P. DUHEM

Recherches sur l'élasticité

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 22 (1905), p. 143-217
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1905_3_22__143_0>

RECHERCHES SUR L'ÉLASTICITÉ.

PAR M. P. DUHEM.

TROISIÈME PARTIE.

LA STABILITÉ DES MILIEUX ÉLASTIQUES.

CHAPITRE I.

DES CONDITIONS SUFFISANTES POUR LA STABILITÉ INITIALE D'UN MILIEU ÉLASTIQUE.

I. — Sur les conditions suffisantes pour la stabilité initiale d'un milieu quelconque.

L'*état initial* du milieu que nous nous proposons d'étudier est un état où ce milieu, soumis uniquement à une pression extérieure normale et uniforme Π_0, et porté en tous ses points à une même température T_0, se trouve en équilibre; il est alors homogène et sa densité est ρ_0. S'il est, en outre, isotrope, nous avons affaire à un milieu *vitreux;* sinon, nous avons affaire à un milieu *cristallisé*.

Supposons que ce milieu ait subi, par rapport à l'état initial que nous venons de définir, une très petite déformation; le point matériel qui, dans l'état initial, avait pour coordonnées a, b, c, a maintenant pour coordonnées $a+\xi$, $b+\eta$, $c+\zeta$, ξ, η, ζ étant des quantités infiniment petites. La déformation en chaque point est définie par les six grandeurs

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial \xi}{\partial a}, & \varepsilon_2 = \dfrac{\partial \eta}{\partial b}, & \varepsilon_3 = \dfrac{\partial \zeta}{\partial c}, \\[2ex] \gamma_1 = \dfrac{\partial \eta}{\partial c} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial b}, & \gamma_2 = \dfrac{\partial \zeta}{\partial a} + \dfrac{\partial \xi}{\partial c}, & \gamma_3 = \dfrac{\partial \xi}{\partial b} + \dfrac{\partial \eta}{\partial a}. \end{array}\right.$$

Supposons, en même temps, que la température T aux divers points du milieu diffère très peu de T_0.

Le milieu admettra un potentiel interne $\mathcal{F}$ qui pourra s'écrire

$$(2)\qquad \begin{aligned}\mathcal{F} &= \int \Phi(T, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\, dm \\ &= \int\int\int \rho_0 \Phi(T, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\, da\, db\, dc.\end{aligned}$$

Nous devrons, d'ailleurs, dans le développement de la fonction Φ, nous arrêter aux quantités infiniment petites du second ordre par rapport à $(T - T_0)$ et à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Les égalités (45), (61) et (62) de la première Partie de nos *Recherches sur l'Élasticité* donnent, en tout point du milieu,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} N_x &= -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}, & N_y &= -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}, & N_z &= -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}, \\ T_x &= -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1}, & T_y &= -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2}, & T_z &= -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_3}. \end{aligned}\right.$$

Cherchons quelle est la pression Π qui, à la température T, maintiendrait le milieu en équilibre sous la densité ρ_0, et désignons par $-\rho_0 \varphi_1(\rho_0, T)$ cette pression. Nous devrions avoir, pour

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 &= 0, \\ \varphi_1(\rho_0, T) &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_3}, \\ 0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_3}. \end{aligned}$$

Nous voyons alors que Φ peut s'écrire

$$(4)\quad \Phi = \varphi_0(\rho_0, T) + \varphi_1(\rho_0, T)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

φ_2 étant une forme quadratique en $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Si le milieu est limité par une surface dont les divers points sont immobiles et si ses diverses masses élémentaires sont soustraites à l'action de toute force extérieure, le système admet un potentiel total qui se confond avec le potentiel interne (2). Si, au contraire, la surface qui limite le milieu est totalement ou partiellement déformable, et si la partie déformable de cette surface est soumise à la pression normale, uniforme et constante Π_0, le potentiel total s'obtiendra en ajoutant au potentiel interne $\mathcal{F}$, donné par l'égalité (2), le produit $\Pi_0 V$ de la pression Π_0 par le volume total V du système.

Supposons, en particulier, que la température du milieu soit maintenue constamment égale à la température initiale T_0. Si la surface limite est maintenue immobile, le potentiel total a pour valeur, selon les égalités (2) et (4),

$$(5)\quad \Omega = \int\int\int \rho_0[\varphi_0(\rho_0, T_0) + \varphi_1(\rho_0, T_0)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)]\, da\, db\, dc.$$

Si la surface limite est totalement ou partiellement déformable et si la portion déformable supporte la pression normale, uniforme et constante Π_0, le potentiel total a pour expression

$$(6)\quad \Omega = \Pi_0 V + \int\int\int \rho_0[\varphi_0(\rho_0, T_0) + \varphi_1(\rho_0, T_0)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)]\, da\, db\, dc.$$

La pression Π_0 est, d'ailleurs, liée à la densité ρ_0 et à la température T_0 par la relation

$$(7)\quad \Pi_0 = -\rho_0\varphi_1(\rho_0, T_0).$$

L'étude de l'élasticité se limite à celle des milieux doués des propriétés que nous allons définir :

Si l'on maintient invariable la température initiale du système; si l'on maintient immobile toute la surface qui limite le milieu ou seulement une partie de cette surface; si enfin, la partie déformable de cette surface, lorsqu'elle existe, supporte une pression normale et uniforme constamment égale à la pression initiale;

L'état initial du milieu est toujours un état d'équilibre stable.

La recherche des conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour qu'une telle stabilité soit assurée se présente comme un des problèmes essentiels en la théorie de l'élasticité. Elle définit avec précision les propriétés physiques des milieux qui sont l'objet de cette théorie.

Le criterium bien connu de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet nous indique dans quelle voie se peuvent découvrir les *conditions suffisantes :*

Pour que la stabilité requise soit assurée, il suffit que l'état initial fasse prendre au potentiel total une valeur minimum parmi toutes celles qui sont compatibles avec les restrictions prescrites.

On voit alors qu'il est nécessaire, en premier lieu, de donner les relations qui expriment ces restrictions.

Ces relations sont bien aisées à écrire en tout point de la surface limite que l'on suppose immobile ; elles se réduisent à

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0. \tag{8}$$

Le problème de minimum ainsi posé présente des difficultés qui paraissent insurmontables.

Il existe toutefois un cas particulier où la solution de ce problème devient très aisée; c'est celui où *l'état initial du milieu est l'état d'équilibre pris, à la température* T_0, *sous une pression* Π_0 *égale à* o. Un tel état d'équilibre est concevable pour les solides et les liquides; il ne l'est point pour les gaz, qui sont ainsi exclus de notre étude; mais cette exclusion n'offre aucun inconvénient, car, pour les fluides, le problème qui nous occupe a été résolu d'une manière complète.

La fonction qui doit être minimum dans l'état initial, moyennant les conditions prescrites, est alors la fonction Ω donnée par l'égalité (5).

Pour que cette fonction soit minimum dans un état initial où le système est soumis à une pression nulle, il faut et il suffit que la forme quadratique

$$\varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

en

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3$$

soit une forme définie positive, toutes les fois que ρ_0, T_0 *vérifient la relation*

$$\varphi_1(\rho_0, T_0) = 0. \tag{9}$$

Comme la suffisance de cette condition est évidente, nous allons prouver seulement qu'elle est nécessaire.

Les égalités (5) et (9) permettent d'écrire

$$(10)\qquad \begin{aligned}\Omega = & \int\int\int \rho_0 \varphi_0(\rho_0, T_0)\, da\, db\, dc \\ & + \int\int\int \rho_0 \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\, da\, db\, dc.\end{aligned}$$

Au second membre, le premier terme demeure invariable en tout déplacement virtuel imposé au système; le second, nul en l'état initial, doit être positif en tout autre état voisin.

A partir de l'état initial, nous pouvons donner au milieu un déplacement infiniment petit défini par les formules

$$(11)\qquad \begin{cases} \xi = a_{11} a + a_{12} b + a_{13} c, \\ \eta = a_{21} a + a_{22} b + a_{23} c, \\ \zeta = a_{31} a + a_{32} b + a_{33} c, \end{cases}$$

où les a_{ij} sont neuf constantes arbitraires. Nous aurons alors

$$(12)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = a_{11}, & \varepsilon_2 = a_{22}, & \varepsilon_3 = a_{33}, \\ \gamma_1 = a_{32} + a_{23}, & \gamma_2 = a_{13} + a_{31}, & \gamma_3 = a_{21} + a_{12} \end{cases}$$

et il est clair que l'on peut disposer des neuf arbitraires a_{ij} de telle sorte que les six quantités ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 prennent des valeurs, indépendantes de a, b, c, choisies comme l'on voudra. Si nous désignons alors par

$$M = \int\int\int \rho_0\, da\, db\, dc$$

la masse totale du milieu considéré, au second membre de l'égalité (10), le second terme deviendra

$$M \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Pour que ce terme soit positif en tout état voisin de l'état initial, il faut et il suffit que l'inégalité

$$(13)\qquad \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) > 0$$

soit vérifiée pour tout ensemble de valeurs non nulles de

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3$$

et pour tout couple de valeurs de ρ_0, T_0 qui vérifie l'égalité (9).

En vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, l'inégalité (13) peut encore s'écrire, en tenant compte de l'égalité (4),

$$(14) \qquad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}\gamma_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}\gamma_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}\gamma_3\right)^{(2)} > 0.$$

Dans cette inégalité (14), (2) représente un *carré symbolique* où l'on doit faire

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\right)^{(2)} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1^2}, \qquad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\right) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_2}, \qquad \ldots,$$

tandis que

$$\varepsilon_1^{(2)} = \varepsilon_1^2, \qquad (\varepsilon_1\varepsilon_2) = \varepsilon_1\varepsilon_2, \qquad \ldots.$$

L'inégalité (13), ou l'inégalité (14), écrite pour tout couple de valeurs de ρ_0, T_0 qui vérifie l'égalité (9), nous assure que l'état initial du système est stable dans les conditions prescrites, si cet état initial est l'état d'équilibre que prend le milieu porté à la température T_0 et *soumis à une pression nulle*.

Supposons maintenant *que l'inégalité* (13), *ou l'inégalité* (14), *soit vraie pour tout couple de valeurs de* ρ_0, T_0. Pourrons-nous affirmer que, l'état initial du milieu étant l'état d'équilibre pris à une température quelconque T_0 et *sous une pression quelconque* Π_0, cet état demeure stable dans les conditions prescrites ?

Nous pourrons affirmer que la quantité Ω donnée par l'égalité (5) est minimum dans l'état initial.

L'état initial sera donc sûrement un état d'équilibre stable si l'on maintient invariable la température et immobile la surface qui limite le milieu.

Mais il ne paraît pas que nous puissions rien affirmer touchant la quantité Ω donnée par l'égalité (6). *Nous ne pouvons donc assurer la stabilité de l'état initial si une partie de la surface limite se déforme en restant soumise à une pression uniforme et constante qui diffère de* o.

II. — Sur les conditions suffisantes pour la stabilité initiale d'un milieu vitreux.

Les considérations précédentes s'appliquent, en particulier, aux milieux vitreux. Pour de tels milieux, on a [*Recherches sur l'Élasticité*, 2e Partie, égalités (6)]

$$(15)\qquad \begin{aligned}\rho_0\varphi_2 = {}& \tfrac{1}{2}\Lambda(\rho_0, \mathrm{T}_0)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 \\ &+\tfrac{1}{2}\mathrm{M}(\rho_0, \mathrm{T}_0)(2\varepsilon_1^2+2\varepsilon_2^2+2\varepsilon_3^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2),\end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(16)\qquad \begin{aligned}\rho_0\varphi_2 = {}& \frac{3\Lambda(\rho_0, \mathrm{T}_0)+2\mathrm{M}(\rho_0, \mathrm{T}_0)}{6}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 \\ &+\frac{\mathrm{M}(\rho_0, \mathrm{T}_0)}{6}[2(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+2(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2+2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+3\gamma_1^2+3\gamma_2^2+3\gamma_3^2].\end{aligned}$$

Le discriminant de φ_2, considéré comme forme quadratique en ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, est

$$\begin{vmatrix} \Lambda+2\mathrm{M} & \Lambda & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda+2\mathrm{M} & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda+2\mathrm{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{M} \end{vmatrix}.$$

On en tire, à la manière habituelle, les conditions nécessaires et suffisantes pour que φ_2 soit une forme définie positive et l'on trouve que ces conditions se réduisent à

$$(17)\qquad \begin{cases} 3\Lambda(\rho_0, \mathrm{T}_0)+2\mathrm{M}(\rho_0, \mathrm{T}_0)>0, \\ \mathrm{M}(\rho_0, \mathrm{T}_0)>0. \end{cases}$$

Ces deux inégalités équivalent ici à l'inégalité (13), ou à l'inégalité (14).

