ALF GULDBERG

Sur les équations linéaires aux différences finies

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 22 (1905), p. 309-348
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1905_3_22__309_0>

SUR LES

ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES FINIES,

PAR M. ALF GULDBERG.

Les analogies entre les équations linéaires aux différences finies et les équations différentielles linéaires ont été depuis longtemps signalées.

Aussi Taylor a réduit la solution de l'équation linéaire aux différences finies du premier ordre aux quadratures finies. Lagrange a démontré que sa méthode des variations des constantes des équations différentielles linéaires s'applique aussi aux équations linéaires aux différences finies. Cauchy, utilisant une idée de Brisson, a donné, par des formules symboliques, la solution générale de l'équation linéaire aux différences finies à coefficients constants; et ces questions ont été reprises et complétées par M. Mansion. Tardi a démontré que, si l'on connaît une intégrale particulière d'une équation linéaire aux différences finies, on peut abaisser d'une unité l'ordre de cette équation, de même que l'on peut diminuer d'une unité l'ordre d'une équation différentielle linéaire dont on connaît une intégrale. Les théorèmes sur les intégrales formant un système fondamental d'une équation différentielle linéaire ont conduit MM. Casorati, Pincherle et Heyman à des théorèmes analogues sur les intégrales formant un système fondamental d'une équation linéaire aux différences finies. Les méthodes symboliques pour l'intégration d'une équation différentielle linéaire ont été l'origine des méthodes symboliques pour l'intégration des équations linéaires aux différences finies (*voir* BOOLE, *A treatise on the calculus of finite differences*).

Dans un Mémoire important, M. Pincherle a exposé une théorie très complète d'une forme linéaire aux différences finies, suggérée sans doute par les théorèmes analogues de la théorie des formes algébriques et des formes différentielles linéaires.

Mais il restait une partie des plus importantes de la théorie des équations différentielles linéaires, qui n'avait pas encore son analogue dans la théorie des équations linéaires aux différences finies : je veux dire la partie qui traite des *fonctions invariantes* ou *fonctions symétriques* des solutions d'une équation différentielle linéaire et la transformation de ces équations. C'est l'étude des propriétés analogues des équations linéaires aux différences finies qui fait l'objet du présent Mémoire.

Soient $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire aux différences finies d'ordre n; les fonctions symétriques en question sont, comme par les équations différentielles linéaires, des fonctions algébriques entières de $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ et de leurs valeurs successives qui se reproduisent multipliées par un facteur constant, dans le sens du calcul aux différences finies, différent de zéro quand on remplace $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ par les éléments $z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(n)}$ d'un autre système fondamental, c'est-à-dire quand on fait une substitution linéaire de la forme

$$y_x^{(i)} = C_{i1} z_x^{(1)} + C_{i2} z_x^{(2)} + \ldots + C_{in} z_x^{(n)}$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dans le premier Chapitre, je démontre un théorème analogue au théorème fondamental de M. Appell sur les fonctions invariantes d'une équation différentielle linéaire, et j'applique ce théorème à quelques exemples.

Le second Chapitre contient les applications de ce théorème à la théorie de la transformation des équations linéaires aux différences finies avec quelques exemples.

Le présent Mémoire, qui est né de l'étude du Mémoire classique de M. Appell [1], s'attache étroitement au Mémoire de l'éminent géo-

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. X, p. 391.

mètre, dont j'ai pu utiliser les démonstrations presque textuellement.

J'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences, dans la séance du 12 octobre 1903, le théorème qui est la base de cette théorie.

CHAPITRE I.

SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES FINIES.

I. Soient

$$y_{x+n} + a_x^{(1)} y_{x+n-1} + a_x^{(2)} y_{x+n-2} + \ldots + a_x^{(n)} y_x = 0 \tag{1}$$

une équation linéaire aux différences finies, les a_x étant des fonctions de x et $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ un système fondamental d'intégrales; je vais démontrer le théorème suivant :

Toute fonction algébrique entière F *de* $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ *et des valeurs successives de ces fonctions, qui se reproduit multipliée par un facteur constant différent de zéro quand on remplace* $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ *par les éléments d'un autre système fondamental d'intégrales, est égale à une fonction algébrique entière des coefficients de l'équation linéaire et de leurs valeurs successives multipliées par une puissance de* $\Pi[(-1)^n a_{x-1}^{(n)}]$.

La fonction supposée F doit, en particulier, se reproduire, à un facteur constant près, quand on permute entre elles les fonctions $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$. Il résulte de là que cette fonction contient les valeurs successives de $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ jusqu'au même ordre. Soit p cet ordre; je vais d'abord montrer que la fonction F est une fonction invariante de $n(p+1)$ variables

$$\left\{\begin{array}{lllll} y_x^{(1)} & y_{x+1}^{(1)} & y_{x+2}^{(1)} & \ldots & y_{x+p}^{(1)} \\ y_x^{(2)} & y_{x+1}^{(2)} & y_{x+2}^{(2)} & \ldots & y_{x+p}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_x^{(n)} & y_{x+1}^{(n)} & y_{x+2}^{(n)} & \ldots & y_{x+p}^{(n)} \end{array}\right. \tag{2}$$

En effet, cette fonction F est supposée telle que, si l'on passe du système fondamental $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ à un autre $z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(n)}$, c'est-à-dire si l'on fait

$$(3)\quad \begin{cases} y_x^{(i)} = C_{i1} z_x^{(1)} + C_{i2} z_x^{(2)} + \ldots + C_{in} z_x^{(n)} \\ y_{x+1}^{(i)} = C_{i1} z_{x+1}^{(1)} + C_{i2} z_{x+1}^{(2)} + \ldots + C_{in} z_{x+1}^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{x+p}^{(i)} = C_{i1} z_{x+p}^{(1)} + C_{i2} z_{x+p}^{(2)} + \ldots + C_{in} z_{x+p}^{(n)} \end{cases}$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$, on ait identiquement

$$\begin{aligned} &F(y_x^{(1)}, y_{x+1}^{(1)}, \ldots, y_{x+p}^{(1)}; y_x^{(2)}, y_{x+1}^{(2)}, \ldots, y_{x+p}^{(2)}; \ldots; y_x^{(n)}, y_{x+1}^{(n)}, \ldots, y_{x+p}^{(n)}) \\ &\quad = H.F(z_x^{(1)}, z_{x+1}^{(1)}, \ldots, z_{x+p}^{(1)}; z_x^{(2)}, z_{x+1}^{(2)}, \ldots, z_{x+p}^{(2)}; \ldots; z_x^{(n)}, z_{x+1}^{(n)}, \ldots, z_{x+p}^{(n)}), \end{aligned}$$

le facteur H étant une fonction des seuls coefficients C de la substitution (3). Ce facteur H est supposé différent de zéro tant que le nouveau système $z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(n)}$ est fondamental, c'est-à-dire tant que le déterminant D de la substitution est différent de zéro. Il résulte de là que H ne peut différer que par un facteur numérique k d'une puissance de D

$$H = k.D^m.$$

On voit immédiatement que $k = 1$, en supposant

$$y_x^{(1)} = z_x^{(1)}; \qquad y_x^{(2)} = z_x^{(2)}, \qquad \ldots, \qquad y_x^{(n)} = z_x^{(n)}.$$

La fonction supposée F se reproduit donc multipliée par D^m quand on fait sur les variables (2) une substitution telle que (3). Il en résulte que F est une fonction invariante des $n(p+1)$ variables (2), ainsi que nous l'avions annoncé.

II. En appliquant à la fonction F les théorèmes connus de M. Appell sur des fonctions invariantes [1], on voit qu'il y a lieu de distinguer trois cas :

1° Si l'ordre p des plus hautes valeurs successives de $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ qui figurent dans F est moindre que $n-1$, la fonction F ne contient ni $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ ni les valeurs successives de ces fonctions.

---

(1) *Loc. cit.*, p. 393-400.

2° Si $p = n - 1$, la fonction est, à un facteur près, indépendante de $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$, une puissance du déterminant

$$\begin{vmatrix} y_x^{(1)} & y_{x+1}^{(1)} & y_{x+2}^{(1)} & \ldots & y_{x+n-1}^{(1)} \\ y_x^{(2)} & y_{x+1}^{(2)} & y_{x+2}^{(2)} & \ldots & y_{x+n-1}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_x^{(n)} & y_{x+1}^{(n)} & y_{x+2}^{(n)} & \ldots & y_{x+n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire, d'après un théorème de M. Heymann, une puissance de $\Pi[(-1)^n a_{x-1}^{(n)}]$.

3° Si p est plus grand que $n - 1$, on peut toujours, à l'aide de l'équation linéaire (1), remplacer dans F toutes les valeurs successives de $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ d'ordre supérieur à $n - 1$ en fonctions des autres. Cette opération n'introduit évidemment dans F que des fonctions entières des coefficients de l'équation linéaire et de leurs valeurs successives.

On transforme ainsi la fonction F en une autre de même nature qui ne contient plus que les valeurs successives de $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ jusqu'à l'ordre $n - 1$ inclusivement; par suite, d'après le deuxième cas, cette fonction est une puissance de $\Pi[(-1)^n a_{x-1}^{(n)}]$ multipliée par un facteur qui ne peut être qu'une fonction algébrique entière des coefficients de l'équation linéaire et de leurs valeurs successives.

III. Le théorème démontré peut être étendu à un système d'équations linéaires simultanées de la forme suivante

$$\begin{aligned} &y_{x+1}^1 + a_x^{11} y_x^1 + a_x^{12} y_x^2 + \ldots + a_x^{1n} y_x^n = 0, \\ &y_{x+1}^2 + a_x^{21} y_x^1 + a_x^{22} y_x^2 + \ldots + a_x^{2n} y_x^n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_{x+1}^n + a_x^{n1} y_x^1 + a_x^{n2} y_x^2 + \ldots + a_x^{nn} y_x^n = 0, \end{aligned}$$

les coefficients a_x^{ik} étant des fonctions de x. Soit

$$(4) \qquad \left\{ \begin{matrix} y_x^{11} & y_x^{12} & \ldots & y_x^{1n} \\ y_x^{21} & y_x^{22} & \ldots & y_x^{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_x^{n1} & y_x^{n2} & \ldots & y_x^{nn} \end{matrix} \right.$$

un système fondamental d'intégrales de ces équations; le déterminant de ces n^2 quantités, soit D_x. D'après un théorème de M. Heymann, on a donc (¹)

$$D_x = C\Pi[(-1)^n P_{x-1}],$$

où P_x désigne le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_x^{11} & a_x^{12} & \dots & a_x^{1n} \\ a_x^{21} & a_x^{22} & \dots & a_x^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_x^{n1} & a_x^{n2} & \dots & a_n^{nn} \end{vmatrix}.$$

Toute fonction algébrique entière des fonctions (4) et de leurs valeurs successives qui se reproduit multipliée par un facteur constant différent de zéro quand on remplace les fonctions (4) par les éléments d'un autre système fondamental d'intégrales, est égale à une fonction algébrique entière des coefficients a_x^{ik} et de leurs valeurs successives multipliée par une puissance de $\Pi[(-1)^n P_{x-1}]$.

