Annales scientifiques de l'É.N.S.

Ernst Lindelöf

Sur les fonctions entières d'ordre entier

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 22 (1905), p. 369-395

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1905_3_22__369_0>

SUR LES

FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE ENTIER,

PAR M. ERNST LINDELÖF.

Dans un Mémoire récent : *Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières* (¹), M. Wiman a fait un pas décisif vers la solution des difficultés inhérentes à la théorie des fonctions entières d'ordre entier. Nous allons reprendre ici cette théorie par des méthodes nouvelles, qui nous permettront de la présenter sous une forme plus simple, et en même temps de préciser et de généraliser beaucoup les résultats obtenus antérieurement.

I. — Remarques sur le théorème de M. Jensen.

1. Nous indiquerons d'abord rapidement la démonstration de ce théorème important, en le rattachant à des propositions bien connues de la théorie du potentiel logarithmique.

Soient

$f(x)$ une fonction entière; $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ses zéros distincts de l'origine, rangés par ordre de modules croissants;
r une quantité positive comprise entre $|a_n|$ et $|a_{n+1}|$;
C le cercle de rayon r ayant l'origine pour centre.

(¹) *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, t. I, p. 327-345 (Stockholm, 1904).

Admettons, d'ailleurs, pour plus de généralité, que l'origine soit pour $f(x)$ un zéro d'ordre m, et soit cx^m le premier terme dans le développement de cette fonction suivant les puissances ascendantes de x. Dans ces conditions, on aura

$$f(x) = x^m (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)\,\varphi(x), \tag{1}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction entière ne s'annulant pas dans C et dont la valeur à l'origine est égale à

$$\varphi(0) = (-1)^n \frac{c}{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Cherchons la valeur moyenne de $\log|f(x)|$ sur la circonférence C, c'est-à-dire la valeur de l'expression

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi. \tag{2}$$

L'égalité (1) nous donne

$$\log|f(x)| = m\log|x| + \sum_1^n \log|x - a_\nu| + \log|\varphi(x)|.$$

La valeur moyenne du premier terme de cette somme est évidemment égale à $m\log r$.

D'autre part, l'expression $\log|\varphi(x)|$ représentant une fonction harmonique régulière dans le cercle C, sa valeur moyenne sur la circonférence de ce cercle, d'après le théorème connu de Gauss, est égale à la valeur qu'elle prend au centre, c'est-à-dire à

$$\log|\varphi(0)| \equiv \log\left|\frac{c}{a_1 a_2 \dots a_n}\right|.$$

Enfin, la valeur moyenne du terme $\log|x - a_\nu|$ peut s'écrire

$$\frac{1}{2\pi r}\int_C \log|x - a_\nu|\,ds,$$

s étant l'arc de la circonférence C compté à partir d'un point fixe. L'intégrale qui figure dans cette expression représente la valeur que prend au point a_ν le potentiel logarithmique d'une couche de densité *un* répandue sur C. Or on sait que ce potentiel ne varie pas à l'intérieur de C; sa valeur au point a_ν est donc la même qu'à l'origine, c'est-à-dire égale à $2\pi r \log r$, et l'expression précédente se réduit ainsi à $\log r$.

En réunissant tous ces résultats, on trouve

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \log\left|\frac{cr^{m+n}}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right|, \tag{3}$$

égalité qui constitue précisément le théorème de M. Jensen [1].

2. Rappelons l'inégalité qui se déduit de ce théorème et qui joue un rôle fondamental dans la théorie des fonctions entières.

En désignant par $M(r)$ le *module maximum* de la fonction $f(x)$ sur la circonférence $|x| = r$, admettons que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de r,

$$M(r) < e^{V(r)}, \tag{4}$$

$V(r)$ étant une fonction croissante; l'égalité (3) nous donnera

$$V(r) > \log\left|\frac{cr^{m+n}}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right| \equiv \log\left|c\,r^m \frac{r}{a_1}\,\frac{r}{a_2}\cdots\frac{r}{a_n}\right|.$$

Lorsque, r restant fixe, on fait varier l'entier n, de manière que le nombre des facteurs $\left|\frac{r}{a_\nu}\right|$ au second membre augmente ou diminue, on aperçoit immédiatement que la valeur de ce membre décroît dans les deux cas. Il en résulte que l'inégalité précédente subsiste pour toutes les valeurs de n et de r, en supposant toutefois r supérieur à la limite à partir de laquelle est vérifiée l'hypothèse (4). On en déduit

$$|a_n|^n \geqq |a_1 a_2 \ldots a_n| > |c|\, r^{m+n} e^{-V(r)},$$

---

(1) *Acta mathematica*, t. XXII, 1899.

ou encore, si l'on établit entre r et n une relation telle que $\lim_{n=\infty} r^{\frac{1}{n}} = 1$,

$$(5) \qquad |a_n| > [1+\varepsilon(n)]\, r e^{-\frac{V(r)}{n}},$$

ce qui constitue l'inégalité cherchée ([1]).

Afin d'obtenir une limite inférieure de $|a_n|$ aussi précise que possible, on déterminera dans cette inégalité le nombre r de manière à rendre maximum le produit $re^{-\frac{V(r)}{n}}$.

Soit, par exemple,

$$V(r) = A r^{\mu},$$

A étant une constante positive; l'inégalité (5) devient

$$(6) \qquad |a_n| > [1+\varepsilon(n)] \left(\frac{n}{Ae\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

De même, si l'on suppose ([2])

$$V(r) = A r^{\mu} (\log r)^{\mu_1} (\log_2 r)^{\mu_2} \ldots (\log_i r)^{\mu_i},$$

un calcul facile donne

$$(7) \qquad |a_n| > [1+\varepsilon(n)] \left[\frac{\mu^{\mu_1-1}}{Ae}\, n (\log n)^{-\mu_1} (\log_2 n)^{-\mu_2} \ldots (\log_i n)^{-\mu_i}\right]^{\frac{1}{\mu}}.$$

3. Voici maintenant une nouvelle conséquence du théorème de M. Jensen qui apporte une grande simplification à cette théorie :

$f(x)$ étant une fonction entière, l'inégalité

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi > 0$$

est vérifiée dès que r dépasse une certaine valeur finie, r_0, et si l'on pose

---

([1]) Pour abréger le langage, nous conviendrons de désigner indifféremment par $\varepsilon(n)$, $\varepsilon(r)$, ... toute fonction de n, r, ... qui tend vers zéro lorsque la variable augmente indéfiniment.

([2]) Pour abréger, nous écrirons $\log(\log n) = \log_2 n$, ..., $\log(\log_\nu n) = \log_{\nu+1} n$, ...

$F(x) = e^{G(x)} f(x)$, $G(x)$ *désignant une fonction entière quelconque s'annulant à l'origine, on aura, à partir de la même valeur* r_0,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(re^{i\varphi})| d\varphi > 0.$$

L'exactitude de cette proposition résulte immédiatement de ce que le second membre de l'égalité (3) croît indéfiniment avec r, et qu'il ne subit aucune modification lorsqu'on remplace $f(x)$ par $F(x)$.