On en tire les deux inégalités

$$(18)\qquad \begin{cases} \Lambda(\rho_0, T_0) + 2M(\rho_0, T_0) > 0, \\ \Lambda(\rho_0, T_0) + M(\rho_0, T_0) > 0. \end{cases}$$

Ces inégalités (17) et (18) ont une grande importance dans une foule de questions d'élasticité statique. Si l'on désigne, en effet, par α le coefficient de compressibilité cubique du milieu et par E le coefficient d'élasticité de traction, on a [1]

$$(19)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{3}{3\Lambda(\rho_0, T_0) + 2M(\rho_0, T_0)}, \\ E = \dfrac{\Lambda(\rho_0, T_0) + M(\rho_0, T_0)}{M(\rho_0, T_0)[3\Lambda(\rho_0, T_0) + 2M(\rho_0, T_0)]}. \end{cases}$$

Ces deux coefficients sont donc positifs en vertu des inégalités (17) et (18).

Si le milieu est dénué de viscosité et bon conducteur de la chaleur, la vitesse de propagation des vibrations longitudinales est donnée par l'égalité [*Recherches sur l'élasticité*, 2e Partie, égalité (76)]

$$(20)\qquad \mathfrak{N} = \sqrt{\frac{\Lambda(\rho_0, T_0) + 2M(\rho_0, T_0)}{\rho_0}},$$

tandis que la vitesse de propagation des vibrations transversales est donnée par l'égalité [*Ibid.*, égalité (80)]

$$(21)\qquad \mathfrak{N} = \sqrt{\frac{M(\rho_0, T_0)}{\rho_0}}.$$

Selon les inégalités (17) et (18), ces deux vitesses sont réelles.

Rappelons que, pour un milieu fluide, la dernière des inégalités (17) est remplacée par l'égalité

$$(22)\qquad M(\rho_0, T_0) = 0,$$

qui est alors vérifiée quels que soient ρ_0 et T_0.

---

(1) LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 2e édition, p. 75; 1866.

CHAPITRE II.

DES CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR LA STABILITÉ D'UN MILIEU ÉLASTIQUE.

I. — Remarques diverses sur les petits mouvements d'un milieu élastique.

Quelles que soient les valeurs, finies ou infiniment petites, fonctions de a, b, c, que l'on attribue à ξ, η, ζ, nous continuerons à désigner par ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_3, γ_3 les six grandeurs que définissent les égalités

$$(1) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial \xi}{\partial a}, & \varepsilon_2 = \dfrac{\partial \eta}{\partial b}, & \varepsilon_3 = \dfrac{\partial \zeta}{\partial c}, \\[2ex] \gamma_1 = \dfrac{\partial \eta}{\partial c} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial b}, & \gamma_2 = \dfrac{\partial \zeta}{\partial a} + \dfrac{\partial \xi}{\partial c}, & \gamma_3 = \dfrac{\partial \xi}{\partial b} + \dfrac{\partial \eta}{\partial a}, \end{cases}$$

tandis que nous désignerons par e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 les six composantes de la déformation proprement dite, composantes qu'expriment les égalités

$$(23) \qquad \begin{cases} e_1 = \dfrac{\partial \xi}{\partial a} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial a}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial a}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial a}\right)^2\right], \\[2ex] e_2 = \dfrac{\partial \eta}{\partial b} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial b}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial b}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial b}\right)^2\right], \\[2ex] e_3 = \dfrac{\partial \zeta}{\partial c} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial c}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial c}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial c}\right)^2\right]. \\[2ex] g_1 = \dfrac{\partial \eta}{\partial c} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial b} + \dfrac{\partial \xi}{\partial b}\dfrac{\partial \xi}{\partial c} + \dfrac{\partial \eta}{\partial b}\dfrac{\partial \eta}{\partial c} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial b}\dfrac{\partial \zeta}{\partial c}, \\[2ex] g_2 = \dfrac{\partial \zeta}{\partial a} + \dfrac{\partial \xi}{\partial c} + \dfrac{\partial \xi}{\partial c}\dfrac{\partial \xi}{\partial a} + \dfrac{\partial \eta}{\partial c}\dfrac{\partial \eta}{\partial a} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial c}\dfrac{\partial \zeta}{\partial a}, \\[2ex] g_3 = \dfrac{\partial \xi}{\partial b} + \dfrac{\partial \eta}{\partial a} + \dfrac{\partial \xi}{\partial a}\dfrac{\partial \xi}{\partial b} + \dfrac{\partial \eta}{\partial a}\dfrac{\partial \eta}{\partial b} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial a}\dfrac{\partial \zeta}{\partial b}. \end{cases}$$

Lorsqu'en tout point a, b, c du milieu, ξ, η, ζ seront infiniment petits AINSI QUE LEURS DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE EN a, b, c, *nous dirons que ξ, η, ζ sont,* PARTOUT, *infiniment petits.*

Lorsque ξ, η, ζ sont partout infiniment petits, on peut écrire

(24)
$$\left\{\begin{array}{lll} e_1 = \varepsilon_1 + \ldots, & e_2 = \varepsilon_2 + \ldots, & e_3 = \varepsilon_3 + \ldots, \\ g_1 = \gamma_1 + \ldots, & g_2 = \gamma_2 + \ldots, & g_3 = \gamma_3 + \ldots, \end{array}\right.$$

les signes $+\ldots$ désignant des quantités qui sont infiniment petites au moins du second ordre.

Quelles que soient les valeurs, finies ou infiniment petites, que l'on attribue à ξ, η, ζ, le potentiel interne du milieu déformé peut toujours se mettre sous la forme (2), à la condition d'écrire

(4 *bis*)
$$\begin{aligned} \Phi = {} & \varphi_0(\rho_0, \mathrm{T}) + \varphi_1(\rho_0, \mathrm{T})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ & + \varphi_2(\rho_0, \mathrm{T}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) + \ldots, \end{aligned}$$

formule où le signe $+\ldots$ remplace des termes qui sont infiniment petits au moins du troisième ordre, lorsque ξ, η, ζ, sont, partout, infiniment petits du premier ordre.

D'ailleurs, l'égalité

(7)
$$\Pi_0 = -\rho_0\,\varphi_1(\rho_0, \mathrm{T})$$

demeure toujours valable.

Lorsque ξ, η, ζ sont partout infiniment petits, les quantités N_i, T_i sont données par les égalités (3); si donc on tient compte des égalités (4 *bis*) et (7), et si l'on suppose $\mathrm{T} = \mathrm{T}_0$, on pourra écrire

)
$$\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{N}_x = \Pi_0 - \rho_0 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_1} + \ldots, & \mathrm{N}_y = \Pi_0 - \rho_0 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_2} + \ldots, & \mathrm{N}_z = \Pi_0 - \rho_0 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_3} + \ldots, \\ \mathrm{T}_x = -\rho_0 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1} + \ldots, & \mathrm{T}_y = -\rho_0 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2} + \ldots, & \mathrm{T}_z = -\rho_0 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_3} + \ldots, \end{array}\right.$$

les symboles $+\ldots$ désignant des termes qui sont infiniment petits au moins du second ordre lorsque ξ, η, ζ sont partout infiniment petits.

D'autre part, les actions de viscosité doivent dépendre d'une fonction dissipative qui sera, elle-même, dépendante de ρ_0, de T_0, et des six quantités que nous avons désignées (*Recherches sur l'élasticité*, 1re Partie, Chap. II, n° 5) par Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3. La fonction dissipative doit d'ailleurs être une forme quadratique définie positive de ces six dernières quantités. Mais, dans le cas où ξ, η, ζ sont partout infiniment petits, on peut, comme nous l'avons déjà remarqué, (*Recherches sur l'Élasticité*, 2e Partie, Chap. I, n° 2) confondre Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3 avec

$$(26)\qquad \begin{cases} \varepsilon'_1 = \dfrac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}, & \varepsilon'_2 = \dfrac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}, & \varepsilon'_3 = \dfrac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}, \\ \gamma'_1 = \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial t}, & \gamma'_2 = \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial t}, & \gamma'_3 = \dfrac{\partial\gamma_3}{\partial t}, \end{cases}$$

en négligeant des infiniment petits du second ordre.

La fonction dissipative pourra donc s'écrire

$$\iiint \rho_0\,\mathfrak{F}\,da\,db\,dc$$

avec

$$(27)\qquad \mathfrak{F} = f(\rho_0,\ T_0,\ \varepsilon'_1,\ \varepsilon'_2,\ \varepsilon'_3,\ \gamma'_1,\ \gamma'_2,\ \gamma'_3) + \ldots,$$

f étant une forme quadratique définie positive en ε'_1, ε'_2, ε'_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3 et le symbole $+\ldots$ désignant un terme qui est infiniment petit au moins du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Dans ce dernier cas, on doit avoir

$$\begin{array}{lll} \nu_x = -\rho_0\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varepsilon'_1}, & \nu_y = -\rho_0\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varepsilon'_2}, & \nu_z = -\rho_0\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varepsilon'_3}, \\ \tau_x = -\rho_0\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\gamma'_1}, & \tau_y = -\rho_0\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\gamma'_2}, & \tau_z = -\rho_0\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\gamma'_3}. \end{array}$$

Nous pourrons donc écrire, d'une manière générale,

$$(28)\qquad \begin{cases} \nu_x = -\rho_0\dfrac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1} + \ldots, & \nu_y = -\rho_0\dfrac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2} + \ldots, & \nu_z = -\rho_0\dfrac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3} + \ldots, \\ \tau_x = -\rho_0\dfrac{\partial f}{\partial\gamma'_1} + \ldots, & \nu_y = -\rho_0\dfrac{\partial f}{\partial\gamma'_2} + \ldots, & \nu_z = -\rho_0\dfrac{\partial f}{\partial\gamma'_3} + \ldots, \end{cases}$$

les signes $+\ldots$ désignant des termes qui sont infiniment petits au moins du second ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Les équations indéfinies du mouvement sont

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}(N_x+\nu_x)+\frac{\partial}{\partial y}(T_z+\tau_z)+\frac{\partial}{\partial z}(T_y+\tau_y)+\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}(T_z+\tau_z)+\frac{\partial}{\partial y}(N_y+\nu_y)+\frac{\partial}{\partial z}(T_x+\tau_x)+\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}(T_y+\tau_y)+\frac{\partial}{\partial y}(T_x+\tau_x)+\frac{\partial}{\partial z}(N_z+\nu_z)+\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=0.
\end{aligned}$$

Lorsque ξ, η, ζ tendent vers o, les dérivées $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$, $\frac{\partial z}{\partial c}$ tendent vers 1; les autres dérivées de x, y, z par rapport à a, b, c, tendent vers o; en même temps, ρ tend vers ρ_0. Si l'on tient compte des égalités (25) et (28), et si l'on observe que Π_0 est indépendant de a, b, c, on peut mettre les équations précédentes sous la forme

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_1'}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial f}{\partial\gamma_3'}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial f}{\partial\gamma_2'}\right)-\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\ldots=0,\\
&\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial f}{\partial\gamma_3'}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_2'}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial f}{\partial\gamma_1'}\right)-\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\ldots=0,\\
&\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial f}{\partial\gamma_2'}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial f}{\partial\gamma_1'}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_3'}\right)-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+\ldots=0.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, les symboles $+\ldots$ représentent des quantités qui sont infiniment petites au moins du second ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont infiniment petits quels que soient a, b, c.

Formons maintenant les conditions aux limites.

En tout point de la partie immobile de la surface qui limite le milieu, on doit avoir, quel que soit t, les égalités

$$(8)\qquad \xi=0,\qquad \eta=0,\qquad \zeta=0.$$

Considérons maintenant un point matériel pris sur la partie déformable de la surface limite.

En l'état initial, cette surface était la surface Σ, le point matériel considéré y occupait la position μ; la demi-normale en μ, à la surface Σ, dirigée vers l'intérieur du milieu étudié, faisait avec les axes de coordonnées des angles ayant pour cosinus α, β, γ.