Il est inutile de donner la démonstration de ce théorème, car elle est en tout semblable à celle qui précède.

IV. Pour donner une application simple du théorème démontré, proposons-nous de former la condition nécessaire et suffisante pour que deux équations linéaires aux différences finies

$$(5)\qquad \begin{cases} f_x(y_x) \equiv y_{x+n} + a_x^{(1)} y_{x+n-1} + \ldots + a_x^{(n)} y_x = 0, \\ \varphi_x(z_x) \equiv z_{x+m} + b_x^{(1)} z_{x+m-1} + \ldots + b_x^{(m)} z_x = 0 \end{cases}$$

aient une intégrale commune. Soient $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales de la première des équations (5); $z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(m)}$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales de la seconde. La condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations aient une intégrale commune est que le déter-

(¹) HEYMANN, *Studien über die Transformation und Integration der Differential und Differenzengleichungen*, p. 333.

minant

$$\delta = \begin{vmatrix} \varphi_x(y_x^{(1)}) & \varphi_{x+1}(y_x^{(1)}) & \varphi_{x+2}(y_x^{(1)}) & \dots & \varphi_{x+n-1}(y_x^{(1)}) \\ \varphi_x(y_x^{(2)}) & \varphi_{x+1}(y_x^{(2)}) & \varphi_{n+2}(y_x^{(2)}) & \dots & \varphi_{x+n-1}(y_x^{(2)}) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \varphi_x(y_x^{(n)}) & \varphi_{x+1}(y_x^{(n)}) & \varphi_{x+2}(y_x^{(n)}) & \dots & \varphi_{x+n-1}(y_x^{(n)}) \end{vmatrix}$$

soit nul. En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations aient une intégrale commune est que l'on ait

$$\varphi_x(C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)} + \dots + C_n y_x^{(n)}) = 0,$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$ étant des constantes; or cette condition peut s'écrire

$$C_1 \varphi_x(y_x^{(1)}) + C_2 \varphi_x(y_x^{(2)}) + \dots + C_n \varphi_x(y_x^{(n)}) = 0,$$

et l'on sait que la condition $\delta = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une relation linéaire et homogène, et à coefficients constants entre les n fonctions $\varphi_x(y_x^{(1)})$, $\varphi_x(y_x^{(2)})$, $\dots$, $\varphi_x(y_x^{(n)})$.

Le déterminant δ est une fonction invariante de

$$\begin{array}{llll} y_x^{(1)}, & y_{x+1}^{(1)}, & \dots, & y_{x+m+n-1}^{(1)}, \\ y_x^{(2)}, & y_{x+1}^{(2)}, & \dots, & y_{x+m+n-1}^{(2)}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots\dots, \\ y_x^{(n)}, & y_{x+1}^{(n)}, & \dots, & y_{x+m+n-1}^{(n)}; \end{array}$$

par conséquent, ce déterminant est égal à une fonction rationnelle entière des coefficients de la première des équations (5) et de leurs valeurs successives multipliées par $\Pi[(-1)^n a_{x-1}^n]$. En calculant cette fonction entière de la façon indiquée page 313, on obtient la condition cherchée, $\delta = 0$, en fonction entière des coefficients des deux équations et des valeurs successives de ces coefficients. Cette même condition s'obtiendrait aussi en égalant à zéro le déterminant

$$d = \begin{vmatrix} f_x(z_x^{(1)}) & f_{x+1}(z_x^{(1)}) & f_{x+2}(z_x^{(1)}) & \dots & f_{x+m-1}(z_x^{(1)}) \\ f_x(z_x^{(2)}) & f_{x+1}(z_x^{(2)}) & f_{x+2}(z_x^{(2)}) & \dots & f_{x+m+1}(z_x^{(2)}) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ f_x(z_x^{(m)}) & f_{x+1}(z_x^{(m)}) & f_{x+2}(z_x^{(m)}) & \dots & f_{x+m-1}(z_x^{(m)}) \end{vmatrix}.$$

V. Pour donner une autre application générale du théorème énoncé, proposons-nous de former l'équation linéaire qui admette à la fois les intégrales de deux équations linéaires données (5). Adoptons les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, on voit que l'équation cherchée, qui est évidemment d'ordre $m+n$, est la suivante

$$) \quad \begin{vmatrix} y_{x+m+n} & y^{(1)}_{x+m+n} & y^{(2)}_{x+m+n} & \cdots & y^{(n)}_{x+m+n} & z^{(1)}_{x+m+n} & \cdots & z^{(m)}_{x+m+n} \\ y_{x+m+n-1} & y^{(1)}_{x+m+n-1} & y^{(2)}_{y+m+n-1} & \cdots & y^{(n)}_{x+m+n-1} & z^{(1)}_{x+m+n-1} & \cdots & z^{(m)}_{x+m+n-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ y_x & y^{(1)}_x & y^{(2)}_x & \cdots & y^{(n)}_x & z^{(1)}_x & \cdots & z^{(m)}_x \end{vmatrix} =$$

Le premier membre de cette équation est une fonction invariante de

$$\begin{matrix} y^{(1)}_x & y^{(1)}_{x+1} & y^{(1)}_{x+2} & \cdots & y^{(1)}_{x+m+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(n)}_x & y^{(n)}_{x+1} & y^{(n)}_{x+2} & \cdots & y^{(n)}_{x+m+n} \end{matrix}$$

et de

$$\begin{matrix} z^{(1)}_x & z^{(1)}_{x+1} & z^{(1)}_{x+2} & \cdots & z^{(1)}_{x+m+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z^{(m)}_x & z^{(m)}_{x+1} & z^{(m)}_{x+2} & \cdots & z^{(m)}_{x+m+n}. \end{matrix}$$

On peut donc l'exprimer en fonction des coefficients de deux équations (5), et l'on obtient ainsi l'équation cherchée.

La même méthode sert à former l'équation linéaire admettant les intégrales de trois ou plusieurs équations linéaires données.

Il est à remarquer que l'équation (6) ne répond pas à la question si les deux équations (5) ont une ou plusieurs intégrales communes; car, alors, le déterminant (6) est nul identiquement comme ayant deux ou plusieurs colonnes identiques.

Dans ce cas, l'on formera l'équation linéaire $\psi(z_x) = 0$ donnant les intégrales communes aux deux équations (5); cette équation $\psi(z_x) = 0$ peut être formée par une méthode analogue à celle de la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynomes. Les équations (5) peuvent alors se mettre sous la forme

$$f_x(z_x) \equiv f_1[\psi(z_x)] = 0,$$
$$\varphi\ (z_x) = \varphi_1[\psi(z_x)] = 0,$$

les équations linéaires

$$(5') \qquad f_1(u_x) = 0, \qquad \varphi_1(u_x) = 0$$

n'ayant plus d'intégrale commune. On formera ensuite, par la méthode précédente, l'équation $F(u_x) = 0$, admettant les intégrales des équations (5'), et l'équation cherchée, admettant les intégrales des équations (5'), sera

$$F[\psi(z_x)] = 0.$$

CHAPITRE II.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES FINIES.

VI. Le théorème du paragraphe I fournit une méthode générale pour la transformation des équations linéaires aux différences finies. Soient, comme précédemment, $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ un système fondamental d'intégrales de l'équation (1) et

$$\eta_x = f(y_x^{(1)}, y_{x+1}^{(1)}, \ldots, y_{x+m_1}^{(1)};\ y_x^{(2)}, y_{x+1}^{(2)}, \ldots, y_{x+m_2}^{(2)};\ \ldots;\ y_x^{(n)}, y_{x+1}^{(n)}, \ldots, y_{x+m_n}^{(n)}),$$

une fonction algébrique entière des intégrales $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ et de leurs valeurs successives. Le problème général de la transformation des équations linéaires aux différences finies est *de former l'équation linéaire aux différences finies qui admet pour intégrale la fonction* η_x.

Tout d'abord, pour voir quel est l'ordre de l'équation linéaire en η_x, on remplacera $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots\ y_x^{(n)}$ par les éléments d'un autre système fondamental, en faisant

$$\begin{aligned}
y_x^{(i)} &= C_{i1} z_x^{(1)} + C_{i2} z_x^{(2)} + \ldots + C_{in} z_x^{(n)},\\
y_{x+1}^{(i)} &= C_{i1} z_{x+1}^{(1)} + C_{i2} z_{x+1}^{(2)} + \ldots + C_{in} z_{x+1}^{(n)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$; l'ordre de l'équation linéaire en η_x est égal au nombre de termes linéairement indépendants qui entrent dans l'expression de η_x en fonction de $z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(n)}$ et des valeurs successives de ces fonctions. Soit p ce nombre et soient

$$\varphi_x^{(1)}, \quad \varphi_x^{(2)}, \quad \ldots, \quad \varphi_x^{(p)}$$

les p termes en question linéairement indépendants; l'équation en η_x sera

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \eta_{x+p} & \varphi_{x+p}^{(1)} & \varphi_{x+p}^{(2)} & \ldots & \varphi_{x+p}^{(p)} \\ \eta_{x+p-1} & \varphi_{x+p-1}^{(1)} & \varphi_{x+p-1}^{(2)} & \ldots & \varphi_{x+p-1}^{(p)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \eta_x & \varphi_x^{(1)} & \varphi_x^{(2)} & \ldots & \varphi_x^{(p)} \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction invariante de $z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(n)}$ et de leurs valeurs successives jusqu'à un certain ordre. On peut donc exprimer ce déterminant en fonction des seuls coefficients de l'équation (1), et l'on a ainsi l'équation cherchée en η_x.

