z) = 0,$$

$Q(x, y, z)$ étant un polynome en x, y, z s'annulant sur la courbe double. Désignons toujours par Ω_i la période correspondant au point b_i. L'analyse développée (*F. A.*, t. II, p. 377) nous permet, avec un léger complément, de formuler une conclusion générale.

Supposons que, parmi les Ω_i, il y en ait h ($h \leqq 2p$) linéairement indépendantes; je dis que *la surface aura alors exactement $2p - h$ intégrales de différentielles totales de seconde espèce distinctes*.

Le raisonnement du n° 26 (*F. A.*, t. II, p. 377) montre d'abord immédiatement que la surface possède certainement $2p - h$ intégrales de différentielles totales de seconde espèce distinctes, les constantes arbitraires étant $C_1, C_2, \ldots, C_{2p-h}$. Inversement, supposons que la surface possède $2p - h'$ intégrales distinctes de seconde espèce, h'

étant inférieur ou égal à h. Reprenant les intégrales

$$\int \mathrm{I}_\lambda \, dx \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, 2p)$$

de la page 378, on peut, évidemment, trouver un cycle pour lequel la période correspondante s'augmente de

$$\Omega_\mu^\lambda$$

quand y tourne autour du point singulier b_μ. Si donc le coefficient de dx dans une intégrale de différentielle totale est égal à

$$a_1 \mathrm{I}_1 + a_2 \mathrm{I}_2 + \ldots + a_{2p} \mathrm{I}_{2p},$$

les a étant des fonctions rationnelles de y, on aura nécessairement, puisque les périodes de

$$\int (a_1 \mathrm{I}_1 + \ldots + a_{2p} \mathrm{I}_{2p}) \, dx$$

ne dépendent pas de y, les relations

$$a_1 \Omega_\mu^1 + a_2 \Omega_\mu^2 + \ldots + a_{2p} \Omega_\mu^{2p} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, h).$$

Nous avons là h équations entre les a, et il y aura à adjoindre à ces équations (comme à la page 378) $2p - h$ autres équations, où ne pourront figurer plus de $2p - h$ constantes arbitraires. Nous aurons donc seulement $2p - h$ intégrales distinctes de seconde espèce, et l'on a, par suite, $h' = h$.

Il y a donc un lien très étroit entre le nombre des Ω_i linéairement indépendants relatifs à l'équation E et le nombre des intégrales distinctes de seconde espèce de la surface : *Si h est le nombre des premiers, le nombre des secondes sera $2p - h$.*

3. Nous allons aller plus loin et donner la forme la plus simple à la condition pour que la surface ait un nombre déterminé d'intégrales de différentielles totales de seconde espèce. Le théorème que nous avons en vue est le suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface ait r inté-

grales distinctes de différentielles totales de seconde espèce est que l'équation E *soit vérifiée par r polynomes en y linéairement indépendants.*

La démonstration de ce théorème va nécessiter quelques remarques préliminaires.

4. Reportons-nous à la page 99 du Tome I (*F. A.*), où nous avons déjà considéré l'équation différentielle linéaire E, correspondant à une intégrale (1) arbitraire. Désignons maintenant par

$$(\sigma)\qquad \omega'_i = m^i_1\,\omega_1 + m^i_2\,\omega_2 + \ldots + m^i_{2p}\,\omega_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p)$$

une substitution quelconque du groupe de l'équation E; les m sont des entiers réels. En désignant par

$$P_1,\quad P_2,\quad \ldots,\quad P_{2p}$$

les périodes correspondant aux mêmes cycles que les ω d'une intégrale de différentielle totale de seconde espèce (transcendante), nous avons vu (*loc. cit.*) qu'elles satisfaisaient aux relations

$$(2)\qquad P_i = m^i_1\,P_1 + m^i_2\,P_2 + \ldots + m^i_{2p}\,P_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p),$$

et il y a autant de ces relations qu'il y a de substitutions fondamentales dans le groupe de E. Il a été démontré que, si l'on peut satisfaire à toutes ces relations, r étant le nombre des lettres P restant arbitraires, il y a pour la surface r intégrales distinctes de seconde espèce (transcendantes).

Ceci rappelé, cherchons à quelles conditions l'équation E admettra comme solution un polynome. Celui-ci serait de la forme

$$\lambda_1\,\omega_1 + \lambda_2\,\omega_2 + \ldots + \lambda_{2p}\,\omega_{2p},$$

les λ étant des constantes. Il faut et il suffit que l'expression précédente ne change pas quand on effectue sur les ω toutes les substitutions du groupe de E; car, dans ces conditions, elle est uniforme et, par suite, rationnelle, puisqu'il n'y a pas de points singuliers essentiels. D'ailleurs, cette fonction rationnelle se réduira à un polynome, puisque chaque point singulier est seulement de nature logarithmique.

On aura donc

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \ldots + \lambda_{2p}\omega_{2p}$$
$$= \lambda_1(m_1^1\omega_1 + m_2^1\omega_2 + \ldots + m_{2p}^1\omega_{2p}) + \lambda_2(m_1^2\omega_1 + m_2^2\omega_2 + \ldots + m_{2p}^2\omega_{2p}) + \ldots,$$

ce qui entraîne les équations

$$(3) \qquad \lambda_i = \lambda_1 m_i^1 + \lambda_2 m_i^2 + \ldots + \lambda_{2p} m_i^{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Si le théorème énoncé au paragraphe précédent est exact, la possibilité de satisfaire à l'ensemble des équations (2) entraîne la même possibilité pour l'ensemble des équations (3), et le nombre des arbitraires, pour les P et les λ, sera le même. Telle est la question algébrique à laquelle nous sommes ramené.

5. Il est manifeste que, si le groupe de E était quelconque, il n'y aurait, au point de vue qui nous occupe, aucune connexion entre les systèmes (2) et (3), mais ce groupe n'est pas quelconque. Il résulte, en effet, de propositions classiques sur les relations entre les périodes de deux intégrales abéliennes, que les ω peuvent être choisis de manière que le groupe des substitutions (σ) satisfasse à la condition suivante : Soient

$$\begin{array}{lllll} \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \ldots, & \omega_{2p}, \\ \upsilon_1, & \upsilon_2, & \upsilon_3, & \ldots, & \upsilon_{2p} \end{array}$$

deux séries de variables; toutes les substitutions (σ) transformeront en elles-mêmes la forme bilinéaire

$$F = \omega_1\upsilon_2 - \omega_2\upsilon_1 + \omega_3\upsilon_4 - \omega_4\upsilon_3 + \ldots + \omega_{2p-1}\upsilon_{2p} - \omega_{2p}\upsilon_{2p-1}$$

quand on effectue simultanément sur les ω et sur les υ la même substitution du groupe. Ce point important peut se démontrer avec précision de la manière suivante. Considérons pour une valeur particulière y_0 de y, sur la surface de Riemann correspondant à la relation entre x et z

$$(R) \qquad f(x, y_0, z) = 0,$$

le contour de Riemann formé de p rétrosections (C, D) réunies deux à deux à la manière d'une chaîne. C'est le contour désigné par K dans mon *Traité d'Analyse* (t. II, p. 426). Quand y partant de y_0 revient en ce point après avoir décrit un contour quelconque, le contour K s'est déformé et est devenu un autre contour K′ du même type formé des rétrosections (C′, D′) réunies deux à deux en chaîne.