En l'état déformé, la surface limite est la surface S; le point matériel considéré y occupe la position M; la demi-normale en M, à la surface S, dirigée vers l'intérieur du milieu, fait avec les axes de coordonnées des angles dont les cosinus sont l, m, n.

En tout point M de la surface S, et à tout instant t, nous devons avoir

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{N}_x+\nu_x-\Pi_0)\,l+(\mathrm{T}_z+\tau_z)\,m+(\mathrm{T}_y+\tau_y)\,n=0,\\
&(\mathrm{T}_z+\tau_z)\,l+(\mathrm{N}_y+\nu_y-\Pi_0)\,m+(\mathrm{T}_x+\tau_x)\,n=0,\\
&(\mathrm{T}_y+\tau_y)\,l+(\mathrm{T}_x+\tau_x)\,m+(\mathrm{N}_z+\nu_z-\Pi_0)\,n=0.
\end{aligned}$$

Dans le cas où ξ, η, ζ sont partout infiniment petits, la distance $\mathrm{M}\mu$ est infiniment petite; il en est de même des différences $(\alpha-l)$, $(\beta-m)$, $(\gamma-n)$. Si l'on tient compte des égalités (25) et (28), on voit que l'on peut, quel que soit le mouvement du milieu, énoncer la proposition suivante :

En tout point μ, pris sur la position initiale Σ de la partie déformable de la surface limite, on a, quel que soit t,

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right)\alpha+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)\beta+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\gamma+\ldots=0,\\
&\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)\alpha+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right)\beta+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\gamma+\ldots=0,\\
&\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\alpha+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\beta+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)\gamma+\ldots=0.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, les signes $+\ldots$ représentent des termes qui sont infiniment petits au moins du second ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Si le milieu est un milieu vitreux, φ_2 est donné par l'égalité (15); f est donné par l'égalité analogue

$$(31)\qquad \begin{aligned}\rho_0 f=&\frac{\lambda(\rho_0,\mathrm{T}_0)}{2}(\varepsilon'_1+\varepsilon'_2+\varepsilon'_3)^2\\
&+\frac{\mu(\rho_0,\mathrm{T}_0)}{2}(2\varepsilon'^2_1+2\varepsilon'^2_2+2\varepsilon'^2_3+\gamma'^2_1+\gamma'^2_2+\gamma'^2_3).\end{aligned}$$

Les égalités (25) deviennent

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
N_x &= \Pi_0 - \Lambda(\rho_0, T_0)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - 2M(\rho_0, T_0)\varepsilon_1 + \ldots,\\
N_y &= \Pi_0 - \Lambda(\rho_0, T_0)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - 2M(\rho_0, T_0)\varepsilon_2 + \ldots,\\
N_z &= \Pi_0 - \Lambda(\rho_0, T_0)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - 2M(\rho_0, T_0)\varepsilon_3 + \ldots,\\
T_x &= - M(\rho_0, T_0)\gamma_1 + \ldots,\\
T_y &= - M(\rho_0, T_0)\gamma_2 + \ldots,\\
T_z &= - M(\rho_0, T_0)\gamma_3 + \ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

tandis que les égalités (28) prennent la forme

$$
(33)\quad \left\{
\begin{aligned}
\nu_x &= - \lambda(\rho_0, T_0)(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) - 2\mu(\rho_0, T_0)\varepsilon'_1 + \ldots,\\
\nu_y &= - \lambda(\rho_0, T_0)(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) - 2\mu(\rho_0, T_0)\varepsilon'_2 + \ldots,\\
\nu_z &= - \lambda(\rho_0, T_0)(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) - 2\mu(\rho_0, T_0)\varepsilon'_3 + \ldots,\\
\tau_x &= - \mu(\rho_0, T_0)\gamma'_1 + \ldots,\\
\tau_y &= - \mu(\rho_0, T_0)\gamma'_2 + \ldots,\\
\tau_z &= - \mu(\rho_0, T_0)\gamma'_3 + \ldots.
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations (29) deviennent

$$
(34)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(\Lambda + M)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) + M\,\Delta\xi\\
&+ (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\xi - \rho_0\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \ldots =\\
&(\Lambda + M)\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) + M\,\Delta\eta\\
&+ (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial b\,\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\eta - \rho_0\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \ldots =\\
&(\Lambda + M)\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) + M\,\Delta\zeta\\
&(\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial c\,\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\zeta - \rho_0\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \ldots =
\end{aligned}
\right.
$$

tandis que les équations (30) prennent la forme

$$
(35)\quad \left\{
\begin{aligned}
&[\Lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2M\varepsilon_1]\alpha + M\gamma_3\beta + M\gamma_2\gamma\\
&+ [\lambda(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) + 2\mu\,\varepsilon'_1]\alpha + \mu\,\gamma'_3\beta + \mu\,\gamma'_2\gamma + \ldots = 0,\\
&M\gamma_3\alpha + [\Lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2M\varepsilon_2]\beta + M\gamma_1\gamma\\
&+ \mu\,\gamma'_3\alpha + [\lambda(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) + 2\mu\,\varepsilon'_2]\beta + \mu\,\gamma'_1\gamma + \ldots = 0,\\
&M\gamma_2\alpha + M\gamma_1\beta + [\Lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2M\varepsilon_3]\gamma\\
&+ \mu\,\gamma'_2\alpha + \mu\,\gamma'_1\beta + [\lambda(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) + 2\mu\,\varepsilon'_3]\gamma + \ldots = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces équations (32), (33), (34) et (35), les signes $+ \ldots$ désignent des quantités qui sont infiniment petites au moins du second ordre lorsque $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ sont, partout, infiniment petits.

II. — D'une condition nécessaire pour la stabilité initiale d'un milieu quelconque, cristallisé ou vitreux [1].

Nous allons, en premier lieu, démontrer la proposition suivante :

Si, en un milieu cristallisé, la fonction

$$\varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

est une forme définie négative en $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, *l'état initial du milieu ne saurait demeurer stable lorsque les diverses parties de la surface terminale sont maintenues immobiles.*

Supposons, en effet, que l'état initial du milieu soit stable.

Aux valeurs absolues initiales de ξ, η, ζ et de leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c, de ξ', η', ζ', nous pouvons imposer des limites supérieures telles que les quantités

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \qquad g_1, \quad g_2, \quad g_3,$$
$$\xi', \quad \eta', \quad \zeta'$$

demeurent toutes inférieures en valeur absolue à des limites données d'avance, et cela quel que soit t.

Donc, si l'état initial du milieu était un état d'équilibre stable, on pourrait limiter supérieurement les valeurs absolues initiales de ξ, η, ζ, et de leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c, de ξ', η',

---

[1] *Considérations sur la stabilité et, particulièrement, sur la stabilité des corps élastiques* (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 9 juillet 1903). — *D'une condition nécessaire pour la stabilité initiale d'un milieu élastique quelconque* (*Comptes rendus*, t. CXXXVIII, séance du 29 février 1904, p. 541).

ζ' de telle sorte que la quantité

$$(36) \qquad U = -\int\int\int \varphi_2(\rho_0, T_0, e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3)\, da\, db\, dc + \frac{1}{2}\int\int\int (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)\, da\, db\, dc$$

demeure, quel que soit t, inférieure à une grandeur positive A donnée d'avance.

Les égalités (24) permettent d'écrire

$$(37) \qquad U = -\int\int\int \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\, da\, db\, dc + \frac{1}{2}\int\int\int (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)\, da\, db\, dc + \ldots,$$

$+\ldots$ désignant une quantité qui est infiniment petite, au moins du troisième ordre, lorsque ξ, η, ζ sont, partout, infiniment petits.

De l'égalité (37) on tire

$$(38) \qquad \frac{dU}{dt} = -\int\int\int \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon'_3 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\gamma'_3\right) da\, db\, dc + \int\int\int (\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')\, da\, db\, dc + \ldots,$$

$+\ldots$ désignant encore un terme qui est infiniment petit, au moins du troisième ordre, lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Mais les égalités (29) donnent

$$\begin{aligned}
&\int\int\int (\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')\, da\, db\, dc \\
&= \int\int\int \Bigg\{ \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\right]\xi' \\
&\qquad + \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\right]\eta' \\
&\qquad + \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)\right]\zeta' \Bigg\} da\, db\, dc \\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$+\ldots$ désignant des termes qui sont infiniment petits au moins du troisième ordre lorsque $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ sont partout infiniment petits.

Cette égalité, à son tour, peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\int\int\int(\xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'')\,da\,db\,dc \\
&= -\int\Bigg\{\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right)\alpha+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)\beta+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\gamma\right]\xi' \\
&\qquad+\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)\alpha+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right)\beta+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\gamma\right]\eta' \\
&\qquad+\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\alpha+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\beta+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)\gamma\right]\zeta'\Bigg\}\,d\Sigma \\
&\quad-\int\int\int\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon'_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon'_2+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon'_3+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma'_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma'_2+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\gamma'_3\right)da\,db\,dc \\
&\quad-\int\int\int\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\varepsilon'_1+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\varepsilon'_2+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\varepsilon'_3+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\gamma'_1+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\gamma'_2+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\gamma'_3\right)da\,db\,dc \\
&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Mais tout point de la surface Σ est un point immobile, cas auquel, en ce point, on a, quel que soit t, les égalités (8), qui entraînent les égalités

$$\xi' = 0, \qquad \eta' = 0, \qquad \zeta' = 0; \tag{8 bis}$$

l'intégrale par laquelle débute le second membre de l'égalité précédente porte sur une quantité nulle. Au même second membre, on peut, en vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, remplacer la somme

$$\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\varepsilon'_1+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\varepsilon'_2+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\varepsilon'_3+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\gamma'_1+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\gamma'_2+\frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\gamma'_3$$

par $2f$; l'égalité précédente se réduit donc à

$$\begin{aligned}
&\int\int\int(\xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'')\,da\,db\,dc \\
&= -\int\int\int\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon'_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon'_2+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon'_3+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma'_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma'_2+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\gamma'_3\right)da\,db\,dc \\
&\quad-2\int\int\int f\,da\,db\,dc+\ldots,
\end{aligned}$$

et l'égalité (38) peut s'écrire

$$(39)\quad \frac{dU}{dt} = -2\int\int\int\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon'_3 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\gamma'_3\right) da\,db\,dc$$
$$-2\int\int\int f\,da\,db\,dc + \dots .$$

De cette égalité (39) une nouvelle différentiation par rapport à t tire l'égalité

$$(40)\quad \frac{d^2U}{dt^2} = -2\int\int\int\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon'_3 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\gamma'_3\right)^{(2)} da\,db\,dc$$
$$-2\int\int\int\Big[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right)\varepsilon''_1 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right)\varepsilon''_2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)\varepsilon''_3$$
$$+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\gamma''_1 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\gamma''_2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)\gamma''_3\Big]\,da\,db\,dc$$
$$-\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

où (2) représente un carré symbolique.

Or on a

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon'_3 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma'_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\gamma'_3\right)^{(2)}$$
$$= \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3).$$

D'autre part on a

$$\int\int\int\Big[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right)\varepsilon''_1 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right)\varepsilon''_2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)\varepsilon''_3$$
$$+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\gamma''_1 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\gamma''_2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)\gamma''_3\Big]\,da\,db\,dc$$
$$= -\int\Big\{\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right)\alpha + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)\beta + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\gamma\right]\xi''$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right)\alpha + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right)\beta + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\gamma\right]\eta''$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\alpha + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\beta + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)\gamma\right]\zeta''\Big\}\,d\Sigma$$
$$-\int\int\int\Big\{\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_1}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right)\right]\xi''$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_3}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_2}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right)\right]\eta''$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_2}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial\gamma'_1}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3} + \frac{\partial f}{\partial\varepsilon'_3}\right)\right]\zeta''\Big\}\,da\,db\,dc$$
$$-\dots\dots\dots\dots$$

Au second membre de cette égalité, la première intégrale porte sur une quantité nulle. En effet, l'élément $d\Sigma$ est immobile et l'on a alors, quel que soit t, les égalités (8 *bis*), qui entraînent les égalités

$$\text{(8 ter)} \qquad \xi'' = 0, \qquad \eta'' = 0, \qquad \zeta'' = 0.$$

Quant à la seconde intégrale, on peut la transformer au moyen des égalités (29).