Écrivons le module maximum de la fonction donnée $f(x)$ sous la forme $M(r) = e^{m(r)}$, et désignons par $l(\sigma, r) 2\pi r$ la longueur totale des arcs de la circonférence $|x| = r$ sur lesquels est vérifiée l'inégalité

$$|f(re^{i\varphi})| < e^{-\sigma m(r)},$$

σ étant une constante positive.

Les parties de l'intégrale (2) relatives à ces arcs donnent une somme inférieure à $-\sigma m(r) l(\sigma, r)$. Sur le reste de la circonférence $|x| = r$ on a $|f(re^{i\varphi})| \leqq e^{m(r)}$, de sorte que la somme des parties restantes de l'intégrale (2) est inférieure à $[1 - l(\sigma, r)] m(r)$. D'après la remarque précédente on aura donc

$$[1 - l(\sigma, r)] m(r) - \sigma l(\sigma, r) m(r) > 0$$

ou bien

$$l(\sigma, r) < \frac{1}{1+\sigma} \quad \text{pour} \quad r > r_0. \tag{8}$$

Ce résultat nous sera très utile dans la suite.

II. — Théorème sur les fonctions d'ordre entier.

4. Soit une fonction entière, $f(x)$, dont l'*ordre apparent* est égal à un *entier* positif μ; on aura, par définition,

$$M(r) = e^{\tau(r) r^{\mu}}, \tag{1}$$

$\tau(r)$ étant une fonction continue et positive, telle que l'inégalité

$$\tau(r) < r^{\varepsilon}$$

soit vérifiée à partir d'une valeur finie de r, et l'inégalité

$$\tau(r) > r^{-\varepsilon}$$

pour une infinité de valeurs r dépassant toute limite donnée, et cela quelque petit qu'on prenne le nombre positif ε. Mais on peut préciser davantage, en distinguant les trois cas suivants :

Il peut arriver d'abord que $\tau(r)$ tende vers zéro lorsque r augmente indéfiniment; nous dirons alors que la fonction $f(x)$ appartient au *type minimum* d'ordre μ.

Si, au contraire, $\tau(r)$ peut dépasser toute limite fixée d'avance, nous conviendrons de dire que $f(x)$ est de *type maximum*.

Enfin, si aucun de ces cas ne se présente, $\tau(r)$ restera au-dessous d'une limite finie, quel que soit r, sans tendre vers zéro lorsque r croît indéfiniment; nous dirons, dans ce cas, que $f(x)$ est de *type moyen* (¹).

On sait que le genre de la fonction $f(x)$ est égal à μ ou à $\mu - 1$. En désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ses zéros distincts de l'origine, on pourra donc toujours écrire cette fonction sous la forme

$$(2) \qquad e^{\alpha_0 x^\mu + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_\mu} x^m \prod \mathrm{E}\left(\mu, \frac{x}{a_n}\right),$$

où m désigne un entier positif ou nul, et où l'on s'est servi de la notation de Weierstrass :

$$\mathrm{E}(\mu, u) = (1 - u)\, e^{u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^\mu}{\mu}}.$$

Dans le cas où $f(x)$ est de genre $\mu - 1$, on aura identiquement

$$\alpha_0 + \frac{1}{\mu} \sum \frac{1}{a_n^\mu} = 0.$$

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

(¹) Nous avons adopté la terminologie de M. Pringsheim (*Mathematische Annalen*, t. LVIII, 1904, p. 264), avec cette différence que nous appelons *type moyen* ce que M. Pringsheim appelle *Normaltypus*.

Si la fonction donnée $f(x)$ appartient au type minimum d'ordre μ, les expressions (1)

$$\frac{n}{|a_n|^\mu} \tag{3}$$

et

$$\left|\alpha_0 + \frac{1}{\mu}\sum_1^n \frac{1}{a_n^\mu}\right| \tag{4}$$

tendent simultanément vers zéro lorsque n augmente indéfiniment (2). *Réciproquement, si cette condition est vérifiée, et si, d'ailleurs, l'exposant de convergence des zéros $a_1, a_2, \ldots$ est égal à μ* (3), *la fonction entière* (2) *appartient au type minimum d'ordre μ.*

Si $f(x)$ est de type moyen, les expressions (3) *et* (4) *restent au-dessous d'une limite finie quel que soit n, mais ne s'annulent pas simultanément pour $n = \infty$; réciproquement, s'il en est ainsi, la fonction* (2) *est d'ordre μ et de type moyen.*

Enfin, si $f(x)$ est de type maximum, l'une au moins des expressions (3) *et* (4) *peut dépasser toute quantité fixée d'avance, et, réciproquement, si ceci a lieu, et si l'exposant de convergence des zéros est égal à μ, la fonction* (2) *appartient au type maximum d'ordre μ* (4).

---

(1) Si le genre de $f(x)$ est égal à $\mu - 1$, l'expression (4) peut se mettre sous la forme

$$\left|\frac{1}{\mu}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{a_n^\mu}\right|.$$

(2) La série $\sum_1^\infty \frac{1}{a_n^\mu}$ est donc convergente et sa somme égale à $-\mu\alpha_0$.

(3) C'est-à-dire, si la série $\sum\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\mu+\varepsilon}$ est convergente ou divergente suivant que ε est positif ou négatif.

(4) Dans le cas où l'ordre μ n'est pas entier, on pourra encore distinguer trois types, comme ci-dessus, et l'on aura alors le théorème suivant, que nous donnons ici à titre de comparaison :

Une fonction entière d'ordre μ NON ENTIER *est de type minimum, moyen ou maximum suivant que l'expression* (3) *tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, ou reste au-dessous d'une limite finie sans tendre vers zéro, ou prend des valeurs supérieures à toute quantité donnée d'avance.*

5. Démontrons d'abord la première partie du théorème que nous venons d'énoncer. Dans le cas où $f(x)$ est de type minimum, l'inégalité (6) du n° 2 reste valable quelque petit qu'on prenne le nombre A. Il s'ensuit que l'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{a_n^{\mu}} = 0, \tag{5}$$

et l'on est ainsi ramené à démontrer la proposition suivante :

La condition (5) *supposée remplie, le module maximum* $M(r)$ *de la fonction* (2) *est ou n'est pas de la forme* $e^{\varepsilon(r)r^{\mu}}$, *suivant que l'expression* (4) *tend ou ne tend pas vers zéro lorsque* n *croît indéfiniment.*

Ayant fixé un nombre positif ε aussi petit qu'on le voudra, on pourra, en vertu de la condition (5), trouver un entier n_0 tel que

$$\frac{1}{|a_n|} < \frac{\varepsilon}{n^{\frac{1}{\mu}}} \qquad \text{pour} \qquad n > n_0. \tag{6}$$