Considérons, sur la surface R, deux intégrales arbitraires de seconde espèce U et V aux périodes respectives $\omega_1, \ldots, \omega_{2p}$ et $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{2p}$; l'intégrale classique

$$\int \mathrm{U}\, d\mathrm{V}$$

prise le long du contour K donne, comme on sait, la combinaison

$$(\alpha) \qquad \omega_1\upsilon_2 - \omega_2\upsilon_1 + \ldots + \omega_{2p-1}\upsilon_{2p} - \omega_{2p}\upsilon_{2p-1};$$

elle est, d'autre part, égale à la somme des résidus des pôles de $\mathrm{U}\dfrac{d\mathrm{V}}{dx}$. Avec le contour K′, on obtiendra la combinaison

$$(\alpha') \qquad \omega'_1\upsilon'_2 - \omega'_2\upsilon'_1 + \ldots + \omega'_{2p-1}\upsilon'_{2p} - \omega'_{2p}\upsilon'_{2p-1}$$

qui sera égale à la somme des mêmes résidus. Il y a donc égalité entre les deux expressions (α) et (α'); d'ailleurs, les ω' sont des fonctions linéaires des ω, et les υ' sont égales aux mêmes expressions linéaires des υ. En écrivant l'égalité de (α) et (α'), on a une identité par rapport aux ω et aux υ, car on a pu choisir U et V de manière que ces périodes soient arbitraires; l'égalité est donc une identité, ce qui revient à dire que la forme (α) est transformée en elle-même. C'est à cette propriété de toute substitution du groupe de E qu'est due, comme nous allons le voir, la connexion entre les systèmes (2) et (3).

6. Si, dans la forme F, nous posons

$$(4) \qquad \begin{cases} \upsilon_1 = -\Omega_2, & \upsilon_3 = -\Omega_4, & \ldots, & \upsilon_{2p-1} = -\Omega_{2p}, \\ \upsilon_2 = \quad \Omega_1, & \upsilon_4 = \quad \Omega_3, & \ldots, & \upsilon_{2p} = \quad \Omega_{2p-1}, \end{cases}$$

la forme F devient

$$\mathrm{F} = \omega_1\Omega_1 + \omega_2\Omega_2 + \ldots + \omega_{2p}\Omega_{2p}.$$

D'après ce qui précède, cette forme bilinéaire se transforme en elle-même, quand on effectue sur les ω la substitution σ, et que l'on effectue en même temps sur les Ω la substitution correspondante résultant du changement de variable (4), la substitution (σ) ayant été effectuée sur les υ en même temps que sur les ω. Nous appellerons Σ la substitution correspondant à la substitution σ, effectuée sur les Ω. Désignons cette dernière par

$$(\Sigma) \qquad \Omega'_i = M_1^i \Omega_1 + M_2^i \Omega_2 + \ldots + M_{2p}^i \Omega_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

On a identiquement

$$\omega_1 \Omega_1 + \omega_2 \Omega_2 + \ldots + \omega_{2p} \Omega_{2p} = \omega'_1 \Omega'_1 + \omega'_2 \Omega'_2 + \ldots + \omega'_{2p} \Omega'_{2p},$$

et de là se déduisent immédiatement des relations entre les m et les M. On voit bien aisément que, en vertu de ces relations, la substitution inverse de Σ, c'est-à-dire l'expression des Ω en fonction des Ω', correspond à

$$\Omega_i = m_i^1 \Omega'_1 + m_i^2 \Omega'_2 + \ldots + m_i^{2p} \Omega'_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Or posons maintenant, dans les équations (2),

$$\begin{array}{llll} P_1 = -Q_2, & \ldots, & P_{2p-1} = -Q_{2p}, \\ P_2 = Q_1, & \ldots, & P_{2p} = Q_{2p-1}; \end{array}$$

le système de ces équations (2) devient manifestement

$$(5) \qquad Q_i = M_1^i Q_1 + M_2^i Q_2 + \ldots + M_{2p}^i Q_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p),$$

d'après la manière même dont on passe de la substitution σ à la substitution Σ.

Dans la question qui nous occupe, on peut donc remplacer le système des équations (2), pris bien entendu pour toutes les substitutions du groupe de E, par le système des équations (5); on doit établir que, pour les équations (5) et les équations (3), le degré d'indétermination dans la solution (les Q et les λ étant considérées comme les inconnues) est le même.

La chose est immédiate si nous transformons encore le système (5) en résolvant par rapport aux lettres Q du second membre, ce qui nous ramène à la substitution inverse et donne le système $(5)'$

$$(5)' \qquad Q_i = m_i^1 Q_1 + m_i^2 Q_2 + \ldots + m_i^{2p} Q_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Or, le système $(5)'$ n'est autre que le système (3); il suffit de poser

$$\lambda_1 = Q_1, \qquad \lambda_2 = Q_2, \qquad \ldots, \qquad \lambda_{2p} = Q_{2p}.$$

On voit ainsi bien nettement que, *à toute solution du système* (2), *correspond une solution du système* (3). Il y a donc le même degré d'indétermination dans les deux systèmes et le théorème est établi. Nous pouvons dire que, *à toute intégrale de différentielle totale de seconde espèce* (*transcendante*), *correspond un système de quantités* P; *par suite, à toute intégrale de cette nature correspond un certain polynome en* y, *solution de* E *et, inversement, à tout polynome en* y, *solution de* E, *correspond, pour la surface, une intégrale de différentielle totale.*

7. Il ne sera pas sans intérêt de faire une vérification directe pour $p = 2$. Écrivons la substitution σ sous la forme

$$\begin{aligned}
\omega'_1 &= a_1\omega_1 + b_1\omega_2 + c_1\omega_3 + d_1\omega_4,\\
\omega'_2 &= a_2\omega_1 + b_2\omega_2 + c_2\omega_3 + d_2\omega_4,\\
\omega'_3 &= a_3\omega_1 + b_3\omega_2 + c_3\omega_3 + d_3\omega_4,\\
\omega'_4 &= a_4\omega_1 + b_4\omega_2 + c_4\omega_3 + d_4\omega_4.
\end{aligned}$$

Cette substitution effectuée à la fois sur les ω et les υ transformant en elle-même la forme bilinéaire

$$\omega_1\upsilon_2 - \omega_2\upsilon_1 + \omega_3\upsilon_4 - \omega_4\upsilon_3,$$

on aura les relations

$$\begin{aligned}
a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3 &= 1,\\
c_1 d_2 - c_2 d_1 + c_3 d_4 - c_4 d_3 &= 1,\\
a_1 c_2 - a_2 c_1 + a_3 c_4 - a_4 c_3 &= 0,\\
a_1 d_2 - a_2 d_1 + a_3 d_4 - a_4 d_3 &= 0,\\
b_1 c_2 - b_2 c_1 + b_3 c_4 - b_4 c_3 &= 0,\\
b_1 d_2 - b_2 d_1 + b_3 d_4 - b_4 d_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Le système des équations (2) est ici

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} P_1 = a_1 P_1 + b_1 P_2 + c_1 P_3 + d_1 P_4, \\ P_2 = a_2 P_1 + b_2 P_2 + c_2 P_3 + d_2 P_4, \\ P_3 = a_3 P_1 + b_3 P_2 + c_3 P_3 + d_3 P_4, \\ P_4 = a_4 P_1 + b_4 P_2 + c_4 P_3 + d_4 P_4 \end{cases}$$

et le système des équations (3) est

$$(\beta)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 + a_4 \lambda_4, \\ \lambda_2 = b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + b_3 \lambda_3 + b_4 \lambda_4. \\ \lambda_3 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + c_3 \lambda_3 + c_4 \lambda_4, \\ \lambda_4 = d_1 \lambda_1 + d_2 \lambda_2 + d_3 \lambda_3 + d_4 \lambda_4. \end{cases}$$