Tout compte fait, l'égalité (40) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dt^2} = &-\int\!\!\int\!\!\int \varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)\, da\, db\, dc \\ &+\int\!\!\int\!\!\int \Bigg\{ \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon'_1}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_3}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_2}\right)\right]^2 \\ &\qquad + \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_3}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_2} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon'_2}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_1}\right)\right]^2 \\ &\qquad + \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_2}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_1}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_3} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon'_3}\right)\right]^2 \Bigg\}\, da\, db\, dc \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Le signe $+\ldots$ continue à désigner des termes qui sont infiniment petits au moins du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Le terme explicitement écrit en l'expression (41) de $\frac{d^2 U}{dt^2}$ peut-il s'annuler? Si l'on tient compte de l'hypothèse faite au sujet de φ, on voit que, pour que ce terme s'annule, il faut et il suffit que l'on ait

$$\text{(42)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_2(\rho_0, T_0, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon'_1}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_3}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_2}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_3} + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_3}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_3} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon'_2}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_1}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2} + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_2}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1} + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_1}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon_3} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon'_3}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

La première des égalités (42) exige que l'on ait, quels que soient a, b, c,

$$\text{(43)} \qquad \varepsilon'_1 = 0, \qquad \varepsilon'_2 = 0, \qquad \varepsilon'_3 = 0, \qquad \gamma'_1 = 0, \qquad \gamma'_2 = 0, \qquad \gamma'_3 = 0,$$

en sorte que les trois dernières deviennent

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}+\dfrac{\partial}{\partial b}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\dfrac{\partial}{\partial c}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial a}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\dfrac{\partial}{\partial b}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}+\dfrac{\partial}{\partial c}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial a}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\dfrac{\partial}{\partial b}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\dfrac{\partial}{\partial c}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}=0. \end{cases}$$

Les égalités (44) entraînent l'égalité

$$\begin{aligned}\iiint\Big[&\left(\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}+\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\right)\xi\\ &+\left(\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}+\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}+\frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\right)\eta\\ &+\left(\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\right)\zeta\Big]\,da\,db\,dc=0\end{aligned}$$

qui devient, en vertu des égalités (1),

$$\begin{aligned}(45)\quad \iiint&\left(\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}+\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}+\varepsilon_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}+\gamma_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}+\gamma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}+\gamma_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\right)da\,db\,dc\\ &+\int\Big[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\alpha+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\beta+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma\right)\xi\\ &\quad+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}\alpha+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\beta+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma\right)\eta\\ &\quad+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\alpha+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\beta+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\gamma\right)\zeta\Big]\,d\Sigma=0.\end{aligned}$$

Au premier membre de cette égalité (45), la seconde intégrale s'annule, car ξ, η, ζ sont nuls en tout point de la surface Σ. Si l'on tient compte, en outre, du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, cette égalité devient

$$\iiint\varphi_2(\rho_0,T_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\,da\,db\,dc=0.$$

La fonction φ_2 ne pouvant être négative, elle exige que l'on ait, quels que soient a, b, c,

$$\varphi_2(\rho_0,T_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=0$$

ou bien, puisque φ_2 est une forme définie positive en ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3,

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0. \tag{46}$$

Les égalités (43) et (46) sont donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que le terme explicitement écrit, en l'expression (41), de $\frac{d^2 U}{dt^2}$ soit égal à *zéro*.

Les égalités (46) équivalent aux égalités

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \lambda_1 + \omega_2 c - \omega_3 b, \\ \eta &= \lambda_2 + \omega_3 a - \omega_1 c, \\ \zeta &= \lambda_3 + \omega_1 b - \omega_2 a, \end{aligned}\right. \tag{47}$$

tandis que les égalités (43) équivalent aux égalités

$$\left\{\begin{aligned} \xi' &= \lambda'_1 + \omega'_2 c - \omega'_3 b, \\ \eta' &= \lambda'_2 + \omega'_3 a - \omega'_1 c, \\ \zeta' &= \lambda'_3 + \omega'_1 b - \omega'_2 c, \end{aligned}\right. \tag{48}$$

$$\left\{\begin{matrix} \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, \\ \lambda'_1, & \lambda'_2, & \lambda'_3, & \omega'_1, & \omega'_2, & \omega'_3, \end{matrix}\right. \tag{49}$$

étant douze quantités indépendantes de a, b, c. Mais les quantités ξ, η, ζ, données par les égalités (47), doivent, selon les conditions (8), s'annuler en tout point de la surface Σ; selon les conditions (8 *bis*), il en doit être de même des quantités ξ', η', ζ' données par les égalités (48); pour cela, il faut et il suffit que les douze constantes (49) soient égales à 0, ce qui nous donne, quels que soient a, b, c,

$$\left\{\begin{matrix} \xi = 0, & \eta = 0, & \zeta = 0, \\ \xi' = 0, & \eta' = 0, & \zeta' = 0. \end{matrix}\right. \tag{50}$$

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que s'annule la quantité explicitement écrite en l'expression (41) de $\frac{d^2 U}{dt^2}$.

Les termes explicitement écrits en l'expression (41) de $\frac{d^2 U}{dt^2}$ sont donc infiniment petits du second ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits du premier ordre; leur somme ne s'annule que lorsque les six quantités ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont nulles quels que soient a, b, c; hors ce cas, cette somme est essentiellemeut positive.

Les termes non explicitement écrits sont infiniment petits du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

On peut donc limiter supérieurement les valeurs absolues de ξ, η, ζ, de leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c et de ξ', η', ζ' de telle sorte que $\frac{d^2 U}{dt^2}$ soit sûrement positif; pour qu'il en soit ainsi quel que soit t, il suffira, si le système est stable, d'imposer des limites supérieures suffisamment petites aux valeurs absolues initiales de ξ, η, ζ, ξ', η', ζ'.

Considérons maintenant la valeur initiale de $\frac{dU}{dt}$, valeur qui se tire de l'égalité (39).

Lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont partout infiniment petits, les termes explicitement écrits sont, en général, infiniment petits du second ordre, tandis que les termes représentés par $+\ldots$ sont infiniment petits du troisième ordre au moins.

Supposons les valeurs initiales ξ'_0, η'_0, ζ'_0, de ξ', η', ζ' liées aux valeurs initiales ξ_0, η_0, ζ_0, de ξ, η, ζ par les relations

$$\xi'_0 = K^2\xi_0, \qquad \eta'_0 = K^2\eta_0, \qquad \zeta'_0 = K^2\zeta_0,$$

où K^2 est une quantité positive indépendante de a, b, c.

Le premier terme de $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ deviendra évidemment

$$-K^2\int\int\int\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon_{10}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon_{20}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\varepsilon_{30}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}\gamma_{10}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma_{20}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}\gamma_{30}\right)da\,db\,dc$$

ou, selon le théorème d'Euler,

$$-2K^2\int\int\int\varphi_2(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}, \varepsilon_{30}, \gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30})\,da\,db\,dc,$$

quantité essentiellement positive si l'on n'a pas

$$\varepsilon_{10}=0, \quad \varepsilon_{20}=0, \quad \varepsilon_{30}=0, \quad \gamma_{10}=0, \quad \gamma_{20}=0, \quad \gamma_{30}=0.$$

Le second terme de $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ deviendra

$$K^4 \int\int\int f(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}, \varepsilon_{30}, \gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30})\, da\, db\, dc.$$

On pourra donc choisir K^2 assez petit pour que la somme des deux premiers termes de $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ ait un rapport aussi voisin de 1 que l'on voudra au premier de ces termes.

On pourra ensuite choisir ξ_0, η_0, ζ_0 et leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c, assez petits en tout point (a, b, c) pour que l'ensemble des termes non explicitement écrits ait une valeur aussi petite que l'on voudra par rapport à la somme des deux termes explicitement écrits et, partant, par rapport au premier de ces termes. Alors $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ aura le signe de ce premier terme, qui est le signe $+$.

Si donc notre système était en équilibre stable, on pourrait choisir les valeurs prises, en tout point (a, b, c), par ξ_0, η_0, ζ_0, de telle sorte que les trois conditions suivantes soient remplies :

1° U ne surpassera jamais une certaine valeur positive donnée d'avance A;

2° $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ est positif;

3° $\frac{d^2U}{dt^2}$ demeurera positif quel que soit t.

Or les deux dernières conditions exigent que U croisse au delà de toute limite avec t; elles contredisent donc à la première, en sorte qu'il est absurde d'attribuer la stabilité à notre sytème.

La proposition énoncée est ainsi établie.

On remarquera que *la démonstration de cette proposition n'implique aucune hypothèse touchant les actions de viscosité; ces actions pourraient être présentes ou absentes, elles pourraient aussi bien tendre à favoriser le mouvement qu'à l'empêcher, sans que la proposition cessât d'être exacte.*

Il est intéressant d'indiquer la forme que prend cette proposition pour un milieu vitreux; cette forme est la suivante :

Si, en un milieu vitreux, on a à la fois les deux inégalités

$$M < 0, \qquad 3\Lambda + 2M < 0, \tag{51}$$

l'état d'équilibre initial de ce milieu ne peut demeurer stable lorsqu'on suppose fixés les divers points de la surface qui le limite. Cette proposition demeure vraie que le milieu soit exempt de viscosité ou qu'il en soit doué, que cette viscosité tende à gêner ou à favoriser le mouvement.

III. — Établissement de diverses formules qui serviront à discuter la stabilité initiale d'un milieu vitreux [1].

C'est à la considération des seuls milieux vitreux que notre analyse va maintenant s'attacher.

Nous supposerons ces milieux illimités; nous supposerons en outre que *les régions infiniment éloignées sont maintenues immobiles;* et, d'une manière précise, voici ce que nous entendrons par là :

Soit r la distance d'un point (a, b, c) à l'origine des coordonnées; nous admettrons que, lorsque r croît au delà de toute limite, les fonctions

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \qquad \xi', \quad \eta', \quad \zeta', \qquad \xi'', \quad \eta'', \quad \zeta''$$

tendent vers o *à la façon de fonctions potentielles;* c'est-à-dire que ces fonctions tendent vers o; qu'il en est de même des produits par r de leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c; des produits par r^2 de leurs dérivées partielles du second ordre en a, b, c.

Que ξ, η, ζ soient finis ou infiniment petits, nous poserons, en toutes circonstances,

$$(52)\qquad \left\{\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c},\\ \omega_1 &= \frac{\partial\zeta}{\partial b} - \frac{\partial\eta}{\partial c},\\ \omega_2 &= \frac{\partial\xi}{\partial c} - \frac{\partial\zeta}{\partial a},\\ \omega_3 &= \frac{\partial\eta}{\partial a} - \frac{\partial\xi}{\partial b}. \end{aligned}\right.$$

[1] *Sur quelques formules utiles pour discuter la stabilité d'un milieu vitreux* (*Comptes rendus*, t. CXXXVIII, p. 737, séance du 21 mars 1904).

Si ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont infiniment petits, il résulte des égalités (34) que nous aurons, en tout point (a, b, c) et à tout instant t,

$$(\Lambda + 2\mathrm{M})\Delta\theta + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\theta - \rho_0\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \ldots = 0 \tag{53}$$

et aussi

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{M}\,\Delta\omega_1 + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\omega_1 - \rho_0\frac{\partial^2\omega_1}{\partial t^2} + \ldots = 0,\\ &\mathrm{M}\,\Delta\omega_2 + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\omega_2 - \rho_0\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2} + \ldots = 0,\\ &\mathrm{M}\,\Delta\omega_3 + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\omega_3 - \rho_0\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2} + \ldots = 0.\end{aligned}\right. \tag{54}$$

Dans ces équations, comme dans les équations (34) dont elles découlent, les symboles $+\ldots$ remplacent des termes qui sont infiniment petits au moins du second ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits du premier ordre.

Ces préliminaires posés, considérons l'expression

$$\Psi = (\Lambda + 2\mathrm{M})\int\int\int(\Delta\theta)^2\,da\,db\,dc, \tag{55}$$

où nous supposerons tout d'abord l'intégrale étendue au volume que limite une surface Σ dont tous les points sont à une distance finie du point O; nous pourrons ensuite faire croître au delà de toute limite tous les rayons vecteurs de cette surface sans que l'intégrale cesse d'avoir un sens.