Soit, par exemple, l'équation

$$y_{x+2} = a_x y_{x+1} + b_x y_x.$$

Posons

$$\eta_x = [y_x^{(1)}]^2;$$

l'expression générale de η_x sera

$$(C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)})^2.$$

Nous avons ici les trois termes

$$y_x^{(1)}, \quad y_x^{(1)} y_x^{(2)}, \quad y_x^{(2)},$$

et l'équation donnant η_x sera en général du troisième ordre [1].

VII. La transformation la plus simple consiste à poser

$$\eta_x = A_x^{(0)} y_{x+m}^{(1)} + A_x^{(1)} y_{x+m-1}^{(1)} + \ldots + A_x^{(m)} y_x^{(1)},$$

$A_x^{(0)}, A_x^{(1)}, \ldots, A_x^{(m)}$ étant des fonctions données de x, et $y_x^{(1)}$ une intégrale de l'équation (1). On voit immédiatement que l'équation en η_x est du même ordre que la proposée. On remarque d'abord qu'à l'aide

---

(1) HEYMANN, *Studien über die Transformation und Integration der Differential und Differenzengleichungen*, p. 410.

de l'équation (1) on peut toujours abaisser l'indice m de la plus haute valeur successive qui figure dans η_x au-dessous de n, et ramener η_x à la forme

$$\eta_x = \alpha_{01} y_{x+n-1}^{(1)} + \alpha_{02} y_{x+n-2}^{(1)} + \ldots + \alpha_{0n} y_x^{(1)}.$$

En prenant les valeurs successives des deux membres, une fois, deux fois, ..., n fois, et éliminant les valeurs successives de $y_x^{(1)}$ d'indice supérieur à $n-1$ au moyen de l'équation (1), on a de même

$$\begin{gathered}\eta_{x+1} = \alpha_{11} y_{x+n-1}^{(1)} + \alpha_{12} y_{x+n-2}^{(1)} + \ldots + \alpha_{1n} y_x^{(1)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \eta_{x+n} = \alpha_{n1} y_{x+n-1}^{(1)} + \alpha_{n1} y_{x+n-2}^{(1)} + \ldots + \alpha_{nn} y_x^{(1)}.\end{gathered}$$

En éliminant $y_x^{(1)}, y_{x+1}^{(1)}, \ldots, y_{x+n-1}^{(1)}$ entre ces $(n+1)$ équations, on obtient l'équation cherchée en η_x.

La fonction $y_x^{(1)}$ s'exprime en η_x de la même façon que η_x en $y_x^{(1)}$.

En effet, laissant de côté la dernière des $(n+1)$ équations précédentes, on a n équations qui sont du premier degré par rapport à

$$y_x^{(1)}, \quad y_{x+1}^{(1)}, \quad \ldots, \quad y_{x+n-1}^{(1)},$$

et l'on tire, en particulier,

$$y_x^{(1)} = \beta_1 \eta_{x+n-1} + \beta_2 \eta_{x+n-2} + \ldots + \beta_n \eta_x.$$

Il est à remarquer que l'on peut effectivement résoudre ces équations du premier degré; en effet, si le déterminant des inconnues était nul, on en conclurait pour η_x une relation de la forme

$$\lambda_1 \eta_{x+n-1} + \lambda_2 \eta_{x+n-2} + \ldots + \lambda_n \eta_x = 0,$$

ce qui est absurde, car l'expression générale en η_x au moyen des intégrales de l'équation (1) contient n termes linéairement indépendants, à moins que l'équation

$$A_x^{(0)} y_{x+m} + A_x^{(1)} y_{x+m-1} + \ldots + A_x^{(m)} y_x = 0$$

n'eût des intégrales communes avec la proposée (1), auquel cas l'ordre de l'équation en η_x subirait une réduction évidente.

SUR LES

ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES FINIES,

(SECOND MÉMOIRE.)

PAR M. ALF GULDBERG.

J'expose, dans ce travail, une théorie d'intégration des équations linéaires aux différences finies, qui est entièrement analogue à la célèbre théorie de MM. Picard et Vessiot sur l'intégration des équations différentielles linéaires. La proposition fondamentale en est la suivante :

A toute équation linéaire aux différences finies d'ordre n correspond un groupe continu fini de transformations linéaires homogènes à n variables, qui jouit des deux propriétés suivantes :

1° *Toute fonction rationnelle des intégrales qui a une expression rationnelle admet toutes les transformations de ce groupe;*

2° *Toute fonction rationnelle des intégrales invariante par toutes les transformations de ce groupe a une expression rationnelle.*

Ce travail est divisé en trois Chapitres. Dans le premier Chapitre, je démontre le théorème cité qui est la base de toute cette théorie. Le deuxième Chapitre contient l'intégration de l'équation donnée au moyen d'équations auxiliaires, liées à la réduction progressive du groupe de transformations de l'équation. La méthode à laquelle on arrive donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation linéaire soit intégrable par des quadratures, et de là résulte, en particulier, l'impossibilité d'intégrer, au moyen des quadratures, les équations linéaires générales supérieures au premier ordre. Le troisième Chapitre contient l'application de la méthode développée à l'équation linéaire du second ordre.

La méthode que j'ai suivie dans ce Mémoire est entièrement analogue à celle suivie par M. Picard dans son excellent *Traité d'Analyse* pour les équations différentielles linéaires.

Les principaux résultats contenus dans ce travail ont été présentés à l'Académie des Sciences dans la séance du 27 octobre 1903 ([1]).

CHAPITRE I.

GROUPE DE TRANSFORMATIONS D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE AUX DIFFÉRENCES FINIES.

1. Soit

$$y_{x+m} + p_x^{(1)} y_{x+m-1} + \ldots + p_x^{(m)} y_x = 0 \tag{1}$$

une équation linéaire aux différences finies à coefficients rationnels; nous désignons par $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ un système fondamental d'intégrales, et posons

$$V_x = u_x^{(1)} y_x^{(1)} + u_x^{(2)} y_x^{(2)} + \ldots + u_x^{(m)} y_x^{(m)},$$

où les u_x sont des fonctions rationnelles arbitrairement choisies de x. Cette fonction satisfait à une équation linéaire aux différences finies d'ordre m^2 à coefficients rationnels, équation qui se forme immédiatement, en exprimant

$$V_x, \quad V_{x+1}, \quad \ldots, \quad V_{x+m^2}$$

à l'aide des valeurs successives des y_x jusqu'à l'ordre $m-1$. Entre les m^2+1 équations ainsi obtenues, il suffira d'éliminer les y_x et leurs valeurs successives pour avoir l'équation cherchée, que nous désignerons par (A),

$$V_{x+m^2} + P_x^{(1)} V_{x+m^2-1} + \ldots + P_x^{(m^2)} V_x = 0. \tag{A}$$

([1]) Dans son travail : *On linear homogeneous difference equations and continuous groups* (*Bulletin of the American mathematical Society*, 2nd séries, Vol. X, p. 499), M. S. Epsteen a continué ces recherches.

Cette équation a pour intégrales les fonctions

$$u_x^{(i)} y_x^{(k)} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Si les u_x sont pris arbitrairement, ces m^2 dernières fonctions sont bien linéairement indépendantes; il suffit, pour le faire voir, de regarder un cas particulier. Supposons, pour plus de simplicité, $m = 2$ et mettons $u_x^{(2)} = 1$; il suffit donc de prendre pour $u_x^{(1)}$ une fonction, ne satisfaisant pas à l'équation aux différences finies, dont la solution générale s'écrit

$$u_x^{(1)} = \frac{C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)}}{C_3 y_x^{(1)} + C_4 y_x^{(2)}}.$$

De ce que les $u_x^{(i)} y_x^{(k)}$ sont linéairement indépendants, on conclut qu'au moyen des expressions de

$$V_x, \quad V_{x+1}, \quad \ldots, \quad V_{x+m^2-1},$$

en fonction linéaire des y_x et de leurs valeurs successives jusqu'à l'ordre $m - 1$, on peut tirer, par la résolution d'équations du premier degré, les valeurs des y_x et de leurs valeurs successives en fonction de V_x et de ses valeurs successives ci-dessus; car, dans le cas contraire, on pourrait former pour V_x une équation linéaire aux différences finies d'ordre $m^2 - 1$ au plus, et entre les m^2 quantités

$$u_x^{(i)} y_x^{(k)}$$

existerait donc une relation homogène et linéaire à coefficients constants, contrairement à ce que nous avons établi.

Nous aurons donc en particulier, pour $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$, des expressions

$$\begin{aligned}
y_x^{(1)} &= \alpha_1 V_x + \alpha_2 V_{x+1} + \ldots + \alpha_{m^2} V_{x+m^2-1},\\
y_x^{(2)} &= \beta_1 V_x + \beta_2 V_{x+1} + \ldots + \beta_{m^2} V_{x+m^2-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_x^{(m)} &= \lambda_1 V_x + \lambda_2 V_{x+1} + \ldots + \lambda_{m^2} V_{x+m^2-1},
\end{aligned}$$

où les $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont rationnels en x.

A toute intégrale de l'équation (A) correspond un système d'intégrales $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ de l'équation proposée (1); ce système pourra n'être pas fondamental. Cela arrivera si le déterminant des y_x et de leurs valeurs successives jusqu'à l'ordre $m-1$ est nul; en écrivant ceci, on obtiendra une certaine équation en V_x

$$(\varphi) \qquad \varphi(x, V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+k}) = 0,$$

k étant au plus égal à m^2-1. On aura donc un système fondamental

$$y_x^{(1)}, \quad y_x^{(2)}, \quad \ldots, \quad y_x^{(m)},$$

si l'on prend pour V_x une intégrale de l'équation (A) *ne satisfaisant pas à l'équation* (φ).

Ceci posé, il arrivera, en général, c'est-à-dire si l'équation (1) est prise arbitrairement, que l'équation (A) n'aura aucune solution commune avec une équation aux différences finies à coefficients rationnels, d'ordre inférieur à m^2, *si l'on fait abstraction des solutions qui satisfont à l'équation* (φ).

