

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE PICARD

## Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 22 (1905), p. 471-474

<[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1905\\_3\\_22\\_\\_471\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1905_3_22__471_0)>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LES

# ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

## DU SECOND ORDRE (1),

PAR M. ÉMILE PICARD.

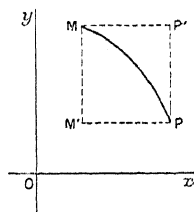


Je me suis occupé autrefois (*Journal de Mathématiques*, 1890, et Note dans le Tome IV des *Leçons* de M. Darboux) des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz,$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont des fonctions réelles et continues des deux variables réelles  $x$  et  $y$  dans la région du plan où vont rester ces variables. Des méthodes d'approximation successives donnent, au point de vue de

Fig. 1.



l'existence des intégrales, la réponse aux principales questions qu'on peut se poser sur cette équation. Ainsi j'ai établi que si l'on se donne, sur un segment OA de l'axe des  $x$ , et sur un segment OB de l'axe

---

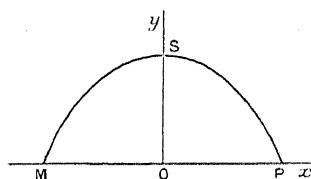
(1) Je reproduis ici une leçon faite dans mon cours et publiée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2<sup>e</sup> série, t. XXIII, 1899).

des  $y$ , les valeurs d'une intégrale, celle-ci est complètement définie dans le rectangle construit sur OA et OB. Si l'on considère ensuite un arc de courbe MP rencontré au plus une fois par toute parallèle à l'axe des  $x$  et à l'axe des  $y$ , et que l'on se donne les valeurs de  $z$  et de  $\frac{\partial z}{\partial x}$  sur cet arc de courbe, une intégrale de l'équation aux dérivées partielles sera complètement définie par ces données dans le rectangle MM'PP'; elle y sera continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre.

Ayant repris récemment ces questions dans mon cours, j'ai eu l'occasion de faire quelques remarques très élémentaires que je reproduis ici.

Il est important de remarquer la nécessité de l'hypothèse faite que l'arc considéré n'est rencontré qu'en un seul point par une parallèle aux axes de coordonnées. Considérons, en effet, pour prendre un exemple très simple, un arc MP dont les extrémités soient sur  $Ox$  de part et d'autre de l'origine et supposons que le point S de cet arc où la tangente est parallèle à  $Ox$  soit sur l'axe des  $y$ . Si l'on se donne

Fig. 2.



sur l'arc MSP une succession continue de valeurs pour  $z$  et  $\frac{\partial z}{\partial x}$ , ou encore pour  $\frac{\partial z}{\partial x}$  et  $\frac{\partial z}{\partial y}$  en se donnant en plus la valeur de  $z$  en S, *il n'existera pas en général d'intégrale de l'équation, continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans le segment MOPS, et répondant à ces données.* On aura, en effet, une intégrale déterminée dans la partie OSP, une autre intégrale déterminée dans la partie OSM; ces deux intégrales *ne se raccordent pas* en général le long de OS.

On sait le rôle que jouent dans l'étude de l'équation les parallèles aux axes qui sont ici les caractéristiques. Considérons un segment AB de droite parallèle à  $Ox$ . On ne peut pas sur ce segment se donner,

pour une intégrale  $z$ , la valeur de  $z$  et celle de  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , car les valeurs de  $\frac{\partial z}{\partial y}$  sur AB sont déterminées, à une constante près, en fonction des valeurs de  $z$ ; c'est ce qui résulte de l'équation

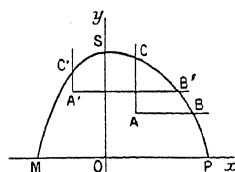
$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz,$$

qui montre que sur AB les valeurs de  $\frac{\partial z}{\partial y}$  sont déterminées par une équation linéaire du premier ordre. Si donc, pour une intégrale,  $z$  est donnée le long de AB, et si  $\frac{\partial z}{\partial y}$  est donné au point A, les valeurs de  $\frac{\partial z}{\partial y}$  seront connues tout le long de AB. Cette remarque peut être utile pour décider dans certains cas du raccordement de deux intégrales. Ainsi, soient un segment BB' de l'axe des  $y$  comprenant l'origine O, et le segment OA de l'axe des  $x$ ; si l'on se donne une intégrale par ses valeurs le long de BB' et de OA, elle sera déterminée dans le rectangle de base BB' et de hauteur OA. On a, en effet, deux intégrales définies, l'une dans le rectangle construit sur OA et OB, l'autre dans le rectangle construit sur OA et OB'; la remarque précédente montre que ces deux intégrales se raccordent (c'est-à-dire ont mêmes dérivées premières) le long de OA, et par suite n'en font qu'une.

On connaît la méthode célèbre développée par Riemann au sujet de l'équation (1). Dans l'exposition de cette méthode, on laisse généralement de côté la question inverse, je veux dire qu'après avoir obtenu la formule de Riemann on ne démontre pas que réciproquement *elle donne la solution de l'équation répondant aux conditions initiales*. On peut se dispenser de cette vérification, si l'on se reporte à ce que nous avons établi précédemment, car nous savons qu'il existe une intégrale répondant aux données initiales et continue dans le rectangle MPM'P'; cette intégrale ne peut avoir d'autre valeur que celle donnée par la formule de Riemann, qui donne donc bien une solution satisfaisant aux conditions indiquées. Mais il est essentiel de remarquer que la formule de Riemann ne donne un résultat exact que si l'on considère seulement un arc MP, comme celui envisagé au début, c'est-à-dire

rencontré en un seul point par toute parallèle aux axes, quoique la formule ait un sens dans bien d'autres cas. Ainsi, pour reprendre l'exemple donné plus haut, où une parallèle à  $Ox$  rencontre l'arc en deux points, si l'on applique la méthode de Riemann en prenant d'abord le point A dans la partie OSP, et en menant les parallèles AC

Fig. 3.



et AB aux axes, on aura pour cette partie OSP l'intégrale correspondant aux données initiales le long de l'arc SP; mais si l'on poursuit *par continuité* cette intégrale, en mettant A en A' dans OSM, il faudra mener les parallèles A'C' et A'B'; cette *continuation* ne coïncidera nullement avec l'intégrale relative à OSM et répondant aux données initiales sur l'arc MS.