Soit alors n_1 un entier supérieur à n_0, et écrivons la fonction (2) sous la forme

$$e^{x^{\mu}\left(\alpha_0 + \frac{1}{\mu}\sum_1^{n_1}\frac{1}{a_n^{\mu}}\right)}\,\Phi(x, n_1), \tag{2'}$$

en posant

$$\Phi(x, n_1) = \varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x),$$

avec

$$\varphi_0(x) = e^{\alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_{\mu} x^m} \prod_1^{n_0} E\left(\mu - 1, \frac{x}{a_n}\right),$$

$$\varphi_1(x) = \prod_{n_0+1}^{n_1} E\left(\mu - 1, \frac{x}{a_n}\right),$$

$$\varphi_2(x) = \prod_{n_1+1}^{\infty} E\left(\mu, \frac{x}{a_n}\right).$$

Ceci posé, en désignant par τ_1 et τ_2 des nombres réels compris respectivement dans les intervalles

$$\mu - 1 < \tau_1 < \mu, \qquad \mu < \tau_2 < \mu + 1,$$

on pourra trouver ([1]) une constante positive K telle que l'on ait, sur la circonférence $|x| = r$,

$$|\varphi_1(x)| < e^{\mathrm{K} r^{\tau_1} \sum\limits_{n_0+1}^{n_1} \left|\frac{1}{a_n}\right|^{\tau_1}},$$

$$|\varphi_2(x)| < e^{\mathrm{K} r^{\tau_2} \sum\limits_{n_1+1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|^{\tau_2}}.$$

D'autre part, l'inégalité (6) nous donne

$$\sum_{n_0+1}^{n_1} \left|\frac{1}{a_n}\right|^{\tau_1} < \varepsilon^{\tau_1} \sum_{1}^{n_1} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\tau_1}{\mu}} < \varepsilon^{\tau_1} \int_0^{n_1} n^{-\frac{\tau_1}{\mu}} dn = \frac{\mu}{\mu - \tau_1} \varepsilon^{\tau_1} n_1^{\frac{\mu - \tau_1}{\mu}},$$

$$\sum_{n_1+1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|^{\tau_2} < \varepsilon^{\tau_2} \sum_{n_1+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\tau_2}{\mu}} < \varepsilon^{\tau_2} \int_{n_1}^{\infty} n^{-\frac{\tau_2}{\mu}} dn = \frac{\mu}{\tau_2 - \mu} \varepsilon^{\tau_2} n_1^{\frac{\mu - \tau_2}{\mu}}.$$

En supposant r compris dans l'intervalle

$$n_1^{\frac{1}{\mu}} \leqq r \leqq (n_1 + 1)^{\frac{1}{\mu}}, \tag{7}$$

d'où

$$n_1 = r^{\mu}[1 + \varepsilon(r)],$$

on en déduit

$$|\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)| < e^{\psi(\varepsilon) r^{\mu}[1+\varepsilon(r)]},$$

avec

$$\psi(\varepsilon) = \mathrm{K}\left(\frac{\mu}{\mu - \tau_1} \varepsilon^{\tau_1} + \frac{\mu}{\tau_2 - \mu} \varepsilon^{\tau_2}\right).$$

Quelque petit que soit le nombre positif η, on pourra donc choisir l'entier n_0 assez grand pour que l'on ait, par exemple,

$$|\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)| < e^{\frac{\eta}{2} r^{\mu}}$$

([1]) *Voir* le n° 2 de notre *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXXI, n° 1, 1902).

pour les valeurs r comprises dans l'intervalle (7), n_1 ayant une valeur quelconque supérieure à n_0. L'entier n_0 étant ainsi fixé, il est évidemment possible de prendre n_1 assez grand pour que l'inégalité

$$|\varphi_0(x)| < e^{\frac{\eta}{2} r^\mu}$$

soit vérifiée dans l'intervalle (7), et l'on arrive ainsi à la conclusion suivante :

Quelque petit qu'on se donne le nombre positif η, *l'inégalité*

$$|\Phi(x, n_1)| < e^{\eta r^\mu}$$

sera vérifiée dans l'intervalle (7) *dès que* n_1 *dépassera une certaine limite finie.*

En remontant à l'expression (2'), on en conclut que, la condition (5) supposée vérifiée, le module maximum de la fonction (2) est de la forme $e^{\varepsilon(r) r^\mu}$ toutes les fois que l'expression (4) s'annule pour $n = \infty$ (¹).

Admettons maintenant que cette expression (4) n'ait pas zéro pour limite, ce qui revient à supposer l'existence d'un nombre positif σ tel que l'on ait

$$\left| \alpha_0 + \frac{1}{\mu} \sum_1^n \frac{1}{a_n^\mu} \right| > \sigma$$

pour une infinité de valeurs n, soit

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_\nu, \quad \ldots.$$

Désignons par C_ν le cercle de rayon $r_\nu = n_\nu^{\frac{1}{\mu}}$ ayant l'origine pour centre ; en posant $x = r_\nu e^{i\varphi}$ et

$$(8) \qquad \alpha_0 + \frac{1}{\mu} \sum_1^{n_\nu} \frac{1}{a_n^\mu} = \rho_\nu e^{i\varphi_\nu} \qquad (\rho_\nu > \sigma),$$

(¹) Cette partie du théorème avait déjà été démontrée par M. Boutroux (*Comptes rendus*, t. CXXXIV, 1902, p. 83, et *Acta mathematica*, t. XXVIII, p. 38). *Voir* aussi pages 301-312 du Mémoire de M. Pringsheim cité plus haut.

on aura sur ce cercle

$$\left| e^{x^\mu\left(\alpha_0+\frac{1}{\mu}\sum_1^{n_\nu}\frac{1}{a_n^\mu}\right)} \right| = e^{\rho_\nu r_\nu^\mu \cos(\mu\varphi+\varphi_\nu)},$$

et l'on en conclut que l'inégalité

$$\left| e^{x^\mu\left(\alpha_0+\frac{1}{\mu}\sum_1^{n_\nu}\frac{1}{a_n^\mu}\right)} \right| > e^{\frac{\varpi}{2} r_\nu^\mu}$$

est vérifiée sur les arcs de C_ν où $\cos(\mu\varphi + \varphi_\nu) > \frac{1}{2}$ et qui occupent la troisième partie de la circonférence totale.

D'autre part, d'après la proposition démontrée tout à l'heure, on a sur C_ν

$$|\Phi(x, n_\nu)| < e^{\varepsilon(\nu) r_\nu^\mu},$$

et, comme $\Phi(x, n_\nu)$ s'obtient en multipliant la fonction (2) par un facteur exponentiel qui se réduit à l'unité pour $x = 0$, on peut en conclure, d'après le n° 3, que les parties de C_ν sur lesquelles est vérifiée, par exemple, l'inégalité

$$|\Phi(x, n_\nu)| < e^{-\frac{\varpi}{4} r_\nu^\mu},$$

deviennent négligeables par rapport à la circonférence totale lorsque ν croît indéfiniment.