Ce sont les systèmes (α) et (β) que nous avons à comparer. Or, si l'on pose dans les équations (α)

$$\begin{aligned} P_1 &= -Q_2, & P_3 &= -Q_4, \\ P_2 &= Q_1, & P_4 &= Q_3, \end{aligned}$$

on a les équations du type des équations (5)

$$(\gamma)\qquad \begin{cases} Q_1 = b_2 Q_1 - a_2 Q_2 + d_2 Q_3 - c_2 Q_4, \\ Q_2 = -b_1 Q_1 + a_1 Q_2 - d_1 Q_3 + c_1 Q_4, \\ Q_3 = +b_4 Q_1 - a_4 Q_2 + d_4 Q_3 - c_4 Q_4, \\ Q_4 = -b_3 Q_1 + a_3 Q_2 - d_3 Q_3 + c_3 Q_4 \end{cases}$$

et l'on trouve les équations correspondant aux équations (5)′ en résolvant les équations (γ) par rapport aux lettres Q qui sont dans le second membre et en se servant des relations entre les a, b, c, d. On a ainsi

$$\begin{aligned} Q_1 &= a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_3 Q_3 + a_4 Q_4, \\ Q_2 &= b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + b_3 Q_3 + b_4 Q_4, \\ Q_3 &= c_1 Q_1 + c_2 Q_2 + c_3 Q_3 + c_4 Q_4, \\ Q_4 &= d_1 Q_1 + d_2 Q_2 + d_3 Q_3 + d_4 Q_4. \end{aligned}$$

Ces dernières équations sont les équations (β) quand on pose

$$\lambda_1 = Q_1, \qquad \lambda_2 = Q_2, \qquad \lambda_3 = Q_3, \qquad \lambda_4 = Q_4$$

et cela est bien conforme à la démonstration générale du paragraphe précédent. La vérification est donc complète.

8. Le théorème général, qui vient d'être établi sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce, aurait pu être démontré par une autre voie. D'après ce que nous avons établi autrefois, la recherche des intégrales de différentielles totales de seconde espèce peut être faite de la manière suivante. Soient, comme habituellement, $2p$ intégrales distinctes de seconde espèce

$$I_h = \int \frac{Q_h(x, y, z)\, dx}{f'_z} \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2p)$$

de la courbe entre x et z

$$f(x, y, z) = 0;$$

désignons par

$$\omega_1^h, \quad \omega_2^h, \quad \ldots, \quad \omega_{2p-1}^h, \quad \omega_{2p}^h$$

les $2p$ périodes de I_h prises suivant le système des p rétrosections (C, D) de Riemann, un ω d'indice impair et le suivant correspondant respectivement aux parties C et D de la rétrosection. On doit considérer le système d'équations en a

$$\text{(S)} \qquad a_1\omega_k^1 + a_2\omega_k^2 + \ldots + a_{2p}\omega_k^{2p} = P_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p),$$

les P étant des constantes satisfaisant aux relations rappelées plus haut. Ces équations donnent, pour les a, des fonctions rationnelles de y.

Rappelons-nous maintenant que, si l'on a les périodes

$$\begin{matrix} \omega_1^h, & \omega_2^h, & \ldots, & \omega_{2p-1}^h, & \omega_{2p}^h, \\ \omega_1^{h'}, & \omega_2^{h'}, & \ldots, & \omega_{2p-1}^{h'}, & \omega_{2p}^{h'} \end{matrix}$$

correspondant à deux intégrales I_h et $I_{h'}$, l'expression

$$\omega_1^h\omega_2^{h'} - \omega_2^h\omega_1^{h'} + \ldots + \omega_{2p-1}^h\omega_{2p}^{h'} - \omega_{2p}^h\omega_{2p-1}^{h'}$$

reste invariable par les substitutions du groupe déjà tant de fois considéré et est, par suite, un polynome en y. On déduit alors des équations (S) que la combinaison

$$(\delta)\qquad P_1\omega_2^h - P_2\omega_1^h + \ldots + P_{2p-1}\omega_{2p}^h - P_{2p}\omega_{2p-1}^h$$

est une fonction rationnelle de y et, par suite, un polynome. Si donc il y a r arbitraires parmi les constantes P, il y aura r combinaisons distinctes (δ) qui donneront des polynomes; par conséquent, l'équation E admettra comme solutions r polynomes distincts.

Le même raisonnement démontre la réciproque. Supposons qu'il y ait r expressions (δ) distinctes se réduisant à des polynomes pour des valeurs des constantes P (bien entendu, quel que soit $h = 1, 2, \ldots, 2p$). Le système des équations (S) peut être remplacé par un système équivalent Σ de la forme

$$(\Sigma)\qquad a_1\pi_k^1 + a_2\pi_k^2 + \ldots + a_{2p}\pi_k^{2p} = U_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p),$$

les π et les U étant des polynomes en y; de là on tire pour les a des fractions rationnelles de y; à chaque système de valeurs convenables des constantes P correspond donc une intégrale de différentielle totale de seconde espèce, ce qui démontre la réciproque.

Cette seconde démonstration montre de plus comment les intégrales de seconde espèce peuvent se déduire des polynomes solutions des équations du type E [1].

---

[1] En approfondissant davantage la démonstration précédente, on peut, comme je l'ai fait dans une Note des *Comptes rendus* (16 janvier 1905), établir la formule

$$(\beta)\qquad r_0 = r - (p_g - p_n)$$

où r et r_0 désignent respectivement les nombres des intégrales distinctes de *seconde* et de *première* espèce, et où p_g et p_n représentent les genres *géométrique* et *numérique* de la surface. J'ai aussi montré aisément que l'on a

$$r \leqq 2(p_g - p_n).$$

La relation (β) a été trouvée indépendamment par M. Severi (*Atti della Accad. di Torino*, 22 janvier 1905), qui avait montré antérieurement qu'une surface ayant une connexion linéaire supérieure à *un* est *irrégulière* ($p_g \neq p_n$) (*Accademia dei Lincei*, septembre 1904). Récemment, M. Castelnuovo a montré dans les *Comptes rendus* (23 janvier 1905) que l'on a, dans tous les cas, l'égalité

$$r = 2(p_g - p_n).$$

Ce beau résultat qu'il a déduit de ses études et de celles de M. Enriques sur les systèmes linéaires de courbes pourra être établi en restant au point de vue où je me place dans ces questions; j'y reviendrai ailleurs.

II. — Sur le nombre des périodes de certaines intégrales doubles.

9. Nous venons d'étudier, dans la Section précédente, l'équation E à laquelle satisfont les périodes de l'intégrale abélienne de *seconde espèce*

$$\int \frac{Q(x, y, z)\,dx}{f'_z}.$$

Nous avons envisagé précédemment (par exemple, *F. A.*, t. II, p. 217 et 351) une autre équation différentielle linéaire qui a été appelée E'; c'est l'équation à laquelle satisfont les périodes de l'intégrale abélienne arbitraire (n'étant pas nécessairement de seconde espèce)

$$\int \frac{P(x, y, z)\,dx}{f'_z}, \tag{6}$$

P passant toujours par la courbe double.

Cette équation est d'ordre

$$2p + m - 1$$

et, parmi les périodes de (6), se trouvent $m - 1$ polynomes.

Qu'arrive-t-il pour l'équation E' quand la surface possède r intégrales de différentielles totales de seconde espèce? Il y a, pour l'équation E', une intégrale particulière relative à chaque point critique b_i que nous continuons à dénommer Ω_i.