Mais il pourra, dans certains cas, en être autrement; supposons donc que l'équation aux différences finies d'ordre p

$$(f) \qquad f(x, V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p}) = 0$$

remplisse cette condition, f étant un polynome. Parmi toutes ces équations, considérons celles qui sont *d'ordre moindre*, et prenons l'une d'elles que nous continuerons à désigner par la lettre f. Nous pouvons supposer l'équation f algébriquement irréductible par rapport à V_{x+p}; il est clair alors que toute solution de f qui n'appartient pas à φ satisfait à A, car, dans le cas contraire, on pourrait déduire des équations (A) et (f) une équation d'ordre moindre, qui ne serait certainement pas une identité, et à laquelle satisfait la solution commune à (A) et (f).

Soient $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ le système fondamental correspondant à une certaine solution de l'équation f (solution n'appartenant pas à φ), et $Y_x^{(1)}, Y_x^{(2)}, \ldots, Y_x^{(m)}$ le système correspondant à la solution générale de la même équation; on aura

$$(S) \qquad \begin{cases} Y_x^{(1)} = a_{11}\, y_x^{(1)} + a_{12}\, y_x^{(2)} + \ldots + a_{1m}\, y_x^{(m)}, \\ Y_x^{(2)} = a_{21}\, y_x^{(1)} + a_{22}\, y_x^{(2)} + \ldots + a_{2m}\, y_x^{(m)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_x^{(m)} = a_{m1}\, y_x^{(1)} + a_{m2}\, y_x^{(2)} + \ldots + a_{mm}\, y_x^{(m)}. \end{cases}$$

Les coefficients a dépendent seulement de p paramètres arbitraires, et nous allons voir facilement qu'on peut les considérer comme des fonctions *algébriques* de p paramètres arbitraires. En effet, considérons l'intégrale générale de l'équation

$$f(x, V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p}) = 0;$$

cette intégrale générale sera nécessairement de la forme

$$V_x = \alpha_1 v_x^{(1)} + \alpha_2 V_x^{(2)} + \ldots + \alpha_{m^2} v_x^{(m^2)},$$

les v_x étant m^2 solutions linéairement indépendantes de l'équation (A). En écrivant que cette expression de V_x satisfait à l'équation f, nous obtiendrons des relations nécessairement algébriques entre les constantes α, et comme il doit rester p arbitraires, les α seront des fonctions algébriques de p constantes arbitraires. Donc, dans

$$Y_x^{(1)}, \quad Y_x^{(2)}, \quad \ldots, \quad Y_x^{(m)}$$

figureront *algébriquement* p constantes, et, par suite, si $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ désignent un système fondamental correspondant à une solution particulière de f, les coefficients de la substitution, désignés plus haut par α, *dépendront d'une manière algébrique de p paramètres arbitraires* que nous appellerons les paramètres λ.

Les relations algébriques ainsi obtenues entre les a expriment que si les y_x correspondent à une solution arbitraire de f, les Y_x déduits de (S) correspondront aussi à une solution de f. Dans ces conditions, il est évident que si l'on considère deux substitutions, telles que (S), correspondant à deux systèmes distincts de valeurs des paramètres λ, le produit de ces deux substitutions sera une substitution de même forme, les paramètres λ étant représentés par un troisième système de valeurs. *Les substitutions* (S) *forment donc un groupe continu de transformations;* nous désignerons par G ce groupe continu et algébrique de transformations linéaires, et nous l'appellerons *le groupe de transformations* relatif à l'équation linéaire aux différences finies. Dans les deux Paragraphes suivants, nous représenterons par $y_{(x)}^{(1)}$, $y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ un système fondamental correspondant à une solution de f.

Faisons encore la remarque importante, dont la démonstration est immédiate, que l'*intégrale générale de l'équation* (f) *peut s'exprimer linéairement en fonction d'une intégrale particulière et de ses valeurs successives,* les coefficients de cette expression linéaire étant des fonctions rationnelles de x dépendant de p constantes arbitraires.

2. On peut établir, à l'égard de ce groupe, la proposition suivante qui rappelle le théorème fondamental de Picard dans la théorie des équations différentielles linéaires :

Toute fonction rationnelle de x, *de* $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ *et de leurs valeurs successives, s'exprimant rationnellement en fonction de* x, *reste invariable quand on effectue sur* $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ *les substitutions du groupe* G.

En parlant d'une fonction des y_x restant invariable, nous entendons que cette fonction reste la même fonction de la variable x.

Considérons une fonction des y_x et de leurs valeurs successives jouissant de la propriété indiquée dans l'énoncé; en y remplaçant $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ par leurs valeurs en fonction d'une intégrale V_x de f, qui n'appartienne pas à φ, et désignant par $R(x)$ la fraction rationnelle de x à laquelle est égale, par hypothèse, notre fonction, on aura l'équation

$$F(x, V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p}) = R(x), \tag{2}$$

F étant rationnelle. Cette équation se trouvera donc vérifiée pour *une* certaine solution de f n'appartenant pas à φ. Elle le sera, par suite, pour *toutes* les solutions de f, qui n'appartiennent pas à φ; en effet, dans le cas contraire, on pourrait, de l'équation (2) et de l'équation

$$f(x, V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p}) = 0,$$

que nous supposons de degré μ par rapport à V_{x+p} et algébriquement irréductible par rapport à V_{x+p}, tirer une seconde équation

$$\chi(x, V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p}) = 0$$

de degré μ au plus, par rapport à V_{x+p}. La fonction V_x satisfait à ces deux équations; si l'équation χ n'est pas une conséquence de l'équation f, on pourra obtenir une équation aux différences finies algébrique d'ordre moindre que p, à laquelle satisfera V_x, ce qui est contre nos hypothèses sur f.

Il faut donc que χ soit une conséquence de f, c'est-à-dire que toute solution de f, ne satisfaisant pas à φ, vérifie la relation (2). Du moment, d'ailleurs, que la solution générale de f vérifie (2), il en sera certainement ainsi pour toute solution particulière, et, notamment, pour celles qui satisfont à φ, s'il en existe.

Dire que la fonction F garde la même valeur $R(x)$ pour toute solution de f revient à énoncer que la fonction rationnelle considérée de x, des y_x et de leurs valeurs successives ne change pas quand on effectue sur $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}$, ..., $y_x^{(m)}$ les substitutions du groupe G, et le théorème est démontré.

3. A ce théorème, on doit joindre une réciproque.

Toute fonction rationnelle de x et d'un système fondamental $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}$, ..., $y_x^{(m)}$ et de leurs valeurs successives, qui reste invariable par les substitutions du groupe G, *est une fonction rationnelle de x.*

Soit $\Phi(x, y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}; y_{x+1}^{(1)}, \ldots)$ une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé; il faut montrer que, si l'on met à la place de $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}$, ..., $y_x^{(m)}$ un certain système fondamental, la fonction Φ sera une fonction rationnelle de x. Or, remplaçons les y_x et leurs valeurs successives par leurs valeurs en fonctions de V_x, nous aurons

$$\Phi = F(x, V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p}).$$

Je dis que, si l'on prend pour V_x une intégrale de f n'appartenant pas à φ, cette expression sera une fonction rationnelle de x. Remarquons d'abord que, d'après l'hypothèse faite sur Φ, la fonction $F(x, V_x, \ldots)$ représentera la même fonction de x, quelle que soit la solution V_x de l'équation f, n'appartenant pas à φ, et, par suite, pour l'intégrale générale V_x de f.

Or, soit encore μ le degré de f par rapport à V_{x+p}; pour des valeurs *arbitraires* données à

$$x, \quad V_x, \quad V_{x+1}, \quad \ldots, \quad V_{x+p-1},$$

l'équation $f = 0$ a μ racines distinctes en V_{x+p}. En se servant de l'équation f, on peut supposer que dans F la valeur successive V_{x+p} ne figure qu'au degré $\mu - 1$ au plus. Cette substitution faite, F devient une fonction

$$F_1(x, V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p}) = 0$$

rationnelle par rapport aux lettres dont elle dépend et contenant V_{x+p} à la puissance $\mu - 1$ au plus dans son numérateur et son dénominateur. Comme pour une valeur donnée d'ailleurs quelconque de x, la fonction F_1 prend la même valeur pour toutes les valeurs des constantes arbitraires figurant dans l'intégrale générale de l'équation f, il s'ensuit que, dans les mêmes conditions, la fonction F_1 prend la même valeur pour toutes les valeurs de $V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p}$ satisfaisant à la relation

$$f(x, V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p}) = 0,$$

de degré μ et algébriquement irréductible par rapport à V_{x+p}; il faut donc que F_1 ne dépende que de x. *La fonction Φ est donc une fonction rationnelle de x,* comme nous voulions l'établir.

4. Les deux théorèmes précédents sont entièrement analogues aux théorèmes fondamentaux de Picard dans la théorie des équations différentielles linéaires.

Pour une équation linéaire aux différences finies arbitrairement donnée, l'équation (A) correspondante n'aura aucune solution commune avec une équation algébrique d'ordre inférieur à m^2, cette solution n'appartenant pas à l'équation φ.

L'équation désignée par f se réduit alors à l'équation (A) elle-même; le groupe de transformations de l'équation donnée est alors l'ensemble des substitutions linéaires effectuées sur $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$, c'est un groupe à m^2 paramètres.

Quand le groupe G est un groupe à moins de m^2 paramètres, l'équation est une équation particulière : *elle est caractérisée par ce fait qu'il existe au moins une fonction rationnelle de x, de $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ et de leurs valeurs successives, égale à une fonction rationnelle de x,* cette relation n'ayant pas lieu, quel que soit le système fondamental $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$.

Substituons, en effet, dans

$$f(x, V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p}),$$

à la place de V_x, l'expression $u_x^{(1)} y_x^{(1)} + u_x^{(2)} y_x^{(2)} + \ldots + u_x^{(m)} y_x^{(m)}$, nous obtiendrons une fonction rationnelle des y_x et de leurs valeurs successives qui ne sera pas identiquement nulle, quels que soient les éléments du système fondamental $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$, et qui, pour certains systèmes fondamentaux, se réduira à zéro, et pourra donc être regardée comme une fonction rationnelle de x.

Inversement, supposons qu'entre les éléments d'un certain système fondamental $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$, on ait la relation

$$\chi(x, y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}; y_{x+1}^{(1)}, \ldots) = 0,$$

qui ne soit pas vérifiée pour un système fondamental quelconque.