Il en résulte que le module du produit (2') est supérieur à $e^{\frac{\varpi}{4} r_\nu^\mu}$ sur certaines parties de chacune des circonférences C_ν, à partir d'une certaine de ces circonférences. Donc le module maximum de la fonction (2) ne saurait être de la forme $e^{\varepsilon(r) r^\mu}$, et la première partie de notre théorème se trouve ainsi démontrée.

La démonstration de la seconde partie étant tout à fait analogue, il suffit de l'indiquer en quelques mots.

Il résulte d'abord de l'inégalité (6) du n° 2 que l'expression (3) reste finie toutes les fois que la fonction donnée est de type moyen. En supposant que l'expression (4) reste également finie, on démontre, par un raisonnement analogue à celui des pages 376-377, mais plus simple (¹), que le module maximum de la fonction (2) est de la forme (1), où $\tau(r)$ est limité supérieurement. Si, d'ailleurs, les expressions en question ne s'annulent pas toutes les deux pour $n = \infty$, $\tau(r)$ ne saurait tendre vers zéro, en vertu de la première partie du théorème, de sorte que la fonction (2) est effectivement de type moyen. Dans le cas où l'expression (4) ne reste pas finie, on pourra choisir les entiers n_ν de telle sorte que l'on ait $\lim\limits_{\nu=\infty} \rho_\nu = \infty$, en se servant toujours de la notation (8). On aura alors, sur les arcs de la circonférence C_ν où $\cos(\mu\varphi + \varphi_\nu) > \frac{1}{2}$,

$$\left| e^{x^\mu \left(\alpha_0 + \frac{1}{\mu} \sum\limits_1^{n_\nu} \frac{1}{a_n^\mu} \right)} \right| > e^{\omega(\nu) r_\nu^\mu},$$

avec $\lim\limits_{\nu=\infty} \omega(\nu) = \infty$, et, d'autre part, sur toute la circonférence C_ν,

$$|\Phi(x, n_\nu)| < e^{K r_\nu^\mu},$$

K étant une quantité finie indépendante de ν. D'après le n° 3, on en conclut que la fonction (2), sous les conditions énoncées, ne saurait appartenir au type moyen.

La seconde partie du théorème étant ainsi prouvée, la dernière se démontre par le principe d'exclusion.

6. Démontrons encore la proposition suivante dont nous aurons plus tard à faire usage :

Étant donnée une fonction entière $f(x)$ d'ordre entier μ, si on la multiplie par une fonction quelconque $\varphi(x)$ de type ou d'ordre inférieur, le produit sera de même ordre et de même type que $f(x)$.

Supposons, par exemple, que $f(x)$ soit de type *moyen*; on pourra prendre pour $\varphi(x)$ une fonction quelconque dont le module maximum soit de la forme $e^{\varepsilon(r) r^\mu}$.

(¹) On pourra, en effet, réunir les produits $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ en un seul.

En écrivant ces fonctions sous la forme

$$f(x) = e^{\alpha_0 x^\mu + \ldots + \alpha_\mu}\, x^m \prod \mathrm{E}\left(\mu, \frac{x}{a_n}\right),$$

$$\varphi(x) = e^{\alpha'_0 x^\mu + \ldots + \alpha'_\mu}\, x^{m'} \prod \mathrm{E}\left(\mu, \frac{x}{a'_n}\right),$$

nous pouvons affirmer, d'après le théorème de la page 375, que les expressions

$$(9)\qquad \frac{n}{|a'_n|^\mu}, \quad \left| \alpha'_0 + \frac{1}{\mu} \sum_1^n \frac{1}{a'^\mu_n} \right|$$

s'annulent toutes les deux pour $n = \infty$, tandis que les expressions

$$(10)\qquad \frac{n}{|a_n|^\mu}, \quad \left| \alpha_0 + \frac{1}{\mu} \sum_1^n \frac{1}{a^\mu_n} \right|,$$

tout en restant finies, ne tendent pas simultanément vers zéro.

Le produit des deux fonctions s'écrit

$$f(x)\,\varphi(x) = e^{(\alpha_0+\alpha'_0)x^\mu + \ldots + (\alpha_\mu + \alpha'_\mu)}\, x^{m+m'} \prod \mathrm{E}\left(\mu, \frac{x}{b_n}\right),$$

en désignant par b_1, b_2, ..., b_n, ... l'ensemble des zéros a et a' rangés par ordre de modules croissants. Ce produit étant *au plus* de type moyen d'ordre μ, les expressions

$$(11)\qquad \frac{n}{|b_n|^\mu}, \quad \left| (\alpha_0 + \alpha'_0) + \frac{1}{\mu} \sum_1^n \frac{1}{b^\mu_n} \right|,$$

d'après le théorème de la page 375, resteront certainement au-dessous d'une limite finie, quel que soit n. Il nous suffit donc de démontrer que *l'une au moins de ces expressions ne tend pas vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.*

Il est d'abord évident que, si la dernière des expressions (10) ne tend pas vers zéro, il en est de même de la dernière des expressions (11).

Admettons maintenant que la première des expressions (10), tout en restant finie, ne s'annule pas pour $n=\infty$. Elle sera donc supérieure à un certain nombre positif σ pour une infinité de valeurs, n_1, $n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$, de l'indice n. Soit n'_ν l'ordre qu'occupe a_{n_ν} dans la suite des points b, de sorte que $a_{n_\nu}=b_{n'_\nu}$. On aura évidemment $n'_\nu \geqq n_\nu$, et l'on en conclut

$$\frac{n'_\nu}{|b_{n'_\nu}|^\mu} \geqq \frac{n_\nu}{|a_{n_\nu}|^\mu} > \sigma \qquad \text{pour} \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

ce qui montre que, dans l'hypothèse actuelle, la première des expressions (11) ne saurait tendre vers zéro.

Notre assertion relative aux expressions (11) est donc exacte, et il en résulte, d'après le n° 4, que le produit $f(x)\varphi(x)$, dans l'hypothèse admise ci-dessus, est effectivement de type moyen, comme l'exige notre théorème.

La démonstration est analogue dans le cas où $f(x)$ est de type maximum et, dans le cas où cette fonction est de type minimum, l'exactitude du théorème résulte de propositions bien connues que nous n'avons pas à rappeler ici.

III. — Généralisation des résultats précédents.

7. Lorsqu'une fonction entière appartient au type minimum ou au type maximum de son ordre, il est en général possible de préciser davantage l'ordre de grandeur de son module maximum $M(r)$ en le comparant à une exponentielle de la forme

$$e^{r^\mu (\log r)^{\mu_1} (\log_2 r)^{\mu_2} \ldots (\log_i r)^{\mu_i}}.$$

Pour abréger le langage, nous conviendrons de dire que *la fonction donnée est d'ordre* $(\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i)$, si l'on a

$$M(r) = e^{\tau(r)\, r^\mu (\log r)^{\mu_1} (\log_2 r)^{\mu_2} \ldots (\log_i r)^{\mu_i}}, \tag{1}$$

la fonction $\tau(r)$ vérifiant l'inégalité

$$\tau(r) < (\log_i r)^\varepsilon$$

à partir d'une valeur finie de r, et l'inégalité

$$\tau(r) > (\log_i r)^{-\varepsilon}$$

pour des valeurs r indéfiniment croissantes, et cela quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε.