Nous allons montrer que, *parmi les Ω_i, il y en a*

$$2p + m - 1 - r$$

linéairement indépendantes, et inversement, s'il y a

$$2p + m - 1 - r$$

Ω linéairement indépendants, la surface possède r intégrales simples de seconde espèce. C'est une propriété de l'équation E' analogue à la propriété de l'équation E démontrée au n° 2 de ce Mémoire.

10. Parmi les Ω il y en a certainement au moins $2p - r$ linéairement indépendants, c'est-à-dire qui correspondent à des cycles distincts sur

la surface de Riemann relative à l'équation entre x et z

$$f(x, y, z) = 0,$$

puisqu'il en est ainsi dans le cas de l'équation E. Désignons par

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p-r}$$

les Ω correspondant à ces cycles. A ces $2p - r$ périodes de (6) adjoignons r autres périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ correspondant sur la surface de Riemann à des cycles formant, avec les cycles qui sont relatifs aux Ω précédents, un système complet sur la surface de Riemann. Nous aurons alors pour l'équation E' les $2p + m - 1$ intégrales indépendantes

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p-r}, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_r, \quad \pi_2, \quad \ldots, \quad \pi_m,$$

les π désignant, comme dans tout le Chapitre XI (*F. A.*, t. II), les polynomes correspondant aux points logarithmiques à l'infini.

Soient maintenant

$$(7) \qquad \Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p-r}, \quad \Omega_{2p-r+1}, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p+m-1-\tau},$$

$2p + m - 1 - \tau$ fonctions Ω linéairement indépendantes, formées des $2p - r$ fonctions Ω déjà considérées et d'un certain nombre d'autres. Ces dernières, que nous avons désignées par

$$(8) \qquad \Omega_{2p-r+1}, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p+m-1-\tau},$$

correspondent à des cycles de la surface de Riemann qui, sur celle-ci regardée comme fermée, se ramènent aux cycles relatifs à $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{2p-r}$; par suite, les expressions (8) s'expriment linéairement à l'aide de

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p-r}, \quad \pi_2, \quad \ldots, \quad \pi_m.$$

Soit ainsi

$$(9) \qquad \Omega_h = \lambda_1^h \Omega_1 + \lambda_2^h \Omega_2 + \ldots + \lambda_{2p-r}^h \Omega_{2p-r} + \mu_2^h \pi_2 + \ldots + \mu_m^h \pi_m$$
$$(h = 2p - r + 1, \ldots, 2p + m - 1 - \tau),$$

les λ et les μ étant rationnels. Le nombre des équations (9), c'est-à-dire

$$m - 1 - \tau + r,$$

doit être au plus égal à $m-1$, car autrement on aurait une relation linéaire entre les fonctions (7), ce qui n'a pas lieu; on a donc nécessairement

$$\tau \geqq r.$$

Ajoutons encore que, si l'on envisage les équations avec les indéterminées c

$$\mu_2^h c_2 + \ldots + \mu_m^h c_m = 0 \qquad (h = 2p - r + 1, \ldots, 2p + m - 1 - \tau),$$

on pourra certainement y satisfaire, les c n'étant pas tous nuls (sauf dans le cas où $\tau = r$) et, sur les c, on pourra certainement en prendre $\tau - r$ arbitrairement.

Nous voulons précisément démontrer que τ est égal à r. D'après ce qui précède, il faut montrer que τ n'est pas supérieur à r.

II. Plaçons-nous donc dans l'hypothèse $\tau > r$. Nous n'avons à peu près qu'à généraliser l'analyse de la page 381 (*F. A.*, t. II) s'appliquant à la même question, mais dans le cas où $r = 0$.

Reprenons les intégrales (*loc. cit.*)

$$\int \mathrm{I}_1\, dx, \quad \ldots, \quad \int \mathrm{I}_{2p}\, dx, \quad \int \mathrm{J}_2\, dx, \quad \ldots, \quad \int \mathrm{J}_m\, dx$$

avec les

$$\Omega_i^h, \quad \Upsilon_i^k \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2p;\ k = 2, \ldots, m),$$

l'indice i étant relatif au cycle. Envisageons, en outre, les périodes

$$\omega_j^h, \quad \upsilon_j^k$$

correspondant, pour les intégrales précédentes, à $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$. Les périodes de l'intégrale abélienne

$$\int (a_1 \mathrm{I}_1 + \ldots + a_{2p} \mathrm{I}_{2p} + c_2 \mathrm{J}_2 + \ldots + c_m \mathrm{J}_m)\, dx$$

ne dépendront pas de y, si les c sont des constantes et si les a (pouvant dépendre de y) et les constantes c satisfont aux conditions suivantes (où les C_j sont des constantes arbitraires)

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} a_1 \Omega_i^1 + a_2 \Omega_i^2 + \ldots + a_{2p} \Omega_i^{2p} + c_2 \Upsilon_i^2 + \ldots + c_m \Upsilon_i^m = 0 & (i = 1, 2, \ldots, 2p - r), \\ a_1 \omega_j^1 + a_2 \omega_j^2 + \ldots + a_{2p} \omega_j^{2p} + c_2 \upsilon_j^2 + \ldots + c_m \upsilon_j^m = \mathrm{C}_j & (j = 1, 2, \ldots, r), \\ \mu_2^h c_2 + \ldots + \mu_m^h c_m = 0 & (h = 2p - r + 1, \ldots, 2p + m - 1 - \tau). \end{cases}$$

Si les a et les c satisfont à toutes ces conditions, on aura nécessairement, d'après les équations (9),

$$a_1\Omega_h^1 + a_2\Omega_h^2 + \ldots + a_{2p}\Omega_h^{2p} + c_2\Upsilon_h^2 + \ldots + c_m\Upsilon_h^m = 0$$
$$(h = 2p - r + 1, \ldots, 2p + m - 1 - \tau).$$

Il est aisé de voir que l'on peut satisfaire à toutes les conditions Σ. Les équations de la troisième ligne dans Σ font connaître les c, dont $\tau - r$ restent arbitraires; les deux premières lignes, dont le nombre total est $2p$, déterminent les a. Ceux-ci sont bien des fonctions rationnelles de y. En effet, les équations ne changent pas quand y décrit un contour fermé quelconque. Ceci est immédiat quand y tourne autour d'un des points singuliers $b_1, b_2, \ldots, b_{2p-r}$, et pour les points

$$b_{2p-r+1}, \quad \ldots, \quad b_{2p+m-1-\tau}$$

c'est une conséquence des équations (9) et de la troisième ligne des relations Σ. Quant aux autres points critiques, les Ω qui leur correspondent étant fonctions linéaires des $2p + m - 1 - \tau$ premiers, la chose est manifeste.

Il n'y a plus maintenant qu'à raisonner comme à la page 382 (*F. A.*, t. II). On formera en se servant de l'intégrale

$$\int (a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_2 J_2 + \ldots + c_m J_m)\, dx$$

une intégrale de différentielle totale de la surface de nature transcendante (puisque tous les c ne sont pas nuls) et n'ayant aucune ligne logarithmique à distance finie; de plus, puisque tous les c ne sont pas nuls, elle ne sera pas une intégrale de seconde espèce. Or ceci est impossible, et cette contradiction montre que l'hypothèse $\tau > r$ est inadmissible; *on a donc*

$$\tau = r.$$

C'est le théorème que nous avons énoncé (n° 6).