En remplaçant les y_x par leurs valeurs en V_x, V_x étant une intégrale de A ne satisfaisant pas à φ, on aura

$$\psi(x, V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+k}) = 0,$$

k étant au plus égal à $m^2 - 1$. Cette relation ne se réduira pas à une identité, car alors la relation χ serait vérifiée quand on fait sur les y_x une substitution quelconque. On a donc une équation d'ordre moindre que m^2, à laquelle satisfait une solution V_x de A, n'appartenant pas à φ, et, par suite, *le groupe de l'équation n'est pas le groupe général à m^2 paramètres.*

5. Nous avons dit que, parmi les équations f d'ordre moindre p, on prendrait l'une d'elles; mais on doit nécessairement se demander quelle conséquence entraînerait, pour *le groupe de transformations* de l'équation donnée, la substitution d'une équation f à une autre équation, que nous désignerons par f_1. Cherchons les relations qui peuvent exister entre les intégrales de ces deux équations d'ordre p

$$f(V_x) = 0, \qquad f_1(V_x^{(1)}) = 0.$$

Puisque $V_x^{(1)}$ est une fonction linéaire des y_x, et que celles-ci s'expriment aussi linéairement à l'aide des V_x et de leurs valeurs successives, nous aurons pour $V_x^{(1)}$ une expression linéaire par rapport à V_x

et ses valeurs successives. Si donc nous considérons deux intégrales *déterminées* v_x et $v_x^{(1)}$ de ces deux équations, n'appartenant pas à φ, on aura

$$v_x^{(1)} = \alpha_x v_x + \beta_x v_{x+1} + \ldots,$$

α_x et β_x étant des fonctions rationnelles de x. Or, considérons d'autre part l'expression

$$\text{(T)} \qquad W_x = \alpha_x V_x + \beta_x V_{x+1} + \ldots$$

V_x étant l'intégrale générale de f; elle satisfera à une équation d'ordre p,

$$f_2(W_x) = 0.$$

Les deux équations f_1 et f_2 ont une intégrale commune, n'appartenant pas à φ, à savoir $v_x^{(1)}$. Il faudra donc que l'équation $f_2(W_x) = 0$ coïncide avec l'équation $f_1(V_x^{(1)}) = 0$, puisque autrement $v_x^{(1)}$ satisferait à une équation aux différences finies algébrique d'ordre moindre que p.

On voit donc la dépendance qui existe entre les deux équations f et f_1; l'une est simplement la transformée de l'autre. D'autre part, transformer l'équation f au moyen de la substitution (T) considérée ci-dessus, c'est substituer seulement un système fondamental d'intégrales à un autre et, par suite, le groupe de transformations que nous aurait donné l'équation f_1 *est le transformé de celui qui nous a donné l'équation f au moyen d'une substitution linéaire convenable effectuée sur les y_x*. Les deux groupes doivent être regardés comme identiques.

6. Nous avons examiné uniquement jusqu'ici le cas d'une équation à coefficients rationnels. Nous pouvons supposer que *les coefficients de l'équation aux différences finies appartiennent à un domaine de rationalité plus étendu*. On peut supposer que l'on a un certain nombre de fonctions

$$a_x^{(1)}, \quad a_x^{(2)}, \quad \ldots, \quad a_x^{(r)},$$

telles qu'aucune d'elles ne puisse s'exprimer par une fonction rationnelle de x, des autres fonctions et de leurs valeurs successives jusqu'à un ordre quelconque. On considère, comme faisant partie du domaine de rationalité, l'ensemble des fonctions rationnelles de x, des a_x et de leurs valeurs successives. Les diverses équations aux différences finies que l'on aura alors à considérer devront être des équations aux différences finies algébriques dont les coefficients seront fonctions rationnelles des x, des a_x et de leurs valeurs successives. Telle sera en particulier, quand elle existera, l'équation $f(V_x) = 0$, qui joue dans la théorie précédente le rôle essentiel; *au domaine donné de rationalité correspondra un groupe de transformations pour l'équation linéaire aux différences finies.*

7. Dans la théorie de Galois sur les équations algébriques, la résolvante irréductible pouvait être trouvée par des calculs toujours effectuables, une fois donné le domaine de rationalité. Il en est tout autrement dans la théorie actuelle, qui est entièrement analogue à la théorie de MM. Picard et Vessiot sur les équations différentielles linéaires. Nous *concevons* seulement l'existence de cette équation aux différences finies f, de telle sorte que le groupe de transformations, pour une équation donnée, ne peut pas être obtenu par des opérations susceptibles d'être régulièrement effectuées. Il en résulte qu'en général on devra, au point de vue pratique, commencer par chercher tous les groupes algébriques de transformations linéaires et homogènes pour un nombre de variables égal à l'ordre de l'équation linéaire aux différences finies; grâce aux travaux de Sophus Lie on possède des principes sûrs pour effectuer cette recherche. Il reste alors à reconnaître si un groupe déterminé est le groupe de transformations de l'équation donnée.

Soit G un tel groupe; nous pouvons former une fonction rationnelle

$$R(x, y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}, y_{x+1}^{(1)}, \ldots)$$

restant invariable quand on effectue sur les y_x les substitutions du groupe G, mais qui n'est pas un invariant pour un groupe d'un plus grand nombre de paramètres. Cette fonction satisfera à une équation aux différences finies algébrique A d'ordre $n^2 - \rho$, en désignant par ρ le nombre de paramètres du groupe G, les coefficients de cette équation étant des fonctions *symétriques* des y_x.

Supposons que l'équation donnée soit à coefficients rationnels; ayant pris le groupe G et la fonction correspondante R, nous formons l'équation A, qui est aussi à coefficients rationnels. Si G est le groupe de transformations de l'équation linéaire donnée, la fonction rationnelle R, qui reste invariable par les substitutions de G, devra être une fonction rationnelle de x, pour un système convenable d'intégrales fondamentales, à savoir pour celles qui correspondent à l'équation f en V_x de notre théorie générale.

Il résulte alors du second théorème fondamental que *l'équation* A *admettra une intégrale rationnelle*. Nous sommes donc conduit à rechercher si une équation aux différences finies algébriques admet pour solution une fonction rationnelle; c'est un problème que l'on n'a pas, autant que je sache, actuellement abordé dans toute sa généralité, mais, dans bien des cas, la méthode des coefficients indéterminés permet de trouver la solution.

Quoi qu'il en soit, en se plaçant à ce point de vue, on commencera les essais en prenant d'abord les groupes algébriques à un paramètre, puis, s'il n'existe pas d'intégrales rationnelles pour les équations A correspondantes, on passera aux groupes ayant, après les groupes à un paramètre, le moindre nombre de paramètres, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive, pour un certain groupe G à r paramètres, à une équation A ayant une solution rationnelle, tandis que pour tous les groupes à un moindre nombre de paramètres cette condition ne s'était pas trouvée réalisée. Le groupe Γ de l'équation dépendra de r paramètres, car, s'il dépendait de moins de r paramètres, nous aurions trouvé dans les essais précédents une équation A à intégrales rationnelles; d'autre part, il ne peut dépendre de plus de r paramètres, car, dans le cas contraire, une fonction rationnelle des y_x, invariante pour les substitutions de G et prise au hasard, n'étant pas invariante pour les substitutions du groupe Γ qui aurait plus de r paramètres, ne pourrait s'exprimer rationnellement.

Il résulte de là, ou bien que Γ coïncide avec G, ou bien que Γ est un groupe *complexe* à r paramètres contenant le groupe G. En étudiant de la même manière chacun des types de groupe à r paramètres, on déterminera ainsi le groupe Γ, qui pourra être un groupe non complexe ou un groupe complexe formé de plusieurs groupes G à r paramètres.

CHAPITRE II.

RÉDUCTION DU GROUPE DE TRANSFORMATIONS D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE AUX DIFFÉRENCES FINIES.

1. On peut, relativement à la réduction du groupe de transformations d'une équation linéaire aux différences finies, développer une théorie analogue à celle de M. Vessiot sur les équations différentielles linéaires.

Nous considérons, pour un domaine donné de rationalité, une équation linéaire aux différences finies ayant le groupe G comme groupe de transformations. Soit

$$\varphi(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)};\ y_{x+1}^{(1)}, \ldots)$$

une fonction rationnelle d'un système fondamental d'intégrales, dont les coefficients sont des fonctions de x appartenant au domaine de rationalité. Reprenons aussi l'équation

$$(f) \qquad f(\mathrm{V}_x, \mathrm{V}_{x+1}, \ldots, \mathrm{V}_{x+p}) = 0$$

d'ordre p qui joue dans notre théorie le rôle essentiel. En remplaçant les y_x par leurs valeurs en fonction de V_x, on peut regarder φ comme une fonction de V_x et de ses valeurs successives, et nous écrirons

$$(\alpha) \qquad \varphi_x = \chi(\mathrm{V}_x, \mathrm{V}_{x+1}, \ldots, \mathrm{V}_{x+p}).$$

Si la fonction φ est prise arbitrairement, elle dépend de p constantes arbitraires, quand on prend pour V_x l'intégrale générale de l'équation f; la fonction φ satisfera alors à une équation aux différences finies d'ordre p. Mais il pourra arriver que, V_x étant toujours l'intégrale générale de f, la fonction φ ne dépende que de p' constantes arbitraires ($p' < p$). Dans ce cas, φ satisfera à une équation aux différences finies d'ordre p'

$$S(\varphi_x, \varphi_{x+1}, \ldots, \varphi_{x+p'}) = 0,$$

les coefficients étant des fonctions de x appartenant au domaine de rationalité.

Si l'on prend pour V_x une intégrale déterminée v_x de f, la fonction φ est complètement déterminée. Quand on y remplace v_x par la combinaison linéaire de v_x et ses valeurs successives, qui donne l'intégrale générale de f, on obtient par hypothèse une fonction dépendant, non de p, mais seulement de p' arbitraires. Il en résulte que la fonction φ restera invariable pour les substitutions d'un groupe G' de transformations dépendantes de $p-p'$ arbitraires. Ce groupe G' dépendra, en général, de la solution choisie v_x, mais il peut arriver que ce groupe ait un sous-groupe Γ ne dépendant pas de v_x; alors ce sous-groupe Γ, dont nous désignerons par s le nombre des arbitraires, laisse invariables toutes les fonctions φ déduites de la fonction initiale par toutes les substitutions du groupe; on peut encore dire qu'il laisse invariables *toutes* les intégrales de S.