Il y a lieu de faire ici la même distinction qu'au n° 4 : nous dirons que la fonction $f(x)$ fait partie du type *minimum, moyen* ou *maximum* de l'ordre indiqué suivant que $\tau(r)$ s'annule pour $r = \infty$, ou reste au-dessous d'une limite finie sans tendre vers zéro, ou prend des valeurs supérieures à toute quantité donnée.

Ceci posé, étant donnée une fonction entière $f(x)$ d'ordre $(\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i)$, où μ *est un entier positif*, on pourra toujours (*voir* le n° 4) la mettre sous la forme

$$e^{\alpha_0 x^{\mu} + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_{\mu}} x^m \prod \mathrm{E}\left(\mu, \frac{x}{a_n}\right), \tag{2}$$

et l'on aura alors le théorème suivant qui généralise celui du n° 4 [1] :

Si $f(x)$ est de type minimum, les expressions

$$\frac{n(\log n)^{-\mu_1}\ldots(\log_i n)^{-\mu_i}}{|a_n|^{\mu}} \tag{3}$$

et

$$(\log n)^{-\mu_1}\ldots(\log_i n)^{-\mu_i}\left|\alpha_0 + \frac{1}{\mu}\sum_1^n \frac{1}{a_n^{\mu}}\right| \tag{4}$$

tendent toutes les deux vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Réciproquement, si cette condition est vérifiée, la fonction (2) *fait partie du type minimum d'ordre* $(\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i)$, *pourvu que les expressions précédentes, après qu'on les aura multipliées par une puissance positive arbitrairement petite de* $\log_i n$, *ne tendent pas simultanément vers zéro.*

Si $f(x)$ est de type moyen, les expressions (3) *et* (4), *tout en restant*

---

[1] Une fonction entière d'ordre $(\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i)$, où μ *n'est pas entier*, est de type minimum, moyen ou maximum suivant que l'expression (3), lorsque n augmente indéfiniment, tend vers la limite *zéro*, ou reste finie sans tendre vers *zéro*, ou prend des valeurs supérieures à tout nombre donné d'avance.

finies, ne s'annulent pas simultanément pour $n=\infty$; *et réciproquement.*

Enfin, si $f(x)$ *est de type maximum, l'une au moins des expressions ci-dessus peut prendre des valeurs supérieures à toute quantité donnée; et réciproquement, si cette condition est vérifiée, le produit* (2) *définit une fonction d'ordre* $(\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i)$ *et de type maximum, pourvu que les expressions dont il s'agit, divisées par une puissance positive de* $\log_i n$, *s'annulent toutes les deux pour* $n=\infty$, *quelque petite que soit cette puissance.*

La démonstration de ce théorème est, au fond, identique à celle du n° 5, et, quant aux calculs, on les trouve développés pages 22-24 de notre Mémoire cité page 377. Nous ne croyons donc pas nécessaire d'y insister [1].

8. De même, on peut généraliser comme il suit la proposition établie au n° 6 :

Le produit d'une fonction $f(x)$ *d'ordre* $(\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i)$ *par une fonction quelconque* $\varphi(x)$ *de type ou d'ordre inférieur, est de même ordre et de même type que* $f(x)$.

Indiquons rapidement la démonstration de cette proposition, en nous bornant au cas où $f(x)$ est de type *moyen*.

D'abord, si l'expression (3) ne tend pas vers zéro pour la fonction $f(x)$, elle ne tendra pas non plus vers zéro pour le produit $f(x)\varphi(x)$, ce qu'on démontre en raisonnant comme au n° 6 et en observant que le numérateur de (3) est fonction croissante à partir d'une certaine valeur de n. Dans ce cas, le produit considéré est donc bien de type moyen.

Dans le cas où l'expression (3) tend et où, par suite, l'expres-

---

[1] Remarquons toutefois que les inégalités (7) seront maintenant remplacées par les suivantes :

$$[n_1(\log n_1)^{-\mu_1}\ldots(\log_i n_1)^{-\mu_i}]^{\frac{1}{\mu}} \leqq r \leqq \{(n_1+1)[\log(n_1+1)]^{-\mu_1}\ldots[\log_i(n_1+1)]^{-\mu_i}\}^{\frac{1}{\mu}},$$

d'où l'on tire

$$n_1 = [1+\varepsilon(r)]\,\mu^{\mu_1} r^{\mu}(\log r)^{\mu_1}\ldots(\log_i r)^{\mu_i}.$$

sion (4) ne tend pas vers zéro pour la fonction $f(x)$, on arrive au même résultat en mettant cette fonction sous la forme (2') (p. 376). En effet, si l'on pose

$$r_1 = [n_1(\log n_1)^{-\mu_1} \dots (\log_i n_1)^{-\mu_i}]^{\frac{1}{\mu}},$$

on montre facilement, en raisonnant comme au n° 5, qu'il existe une infinité de valeurs de l'entier n_1 telles que l'on ait, sur les cercles $|x| = r_1$,

$$\left| x^\mu \left(\alpha_0 + \frac{1}{\mu} \sum_1^{n_1} \frac{1}{a_n^\mu} \right) \right| > \sigma r_1^\mu (\log r_1)^{\mu_1} \dots (\log_i r_1)^{\mu_i},$$

σ étant une constante positive, tandis que, sur les mêmes cercles, le module de $\Phi(x, n_1)$, et par suite aussi celui de $\Phi(x, n_1)\varphi(x)$, sera inférieur à une expression de la forme $e^{\varepsilon(r_1) r_1^\mu (\log r_1)^{\mu_1} \dots (\log_i r_1)^{\mu_i}}$. D'après le n° 3, il en résulte bien que le produit $f(x)\varphi(x)$ est de type moyen.

IV. — Le théorème de MM. Picard et Borel.

9. Étant donnée une fonction entière $f(x)$ d'ordre *entier* μ, proposons-nous d'étudier les racines des équations de la forme

$$(1) \qquad f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

où $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *sont des fonctions entières quelconques d'ordre inférieur à* μ, *ou bien d'ordre* μ *mais d'un type inférieur à celui de* $f(x)$. Nous désignerons par $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ces racines, rangées par ordre de modules croissants (les racines *zéro* étant exclues).

Dans le cas où $f(x)$ est de type *minimum*, des théorèmes bien connus, sur lesquels nous n'avons pas à revenir ici, nous apprennent que *toute* équation (1) admet une infinité de racines, telles que l'expression

$$(2) \qquad \frac{n}{|a_n|^{\mu+\varepsilon}},$$

lorsque n augmente indéfiniment, tend vers zéro ou non suivant que ε est positif ou négatif. C'est d'ailleurs tout ce qu'on peut dire au sujet des racines de ces équations, tant qu'on ne précise pas davantage l'ordre de la fonction $f(x)$. Donc, dans l'hypothèse admise, aucun *cas d'exception* ne saurait se présenter.