12. Que devient la démonstration précédente, quand $\tau = r$. Les équations

$$\mu_2^h c_2 + \ldots + \mu_m^h c_m = 0 \qquad (h = 2p - r + 1, \ \ldots, \ 2p + m - 1 - r)$$

sont alors en nombre $m - 1$, et elles donneront pour tous les c la valeur *zéro*. Il est impossible, en effet, que le déterminant des μ soit nul, car alors, d'après les équations (9), les Ω de la ligne (7) ne seraient pas linéairement indépendants. Tous les c étant nuls, l'analyse du paragraphe précédent conduit à une intégrale de différentielle totale de seconde espèce, avec les r arbitraires

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_r,$$

ce qui est bien d'accord avec le fait que la surface a r intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce.

13. Prenons maintenant l'intégrale double

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

le polynome $P(x, y, z)$ étant uniquement assujetti à passer par la courbe double. D'après l'étude faite dans la Section II du Chapitre XI (*F. A.*, t. II, p. 351), et en nous servant des résultats précédents, nous sommes assuré que, si la surface n'a pas d'intégrales de différentielles totales de seconde espèce, *il y a* $2p + m - 1$ *fonctions* Ω *linéairement indépendantes, et, par suite, un nombre de périodes (au sens où nous les avons entendues dans toutes nos recherches antérieures) égal à*

$$N - 2p - (m - 1).$$

C'est le théorème fondamental de la page 354 (*F. A.*, t. II). Que devient ce résultat, quand la surface a, comme ci-dessus, r intégrales de différentielles totales de seconde espèce? Il y a alors seulement, comme il vient d'être établi,

$$2p + m - 1 - r$$

Ω linéairement indépendants. On voit bien facilement la modification que ceci amène dans tous les raisonnements. *Le nombre des périodes est alors égal à*

$$N - (2p + m - 1 - r),$$

c'est-à-dire

$$N - 2p - (m - 1) + r.$$

On trouve ces périodes par les mêmes combinaisons que plus haut, et l'on démontre par la même voie leur indépendance.

III. — Sur le nombre des conditions exprimant qu'une intégrale double est de seconde espèce.

14. Nous avons recherché précédemment (*F. A.*, t. II, p. 210) quel est le nombre des conditions exprimant qu'*une intégrale double de la forme*

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} \tag{10}$$

est de seconde espèce. Nous avons trouvé que ce nombre est au plus égal à $2p$.

Ce résultat a été ensuite précisé (*F. A.*, t. II, p. 328), et il a été démontré que *ce nombre est certainement égal à* $2p$, *quand l'équation* E *n'admet pas comme solution un polynome.*

Nous sommes maintenant en mesure d'approfondir encore davantage la question et d'arriver à un résultat définitif.

15. Supposons que la surface admette r intégrales de différentielles totales de seconde espèce. Nous avons vu (Sect. I) que l'équation E admet comme solutions r polynomes linéairement indépendants. Que va-t-il arriver pour l'équation E'? Nous allons montrer qu'*elle admet comme solutions r polynomes en y, en outre des $m - 1$ polynomes correspondant aux points à l'infini.*

Dans le voisinage d'un point singulier b, l'équation E' admettra le système fondamental qui pourra être formé des fonctions

$$\omega'_1, \quad \omega'_2, \quad \ldots, \quad \omega'_{2p-1}, \quad \omega'_{2p}, \quad \pi_2, \quad \ldots, \quad \pi_m,$$

les π étant des polynomes, les ω' étant tous holomorphes autour de b, sauf l'un d'eux ω'_{2p} qui a un point singulier logarithmique en b. A ces ω' correspondent $2p$ cycles distincts sur la surface de Riemann.

D'autre part, si nous revenons à l'équation E, elle admettra autour de b le système fondamental

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p-1}, \quad \omega_{2p},$$

les ω correspondant aux mêmes cycles que les ω', et étant holomorphes autour de b sauf le dernier ω_{2p}.

On peut associer deux à deux les intégrales des équations E′ et E, nous voulons dire les intégrales de E′ et E correspondant à un même cycle. Soit pour une valeur non singulière A de y (et son voisinage) deux intégrales

$$u' \quad \text{et} \quad u$$

ainsi associées et correspondant à un cycle Γ; allons dans le plan de y par un chemin déterminé du point A à un point β voisin du point singulier b. On aura en β

$$u' = h_1\omega'_1 + h_2\omega'_2 + \ldots + h_{2p}\omega'_{2p} + k_2\pi_2 + \ldots + k_m\pi_m,$$
$$u = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_{2p}\omega_{2p},$$

les h et les k étant des entiers; il est essentiel de remarquer que les h sont les mêmes pour u' et pour u, mais que pour u il y aura en général de plus des termes en π, car il est possible que le passage du cycle Γ aux cycles correspondant aux ω (et aux ω') se fasse en traversant des points à l'infini, et c'est de là que proviennent les termes en π.

Ceci posé, supposons que le cycle Γ corresponde à une solution de E qui soit un polynome. L'intégrale u étant dans ces conditions un polynome, il faudra nécessairement que, dans l'expression de u, à l'aide des ω, on ait

$$h_{2p} = 0$$

pour que b ne soit pas un point singulier logarithmique. Mais alors u' sera aussi holomorphe autour du point b. Celui-ci étant un point singulier quelconque, u' sera holomorphe autour de tous les points singuliers et, *par suite, sera un polynome.*

Ainsi, à tout polynome vérifiant l'équation E, correspond un polynome vérifiant l'équation E′. La réciproque résulte d'ailleurs de la même analyse. *Nous aurons donc comme solutions distinctes de l'équa-*

tion E′, *en dehors des* $m-1$ *polynomes* π, *un nombre de polynomes précisément égal à* r, *comme il a été énoncé.*

16. Il résulte de là que les résidus de l'intégrale double

$$\int\int \frac{\mathrm{P}(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

relatifs à la courbe à l'infini, ne sont pas en nombre supérieur à $2p-r$. Ces résidus sont en effet égaux aux valeurs des intégrales

$$\int \omega'_i(y)\,dy \quad \text{et} \quad \int \pi_k(y)\,dy$$

prises autour du point à l'infini, *et il ne peut y en avoir manifestement plus de* $2p-r$ *distinctes.*

Il faut montrer maintenant que l'on peut choisir le polynome $\mathrm{P}(x, y, z)$ (passant bien entendu par la courbe double) figurant dans (6), de manière que ces $2p-r$ résidus aient telles valeurs que l'on veut. Il sera par cela même établi que *le nombre des conditions, exprimant que l'intégrale double* (10) *est de seconde espèce, est précisément* $2p-r$.

17. Nous n'avons qu'à raisonner à peu près comme à la page 328 (*F. A.*, t. II) quand nous avons démontré ce théorème pour $r=0$. Prenons une intégrale (10) déterminée d'ailleurs arbitrairement, et soient, autour de $y=\infty$, les développements

$$\omega_i = \alpha_i^n y^n + \alpha_i^{n-1} y^{n-1} + \ldots + \frac{\alpha_i^{-1}}{y} + \frac{\alpha_i^{-2}}{y^2} + \ldots + \frac{\alpha_i^{-k}}{y^k} + \ldots \qquad (i=1, \ldots, 2p-r).$$

Pour k pris assez grand, les $2p-r$ expressions linéaires

$$(11) \qquad a_1\alpha_i^{-k} + a_2\alpha_i^{-(k-1)} + \ldots + a_k\alpha_i^{-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, 2p-r)$$

aux indéterminées

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k$$

sont linéairement indépendantes; car si, pour toute valeur de k, ces expressions linéaires n'étaient pas indépendantes, tous les déterminants d'ordre $2p-r$ formés avec les α_i^h seraient nuls, et l'on pourrait former une combinaison linéaire des ω_i se réduisant à un polynome, ce qui est impossible. Le nombre k étant pris donc de manière que les expressions (11) soient distinctes, envisageons l'intégrale double

$$\iint \frac{\varphi(y)\,\mathrm{P}(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

où l'on pose

$$\varphi(y) = a_1 y^{k-1} + a_2 y^{k-2} + \ldots + a_{k-1} y + a_k,$$

les a étant des indéterminées. Les $2p-r$ résidus de cette intégrale double sont, au facteur $2\pi i$ près, les expressions (11). D'après ce qui précède, on peut choisir les indéterminées a de manière que ces expressions aient telles valeurs que l'on veut. Le théorème énoncé est donc établi, c'est-à-dire que :

Le nombre des conditions exprimant qu'une intégrale double de la forme (10) *est de seconde espèce, est exactement égal à* $2p-r$.