De l'égalité (55), nous tirerons

$$\frac{d\Psi}{dt} = 2(\Lambda + 2\mathrm{M})\int\Delta\theta\,\Delta\theta'\,d\varpi, \tag{56}$$

puis

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} = 2(\Lambda + 2\mathrm{M})\int(\Delta\theta')^2\,d\varpi + 2(\Lambda + 2\mathrm{M})\int\Delta\theta\,\Delta\theta''\,d\varpi. \tag{57}$$

Dans ces égalités on a posé, pour simplifier les formules,

$$da\,db\,dc = d\varpi, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t} = \theta', \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \theta''.$$

L'égalité (53) donne

$$\Delta\theta'' = \frac{\Lambda + 2M}{\rho_0}\Delta\,\Delta\theta + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}\Delta\,\Delta\theta' + \ldots;$$

en sorte que l'égalité (57) devient

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Psi}{dt^2} &= 2(\Lambda + 2M)\int(\Delta\theta')^2\,d\varpi \\ &+ \frac{2(\Lambda+2M)^2}{\rho_0}\int\Delta\theta\,\Delta\,\Delta\theta\,d\varpi + \frac{2(\Lambda+2M)(\lambda+2\mu)}{\rho_0}\int\Delta\theta\,\Delta\,\Delta\theta'\,d\varpi \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Cette égalité, à son tour, peut s'écrire

$$(58)\quad \begin{aligned}\frac{d^2\Psi}{dt^2} &= 2(\Lambda + 2M)\int(\Delta\theta')^2\,d\varpi \\ &- \frac{2(\Lambda+2M)^2}{\rho_0}\int\left[\left(\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c}\right)^2\right]d\varpi \\ &- \frac{2(\Lambda+2M)(\lambda+2\mu)}{\rho_0}\int\left(\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a} + \frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b} + \frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right)d\varpi \\ &+ \frac{2(\Lambda+2M)^2}{\rho_0}\int\Delta\theta\,\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial n_i}\,d\Sigma \\ &+ \frac{2(\Lambda+2M)(\lambda+2\mu)}{\rho_0}\int\Delta\theta\,\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial n_i}\,d\Sigma \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Dans cette égalité, n_i est la normale à l'élément $d\Sigma$, dirigée vers l'intérieur du volume occupé par le milieu.

Si l'on fait croître au delà de toute limite tous les rayons vecteurs de la surface Σ, l'égalité (58) devient

$$(59)\quad \begin{aligned}\frac{d^2\Psi}{dt^2} &= 2(\Lambda + 2M)\int(\Delta\theta')^2\,d\varpi \\ &+ \frac{2(\Lambda+2M)^2}{\rho_0}\int\left[\left(\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c}\right)^2\right]d\varpi \\ &- \frac{2(\Lambda+2M)(\lambda+2\mu)}{\rho_0}\int\left(\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a} + \frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b} + \frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right)d\varpi \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Dans les égalités (58) et (59), le symbole $+\ldots$ remplace des termes qui sont infiniment petits au moins du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Considérons maintenant l'expression

$$\psi = \rho_0 \int \left[\left(\frac{\partial\theta'}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta'}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta'}{\partial c}\right)^2 \right] d\varpi. \tag{60}$$

Nous aurons

$$\frac{d\psi}{dt} = 2\rho_0 \int \left(\frac{\partial\theta'}{\partial a}\frac{\partial\theta''}{\partial a} + \frac{\partial\theta'}{\partial b}\frac{\partial\theta''}{\partial b} + \frac{\partial\theta'}{\partial c}\frac{\partial\theta''}{\partial c} \right) d\varpi,$$

ce que l'égalité (53) permet d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} = {} & 2(\Lambda + 2\mathrm{M}) \int \left(\frac{\partial\theta'}{\partial a}\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a} + \frac{\partial\theta'}{\partial b}\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b} + \frac{\partial\theta'}{\partial c}\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + 2(\lambda + 2\mu) \int \left(\frac{\partial\theta'}{\partial a}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a} + \frac{\partial\theta'}{\partial b}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b} + \frac{\partial\theta'}{\partial c}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{61}$$

le signe $+\ldots$ désignant des termes qui sont infiniment petits du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

D'ailleurs, l'égalité (61) peut encore s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} = {} & -2(\Lambda + 2\mathrm{M}) \int \Delta\theta\, \Delta\theta'\, d\varpi - 2(\lambda + 2\mu) \int (\Delta\theta')^2\, d\varpi \\ & - 2(\Lambda + 2\mathrm{M}) \int \Delta\theta \frac{\partial\theta'}{\partial n_i}\, d\Sigma - 2(\lambda + 2\mu) \int \Delta\theta' \frac{\partial\theta'}{\partial n_i}\, d\Sigma \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{62}$$

Si l'on fait croître au delà de toute limite tous les rayons vecteurs de la surface Σ, cette formule se réduit à

$$\frac{d\psi}{dt} = -2(\Lambda + 2\mathrm{M}) \int \Delta\theta\, \Delta\theta'\, d\varpi - 2(\lambda + 2\mu) \int (\Delta\theta')^2\, d\varpi + \ldots. \tag{63}$$

Revenons à la formule générale (61); elle donne

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{dt^2} = {} & 2(\Lambda + 2\mathrm{M}) \int \left(\frac{\partial\theta'}{\partial a}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a} + \frac{\partial\theta'}{\partial b}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b} + \frac{\partial\theta'}{\partial c}\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + 2(\Lambda + 2\mathrm{M}) \int \left(\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a}\frac{\partial\theta''}{\partial a} + \frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b}\frac{\partial\theta''}{\partial b} + \frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c}\frac{\partial\theta''}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + 2(\lambda + 2\mu) \int \left(\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\frac{\partial\theta''}{\partial a} + \frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}\frac{\partial\theta''}{\partial b} + \frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\frac{\partial\theta''}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + 2(\lambda + 2\mu) \int \left(\frac{\partial\theta'}{\partial a}\frac{\partial\,\Delta\theta''}{\partial a} + \frac{\partial\theta'}{\partial b}\frac{\partial\,\Delta\theta''}{\partial b} + \frac{\partial\theta'}{\partial c}\frac{\partial\,\Delta\theta''}{\partial c} \right) d\varpi \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

L'égalité (53) transforme cette dernière égalité en

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\psi}{dt^2} = {} & 2(\Lambda + 2\mathrm{M})\int\left(\frac{\partial\theta'}{\partial a}\,\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a} + \frac{\partial\theta'}{\partial b}\,\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b} + \frac{\partial\theta'}{\partial c}\,\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right)d\varpi \\
& + \frac{2}{\rho_0}\int\left\{\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right]^2\right. \\
& \qquad + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}\right]^2 \\
& \qquad + \left.\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right]^2\right\}d\varpi \\
& + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\rho_0}\int\left\{\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial a}\,\Delta\,\Delta\theta + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial a}\,\Delta\,\Delta\theta'\right]\frac{\partial\theta'}{\partial a}\right. \\
& \qquad + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial b}{\partial}\,\Delta\,\Delta\theta + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial b}\,\Delta\,\Delta\theta'\right]\frac{\partial\theta'}{\partial b} \\
& \qquad + \left.\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial c}\,\Delta\,\Delta\theta + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial c}\,\Delta\,\Delta\theta'\right]\frac{\partial\theta'}{\partial c}\right\}d\varpi
\end{aligned}$$

. . . .

Cette égalité, à son tour, peut s'écrire

$$\begin{aligned}
(64)\quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = {} & -2(\Lambda + 2\mathrm{M})\int(\Delta\theta')^2\,d\varpi - 2(\Lambda + 2\mathrm{M})\int\Delta\theta'\,\frac{\partial\theta'}{\partial n_i}\,d\Sigma \\
& + \frac{2}{\rho_0}\int\left\{\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right]^2\right. \\
& \qquad + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}\right]^2 \\
& \qquad + \left.\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right]^2\right\}d\varpi \\
& + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\rho_0}\int\left\{\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right]\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right. \\
& \qquad + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}\right]\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b} \\
& \qquad + \left.\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right]\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right\}d\varpi \\
& + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\rho_0}\int\left\{\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right]\frac{\partial}{\partial n_i}\,\frac{\partial\theta'}{\partial a}\right. \\
& \qquad + \left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}\right]\frac{\partial}{\partial n_i}\,\frac{\partial\theta'}{\partial b} \\
& \qquad + \left.\left[(\Lambda + 2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right]\frac{\partial}{\partial n_i}\,\frac{\partial\theta'}{\partial c}\right\}d\Sigma
\end{aligned}$$

$$+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho_0}\int\left\{\frac{\partial\theta'}{\partial a}\frac{\partial}{\partial n_i}\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right]\right.$$
$$+\frac{\partial\theta'}{\partial b}\frac{\partial}{\partial n_i}\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}\right]$$
$$\left.+\frac{\partial\theta'}{\partial c}\frac{\partial}{\partial n_i}\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right]\right\}d\Sigma$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on fait croître au delà de toute limite tous les rayons vecteurs de la surface Σ, cette formule se simplifie et devient

$$(65)\quad \frac{d^2\psi}{dt^2}=-2(\Lambda+2\mathrm{M})\int(\Delta\theta')^2\,d\varpi$$
$$+\frac{2}{\rho_0}\int\left\{\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right]^2\right.$$
$$+\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}\right]^2$$
$$\left.+\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right]^2\right\}d\varpi$$
$$+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho_0}\int\left\{\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right]\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right.$$
$$+\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}\right]\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}$$
$$\left.+\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right]\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right\}d\varpi$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans les égalités (64) et (65), le signe $+\ldots$ représente des termes qui sont infiniment petits du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Considérons maintenant l'expression, analogue à l'expression (55),

$$(66)\qquad \mathrm{P}=\mathrm{M}\int\int\int[(\Delta\omega_1)^2+(\Delta\omega_2)^2+(\Delta\omega_3)^2]\,da\,db\,dc,$$

que, par abréviation, nous écrirons

$$(67)\qquad \mathrm{P}=\mathrm{M}\sum\int(\Delta\omega)^2\,d\varpi.$$

De cette égalité (67) nous tirerons

$$(68)\qquad \frac{dP}{dt} = 2M\sum\int \Delta\omega\,\Delta\omega'\,d\varpi.$$

Raisonnant ensuite comme nous l'avons fait pour tirer l'égalité (59) de l'égalité (56), mais en substituant dans nos déductions les égalités (54) à l'égalité (53), nous trouverons que l'on a, pour un milieu indéfini,

$$(69)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2P}{dt^2} &= 2M\sum\int(\Delta\omega')^2\,d\varpi \\ &- \frac{2M^2}{\rho_0}\sum\int\left[\left(\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial c}\right)^2\right]d\varpi \\ &- \frac{2M\mu}{\rho_0}\sum\int\left(\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial a}\,\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial a} + \frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial b}\,\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial b} + \frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial c}\,\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial c}\right)d\varpi \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dans cette égalité, le signe $+\ldots$ désigne des termes qui sont infiniment petits au moins du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ sont, partout, infiniment petits.

Considérons enfin l'expression, analogue à l'expression (60),

$$(70)\qquad p = \rho_0\sum\int\left[\left(\frac{\partial\omega'}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega'}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega'}{\partial c}\right)^2\right]d\varpi.$$

Raisonnons comme nous l'avons fait pour tirer l'égalité (63) de l'égalité (60), mais en faisant usage des égalités (54) au lieu de l'égalité (53); nous trouverons que l'on a, pour un milieu indéfini,

$$(71)\qquad \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -2M\sum\int\Delta\omega\,\Delta\omega'\,d\varpi - 2\mu\sum\int(\Delta\omega')^2\,d\varpi, \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$+\ldots$ désignant encore des termes infiniment petits du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

En raisonnant comme nous l'avons fait pour obtenir la formule (65), nous trouverons que l'on a, pour un milieu indéfini,

$$
\begin{aligned}
(72) \qquad \frac{d^2p}{dt^2} = &- 2\mathrm{M}\sum\int(\Delta\omega')^2\,d\varpi \\
&+ \frac{2}{\rho_0}\sum\int\Big[\left(\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial a} + \mu\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial a}\right)^2 \\
&\qquad + \left(\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial b} + \mu\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial b}\right)^2 \\
&\qquad + \left(\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial c} + \mu\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial c}\right)^2\Big]\,d\varpi \\
&+ \frac{2\mu}{\rho_0}\sum\int\Big[\left(\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial a} + \mu\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial a}\right)\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial a} \\
&\qquad + \left(\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial b} + \mu\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial b}\right)\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial b} \\
&\qquad + \left(\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial c} + \mu\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial c}\right)\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial c}\Big]\,d\varpi \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

$+\ldots$ désignant toujours des termes infiniment petits au moins du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont infiniment petits

Ces diverses formules vont nous permettre d'établir plusieurs propositions touchant la stabilité des milieux vitreux.