Si l'on suppose la fonction $f(x)$ de type *moyen* ou de type *maximum*, on peut déduire des considérations développées plus haut les résultats suivants, qui servent à préciser beaucoup le célèbre théorème de MM. Picard et Borel (*cf.* le théorème de la page 375) :

Lorsque $f(x)$ est de type moyen, l'expression

$$(3) \qquad \frac{n}{|a_n|^{\mu}}$$

reste au-dessous d'une limite finie pour toute équation de la forme (1), *mais ne tend pas vers zéro lorsque n croît indéfiniment, excepté peut-être pour* une seule *de ces équations*.

Si $f(x)$ est de type maximum, il y a au plus une *équation* (1), *telle que l'expression* (3) *reste au-dessous d'une limite finie quel que soit n; d'ailleurs l'expression* (2) *tend vers zéro pour toute équation* (1), *quelque petit que soit le nombre positif* ε.

Ajoutons que, lorsque $f(x)$ est de type maximum, l'expression $\frac{n}{|a_n|^{\mu-\varepsilon}}$ ne tend vers zéro pour *aucune* équation (1), quelque petit que soit le nombre positif ε, ou, en d'autres termes, que l'exposant de convergence des racines est égal à μ pour *toute* équation (1). Donc, pour qu'un *cas d'exception* puisse se présenter, il faut imposer aux racines de ces équations une condition plus précise, comme dans la proposition ci-dessus.

En adoptant les définitions données au n° 7, supposons maintenant la fonction $f(x)$ d'ordre $(\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i)$, et considérons encore les équations (1) où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions entières quelconques de types ou d'ordres inférieurs. En se servant des résultats des n^{os} 7 et 8, on pourra dans ce cas présenter le théorème de MM. Picard et Borel sous la forme suivante (*cf.* le théorème p. 383) :

Si la fonction $f(x)$ d'ordre $(\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i)$ est de type minimum, l'expression

$$\frac{n(\log n)^{-\mu_1}\ldots(\log_i n)^{-\mu_i}}{|a_n|^{\mu}} \tag{4}$$

tend vers zéro pour toute équation (1), *mais le produit de cette expression par une puissance positive de* $\log_i n$, *quelque petite qu'elle soit, peut dépasser toute limite donnée, excepté peut-être pour* une seule *de ces équations.*

Lorsque $f(x)$ est de type moyen, il y a au plus une *équation* (1) *telle que l'expression* (4) *tende vers zéro lorsque n augmente indéfiniment; cette expression reste d'ailleurs au-dessous d'une limite finie pour chacune des équations considérées.*

Enfin, si $f(x)$ est de type maximum, il y a au plus une *équation* (1) *telle que l'expression* (4) *reste au-dessous d'une limite finie quel que soit n; le quotient de cette expression par une puissance positive arbitrairement petite de* $\log_i n$ *tend d'ailleurs vers zéro pour toute équation* (1).

10. Les démonstrations des divers théorèmes énoncés au numéro précédent étant tout à fait analogues, nous nous contenterons de démontrer ici le premier de ces théorèmes [1].

Soit donc $f(x)$ une fonction entière d'ordre entier μ et de type *moyen*, et supposons qu'il existe deux équations *distinctes* de la forme (1),

$$f(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}, \tag{5}$$

telles que l'expression (3) tende vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Nous allons nous heurter à une contradiction.

Considérons, en effet, les fonctions entières

$$\begin{cases} F_1(x) = \psi_1(x)f(x) - \varphi_1(x), \\ F_2(x) = \psi_2(x)f(x) - \varphi_2(x). \end{cases} \tag{6}$$

---

[1] Nous nous étions servi d'un mode de démonstration analogue dans une Note *Sur un cas particulier du théorème de M. Picard relatif aux fonctions entières*, insérée dans l'*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, t. I, p. 101-104 (Stockholm, 1903).

Le module maximum de chacune des fonctions φ_1, ψ_1, φ_2, ψ_2 étant, par hypothèse, de la forme $e^{\varepsilon(r)r^\mu}$, les résultats du n° 6 nous apprennent que les produits $\psi_1(x)f(x)$ et $\psi_2(x)f(x)$, et par suite aussi les fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$, sont de même type que la fonction donnée $f(x)$. Comme nous avons supposé que, pour ces dernières fonctions, l'expression (3) s'annule pour $n=\infty$, il en résulte, d'après le théorème de la page 375, que le module de l'expression

$$\alpha_0 + \frac{1}{\mu}\sum_1^n \frac{1}{a_n^\mu}, \tag{7}$$

pour chacune des fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$, reste au-dessous d'une limite finie quel que soit n, *sans tendre vers zéro* lorsque n augmente indéfiniment.

Écrivons (*voir* p. 376)

$$\begin{cases} F_1(x) = e^{A_n^{(1)}x^\mu} F_1(x, n), \\ F_2(x) = e^{A_n^{(2)}x^\mu} F_2(x, n), \end{cases} \tag{8}$$

$A_n^{(1)}$ et $A_n^{(2)}$ désignant respectivement les valeurs que prend l'expression (7) pour les fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$; puis éliminons $f(x)$ entre les équations (6), ce qui nous donne

$$e^{A_n^{(1)}x^\mu}\Phi_1(x, n) - e^{A_n^{(2)}x^\mu}\Phi_2(x, n) = \chi(x), \tag{9}$$

en posant pour abréger

$$\Phi_1(x, n) = \psi_2(x)\,F_1(x, n), \qquad \Phi_2(x, n) = \psi_1(x)\,F_2(x, n),$$
$$\chi(x) = \psi_1(x)\,\varphi_2(x) - \psi_2(x)\,\varphi_1(x).$$

Remarquons de suite que la fonction $\chi(x)$ ne s'annule pas identiquement, puisqu'on a supposé les équations (5) distinctes, et que son module maximum est de la forme $e^{\varepsilon(r)r^\mu}$.

Ceci posé, la valeur de $r = |x|$ étant donnée, déterminons dans les égalités (8) l'entier n par la condition

$$n \leqq r^\mu < (n+1).$$

D'après le n° 5, le module maximum de chacune des fonctions $F_1(x, n)$, $F_2(x, n)$ sera de la forme $e^{\varepsilon(r)r^{\mu}}$, et il en sera évidemment de même des fonctions $\Phi_1(x, n)$ et $\Phi_2(x, n)$.