Si nous revenons au nombre p_1 relatif à la connexion linéaire de la surface, on a

$$r = p_1 - 1$$

et le nombre des conditions est $2p-(p_1-1)$. Ce résultat va nous être très utile pour obtenir le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce quand p_1 est supérieur à *un*.

IV. — Calcul général du nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes.

18. De tout ce qui précède, il résulte que la formule fondamentale

$$\rho_0 = \mathrm{N} - 4p - (m-1) - (\rho - 1), \tag{12}$$

établie (*F. A.*, t. II, p. 373), sauf pour certains cas réservés, *est toujours applicable quand la connexion linéaire est égale à l'unité*.

Il nous reste à examiner le cas où la connexion linéaire est supérieure à *un*, c'est-à-dire quand il y a un nombre r d'intégrales de seconde espèce ($r > 0$). La question sera facile, avec les résultats des sections précédentes.

Les deux points essentiels dans l'établissement de la formule ci-dessus ont été les suivants : en premier lieu, l'expression

$$N - 2p - (m - 1)$$

du nombre des périodes (au sens où nous entendons ce mot) de l'intégrale double du type toujours considéré

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

et, en second lieu, le nombre des conditions exprimant que l'intégrale double considérée est de seconde espèce, nombre égal à

$$2p.$$

La différence de ces deux nombres donne le nombre ρ_0, à l'expression près $\rho - 1$, dont l'origine n'a rien à voir avec la connexion linéaire.

Ces deux nombres doivent être modifiés comme nous l'avons vu dans les numéros précédents; le premier est à remplacer (n° 13) par

$$N - 2p - (m - 1) + r,$$

et le second doit être remplacé (n° 17) par

$$2p - r.$$

En faisant la différence de ces deux nombres, nous trouvons

$$N - 4p - (m - 1) + 2r,$$

et, par suite, la formule (12) doit être remplacée par la suivante

$$\rho_0 = N - 4p - (m - 1) + 2r - (\rho - 1).$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce est donné par la formule

$$\rho_0 = \mathrm{N} - 4p - (m-1) + 2r - (\rho - 1),$$

Je rappelle la signification des lettres autres que r figurant dans cette formule : N est la classe de la surface, p le genre d'une section plane arbitraire, m le degré de la surface; quant à ρ, c'est le nombre relatif à la surface, tel qu'il est défini par mon théorème fondamental sur les intégrales de différentielles totales de *troisième* espèce et dont je rappelle la définition : On peut tracer sur la surface ρ courbes algébriques irréductibles C, telles qu'il n'y ait pas d'intégrale de différentielle totale de troisième espèce n'ayant d'autres courbes logarithmiques que la totalité ou une partie des courbes C, mais telles que, si on leur adjoint une autre courbe algébrique irréductible quelconque de la surface, il y ait une intégrale de troisième espèce n'ayant comme courbes logarithmiques que cette dernière courbe et la totalité ou une partie des courbes C.

19. Dans toutes mes études, il a été supposé que la surface n'avait que les singularités dites *ordinaires*, c'est-à-dire *une* courbe double avec points *triples* sur cette courbe qui ne présente d'ailleurs aucune particularité exceptionnelle. C'est dans ces conditions qu'ont été établies toutes les formules des pages précédentes.

Si, outre ces singularités, la surface possédait des points doubles coniques isolés, la complication ainsi introduite ne serait pas grande; nous allons examiner ce cas.

Il nous faut revenir aux singularités de l'équation (E), que nous avons discutées dans le Tome I (*F. A.*, p. 95 et suivantes). La surface étant rapportée à des axes placés arbitrairement, les points singuliers correspondaient aux valeurs b telles que le plan $y = b$ fût tangent à la surface. Maintenant, aux véritables plans tangents parallèles au plan des xz, c'est-à-dire aux plans tangents en des points simples de la surface, il faut ajouter les plans parallèles au plan des xz passant par les points doubles isolés. Un tel plan, que nous désignerons par $y=c$, correspond bien à un point singulier de l'équation (E); pour y voisin de c, la courbe entre x et z

$$f(x, y, z)=0$$

a deux points de ramification voisins, qui se confondent avec le point double isolé de la surface. Les circonstances seront donc les mêmes que pour le plan $y=b$. Les points c sont, pour l'équation (E), des points singuliers logarithmiques de même nature que les points b [1]. Donc, en désignant toujours par N la classe de la surface et d le nombre des points doubles *isolés*, le nombre total des points singuliers de (E) sera

$$N+d.$$

On se rappelle d'ailleurs que l'intégrale double

$$\int\int \frac{Q(x, y\, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

restera finie à distance finie, pourvu que le polynome Q s'annule sur la courbe double; aucune condition n'est relative aux points doubles isolés (points coniques), comme on l'a vu (*F. A.*, t. I, p. 184).

Il résulte de là que, dans tous les calculs et tous les raisonnements faits dans ce Chapitre et les précédents, N doit seulement être remplacé par $N+d$. *Nous aurons donc, au lieu de la formule donnée au n° 18, la formule plus générale, relative au cas où la surface a, outre la ligne double, d points doubles isolés*

$$\rho_0=N+d-4p-(m-1)+2r-(\rho-1).$$

Telle est l'expression générale du nombre ρ_0 des intégrales doubles

---

[1] Il y a seulement la différence suivante, par rapport à ce que nous avons vu (*F. A.*, t. I, p. 96) : Pour un point b, nous avions une certaine intégrale holomorphe qui a été désignée plus tard par Ω, et toute période de l'intégrale envisagée se reproduisait, après une circulation autour de b, à un multiple près de Ω; ce multiple pouvait être de parité quelconque (il pouvait être notamment égal à Ω). Pour un point c, le multiple sera toujours *pair;* mais cela n'a aucune importance pour toutes les déductions relatives au nombre ρ_0.

distinctes de seconde espèce. Quant *au nombre des périodes telles que nous les envisageons, de l'intégrale double*

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

où le polynome Q est assujetti seulement à passer par la courbe double, *il est égal à*

$$N + d - 2p - (m - 1) + r,$$

qui est le nombre du n° 13, en remplaçant N par $N + d$.

V. — Sur certaines expressions invariantes.

20. Le nombre ρ_0, dont nous venons de donner ici l'expression générale, est *un invariant absolu* de la surface, comme je l'ai montré autrefois. Si donc l'on considère deux surfaces f et f' se correspondant point par point, et ayant seulement chacune comme singularités une ligne double avec points triples et, en outre, des points doubles isolés, on aura, en marquant par un accent les lettres relatives à la surface f',

$$\rho_0 = \rho'_0,$$

et, par suite, puisque évidemment $r = r'$,

$$N + d - 4p - (m - 1) - \rho = N' + d' - 4p' - (m' - 1) - \rho'.$$

Cette formule appelle plusieurs remarques intéressantes.