IV. — D'une autre condition nécessaire pour la stabilité d'un milieu vitreux illimité [1].

La première proposition que nous démontrerons est la suivante :

Considérons un milieu vitreux indéfini dont les régions infiniment éloignées sont maintenues immobiles. L'état initial de ce milieu ne pourrait sûrement pas être un état d'équilibre stable si l'on avait à la fois les

---

[1] *Considérations sur la stabilité et, particulièrement, sur la stabilité des corps élastiques* (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, Séance du 25 juin 1903). — *D'une condition nécessaire pour la stabilité d'un milieu vitreux illimité* (*Comptes rendus*, t. CXXXVIII, p. 541, séance du 29 février 1904).

deux inégalités

$$(73)\qquad \Lambda + 2M < 0, \qquad M < 0.$$

Cette proposition est vraie que le milieu soit dénué de viscosité ou doué de viscosité; elle demeurerait vraie si les actions de viscosité étaient des puissances actives au lieu d'être des résistances passives.

Cette proposition nous donne des renseignements plus complets que la proposition démontrée pour les milieux vitreux à la fin du paragraphe II. En effet, si les inégalités (52) entraînent les inégalités (73), les inégalités (73), au contraire, pourraient fort bien être vérifiées sans que $(3\Lambda + 2M)$ fût négatif. Il est vrai que la proposition démontrée à la fin du paragraphe II s'applique à un milieu limité par une surface immobile quelconque, tandis que celle-ci suppose le milieu illimité en tout sens.

Pour démontrer cette proposition, considérons la fonction

$$(74)\qquad U = -\Psi + \psi - P + p.$$

En vertu des égalités (55), (60), (66) et (70), et des inégalités (73), cette grandeur ne pourra jamais être négative. Si l'on impose aux valeurs absolues de θ, θ', ω_1, ω_2, ω_3, ω'_1, ω'_2, ω'_3, des limites supérieures convenables, U sera sûrement inférieur à une quantité positive quelconque A, donnée d'avance. Si donc l'état initial du système était stable, on pourrait sûrement aux valeurs absolues initiales de ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' imposer des limites supérieures telles que U n'atteigne la valeur A pour aucune valeur de t.

Les égalités (56), (63), (68), (71) et (74) permettent d'écrire

$$(75)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial U}{dt} = &- 4(\Lambda + 2M)\int \Delta\theta\, \Delta\theta'\, d\varpi - 4M \sum \int \Delta\omega\, \Delta\omega'\, d\varpi \\ &- 2(\lambda + 2\mu)\int (\Delta\theta')^2\, d\varpi - 2\mu \sum \int (\Delta\omega')^2\, d\varpi \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

$+\ldots$ désignant des quantités qui sont infiniment petites au moins du troisième ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

Les égalités (59), (65), (69), (72) et (74) donnent, à leur tour,

$$
(76)\quad \begin{aligned}
\frac{d^2\mathrm{U}}{dt^2} = &-4(\Lambda + 2\,\mathrm{M})\int(\Delta\theta')^2\,d\varpi \\
&+\frac{4}{\rho_0}\int\Big\{\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}\right]^2 \\
&\qquad+\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}\right]^2 \\
&\qquad+\left[(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}\right]^2\Big\}\,d\varpi \\
&-4\mathrm{M}\sum\int(\Delta\omega')^2\,d\varpi \\
&+\frac{4}{\rho_0}\sum\int\Big[\left(\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial a}+\mu\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial a}\right)^2 \\
&\qquad+\left(\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial b}+\mu\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial b}\right)^2 \\
&\qquad+\left(\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\omega}{\partial c}+\mu\frac{\partial\,\Delta\omega'}{\partial c}\right)^2\Big]\,d\varpi \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Le signe $+\ldots$ désigne toujours des infiniment petits d'ordre supérieur par rapport à ξ, η, ζ, ξ', η', ζ'.

Peut-il arriver que le terme explicitement écrit au second membre de l'égalité (76) soit nul? Pour cela, en vertu des inégalités (73), il faut et il suffit que l'on ait, quels que soient a, b, c :

$$(77)\qquad \Delta\theta' = 0,$$

$$
(78)\qquad \left\{\begin{aligned}
&(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial a}=0,\\
&(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial b}=0,\\
&(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{\partial\Delta\,\theta}{\partial c}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\,\Delta\theta'}{\partial c}=0,
\end{aligned}\right.
$$

$$(79)\qquad \Delta\omega'_1=0,\qquad \Delta\omega'_2=0,\qquad \Delta\omega'_3=0,$$

$$
(80)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\omega_i}{\partial a}+\mu\frac{\partial\,\Delta\omega'_i}{\partial a}=0,\\
&\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\omega_i}{\partial b}+\mu\frac{\partial\,\Delta\omega'_i}{\partial b}=0,\\
&\mathrm{M}\frac{\partial\,\Delta\omega_i}{\partial c}+\mu\frac{\partial\,\Delta\omega'_i}{\partial c}=0,\\
&\qquad (i=1,\ 2,\ 3).
\end{aligned}\right.
$$

En vertu de l'égalité (77) et de la première inégalité (73), les égalités (78) deviennent

$$\frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial a}=0,\qquad \frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial b}=0,\qquad \frac{\partial\,\Delta\theta}{\partial c}=0$$

et, comme $\Delta\theta$ est nul à l'infini,

$$\Delta\theta=0. \tag{81}$$

De même, en vertu des égalités (79) et de la seconde inégalité (73), les égalités (80) deviennent

$$\frac{\partial\,\Delta\omega_i}{\partial a}=0,\qquad \frac{\partial\,\Delta\omega_i}{\partial b}=0,\qquad \frac{\partial\,\Delta\omega_i}{\partial c}=0$$

et, comme $\Delta\omega_i$ est nul à l'infini,

$$\Delta\omega_1=0,\qquad \Delta\omega_2=0,\qquad \Delta\omega_3=0. \tag{82}$$

Les quantités

$$\begin{array}{cccc} \theta, & \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, \\ \theta', & \omega'_1, & \omega'_2, & \omega'_3 \end{array}$$

doivent, dans tout l'espace, vérifier les équations (81), (82), (77) et (79); elles doivent, en outre, s'annuler à l'infini; cela exige que l'on ait, dans tout l'espace,

$$\omega_1=0,\qquad \omega_2=0,\qquad \omega_3=0, \tag{83}$$

$$\theta=0, \tag{84}$$

$$\omega'_1=0,\qquad \omega'_2=0,\qquad \omega'_3=0, \tag{85}$$

$$\theta'=0. \tag{86}$$

Les égalités (83) et (85), jointes aux trois dernières égalités (52), montrent qu'il existe deux fonctions $F(a, b, c)$, $F'(a, b, c)$, finies continues et uniformes dans tout l'espace, telles que l'on ait

$$\left\{\begin{array}{lll} \xi=-\dfrac{\partial F}{\partial a}, & \eta=-\dfrac{\partial F}{\partial b}, & \zeta=-\dfrac{\partial F}{\partial c}, \\ \xi'=-\dfrac{\partial F'}{\partial a}, & \eta'=-\dfrac{\partial F'}{\partial b}, & \zeta'=-\dfrac{\partial F'}{\partial c}. \end{array}\right. \tag{87}$$

Les égalités (84), (86), (87), jointes à la première égalité (55), exigent que l'on ait, dans tout l'espace,

$$\Delta F = 0, \qquad \Delta F' = 0.$$

F et F' sont donc de simples constantes et les égalités (87) deviennent

$$\begin{aligned} &\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0, \\ &\xi' = 0, \qquad \eta' = 0, \qquad \zeta' = 0. \end{aligned}$$

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le terme explicitement écrit au second membre de l'égalité (76) devienne égal à o.

Hors ces conditions, ce terme est essentiellement positif; il est infiniment petit du second ordre lorsque ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont, partout, infiniment petits.

On voit donc que, tant que les valeurs absolues de ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' et de leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c ne surpasseront pas certaines limites, $\frac{d^2 U}{dt^2}$ aura sûrement le signe de son premier terme et sera positif; si l'équilibre initial du système était stable, on pourrait limiter supérieurement les valeurs absolues initiales de ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' et de leurs dérivées partielles du premier ordre en a, b, c, de telle sorte que $\frac{d^2 U}{dt^2}$ ne puisse devenir négatif pour aucune valeur de t.

Considérons, d'autre part, la valeur prise, à l'instant $t = 0$, par la quantité $\frac{dU}{dt}$ qu'exprime l'égalité (11).

Posons, à cet instant $t = 0$,

$$\xi'_0 = K^2 \xi_0, \qquad \eta'_0 = K^2 \eta_0, \qquad \zeta'_0 = K^2 \zeta_0.$$

L'égalité (75) nous donne alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = &- 4K^2(\Lambda + 2M)\int (\Delta\theta_0)^2 \, d\varpi - 4K^2 M \sum \int (\Delta\omega_0)^2 \, d\varpi \\ &- 2K^4(\lambda + 2\mu)\int (\Delta\theta_0)^2 \, d\varpi - 2K^4 \mu \sum \int (\Delta\omega_0)^2 \, d\varpi \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Visiblement, nous pourrons prendre pour K^2, ξ_0, η_0, ζ_0 et pour les dérivées partielles en a, b, c de ξ_0, η_0, ζ_0, des valeurs assez petites pour que $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ ait le signe des termes qui, au second membre, occupent la première ligne, et ces termes sont positifs.

Si donc l'état initial du système était un état d'équilibre stable, nous pourrions disposer des valeurs initiales de ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' de telle sorte que les trois conditions suivantes fussent sûrement remplies :

1° U ne surpasserait pour aucune valeur de t une quantité positive A, arbitrairement donnée d'avance;

2° La valeur initiale de $\frac{dU}{dt}$ serait positive;

3° $\frac{d^2U}{dt^2}$ ne serait négatif pour aucune valeur de t.

Les deux dernières conditions contredisent la première; le théorème énoncé est donc démontré.

V. — Le postulat des petits mouvements.

Les démonstrations précédentes ont la rigueur introduite dans les questions de ce genre par M. Liapounoff et par M. Hadamard. Nous allons obtenir d'autres propositions par des démonstrations un peu moins rigoureuses en ce qu'elles impliquent un postulat que nous avons déjà invoqué dans l'étude de la stabilité des fluides (1). Commençons par énoncer avec précision ce postulat, que nous nommerons le *postulat des petits mouvements*.

Considérons un milieu isotrope, dont une partie de la surface est maintenue immobile, tandis que le reste de la surface supporte une pression normale, uniforme et constante. Donnons à ce milieu un mouvement; à l'instant t, le point matériel dont les coordonnées initiales sont a, b, c, aura pour coordonnées

$$x = a + \xi(a, b, c, t), \qquad y = b + \eta(a, b, c, t), \qquad z = c + \zeta(a, b, c, t).$$

(1) *Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. IX, p. 233; 1903).

Supposons que les valeurs absolues de ξ, η, ζ admettent, quel que soit t, une limite supérieure A

$$(88)\qquad |\xi| \leqq A, \qquad |\eta| \leqq A, \qquad |\zeta| \leqq A$$

et que l'on ait de même, quel que soit t,

$$(88\ bis)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \left|\dfrac{d\xi}{\partial a}\right| \leqq rA, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \left|\dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\right| \leqq rA, \\ \left|\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\right| \leqq r'A, & \left|\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\right| \leqq r'A, & \left|\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\right| \leqq r'A, \\ \left|\dfrac{\partial^2\xi}{\partial a^2}\right| \leqq r''A, & \left|\dfrac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial b}\right| \leqq r''A, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \left|\dfrac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial t}\right| \leqq r'''A, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \left|\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial c\,\partial t}\right| \leqq r'''A, \\ \left|\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right| \leqq r^{\text{IV}}A, & \left|\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right| \leqq r^{\text{IV}}A, & \left|\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right| \leqq r^{\text{IV}}A, \end{array}\right.$$

r, r', r'', r''', r^{IV}, étant des constantes positives données une fois pour toutes.