D'autre part, il existe une quantité positive σ, telle que l'on ait $|A_n^{(1)}| > \sigma$ pour une infinité de valeurs de n, soit $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$. Désignons par C_ν la circonférence décrite de l'origine comme centre et du rayon $r_\nu = n_\nu^{\frac{1}{\mu}}$, et par C'_ν l'ensemble des arcs de cette circonférence sur lesquels $\cos(\mu\varphi + \varphi_\nu) > \frac{1}{2}$ (φ désignant l'argument de x et φ_ν celui de $A_{n_\nu}^{(1)}$). On aura sur les arcs C'_ν, pour chaque indice ν,

$$\left| e^{A_{n_\nu}^{(1)} x^{\mu}} \right| > e^{\frac{\sigma}{2} r_\nu^{\mu}},$$

et l'on en conclut, en raisonnant comme au n° 5, que l'inégalité

$$\left| e^{A_{n_\nu}^{(1)} x^{\mu}} \Phi_1(x, n_\nu) \right| > e^{\left(\frac{\sigma}{2} - \varepsilon\right) r_\nu^{\mu}},$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε, est vérifiée sur certaines parties des arcs C'_ν dont la longueur totale, divisée par celle des arcs C'_ν, tend vers l'unité lorsque ν augmente indéfiniment. La relation (9) nous montre, ensuite, qu'on a sur les mêmes parties des arcs C'_ν, pour ν suffisamment grand,

$$\left| e^{A_{n_\nu}^{(2)} x^{\mu}} \Phi_2(x, n_\nu) \right| > e^{\left(\frac{\sigma}{2} - \varepsilon'\right) r_\nu^{\mu}},$$

et par suite aussi

$$\left| e^{A_{n_\nu}^{(2)} x^{\mu}} \right| > e^{\left(\frac{\sigma}{2} - \varepsilon''\right) r_\nu^{\mu}},$$

où $\varepsilon'' > \varepsilon' > \varepsilon$.

Les propriétés de la fonction exponentielle assurent, d'ailleurs, la validité de cette dernière inégalité pour tout point des arcs C'_ν, dès que ν dépasse une certaine limite.

Soit maintenant C''_ν l'ensemble des arcs de la circonférence C_ν pour lesquels on a $\cos(\mu\varphi + \varphi_\nu) < -\frac{1}{2}$; les propriétés de la fonction exponentielle nous permettent de conclure des inégalités ci-dessus que l'on a, pour tout point des arcs C''_ν,

$$\left| e^{A_{n_\nu}^{(1)} x^{\mu}} \right| < e^{-\frac{\sigma}{2} r_\nu^{\mu}},$$

et, d'autre part, à partir d'une valeur finie de ν,

$$\left|e^{A_{n_\nu}^{(2)} x^\mu}\right| < e^{-\left(\frac{\sigma}{2}-\varepsilon''\right) r_\nu^\mu}.$$

Il en résulte que l'inégalité

$$\left|e^{A_{n_\nu}^{(1)} x^\mu} \Phi_1(x, n_\nu) - e^{A_{n_\nu}^{(2)} x^\mu} \Phi_2(x, n_\nu)\right| < e^{-\sigma' r_\nu^\mu},$$

où σ' désigne un nombre positif inférieur à $\frac{\sigma}{2}$, est vérifiée sur les arcs C''_ν, dès que ν dépasse une certaine limite.

Or cette conclusion est en contradiction avec l'égalité (9), car le module maximum de la fonction $\chi(x)$, d'après ce que nous avons dit plus haut, est de la forme $e^{\varepsilon(r) r^\mu}$, et l'inégalité

$$|\chi(x)| < e^{-\sigma' r_\nu^\mu}$$

ne saurait donc avoir lieu que sur des parties de la circonférence C_ν dont la longueur totale devient négligeable par rapport à celle des arcs C''_ν, lorsque ν augmente indéfiniment (*voir* le n° 3).

La démonstration est donc achevée.

V. — Théorèmes relatifs à la croissance régulière [1].

11. Soit $f(x)$ une fonction entière d'ordre entier $(\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i)$ et *à croissance régulière*; nous entendons par là que le module maximum de $f(x)$ est de la forme

$$(1) \qquad M(r) = e^{\tau(r) r^\mu (\log r)^{\mu_1} \ldots (\log_i r)^{\mu_i}},$$

où la fonction $\tau(r)$, quelque petit que soit le nombre positif ε, reste comprise entre $(\log_i r)^{-\varepsilon}$ et $(\log_i r)^{\varepsilon}$ à partir d'une valeur finie de r.

Supposons, d'autre part, les zéros de la fonction $f(x)$ tels que,

---

[1] *Cf.* É. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, Notes II et III, et p. 25-32 de notre Mémoire cité plus haut.

pour n suffisamment grand, l'expression

$$\frac{n(\log n)^{-\mu_1}\ldots(\log_i n)^{-\mu_i}}{|a_n|^{\mu}} \tag{2}$$

reste inférieure à $(\log_i n)^{-\sigma}$, σ étant une constante positive (*cf.* le théorème p. 387). On aura alors le théorème suivant :

Si la fonction $f(x)$ vérifie les conditions énoncées ci-dessus, et si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions entières quelconques d'ordres inférieurs à $(\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i)$ et ne s'annulant pas identiquement, les zéros de la fonction

$$\psi(x)f(x) - \varphi(x) \tag{3}$$

sont tels que l'expression (2) reste comprise entre $(\log_i n)^{\varepsilon}$ et $(\log_i n)^{-\varepsilon}$ à partir d'une valeur finie de n, quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε, de sorte qu'on pourra écrire

$$|a_n| = [n(\log n)^{-\mu_1}\ldots(\log_{i-1} n)^{-\mu_{i-1}}(\log_i n)^{-\mu_i+\varepsilon(n)}]^{\frac{1}{\mu}}.$$

Nous savons, d'après le théorème de M. Jensen (*voir* le n° 2), que, pour la fonction (3), l'expression (2) reste inférieure à $(\log_i n)^{\varepsilon}$ à partir d'une valeur finie de n, et d'autre part, par le théorème de la page 387, que la même expression est supérieure à $(\log_i n)^{-\varepsilon}$ pour une infinité de valeurs n. Il reste donc à démontrer que *cette dernière inégalité subsiste pour toute valeur n dépassant une certaine limite.*

Pour ne pas fatiguer le lecteur, nous nous bornerons à indiquer ici la marche générale de cette démonstration, sans insister sur les détails.

Si la proposition énoncée n'était pas vraie, les zéros de la fonction (3) vérifieraient une inégalité de la forme

$$\frac{n(\log n)^{-\mu_1}\ldots(\log_i n)^{-\mu_i}}{|a_n|^{\mu}} < (\log_i n)^{-\sigma'},$$

où σ' désigne une constante positive, pour une infinité de valeurs de l'entier n. Désignons par C_ν le cercle ayant l'origine pour centre et pour rayon

$$r_\nu \equiv \left[n_\nu(\log n_\nu)^{-\mu_1}\ldots(\log_{i-1} n_\nu)^{-\mu_{i-1}}(\log_i n_\nu)^{-\mu_i+\frac{\sigma'}{2}}\right]^{\frac{1}{\mu}},$$

et mettons la fonction (3) sous la forme (*voir* p. 376)

$$\psi(x)f(x) - \varphi(x) = e^{A_n^{(1)} x^\mu} F_1(x, n), \tag{4}$$

en désignant par $A_n^{(1)}$ la valeur que prend pour cette fonction l'expression

$$\alpha_0 + \frac{1}{\mu}\sum_1^n \frac{1}{a_n^\mu}. \tag{5}$$

En suivant fidèlement le raisonnement donné pages 27 à 29 de notre Mémoire, on démontre que le module $|F_1(x, n_\nu)|$, à partir d'une valeur finie de ν, est inférieur à l'expression

$$e^{r^\mu(\log r)^{\mu_1}\ldots(\log_{i-1} r)^{\mu_{i-1}}(\log_i r)^{\mu_i - \sigma''}} \tag{6}$$

sur le cercle C_ν, σ'' étant une constante positive convenablement choisie.