2. Avant d'aller plus loin, cherchons quelle dépendance existe entre deux fonctions rationnelles des intégrales et de leurs valeurs successives restant invariables par les substitutions d'un même groupe G_1 contenu dans G et dépendant de q arbitraires. Nous supposons que la fonction φ considérée ci-dessus reste invariable par les substitutions de G_1 et par ces substitutions seulement.

Quand on met à la place de V_x une intégrale déterminée v_x de l'équation f, la fonction

$$\chi(V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p}),$$

envisagée plus haut (§ I), représente une fonction déterminée de x, que nous désignons par φ_x, et elle reste invariable quand on met à la place de v_x une autre intégrale V_x dépendant de q constantes arbitraires, cette intégrale correspondant précisément au groupe G_1 de transformations; ceci revient à dire que les deux équations aux différences finies en V_x, désignées par (f) et (α), ont une solution commune dépendant de q constantes arbitraires. On peut former, par des calculs d'élimination, l'équation aux différences finies d'ordre q donnant cette solution ; elle sera de la forme

$$R(V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+q}, \varphi_x, \varphi_{x+1}, \ldots) = 0,$$

où nous avons mis en évidence φ_x et ses valeurs successives.

Soit maintenant $\varphi_x^{(1)}$ une seconde fonction rationnelle des intégrales restant invariables par les substitutions de G_1 ; nous pouvons exprimer les intégrales $y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(m)}$ à l'aide d'une fonction V_x intégrale de l'équation R : cette fonction $\varphi_x^{(1)}$ prend alors la forme

$$\varphi_x^{(1)} = \chi_1(V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+q}, \varphi_x, \varphi_{x+1}, \ldots),$$

et elle doit rester invariable, quand on met à la place de V_x une intégrale quelconque de R. Si cette dernière équation est algébriquement irréductible par rapport à V_{x+q}, et que λ soit son degré par rapport à V_{x+q}, on réduira dans χ_1, mis sous la forme d'un quotient de polynomes, le numérateur et le dénominateur à être seulement de degré $\lambda - 1$ en V_{x+q}, en se servant de l'équation R, et dans χ, ainsi préparé, on voit immédiatement que V_x et ses valeurs successives doivent disparaître, et, par suite, $\varphi_x^{(1)}$ s'exprime rationnellement à l'aide de φ_x et de ses valeurs successives et des quantités du domaine de rationalité.

Si R n'était pas algébriquement irréductible, le groupe G_1 serait complexe, mais $\varphi_x^{(1)}$ restant par hypothèse invariable pour le groupe G_1, le raisonnement précédent est applicable à tous les groupes non complexes composant G_1, et nous avons toujours la même conclusion qui rappelle entièrement le théorème de M. Vessiot sur les équations différentielles linéaires : *la fonction $\varphi_x^{(1)}$ s'exprime rationnellement à l'aide des φ_x et de ses valeurs successives.*

3. Nous arrivons maintenant à la réduction du groupe d'une équation. Adjoignons au domaine primitif l'intégrale générale φ_x de l'équation S considérée plus haut, qui reste invariable par les substitutions du groupe Γ du paragraphe 1. Nous allons établir que *l'adjonction de φ_x réduira à Γ le groupe de l'équation donnée.* En effet,

après l'adjonction de φ_x, le groupe de l'équation ne peut contenir que des substitutions du groupe initial G n'altérant pas φ_x; donc le groupe ne peut être que Γ ou un groupe contenu dans Γ. Mais il est facile de voir que toutes les substitutions de Γ feront partie du groupe cherché, car toute fonction des intégrales exprimable rationnellement, après l'adjonction de φ_x, s'exprimera rationnellement à l'aide de φ_x et de ses valeurs successives; elle restera donc invariable par toutes les substitutions de Γ. Inversement, toutes les fonctions des intégrales, invariables par les substitutions de Γ, s'expriment rationnellement à l'aide de φ_x et de ses valeurs successives, d'après le théorème du paragraphe précédent.

Le groupe de l'équation, après l'adjonction de φ_x, est donc le groupe Γ.

4. Nous montrons maintenant que le groupe Γ, auquel nous venons de réduire le groupe de l'équation, *est invariant dans le groupe initial* G. Nous avons

$$\varphi_x = \chi(v_x, v_{x+1}, \ldots, v_{x+p}),$$

et cette fonction ne change pas quand on remplace v_x par une combinaison linéaire de v_x et de ses valeurs successives répondant précisément au groupe Γ. Soit h une substitution de Γ, et s une substitution quelconque de G; la substitution s transforme les y_x en des Y_x, et, par suite, v_x en une certaine intégrale V_x de f. La fonction φ_x devient Φ_x, et l'on a

$$\Phi_x = \chi(V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p}).$$

Cette fonction Φ_x, considérée comme fonction des Y_x, reste invariable quand on effectue sur ceux-ci la substitution h, ce qui revient à remplacer V_x par la combinaison linéaire de V_x et de ses valeurs successives dont nous avons parlé plus haut. Si, enfin, on remplace les Y_x par les y_x, c'est-à-dire si l'on effectue la substitution s^{-1}, on retombe sur la fonction φ_x; par suite, la substitution

$$s^{-1}hs$$

transforme la fonction φ_x en elle-même. Donc, cette substitution appartient à Γ. Ainsi la transformée de h par une substitution quelconque s^{-1} de G appartient à Γ : c'est-à-dire que *ce dernier groupe est invariant dans* G.

5. On voit que l'on est conduit, par les théorèmes précédents, à décomposer, s'il est possible, G de manière à avoir une suite de groupes algébriques linéaires et homogènes

$$G, \quad G_1, \quad \ldots, \quad G_s$$

tels que chacun d'eux soit un sous-groupe invariant du précédent, le dernier groupe G_s n'ayant pas de sous-groupe invariant dépendant de paramètres arbitraires. Par l'adjonction successive des intégrales d'équations S, nous ramènerons à ne plus avoir d'arbitraires, le groupe de l'équation, qui sera alors intégrée.

On peut même supposer, de plus, que chaque groupe est un sous-groupe invariant *maximum* du précédent, c'est-à-dire que, étant considérés par exemple G et G_1, il n'existe pas de sous-groupe invariant de G, dépendant d'un plus grand nombre de paramètres que G_1, et contenant G_1.

Mais nous n'insisterons pas sur tous ces points qui nous entraîneraient trop loin. Nous allons étudier seulement le cas où l'on adjoindrait les intégrales d'une équation aux différences finies auxiliaires.

6. Supposons que nous adjoignions au domaine primitif de rationalité l'intégrale générale r_x de l'équation

$$r_{x+\lambda} - P(r_{x+\lambda-1}, \ldots, r_{x+1}, r_x) = 0,$$

que nous désignerons par $F(r_x) = 0$. Nous supposons que l'équation n'a de solution commune avec une équation algébrique d'ordre moindre; les coefficients de P, qui est rationnel par rapport à r_x et ses valeurs successives, appartiennent au domaine de rationalité.

Si l'adjonction de r_x réduit le groupe, l'équation

$$f(V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p}) = 0$$

aura une intégrale, correspondant à un système fondamental, commune avec une équation d'ordre moindre, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités du domaine primitif, de r_x et ses valeurs successives. Soit f_1 l'équation d'ordre minimum jouissant de cette propriété; l'équation

$$f_1(\mathrm{V}_x, \mathrm{V}_{x+1}, \ldots, \mathrm{V}_{x+p'}, r_x, r_{x+1}, \ldots, r_{x+\lambda-1}) = 0 \qquad (p' < p)$$

joue, dans le domaine de rationalité, le rôle que jouait f dans le domaine primitif. Le groupe de transformations de l'équation, après l'adjonction de r_x, dépend de p' paramètres.

Nous allons établir, au sujet de ce nombre, une inégalité importante.

Nous disons que

$$p' \geqq p - \lambda.$$

Supposons, en effet, $p' = p - \lambda - \rho$; prenons λ fois les valeurs successives de l'équation f_1. Nous aurons ainsi $\lambda + 1$ équations entre

$$\mathrm{V}_x, \quad \mathrm{V}_{x+1}, \quad \ldots, \quad \mathrm{V}_{x+p-\rho}, \quad r_x, \quad r_{x+1}, \quad \ldots, \quad r_{x+\lambda-1}.$$

Nous pouvons, entre ces équations, éliminer r_x et ses $\lambda - 1$ valeurs successives, et nous aurons ainsi une relation de la forme

$$\Phi(\mathrm{V}_x, \mathrm{V}_{x+1}, \ldots, \mathrm{V}_{x+p-\rho}) = 0, \qquad (\rho \geqq 1),$$

où les coefficients appartiennent au domaine de rationalité. L'expression V_x, correspondant à un système fondamental, satisferait à une équation d'ordre moindre que p, ce qui est impossible. Cette équation ne se réduira pas à une identité, car chaque équation contient une valeur successive de V_x ne figurant pas dans les précédents.

L'inégalité

$$p' \geqq p - \lambda$$

est donc établie, et nous pouvons, par suite, dire qu'*après l'adjonction de r_x, le groupe de l'équation contient au moins $p - \lambda$ paramètres.* Nous désignerons par G le groupe initial, et par Γ le groupe après l'adjonction de r_x.

Il importe d'approfondir davantage la nature de ce groupe Γ. Pour une intégrale r_x de $F(r_x) = 0$, nous avons une équation f_1 déterminée, et l'intégrale générale de cette équation s'obtient linéairement à l'aide d'une intégrale particulière et de ses valeurs successives, les coefficients qui appartiennent au domaine primitif dépendant de p' arbitraires. Nous disons que, si l'on met à la place de r_x une autre intégrale R_x de F, l'intégrale générale de la nouvelle équation f_1 s'exprimera de la même manière au moyen d'une intégrale particulière et de ses valeurs successives.