21. Supposons que, dans la substitution qui transforme f en f', il y ait F points fondamentaux A (points simples ou points doubles isolés) sur f, et F' points fondamentaux A' (points simples ou points doubles isolés) sur f'. Nous allons facilement obtenir une relation entre ρ, ρ', F et F'.

D'après la définition de ρ, on peut tracer, sur f, ρ courbes algébriques irréductibles C (qu'on peut supposer ne pas passer par les points A) telles qu'il n'y ait pas d'intégrales de troisième espèce n'ayant d'autres courbes logarithmiques que la totalité ou une partie des courbes C, mais telles que, si on leur adjoint une autre courbe algébrique irréductible quelconque de la surface, il y ait une intégrale de troisième espèce n'ayant comme courbes logarithmiques que cette dernière courbe et la totalité ou une partie des courbes C.

Ceci posé, envisageons sur f' les courbes

$$C'_1, \quad C'_2, \quad \ldots, \quad C'_\rho$$

correspondant à

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_\rho.$$

Aux points A de f correspondront sur f' des courbes Φ' en nombre F, et aux points A' de f' correspondront sur f des courbes Φ en nombre F'. On peut former, pour la surface f, F' intégrales de troisième espèce K_1, K_2, ..., K_ρ correspondant aux courbes C et à chacune des courbes Φ. Ces intégrales, sur la surface f', ont en totalité ou en partie, comme lignes logarithmiques, les courbes C' et Φ' (qui sont en nombre $\rho + F$). Désignons-les, sur la surface f', par

$$K'_1, \quad K'_2, \quad \ldots, \quad K'_{F'}.$$

Il n'est pas possible que

$$F + \rho < F',$$

car alors on pourrait former (en annulant les périodes logarithmiques) une combinaison linéaire

$$A_1 K'_1 + A_2 K'_2 + \ldots + A_{F'} K'_{F'},$$

où les A ne seraient pas tous nuls, et qui n'aurait pas de courbes logarithmiques sur f', tandis qu'elle en aurait sur f. Concevons maintenant que l'on forme le tableau des périodes logarithmiques de

$$K'_1, \quad K'_2, \quad \ldots, \quad K'_{F'},$$

pour les courbes $C'_1, C'_2, \ldots, C'_\rho$, $\Phi'_1, \Phi'_2, \ldots, \Phi'_F$, en mettant sur une même ligne horizontale les périodes correspondant à une même courbe. Il n'est pas possible, pour la même raison que plus haut, que *tous* les déterminants d'ordre F' formés avec F' lignes de ce tableau soient nuls. Soient donc, parmi les C' et les Φ', des courbes que nous appellerons Γ en nombre F', pour lesquelles le déterminant correspondant n'est pas nul.

Nous allons montrer aisément que, si des C' et Φ' on supprime les Γ, on a

$$\rho + F - F'$$

courbes Γ', pouvant être prises pour les ρ' courbes de f' répondant sur cette surface au théorème fondamental sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce, de sorte que l'on aura

$$\rho' = \rho + F - F'.$$

En effet, tout d'abord il n'y aura pas d'intégrale de troisième espèce correspondant aux courbes Γ', car, en revenant à f, l'on voit qu'une telle intégrale serait nécessairement de la forme

$$A_1 K'_1 + \ldots + A_{F'} K'_{F'} \qquad (\text{les A non tous nuls}),$$

et, par suite, le déterminant des périodes logarithmiques formées avec les courbes Γ serait nul.

D'autre part, soit une courbe L' quelconque de f', on peut former une intégrale de troisième espèce n'ayant d'autres courbes logarithmiques que L' et la totalité ou une partie des courbes Γ'. Si l'on revient, en effet, à f, on pourra former une intégrale correspondant à la transformée L de L' et aux courbes C; en revenant ensuite à f', on a une intégrale J', ayant comme courbes logarithmiques L' et la totalité ou une partie des courbes C' et Φ'. Formons alors la combinaison

$$J' + A_1 K'_1 + \ldots + A_{F'} K'_{F'};$$

on peut choisir les A de manière à faire disparaître dans cette combinaison, comme lignes logarithmiques, les courbes Γ (le déterminant relatif aux Γ n'étant pas nul), et il reste seulement les courbes Γ', comme nous voulions le montrer.

Nous avons donc la relation suivante, importante pour notre objet,

$$\rho + F = \rho' + F'.$$

22. Revenons maintenant à la relation du n° 20; elle pourra s'écrire

$$(13) \qquad N + d - 4p - (m-1) + F = N' + d' - 4p' - (m'-1) + F'.$$

C'est une relation d'invariance relative d'une forme remarquable entre deux surfaces se correspondant point par point; il y figure, comme l'on voit, les nombres des *points fondamentaux* de la correspondance sur l'une et l'autre surface.

On vient de voir l'importance de la combinaison

$$N - 4p - (m-1),$$

dans la théorie des intégrales doubles de seconde espèce. Or cette combinaison s'est déjà présentée dans la théorie géométrique des surfaces algébriques. Dans le Mémoire célèbre de M. Nöther [*Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde* (*Math. Annalen*, t. VIII)] on trouve (notamment p. 507) la combinaison (¹)

$$n' - 2a + 3n.$$

Avec nos notations, on a

$$n' = N, \qquad n = m, \qquad a = 2(n-1) + 2p,$$

ce qui donne

$$n' - 2a + 3n = N - 4p - m + 4.$$

On trouve, à la page citée du Mémoire de M. Nöther, la formule relative à deux surfaces f et f_1 se correspondant point par point

$$(14) \qquad n' - 2a + 3n + \Sigma\mu = n'_1 - 2a_1 + 3n_1 + \Sigma\mu_1.$$

Dans cette formule $\Sigma\mu$ désigne la somme des multiplicités de tous les points fondamentaux de f, augmentée de la somme des multiplicités des points multiples de f qui ne sont pas points fondamentaux

(¹) M. Zeuthen (*Comptes rendus*, t. LXX, et *Math. Annalen*, t. IV, p. 37) avait déjà formé un invariant relatif analogue. Beaucoup plus récemment, MM. Castelnuovo et Enriques ont aussi rencontré la même combinaison (*Annali di Matematica*, 1901) dans une étude remarquable sur les systèmes linéaires de courbes d'une surface.

(tous les points multiples envisagés étant des points isolés), et pareillement pour $\Sigma \mu_1$ relativement à f_1.

Notre formule (13) coïncide avec la formule (14) de M. Nöther, sauf que, dans le cas de M. Nöther, peuvent se trouver des points multiples isolés d'ordre supérieur à *deux*, cas que nous n'avons pas examiné dans notre théorie [1].

Il est bien remarquable de voir ainsi établi un lien entre deux points de vue si différents, celui de MM. Zeuthen et Nöther et des géomètres qui les ont suivis dans l'étude géométrique des surfaces, et le point de vue transcendant auquel se rapportent mes travaux sur les fonctions algébriques de deux variables.

V. — Quelques applications.

23. Nous terminerons en faisant quelques applications de la formule générale établie ci-dessus. On peut tout d'abord se demander quelle est la valeur de ρ_0 pour la surface *la plus générale* de degré m. Pour répondre à cette question, il faut avoir la valeur de ρ pour cette surface. On peut montrer que pour cette surface, quand m est au moins égal à *quatre*, on a

$$\rho = 1.$$

Ce résultat peut être établi directement, et j'indiquerai ailleurs la démonstration qui demande quelques développements; il résulte encore d'un théorème donné par M. Nöther dans son célèbre Mémoire relatif aux courbes gauches algébriques (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1882, nos 11 et 12), à savoir que, *sur la surface la plus générale de degré* $m (m \geqq 4)$, *toute courbe algébrique est l'intersection complète de la surface avec une autre surface algébrique* [2]. En effet, soit une

---

[1] Il serait intéressant et sans grandes difficultés de combler cette lacune, mais ceci demanderait quelques développements. Il nous suffit, dans l'exposé de la théorie générale, de considérer les singularités ordinaires.