Écrivons, d'autre part, la fonction donnée $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = e^{A_n x^\mu} f(x, n), \tag{7}$$

A_n désignant la valeur correspondante de l'expression (5), et l'entier n étant déterminé, pour toute valeur donnée de $r \equiv |x|$, par les conditions (*voir* la note p. 384)

$$n(\log n)^{-\mu_1}\ldots(\log_{i-1} n)^{-\mu_{i-1}}(\log_i n)^{-\mu_i+\sigma} \leqq r^\mu,$$
$$(n+1)[\log(n+1)]^{-\mu_1}\ldots[\log_{i-1}(n+1)]^{-\mu_{i-1}}[\log_i(n+1)]^{-\mu_i+\sigma} > r^\mu.$$

En tenant compte des hypothèses admises au début de ce numéro, et en raisonnant comme au n° 5, on montre que le module de l'expression $f(x, n)$, et par suite aussi celui du produit

$$F(x, n) \equiv \psi(x) f(x, n),$$

à partir d'une certaine valeur de r, restera inférieur à l'expression (6) où l'on aura remplacé σ'' par une autre quantité positive convenablement choisie. En s'appuyant sur les résultats établis au n° 3 et sur les propriétés de la fonction exponentielle, on en conclut successivement, d'après l'égalité (7), que le module $|A_n x^\mu|$ peut s'écrire

$$r^\mu (\log r)^{\mu_1} \ldots (\log_{i-1} r)^{\mu_{i-1}} (\log_i r)^{\mu_i + \varepsilon(r)}, \tag{8}$$

ensuite, que la fonction (3) est, comme $f(x)$, d'ordre $(\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i)$ et à croissance régulière, et enfin, d'après l'égalité (4), en tenant compte du résultat relatif à $F_1(x, n)$ démontré ci-dessus, que le module $|A^{(1)}_{n_\nu} x^\mu|$ est égal à une expression de la forme (8) sur le cercle C_ν, c'est-à-dire pour $r = r_\nu$.

En somme, on aura donc sur le cercle C_ν, d'après (4),

$$e^{A_n x^\mu} F(x, n) - e^{A^{(1)}_{n_\nu} x^\mu} F_1(x, n_\nu) = \varphi(x),$$

les fonctions $F(x, n)$, $F_1(x, n_\nu)$, $\varphi(x)$ étant d'ordres inférieurs à celui des facteurs exponentiels. Or on démontre, comme au n° 10, que cette égalité implique une contradiction dès que ν dépasse une certaine limite. Notre théorème est donc exact.

On arrive par une démonstration analogue au théorème plus précis que voici (*cf.* p. 30 à 32 de notre Mémoire) :

Supposons que la fonction donnée $f(x)$ d'ordre $(\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i)$ soit à croissance régulière en ce sens plus étroit que, dans l'égalité (1), *$\tau(r)$ reste compris entre deux limites finies et positives à partir d'une certaine valeur de r, et admettons en outre que, pour cette fonction $f(x)$, l'expression* (2) *tende vers zéro.*

Cela étant, si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions entières quelconques dont les modules maxima soient de la forme

$$e^{\tau(r) r^\mu (\log r)^{\mu_1} \ldots (\log_i r)^{\mu_i}},$$

les zéros de la fonction entière (3) *sont tels que l'on ait*

$$|a_n| = [h(n)\, n (\log n)^{-\mu_1} \ldots (\log_i n)^{-\mu_i}]^{\frac{1}{\mu}},$$

$h(n)$ restant compris entre deux limites finies et positives à partir d'une certaine valeur de n.

12. Considérons la fonction entière de genre $\mu - 1$

$$f(x) = \prod_{n_0}^{\infty} \mathrm{E}\left(\mu - 1, \frac{x}{a_n}\right),$$

les zéros a étant tous positifs et donnés par l'égalité

$$a_n = [n(\log n)^{\mu_1 + \varepsilon(n)}]^{\frac{1}{\mu}},$$

où μ désigne un *entier* positif et μ_1 un nombre positif compris dans l'intervalle

$$1 < \mu_1 < 2.$$

En écrivant

$$f(x) = e^{-\frac{x^\mu}{\mu}\sum\limits_{n+1}^{\infty}\frac{1}{a_n^\mu}} \prod_{n_0}^{n} \mathrm{E}\left(\mu - 1, \frac{x}{a_n}\right) \prod_{n+1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\mu, \frac{x}{a_n}\right),$$

et en observant que l'on a

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{a_n^\mu} = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\mu_1 + \varepsilon(n)}} = (\log n)^{1 - \mu_1 + \varepsilon(n)},$$

on démontre, par un raisonnement analogue à celui du n° 5, que le module maximum de la fonction $f(x)$ est de la forme

$$e^{r^\mu (\log r)^{1-\mu_1+\varepsilon(r)}},$$

ou, en d'autres termes, que cette fonction est d'ordre $(\mu, 1 - \mu_1)$ et à croissance régulière, d'après la définition donnée au début du n° 11.

Dès lors, en désignant par $\varphi(x)$, $\psi(x)$ des fonctions entières quelconques d'ordre inférieur à $(\mu, 1 - \mu_1)$ et ne s'annulant pas identiquement, on peut conclure du théorème de la page 391 que les zéros de la fonction entière

$$\psi(x) f(x) - \varphi(x) \tag{9}$$

sont tels que l'on ait

$$|a_n| = [n(\log n)^{\mu_1 - 1 + \varepsilon(n)}]^{\frac{1}{\mu}}.$$

Comme $0 < \mu_1 - 1 < 1$, on voit donc que *toute fonction* (9) *est de genre* μ (¹).

Il en résulte en particulier que, dès que la constante C est différente de zéro, la fonction

$$f(x) + C$$

est de genre μ, tandis que sa dérivée $f'(x)$, d'après le théorème connu de Laguerre (²), est de même genre que $f(x)$, c'est-à-dire de genre $\mu - 1$.

On arrive ainsi à établir en toute rigueur, et sous une forme plus générale, les remarquables résultats énoncés par M. Wiman dans le Mémoire cité au début de cette étude.

(¹) On peut ajouter, d'après le théorème de la page 375, que la série $\sum_1^\infty \frac{1}{a_n^\mu}$ converge pour chacune de ces fonctions.

(²) *Voir* É. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 37.

Helsingfors, janvier 1905.