Désignons par

$$\Theta_x(V_x, V_{x+1}, \ldots)$$

l'expression de l'intégrale de f_1, correspondant à r_x; les deux équations

$$f_1(V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+p'}, r_x, r_{x+1}, \ldots) = 0,$$
$$f_1(\Theta_x, \Theta_{x+1}, \ldots) = 0$$

sont deux équations en V_x, et toutes les solutions de la première appartiennent à la seconde; ceci entraîne des relations entre r_x et ses valeurs successives, qu'on peut ramener à l'ordre $\lambda - 1$ au plus. Ces équations de conditions doivent être des identités, d'après l'hypothèse faite sur l'irréductibilité de F, et l'on en conclut, de suite, le résultat annoncé. On remarquera encore que l'on passe de l'équation f_1 correspondant à r_x, à l'équation f_1, qui correspond à R_x, en remplaçant V_x par une combinaison linéaire convenable de V_x et de ses valeurs successives.

7. L'intégrale générale de f_1 appartient à f; pour une intégrale r_x de F, l'équation f_1 en V_x a son intégrale générale dépendant de p' constantes arbitraires; en faisant varier r_x, on doit obtenir toutes les intégrales de f, car si l'intégrale générale de f_1 dépendait de moins de p constantes (y compris les constantes figurant dans r_x) on formerait par des calculs algébriques l'équation d'ordre inférieur à p dont dépendrait cette fonction, et cette équation aurait ses coefficients appartenant au domaine initial de rationalité. Le nombre p ne pourrait pas alors correspondre au groupe de l'équation pour ce domaine.

Nous pouvons maintenant démontrer que Γ est un sous-groupe *invariant* de G. Soit une intégrale r_x correspondant à une équation f_1

dans laquelle on a mis une certaine intégrale r_x de F; il correspond à r_x des intégrales $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}$, ..., $y_x^{(m)}$ de l'équation proposée. Effectuons sur les y_x une substitution quelconque s du groupe G; les y_x deviennent des Y_x auxquels correspond une fonction V_x. Celle-ci est une intégrale d'une équation f_{11} dans laquelle r_x a été remplacée par R_x. En effectuant sur les Y_x une substitution h de Γ, on remplace V_x par une autre intégrale V'_x de la même équation, d'après ce que nous avons dit plus haut; enfin, la substitution s^{-1} nous ramène de V'_x à une intégrale v'_x de l'équation initiale f_1 relative à r_x. La conclusion est que la substitution

$$s^{-1}hs,$$

transformée de h par s^{-1}, appartient au groupe Γ, puisqu'elle est la substitution correspondant au passage de v_x à v'_x; *donc* Γ *est invariant dans* G.

8. Nous allons appliquer le théorème précédent à la recherche des équations linéaires aux différences finies intégrables par des quadratures finies. Considérons donc une équation linéaire

$$y_{x+m} + a_x^{(1)} y_{x+m-1} + \ldots + a_x^{(m)} y_x = 0,$$

que nous supposons *intégrable par quadratures finies*. Soit G son groupe. L'adjonction d'un certain nombre de quadratures, qui se présentent d'abord dans le calcul de l'intégrale, peut ne pas réduire G, mais il arrivera nécessairement un moment où l'adjonction d'une quadrature réduira le groupe de l'équation; or, adjoindre une quadrature, c'est adjoindre une intégrale de l'équation

$$r_{x+1} = b,$$

b appartenant ici au domaine primitif auquel on a adjoint les quadratures antérieures qui, par hypothèse, ne réduisaient pas le groupe. L'adjonction de r_x diminuant le nombre p des paramètres de G, le groupe se trouve ramené, d'après le théorème du paragraphe 7, à un groupe d'au moins $p-1$ paramètres ($\lambda = 1$); le groupe réduit G_1 aura donc ce nombre de paramètres. On continuera ainsi jusqu'à la réduction du groupe de l'équation à un groupe ne renfermant plus d'arbitraire, et alors l'équation sera intégrée.

Nous aurons donc une suite de groupes

$$G, \quad G_1, \quad \ldots, \quad G_s,$$

chaque groupe étant un sous-groupe invariant du précédent, la différence du nombre des paramètres de deux groupes consécutifs quelconques G_i et G_{i+1} étant égale à l'unité, et le dernier groupe ne dépendant que d'un paramètre.

Nous pouvons donc dire que, *si une équation linéaire aux différences finies est intégrable par quadratures finies, son groupe de transformations est intégrable.*

9. La réciproque de ce théorème est exacte : nous allons montrer que, si le groupe de transformations d'une équation linéaire est intégrable, cette équation sera intégrable par quadratures.

Il résulte d'abord d'un théorème bien connu de Sophus Lie, que l'on peut choisir les intégrales d'un système fondamental de telle sorte que les transformations finies du groupe soient de la forme

$$\begin{aligned}
Y_x^{(1)} &= a_{11} y_x^{(1)},\\
Y_x^{(2)} &= a_{21} y_x^{(1)} + a_{22} y_x^{(2)},\\
Y_x^{(3)} &= a_{31} y_x^{(1)} + a_{32} y_x^{(2)} + a_{33} y_x^{(3)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Y_x^{(m)} &= a_{m1} y_x^{(1)} + a_{m2} y_x^{(2)} + \ldots + a_{mm} y_x^{(m)}.
\end{aligned}$$

Le groupe G de l'équation ne comprenant que des transformations de cette forme, il est visible que l'expression

$$\frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}}$$

reste invariable par les substitutions de G *et est, par suite, exprimable rationnellement.*

Faisant alors le changement de variable

$$y_x = y_x^{(1)} \Sigma z_x,$$

nous aurons une équation linéaire d'ordre $m-1$, dont l'intégrale générale sera

$$\Delta\left(\frac{y_x}{y_x^{(1)}}\right).$$

En désignant par $z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(m-1)}$ les intégrales de cette équation correspondant à $y_x^{(2)}, y_x^{(3)}, \ldots, y_x^{(m)}$ son groupe aura seulement des substitutions de la forme

$$\begin{aligned}
Z_x^{(1)} &= a_{22}z_x^{(1)},\\
Z_x^{(2)} &= a_{32}z_x^{(1)} + a_{33}z_x^{(2)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Z_x^{(m-1)} &= a_{m2}z_x^{(1)} + a_{m3}z_x^{(2)} + \ldots + a_{mm}z_x^{(m-1)}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc raisonner sur l'équation en z_x comme sur l'équation initiale. Nous aurons pour l'équation linéaire en z_x une intégrale $z_x^{(1)}$, dont l'expression $\frac{z_{x+1}^{(1)}}{z_x^{(1)}}$ sera rationnelle dans le nouveau domaine de rationalité, c'est-à-dire après l'adjonction de $y_x^{(1)}$ au domaine primitif. On continuera ainsi, de proche en proche, et l'on voit que l'on trouvera, par des quadratures successives, tous les éléments d'un système fondamental. Le théorème énoncé est donc établi, et nous avons la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation linéaire aux différences finies soit intégrable par quadratures finies est que son groupe de transformations soit intégrable.

Il résulte immédiatement de là et des théorèmes généraux de Sophus Lie sur les groupes linéaires que l'équation linéaire *générale* d'ordre m, c'est-à-dire une équation linéaire dont le groupe est le groupe général à m^2 paramètres, n'est pas intégrable par quadratures. Sophus Lie a, en effet, montré que le groupe linéaire à m^2 paramètres admet un seul sous-groupe invariant d'ordre m^2-1; c'est le groupe pour lequel le déterminant de la substitution est égal à l'unité. De plus, ce dernier groupe n'admet aucun sous-groupe invariant. Il est clair alors que les conditions développées ne sont pas remplies.

10. *Équations à coefficients constants.* — L'exemple le plus simple d'une équation intégrable par quadratures est celui d'une équation à coefficients constants. Soit l'équation

$$(a)\qquad y_{x+m}+c_1y_{x+m-1}+\ldots+c_{m-1}y_{x+1}+c_my_x=0;$$

l'équation en $\frac{y_{x+1}}{y_x}$ admet m intégrales rationnelles, à savoir les m racines, supposées distinctes, de l'équation

$$(b)\qquad P(u)=u^m+c_1u^{m-1}+\ldots+c_{m-1}u+c_m=0;$$

soient $\frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}}, \frac{y_{x+1}^{(2)}}{y_x^{(2)}}, \ldots, \frac{y_{x+1}^{(m)}}{y_x^{(m)}}$ ces m racines. Le groupe de transformations de l'équation est donc

$$(c)\qquad Y_x^{(1)}=a_1y_x^{(1)};\qquad Y_x^{(2)}=a_2y_x^{(2)};\qquad \ldots;\qquad Y_x^{(m)}=a_my_x^{(m)}.$$

Or les transformations de ce groupe sont échangeables deux à deux; l'intégration doit donc s'effectuer par m quadratures indépendantes.

En effet, on peut, par des quadratures indépendantes, calculer successivement des invariants des m sous-groupes invariants à un paramètre du groupe donné, et les m invariants sont les m intégrales $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$; on retombe donc sur le procédé ordinaire d'intégration de cette classe d'équations.

Remarque. — Si les racines de l'équation (b) ne sont pas distinctes, le groupe de transformations de l'équation (a) se réduit. Supposons, par exemple, que u_1 soit racine multiple d'ordre k de (b), et soit $u_1=\frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}}$. Nous considérons l'équation en $z_x=\frac{y_x}{y_x^{(1)}}$, qui est

$$\begin{aligned}0=z_x&[y_{x+m}^{(1)}+c_1y_{x+m-1}^{(1)}+\ldots+c_my_x^{(1)}]\\&+\Delta z_x[my_{x+m}^{(1)}+(m-1)c_1y_{x+m-1}^{(1)}+\ldots+c_{m-1}y_{x+1}^{(1)}]+\ldots\\&+[my_{x+m}^{(1)}+c_1y_{x+m-1}^{(1)}]\Delta^{m-1}z_x+y_{x+m}^{(1)}\Delta^m z_x.\end{aligned}$$

Elle devient, si l'on pose

$$y_x^{(1)}=u_1^x,$$

$$0=z_xP(u_1)+\Delta z_xP'(u_1)u_1+\frac{\Delta^2 z_x}{1.2}P''(u_1)u_1^2+\ldots+\Delta^m z_xu_1^m,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\Delta^{(k)} z_x}{k!} \mathrm{P}^{(k)}(u_1)\, u_1^k + \ldots + \Delta^m z_x u_1^m = 0.$$

Elle a donc k intégrales rationnelles, par exemple,

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad \ldots, \quad x^{k-1},$$

qui seront, si l'on veut, $\frac{y_x^{(1)}}{y_x^{(1)}}, \frac{y_x^{(2)}}{y_x^{(1)}}, \ldots, \frac{y_x^{(k)}}{y_x^{(1)}}$; de sorte que le groupe (c) est ici remplacé par

$$\begin{gathered} \mathrm{Y}_x^{(1)} = a_1 y_x^{(1)}; \quad \mathrm{Y}_x^{(2)} = a_1 y_x^{(2)}; \quad \ldots; \quad \mathrm{Y}_x^{(k)} = a_1 y_x^{(k)}; \\ \mathrm{Y}_x^{(k+1)} = a_{k+1} y_x^{(k+1)}; \quad \ldots; \quad \mathrm{Y}_x^{(m)} = a_m y_x^{(m)}. \end{gathered}$$

La quadrature qui donne $y_x^{(1)}$ fournit en même temps

$$y_x^{(2)} = x y_x^{(1)}; \quad y_x^{(2)} = x^2 y_x^{(1)}, \quad \ldots, \quad y_x^{(k)} = x^{k-1} y_x^{(1)},$$

c'est-à-dire que k quadratures sont remplacées par une seule, ce qui tient à ce que le groupe contient $k - 1$ paramètres de moins que dans le cas général.