[2] A la vérité la démonstration de M. Nöther fondée sur une énumération de constantes ne peut être regardée que comme rendant le théorème très vraisemblable, et il y aurait lieu de revenir sur la question. On conclut encore de ce théorème que, *pour la surface la plus générale de degré* $m (m \geqq 4)$, *toute intégrale de différentielle totale est une combinaison algébrico-logarithmique* (*voir* une Note que j'ai publiée dans les *Comptes rendus*, 22 février 1904, où sont d'ailleurs indiquées les applications particulières qui suivent).

courbe C_1 de la surface, intersection de celle-ci, avec la surface de degré m_1

$$F_1(x, y, z) = 0.$$

Prenons une autre courbe quelconque C_2; celle-ci sera l'intersection de la surface avec une autre surface de degré m_2,

$$F_2(x, y, z) = 0.$$

Il suffit de prendre

$$\log \frac{F_1^{m_2}}{F_2^{m_1}}$$

pour avoir une intégrale de différentielle totale n'ayant d'autres courbes logarithmiques que C_1 et C_2; donc $\rho = 1$.

En appliquant la formule

$$\rho_0 = N - 4p - (m-1) - (\rho - 1)$$

on trouve, puisque l'on a

$$N = m(m-1)^2, \qquad p = \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

le résultat suivant

$$\rho_0 = (m-1)(m^2 - 3m + 3)$$

comme nombre ρ_0 pour la surface *générale* de degré $m (m \geqq 4)$.

24. J'ai déjà insisté (*voir* par exemple *F. A.*, t. II, p. 323) sur la dépendance entre ρ et la *nature arithmétique* des coefficients de la surface. Aussi ne faudrait-il pas conclure de ce qui précède que l'on a $\rho = 1$ pour toute surface de degré m sans points multiples. Ainsi j'ai montré (*F. A.*, t. II, p. 287) que, pour la surface

$$z^m = x^m + P(y) \qquad (m \geqq 4),$$

où $P(y)$ est un polynome *arbitraire* de degré m, on a

$$\rho = (m-1)^2 + 1,$$

ce qui donne

$$\rho_0 = (m-1)(m-2)^2.$$

25. Prenons maintenant quelques surfaces particulières. J'envisage la surface unicursale f définie en coordonnées homogènes par les équations

$$x_i = f_i(\alpha, \beta, \gamma) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

f_1, f_2, f_3 et f_4 étant des polynomes homogènes de degré n en α, β et γ. On suppose que les courbes

$$f_i = 0$$

aient a points simples communs ne répondant d'ailleurs à aucune disposition particulière.

On a manifestement pour la surface

$$m = n^2 - a, \qquad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Cherchons la valeur de ρ. Aux a points *fondamentaux* du plan (α, β, γ) que nous désignerons par f' correspondent sur la surface f des courbes distinctes

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_a;$$

de plus, il n'y aura pas sur f de points fondamentaux. Appliquons la formule du n° 21

$$\rho + F = \rho' + F';$$

on a $F = 0$, $\rho' = 1$, $F' = a$. Par suite

$$\rho = a + 1.$$

Il ne reste plus qu'à calculer la classe N de la surface; ceci est élémentaire. Les axes ayant une disposition quelconque par rapport à la surface, il suffira de chercher, la surface étant représentée par

$$x = \frac{f_1}{f_4}, \qquad y = \frac{f_2}{f_4}, \qquad z = \frac{f_3}{f_4},$$

les points de la surface où le plan tangent est parallèle au plan des yz.

Ils sont donnés par les deux équations

$$\frac{\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f_4}{\partial \alpha}} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial \beta}}{\frac{\partial f_4}{\partial \beta}} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial \gamma}}{\frac{\partial f_4}{\partial \gamma}}$$

dont les solutions communes sont en nombre $3(n-1)^2$; on a donc

$$N = 3(n-1)^2.$$

La formule donne alors

$$\rho_0 = 0,$$

ce qui devait être, puisque la surface est unicursale.

26. Prenons encore comme exemple la surface de Kummer, c'est-à-dire la surface du quatrième ordre avec *seize* points doubles. On doit à M. Humbert un résultat remarquable sur les lignes algébriques tracées sur la surface de Kummer : toutes les courbes algébriques tracées sur cette surface sont de degré pair, et si $2n$ désigne le degré d'une telle courbe on peut le long de cette courbe circonscrire à la surface une courbe de degré n ne la coupant pas en dehors de la courbe considérée. On déduit de suite de ce théorème que pour la surface

$$\rho = 1.$$

On a d'ailleurs

$$N = 4, \qquad d = 16, \qquad p = 3,$$

et en outre $r = 0$, car la surface de Kummer n'admet pas d'intégrale de différentielle totale de seconde espèce (transcendante). La formule générale

$$\rho_0 = N + d - 4p - (m-1) - (\rho - 1)$$

nous donne alors

$$\rho_0 = 5.$$

27. Terminons en prenant une surface hyperelliptique générale, c'est-à-dire une surface dont les coordonnées s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres, de telle sorte qu'à un point arbitraire de la surface ne correspond, aux périodes près, qu'un seul système de valeurs de ces paramètres. On suppose d'ailleurs que ces périodes ne satisfont pas à une relation singulière.

On sait que, dans son Mémoire *Sur les surfaces hyperelliptiques* (*Journal de Mathématiques*, 1893), M. Humbert exprime les coordonnées homogènes d'un point d'une telle surface par des fonctions Θ normales d'ordre h et de caractéristique nulle. Supposons aussi que ces fonctions Θ soient sans zéro commun.

Il résulte des formules du Mémoire de M. Humbert que l'on aura pour la surface

$$m = 2h^2, \qquad p = h^2 + 1.$$

D'ailleurs on a $d = 0$. Il reste à évaluer la classe N de la surface; on voit de suite que N sera égal au nombre des solutions distinctes des deux équations

$$\frac{\Theta}{\theta} = \frac{\dfrac{\partial\Theta}{\partial u}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial u}} = \frac{\dfrac{\partial\Theta}{\partial v}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial v}}$$

en désignant par Θ et θ deux fonctions normales d'ordre h, de caractéristique nulle, sans zéro commun, et d'ailleurs arbitraires. En s'appuyant sur le théorème de M. Poincaré relatif aux racines communes à deux fonctions θ, on trouve facilement

$$\mathrm{N} = 6h^2.$$

Si l'on revient maintenant à la formule générale, elle donne, en se rappelant que $r = 4$ et que $\rho = 1$ (comme je l'ai montré dans ces *Annales*, t. XVIII, p. 411; 1901), la valeur

$$\rho_0 = 5.$$

Tel est le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce pour les surfaces hyperelliptiques *générales* envisagées. Si la surface hyperelliptique était *singulière*, c'est-à-dire si les périodes satisfaisaient à une ou plusieurs relations singulières (au sens de M. Humbert), il y aurait lieu de rechercher ce que devient le nombre ρ_0, qui peut être différent, car cet invariant, comme je l'ai déjà montré sur divers exemples, n'est pas seulement géométrique et algébrique, *mais a aussi un caractère arithmétique*.