Reportons-nous à ce qui a été dit au paragraphe I, et nous voyons que, toutes les fois que A est suffisamment petit, ξ, η, ζ, nuls en tout point de la partie de la surface terminale qui est maintenue immobile, vérifient les équations (34) en tout point (a, b, c) du milieu et les équations (35) en tout point de la partie de la surface terminale qui supporte une pression invariable. Dans ces équations, le symbole $+\ldots$ remplace des termes qui sont infiniment petits au moins de l'ordre de A^2.

Cette proposition n'est point douteuse; elle est le fondement des considérations développées aux paragraphes II et IV. Voici maintenant la proposition très voisine que nous lui substituons :

Si A est inférieur à une certaine limite, on a, quel que soit t,

$$(89)\qquad \xi = u + lA^2, \qquad \eta = v + mA^2, \qquad \zeta = w + nA^2,$$

l, m, n étant trois quantités qui, quels que soient a, b, c, t, et quelque petit que soit A, ne surpassent pas en valeur absolue une certaine grandeur positive fixe F; dont, en outre, les dérivées partielles du premier et du second ordre en a, b, c, t admettent également des limites supérieures fixes.

Dans les égalités (89), u, v, w sont trois fonctions de a, b, c, t, définies de la manière suivante :

1° Pour toutes valeurs de a, b, c, t, on a

$$(90)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)+\mathrm{M}\,\Delta u\\
&+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta u-\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\\
&(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)+\mathrm{M}\,\Delta v\\
&+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial b\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta v-\rho_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0,\\
&(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)+\mathrm{M}\,\Delta w\\
&+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial c\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta w-\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.
\end{aligned}\right.$$

2° En tout point de la partie maintenue immobile de la surface limite, on a

$$(91)\qquad u=0,\qquad v=0,\qquad w=0.$$

3° En tout point de la partie de la surface limite qui supporte une pression invariable, on a

$$(92)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left[\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)+2\mathrm{M}\frac{\partial u}{\partial a}\right]\alpha+\mathrm{M}\left(\frac{\partial u}{\partial b}+\frac{\partial v}{\partial a}\right)\beta+\mathrm{M}\left(\frac{\partial w}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial c}\right)\gamma\\
&+\left[\lambda\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)+2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial a\,\partial t}\right]\alpha+\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial b}+\frac{\partial v}{\partial a}\right)\beta+\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial c}\right)\gamma=\\
&\mathrm{M}\left(\frac{\partial u}{\partial b}+\frac{\partial v}{\partial a}\right)\alpha+\left[\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)+2\mathrm{M}\frac{\partial v}{\partial b}\right]\beta+\mathrm{M}\left(\frac{\partial v}{\partial c}+\frac{\partial w}{\partial b}\right)\gamma\\
&+\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial b}+\frac{\partial v}{\partial a}\right)\alpha+\left[\lambda\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)+2\mu\frac{\partial^2 v}{\partial b\,\partial t}\right]\beta+\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial c}+\frac{\partial w}{\partial b}\right)\gamma=\\
&\mathrm{M}\left(\frac{\partial w}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial c}\right)\alpha+\mathrm{M}\left(\frac{\partial v}{\partial c}+\frac{\partial w}{\partial b}\right)\beta+\left[\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)+2\mathrm{M}\frac{\partial w}{\partial c}\right]\gamma\\
&+\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial c}\right)\alpha+\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial c}+\frac{\partial w}{\partial b}\right)\beta+\left[\lambda\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)+2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial c\,\partial t}\right]\gamma=
\end{aligned}\right.$$

4° A l'instant $t = 0$, on a, quels que soient a, b, c,

$$(93)\quad \left\{\begin{array}{lll} u = \xi, & v = \eta, & w = \zeta, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial \xi}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial \eta}{\partial t}, & \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}. \end{array}\right.$$

Les équations (90) et (92), qui doivent déterminer u, v, w, ne diffèrent des équations (34) et (35), que doivent vérifier ξ, η, ζ, que par la suppression des termes représentés par $+\ldots$, lesquels sont infiniment petits par rapport aux termes explicitement écrits.

Mais, bien que les équations qui déterminent ξ, η, ζ diffèrent infiniment peu de celles qui déterminent u, v, w, bien que ces quantités et leurs dérivées par rapport à t soient identiques à l'instant initial, il n'est nullement prouvé que les quantités $(\xi - u)$, $(\eta - v)$, $(\zeta - w)$ soient toujours infiniment petites du second ordre. *De ce que deux systèmes d'équations aux dérivées partielles diffèrent infiniment peu l'un de l'autre, on ne saurait conclure que leurs intégrales correspondant aux mêmes conditions initiales, diffèrent infiniment peu.*

Donc, en écrivant les égalités (89), nous admettons implicitement l'exactitude d'un postulat non démontré.

Néanmoins, comme, dans une foule de questions du même genre, les plus grands géomètres ont fait usage de ce postulat, nous allons en user à notre tour au numéro suivant.

VI. — Modifications [1] que le postulat des petits mouvements permet d'apporter aux propositions démontrées au n° I.

Le postulat des petits mouvements permet, tout d'abord, de rendre un peu plus complètes les propositions énoncées et démontrées au n° I.

Il permet, en premier lieu, d'*étendre le théorème que nous avons for-*

---

[1] *Sur les conditions nécessaires pour la stabilité initiale d'un milieu vitreux* (*Procès-verbaux de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 2 avril 1903).

mulé pour tous les milieux vitreux ou cristallisés au cas où la surface qui limite le milieu étudié, au lieu d'être entièrement fixe, serait en partie déformable et soumise, dans sa partie déformable, à une pression invariable.

Il permet, en second lieu, d'apporter un autre complément au corollaire, relatif aux milieux vitreux, que nous avions tiré de ce théorème; ce corollaire, ainsi complété à deux reprises, se formulera de la manière suivante :

Si l'on a, en un milieu vitreux, les deux conditions

$$\left\{\begin{array}{r} 3\Lambda + 2\mathrm{M} \leqq 0, \\ \mathrm{M} \leqq 0, \end{array}\right. \tag{94}$$

dont l'une au moins ne se réduit pas à une égalité, le milieu ne peut demeurer en équilibre stable lorsque les diverses parties de sa surface terminale sont ou maintenues immobiles, ou soumises à une pression invariable.

Nous nous contenterons de démontrer cette dernière proposition, laissant au lecteur le soin, d'ailleurs aisé, d'établir la première.

Posons, en effet,

$$\left\{\begin{array}{lll} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial u}{\partial a}, & \varepsilon_2 = \dfrac{\partial v}{\partial b}, & \varepsilon_3 = \dfrac{\partial w}{\partial c}, \\ \gamma_1 = \dfrac{\partial w}{\partial b} + \dfrac{\partial v}{\partial c}, & \gamma_2 = \dfrac{\partial u}{\partial c} + \dfrac{\partial w}{\partial a}, & \gamma_3 = \dfrac{\partial v}{\partial b} + \dfrac{\partial u}{\partial a} \end{array}\right. \tag{95}$$

et considérons l'expression

$$\begin{aligned} \mathrm{U} = -\frac{1}{6}\int\!\!\int\!\!\int \big\{ & (3\Lambda + 2\mathrm{M})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \\ & + 2\mathrm{M}[(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2 + 3\gamma_3^2]\big\}\, da\, db\, dc \\ + \frac{1}{2}\rho_0 \int\!\!\int\!\!\int & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] da\, db\, dc \end{aligned} \tag{96}$$

que l'on peut aussi écrire, en posant $d\varpi = da\,db\,dc$,

$$(97)\qquad \begin{aligned} U = -\frac{1}{2}\int \Big[& A(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 \\ & + M(2\varepsilon_1^2+2\varepsilon_2^2+2\varepsilon_3^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2)\Big]\, d\varpi \\ & + \frac{1}{2}\rho_0 \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi. \end{aligned}$$

L'égalité (66) nous montre que, lorsque les conditions (94) sont vérifiées, U ne peut jamais être négatif.

Les conditions (88), (88 *bis*) et (89) nous montrent ensuite que, si la grandeur A dont dépendent les limites imposées aux valeurs absolues de ξ, η, ζ et de leurs dérivées partielles est suffisamment petite, U demeurera sûrement inférieur à une limite positive arbitrairement fixée d'avance V.

Enfin, si l'état initial du système est stable, on pourra, aux valeurs absolues initiales de

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \frac{\partial \xi}{\partial t},\quad \frac{\partial \eta}{\partial t},\quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

qui, selon les égalités (93), sont les mêmes que les valeurs absolues initiales de

$$u,\quad v,\quad w,\quad \frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{\partial v}{\partial t},\quad \frac{\partial w}{\partial t},$$

imposer des limites supérieures telles que A soit aussi petit que l'on voudra, partant que U demeure, quel que soit t, inférieur à V.

L'égalité (96) nous donne

$$(98)\quad \begin{aligned} \frac{dU}{dt} = -\frac{1}{3}\int \Big\{ & (3A+2M)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right) \\ & + 2M\Big[(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}-\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right)+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)\left(\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}-\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}\right)+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}-\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}\right) \\ & + 3\gamma_1\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}+3\gamma_2\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}+3\gamma_3\frac{\partial \gamma_3}{\partial t}\Big]\Big\}\, d\varpi \\ & + \rho_0\int\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) d\varpi. \end{aligned}$$

Mais, selon les égalités (90) et (95),

$$
(99)\quad \rho_0\int\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)d\varpi
$$

$$
\begin{aligned}
= \int\Big\{ & \Big[(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial a}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mathrm{M}\,\Delta u \\
& +(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta u\Big]\frac{\partial u}{\partial t} \\
& +\Big[(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial b}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mathrm{M}\,\Delta v \\
& +(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial b\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta v\Big]\frac{\partial v}{\partial t} \\
& +\Big[(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial c}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mathrm{M}\,\Delta w \\
& +(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial c\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta w\Big]\frac{\partial w}{\partial t}\Big\}\,d\varpi \\
= -\int\Big\{ & [\Lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\mathrm{M}\varepsilon_1]\,\alpha+\mathrm{M}\,\gamma_3\,\beta+\mathrm{M}\,\gamma_2\,\gamma \\
& +\left[\gamma\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\mu\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}\right]\alpha+\mu\frac{\partial\gamma_3}{\partial t}\beta+\mu\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}\gamma\Big\}\,dS \\
& -\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-\frac{1}{3}\int\Big\{ & (3\Lambda+2\mathrm{M})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\right) \\
& +2\mathrm{M}\Big[(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\right)+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)\left(\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}\right)+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}\right) \\
& \qquad +3\gamma_1\frac{\partial\gamma_1}{\partial t}+3\gamma_2\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}+3\gamma_3\frac{\partial\gamma_3}{\partial t}\Big]\Big\}\,d\varpi \\
-\frac{1}{3}\int\Big\{ & (3\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\right)^2 \\
& +2\mu\Big[\left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}\right)^2 \\
& \qquad +3\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial t}\right)^2+3\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}\right)^2+3\left(\frac{\partial\gamma_3}{\partial t}\right)^2\Big]\Big\}\,d\varpi.
\end{aligned}
$$

Au dernier membre, la ligne de points remplace deux intégrales analogues à celle qui précède cette ligne.

Or, ces trois intégrales étendues à la surface que limite le milieu sont séparément nulles; en effet, ou bien l'élément dS appartient à la partie immobile de cette surface; alors u, v, w y sont, selon (91), nuls quel que soit t, ce qui donne

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = 0;$$

ou bien l'élément dS appartient à la partie déformable de la surface S; alors les égalités (92) y sont vérifiées. En toute circonstance, les égalités (98) et (99) nous donnent

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} = -\frac{2}{3}\int \Big\{ & (3\Lambda + 2M)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right) \\
& + 2M\Big[(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right) + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\left(\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}\right) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}\right) \\
& \qquad + 3\gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + 3\gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + 3\gamma_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial t}\Big]\Big\}\, d \\
-\frac{1}{3}\int \Big\{ & (3\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right)^2 \\
& + 2\mu\Big[\left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}\right)^2 \\
& \qquad + 3\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial \gamma_3}{\partial t}\right)^2\Big]\Big\}\, d\varpi.
\end{aligned}$$

Formons maintenant $\dfrac{d^2 U}{dt^2}$.