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES FINIES DU SECOND ORDRE.

1. D'après la méthode générale que nous avons indiquée pour l'intégration d'une équation linéaire aux différences finies donnée, la théorie générale des équations linéaires d'ordre n comprend la résolution des trois problèmes suivants :

I. *Déterminer tous les groupes algébriques de transformations linéaires homogènes à n variables.* — Les travaux de MM. Klein, Jordan et Sophus Lie font connaître, pour $n = 2, 3, 4$, tous les types de groupes discontinus et continus. De plus, MM. Jordan et Sophus Lie ont donné des théorèmes généraux sur les groupes à n variables.

II. *Étudier à quels caractères on reconnaîtra que le groupe de transformations d'une équation linéaire donnée appartient à un de ces groupes.*

III. *Connaissant le type du groupe de transformations d'une équation linéaire, indiquer quelle sera la nature des équations auxiliaires à intégrer, et former ces équations auxiliaires.*

Nous ne pouvons aborder ces problèmes dans toute leur généralité; nous limiterons nos applications au cas particulier de l'équation du second ordre.

Le groupe linéaire homogène général à deux variables $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}$ dépend de quatre paramètres, et ses équations sont

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} Y_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)} + t_2 y_x^{(2)}, \\ Y_x^{(2)} = t_3 y_x^{(1)} + t_4 y_x^{(2)}, \end{cases}$$

et tous ses sous-groupes algébriques sont donnés par le Tableau suivant :

$$\text{(II)} \qquad Y_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)} + t_2 y_x^{(2)}, \qquad Y_x^{(2)} = t_3 y_x^{(1)} + t_4 y_x^{(2)},$$

où $t_1 t_4 - t_2 t_3 = 1$;

$$\begin{array}{lll}
\text{(III)} & Y_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)}; & Y_x^{(2)} = t_2 y_x^{(1)} + t_3 y_x^{(2)}, \\
\text{(IV)} & Y_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)}, & Y_x^{(2)} = t_1 y_x^{(1)} + t_2 y_x^{(2)}, \\
\text{(V)} & Y_x^{(1)} = t_1 y_x^{(1)}, & Y_x^{(2)} = t_2 y_x^{(2)}, \\
\text{(VI)} & Y_x^{(1)} = t_1^c y_x^{(1)}, & Y_x^{(2)} = t_1^{c+1} (y_x^{(2)} + t_2 y_x^{(1)}), \\
\text{(VII)} & Y_x^{(1)} = t y_x^{(1)}, & Y_x^{(2)} = t y_x^{(2)}, \\
\text{(VIII)} & Y_x^{(1)} = y_x^{(1)}, & Y_x^{(2)} = y_x^{(2)} + t y_x^{(1)}, \\
\text{(IX)} & Y_x^{(1)} = t^c y_x^{(1)}. & Y_x^{(2)} = t^{c+1} y_x^{(2)}.
\end{array}$$

Tous ces sous-groupes sont intégrables, sauf le premier. Les groupes (II) et (VII) sont seuls invariants dans le groupe linéaire homogène général.

2. Soit donnée l'équation linéaire du second ordre

$$\text{(1)} \qquad y_{x+2} + p_x y_{x+1} + q_x y_x = 0.$$

Trois transformées jouent un rôle important dans l'étude de l'équation du second ordre : ce sont celles dont dépendent les invariants caractéristiques des groupes (II), (III) et (VII).

Le premier a pour invariant

$$(a) \qquad \Delta_x = y_x^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_x^{(2)} y_{x+1}^{(1)},$$

et la transformée correspondante est

$$(2) \qquad \Delta_{x+1} - q_x \Delta_x = 0.$$

Le groupe (III) a pour invariant

$$u_x = \frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}},$$

et la transformée correspondante est

$$(3) \qquad u_x u_{x+1} + p_x u_x + q_x = 0.$$

Enfin, le groupe (VII) a pour invariant

$$\eta_x = \frac{y_x^{(1)}}{y_x^{(2)}},$$

et la transformée correspondante est [1]

$$(4) \qquad \frac{(\eta_{x+2} - \eta_{x+1})(\eta_x - \eta_{x-1})}{(\eta_{x+2} - \eta_x)(\eta_{x+1} - \eta_{x-1})} = \frac{q_x}{p_x p_{x-1}}.$$

3. *De l'intégration de l'équation du second ordre.* — Supposons que nous ayons affaire à l'équation générale du second ordre. Notre théorie conduit alors à ce résultat (connu) qu'on en peut ramener l'intégration à celle d'une équation de la forme (3) et à une quadrature finie. On peut, de plus, faire en sorte que ces deux opérations soient indépendantes l'une de l'autre. En effet, si l'on intègre (2) au moyen de la quadrature

$$(5) \qquad \Delta_x = c\Pi(q_x),$$

---

[1] W. Heymann, *Studien über die Transf. u. Integration der Differential u. Differenzen gleichungen*, p. 413.

on réduit le groupe de transformations de l'équation au groupe de Δ_x, c'est-à-dire au groupe linéaire spécial. Si, en même temps, on intègre l'équation (3), cela réduit ce nouveau groupe à la transformation identique, puisqu'il est simple. L'équation donnée doit donc être intégrée. Soient, en effet, $u_x^{(1)}$, $u_x^{(2)}$, u_x trois intégrales de l'équation (3). Si l'on pose

$$u_x^{(1)} = \frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}}, \qquad u_x^{(2)} = \frac{y_{x+1}^{(2)}}{y_x^{(2)}},$$

$y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}$ ne sont définis chacun qu'à une constante près, de sorte qu'on peut les assujettir encore à vérifier la relation (a), Δ_x étant une des valeurs de l'expression (5), et, en outre, l'équation

$$u_x = \frac{y_{x+1}^{(1)} + y_{x+1}^{(2)}}{y_x^{(1)} + y_x^{(2)}}.$$

On en conclut

$$(u_x - u_x^{(1)})y_x^{(1)} + (u_x - u_x^{(2)})y_x^{(2)} = 0,$$
$$y_x^{(1)}y_x^{(2)}(u_x^{(2)} - u_x^{(1)}) = \Delta_x,$$

et, par suite,

$$(6) \quad y_x^{(1)} = \sqrt{\frac{(u_x - u_x^{(2)})\Delta_x}{(u - u_x^{(1)})(u_x^{(1)} - u_x^{(2)})}}, \qquad y_x^{(2)} = -\sqrt{\frac{(u_x - u_x^{(1)})\Delta_x}{(u - u_x^{(2)})(u_x^{(1)} - u_x^{(2)})}}.$$

Remarque I. — La présence d'un radical carré dans les formules (6) tient à ce que les groupes de Δ_x et de u_x, $u_x^{(1)}$, $u_x^{(2)}$ ont en commun la transformation

$$(7) \qquad \bar{y}_x^{(1)} = -y_x^{(1)}, \qquad \bar{y}_x^{(2)} = -y_x^{(2)},$$

de sorte que, après la quadrature (5) et l'intégration de l'équation (3), le groupe de transformations de l'équation se réduit en réalité à la transformation identique et à la transformation (7). Il faut donc encore l'extraction d'une racine carrée pour le réduire à la seule transformation identique.

Remarque II. — Si l'équation proposée a pour groupe de transformations le groupe linéaire spécial, Δ_x est rationnel, c'est-à-dire que la quadrature (5) disparaît dans le calcul précédent. Il n'y a donc dans ce cas, qui se reconnaît à ce que le coefficient q_x est égal à $\frac{r_{x+1}}{r_x}$, où r_x est une fonction rationnelle, qu'à intégrer l'équation (3).

4. *Équations intégrables par quadratures.* — La fonction $\frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}}$ a pour groupe le groupe (III) qui contient parmi ses sous-groupes tous les types qui suivent, c'est-à-dire tous les groupes intégrables. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Pour qu'une équation linéaire aux différences finies du second ordre soit intégrable par des quadratures, il faut et il suffit que l'expression* $\frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_x^{(1)}}$ *d'une de ses intégrales* $y_x^{(1)}$ *soit rationnelle.*

Il résulte de là que la forme générale des équations du second ordre, intégrables par quadratures, est

$$y_{x+2} + p_x y_{x+1} - R_x(p_x + R_{x+1}) y_x = 0,$$

R_x étant une fonction connue de x. On a un système fondamental d'intégrales par les formules

$$y_x^{(1)} = c\Pi(R_{x-1}); \qquad y_x^{(2)} = y_x^{(1)} \Sigma z_x,$$

où l'on a

$$z_x = c_1 \Pi\left(\frac{R_{x+1} + p_x}{R_{x+1}}\right).$$

Cas particuliers. — Dans le cas où le groupe de transformations de l'équation linéaire donnée est l'un des groupes (IV), (V), (VI), (VII), (VIII), (IX), l'intégration qui exige, dans le cas précédent, trois quadratures, dont deux sont superposées, se simplifie. Elle se réduit à une seule quadrature pour les trois derniers, à deux pour les autres; ces deux quadratures sont indépendantes dans le cas où le groupe est le groupe (V). Nous n'effectuons pas ici les calculs qui ne présentent que peu d'intérêt.