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 U}{dt^2} = -\frac{2}{3}\int \Big\{ & (3\Lambda + 2M)\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right)^2 \\
& + 2M\Big[\left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}\right)^2 \\
& \qquad + 3\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial \gamma_3}{\partial t}\right)^2\Big]\Big\}\, d \\
-2\int \Big\{ & \left[\Lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2M\varepsilon_1 + \lambda\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right) + 2\mu\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}\right]\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial t^2} \\
& + \left[\Lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2M\varepsilon_2 + \lambda\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right) + 2\mu\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}\right]\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial t^2} \\
& + \left[\Lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2M\varepsilon_3 + \lambda\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right) + 2\mu\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}\right]\frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial t^2} \\
& + \left(M\gamma_1 + \mu\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2} + \left(M\gamma_2 + \mu\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2} + \left(M\gamma_3 + \mu\frac{\partial \gamma_3}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial t^2}\Big\}\, d\varpi.
\end{aligned}$$

La seconde intégrale peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
2\int\Big\{&\Big[\Lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\mathrm{M}\varepsilon_1+\lambda\Big(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\Big)+2\mu\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}\Big]\alpha\\
&+\Big(\mathrm{M}\gamma_3+\mu\frac{\partial\gamma_3}{\partial t}\Big)\beta+\Big(\mathrm{M}\gamma_2+\mu\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}\Big)\gamma\Big\}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,d\mathrm{S}\\
+2\int\Big\{&\Big[\Lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\mathrm{M}\varepsilon_2+\lambda\Big(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\Big)+2\mu\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}\Big]\beta\\
&+\Big(\mathrm{M}\gamma_1+\mu\frac{\partial\gamma_1}{\partial t}\Big)\gamma+\Big(\mathrm{M}\gamma_3+\mu\frac{\partial\gamma_3}{\partial t}\Big)\alpha\Big\}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,d\mathrm{S}\\
+2\int\Big\{&\Big[\Lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\mathrm{M}\varepsilon_3+\lambda\Big(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\Big)+2\mu\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\Big]\gamma\\
&+\Big(\mathrm{M}\gamma_2+\mu\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}\Big)\alpha+\Big(\mathrm{M}\gamma_1+\mu\frac{\partial\gamma_1}{\partial t}\Big)\beta\Big\}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,d\mathrm{S}\\
+2\int\Big\{&\Big[(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial a}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mathrm{M}\Delta u+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta u\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&+\Big[(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial b}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mathrm{M}\Delta v+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial b\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta v\Big]\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
&+\Big[(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial c}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mathrm{M}\Delta w+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial c\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta w\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big\}\,d\varpi.
\end{aligned}
$$

Dans cette expression, les trois premières intégrales sont nulles; en effet, ou bien l'élément $d\mathrm{S}$ est immobile, cas auquel u, v, w sont nuls, quel que soit t, ce qui donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0;$$

ou bien l'élément $d\mathrm{S}$ supporte une pression invariable, cas auquel les égalités (92) y sont vérifiées.

Quant à la dernière intégrale, on peut la transformer en y remplaçant u, v, w par leurs valeurs tirées des égalités (90). Finalement, l'égalité (101) devient

$$
\begin{aligned}
(102)\quad \frac{d^2\mathrm{U}}{dt^2}=-\frac{2}{3}\int\Big\{&(3\Lambda+2\mathrm{M})\Big(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_2}{dt}+\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\Big)\\
&+2\mathrm{M}\Big[\Big(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}\Big)^2\\
&+3\Big(\frac{\partial\gamma_1}{\partial t}\Big)^2+3\Big(\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}\Big)^2+3\Big(\frac{\partial\gamma_3}{\partial t}\Big)^2\Big]\Big\}\,d\varpi
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
+\frac{2}{\rho_0}\int\Big\{ & \Big[(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial a}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mathrm{M}\,\Delta u \\
& +(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta u\Big]^2 \\
& +\Big[(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial b}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mathrm{M}\,\Delta v \\
& +(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial b\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta v\Big]^2 \\
& +\Big[(\Lambda+\mathrm{M})\frac{\partial}{\partial c}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mathrm{M}\,\Delta w \\
& +(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial c\,\partial t}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta w\Big]^2\Big\}\,d\varpi.
\end{aligned}$$

A l'instant $t=0$, rien ne nous empêche d'associer aux valeurs que nous choisirons pour u, v, w des valeurs de $u'=\frac{\partial u}{\partial t}$, $v'=\frac{\partial v}{\partial t}$, $w'=\frac{\partial w}{\partial t}$ données par les formules

$$u'=\mathrm{K}^2 u,\qquad v'=\mathrm{K}^2 v,\qquad w'=\mathrm{K}^2 w,$$

K^2 étant un coefficient indépendant de x, y, z. Alors, au second membre de l'égalité (100), la première intégrale deviendra

$$\begin{aligned}
-\frac{2\mathrm{K}^2}{3}\int\big\{ & (3\Lambda+2\mathrm{M})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 \\
& +2\mathrm{M}[(\varepsilon_3-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2+3\gamma_1^2+3\gamma_2^2+3\gamma_3^2]\big\}\,d\varpi,
\end{aligned}$$

tandis que la seconde deviendra

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{K}^4}{3}\int\big\{ & (3\lambda+2\mu)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 \\
& +2\mu[(\varepsilon_3-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2+3\gamma_1^2+3\gamma_2^2+3\gamma_3^2]\big\}\,d\varpi.
\end{aligned}$$

En vertu des conditions (94), dont l'une au moins ne se réduit pas à une égalité, nous pouvons choisir u, v, w de telle sorte que leurs valeurs absolues ne franchissent pas les limites qui leur sont imposées et que la première des deux intégrales précédentes soit positive.

Nous pouvons ensuite choisir K^2 si petit que les valeurs absolues de u', v', w' deviennent inférieures aux limites qui leur sont imposées et que la seconde intégrale soit inférieure en valeur absolue à la première.

Dès lors, la valeur initiale de $\frac{dU}{dt}$ sera sûrement positive.

D'autre part, en vertu des conditions (94), $\frac{d^2U}{dt^2}$, qui est donné par l'égalité (102), n'est jamais négatif.

U croît donc au delà de toute limite avec t.

Cette conclusion, qui implique contradiction, démontre par l'absurde le théorème énoncé.

La proposition précédente a une application importante :

Pour un corps fluide, M est nul; nous voyons alors qu'un corps fluide où Λ serait négatif, serait en équilibre instable lorsque certaines parties de sa surface seraient maintenues immobiles, tandis que d'autres supporteraient une pression invariable. Par là se trouve étendue aux fluides visqueux une proposition démontrée ailleurs [1] pour les fluides exempts de viscosité.

VII. — Autre conséquence du postulat des petits mouvements : ni l'une ni l'autre des deux vitesses de propagation au sein d'un milieu isotrope ne peut être imaginaire [2].

Le postulat des petits mouvements nous permet d'apporter un complément important à la proposition que nous avons établie au paragraphe IV; nous pourrons, en effet, énoncer et démontrer le théorème que voici :

Considérons un milieu vitreux indéfini dont les régions infiniment éloignées sont maintenues immobiles. L'état initial de ce milieu ne pour-

---

(1) *Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides*, Chapitre III (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. IX, 1903, p. 233).

(2) *Sur les conditions nécessaires pour la stabilité initiale d'un milieu vitreux* (*Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 2 avril 1903).

rait sûrement pas être un état d'équilibre stable si l'on avait l'une ou l'autre des inégalités

$$\text{(103)} \qquad \Lambda + 2\mathrm{M} < 0,$$

$$\text{(104)} \qquad \mathrm{M} < 0.$$

Cette proposition est vraie que le milieu soit dénué de viscosité ou qu'il soit doué de viscosité ; elle demeurerait encore vraie si les actions de viscosité, au lieu d'être des résistances passives, étaient des puissances actives.

Dans le cas où le milieu est dénué de viscosité, cette proposition peut s'énoncer autrement ; si l'on se reporte aux expressions, données par les égalités (20) et (21), de la vitesse de propagation des vibrations longitudinales et de la vitesse de propagation des perturbations transversales, on peut la formuler ainsi : *L'équilibre initial du milieu serait sûrement instable si l'une ou l'autre des vitesses de propagation y était imaginaire.*

Supposons, en premier lieu, que l'on ait

$$\text{(103)} \qquad \Lambda + 2\mathrm{M} < 0.$$

Posons

$$\text{(105)} \qquad \Theta = \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c}.$$

En vertu des égalités (90), cette grandeur vérifiera, en tout point du milieu, l'équation aux dérivées partielles

$$\text{(106)} \qquad (\Lambda + 2\mathrm{M})\,\Delta\Theta + (\lambda + 2\mu)\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Delta\Theta - \rho_0\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} = 0.$$

Considérons l'expression

$$\text{(107)} \qquad \mathrm{U} = -(\Lambda + 2\mathrm{M})\int(\Delta\Theta)^2\,d\varpi + \rho_0\int\left[\left(\frac{\partial\Theta'}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta'}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta'}{\partial c}\right)^2\right]d\varpi,$$

où

$$\Theta' = \frac{\partial\Theta}{\partial t}, \qquad d\varpi = da\,db\,dc.$$

Des calculs tout semblables à ceux qui, des égalités (55) et (60), tirent les égalités (56) et (63), nous donneront

$$(108)\qquad \frac{dU}{dt} = -4(\Lambda + 2M)\int \Delta\Theta\,\Delta\Theta'\,d\varpi - 2(\lambda + 2\mu)\int (\Delta\Theta')^2\,d\varpi.$$

Puis, des calculs semblables à ceux qui ont fourni les égalités (59) et (65) nous permettront d'écrire

$$(109)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2U}{dt^2} = {} & 4(\Lambda + 2M)\int (\Delta\Theta')^2\,d\varpi \\ & + \frac{4}{\rho_0}\int \Bigg\{ \left[(\Lambda + 2M)\frac{\partial\,\Delta\Theta}{\partial a} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\Theta'}{\partial a}\right]^2 \\ & \qquad + \left[(\Lambda + 2M)\frac{\partial\,\Delta\Theta}{\partial b} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\Theta'}{\partial b}\right]^2 \\ & \qquad + \left[(\Lambda + 2M)\frac{\partial\,\Delta\Theta}{\partial c} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\,\Delta\Theta'}{\partial c}\right]^2 \Bigg\}\,d\varpi. \end{aligned}$$

Ces préliminaires posés, supposons que l'état d'équilibre initial du système soit un état d'équilibre stable. On pourrait visiblement imposer aux valeurs absolues initiales de

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial t},\quad \frac{\partial\eta}{\partial t},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial t},$$

qui sont les mêmes que les valeurs absolues initiales de

$$u,\quad v,\quad w,\quad \frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{\partial v}{\partial t},\quad \frac{\partial w}{\partial t},$$

des limites telles que U ne surpasse à aucun instant une certaine valeur positive donnée d'avance V.

D'autre part, nous pourrons toujours, à cet instant initial, prendre

$$\frac{\partial u}{\varphi t} = K^2 u,\qquad \frac{\partial v}{\partial t} = K^2 v,\qquad \frac{\partial w}{\partial t} = K^2 w,$$

K^2 étant une quantité indépendante de a, b, c. Nous aurons alors, selon l'égalité (108),

$$(110)\qquad \left(\frac{\partial U}{dt}\right)_0 = -4K^2(\Lambda + 2M)\int(\Delta\Theta_0)^2\,d\varpi \\ -2K^4(\lambda + 2\mu)\int(\Delta\Theta_0)^2\,d\varpi.$$

Nous pourrons toujours, sans que les valeurs absolues initiales de $u, v, w, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ transgressent les limites supérieures qui leur sont prescrites, faire en sorte que $\Delta\Theta_0$ ne soit pas nul dans tout l'espace et prendre, en outre, K^2 assez petit pour que le second membre de l'égalité (110) ait le signe de son premier terme, qui est positif selon l'inégalité (103).

$\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ serait alors sûrement positif; comme selon l'égalité (109), $\frac{d^2U}{dt^2}$ ne peut être nul à aucun moment, U croîtrait au delà de toute limite avec t et ne pourrait demeurer inférieur à V. La contradiction à laquelle nous aboutissons démontre le théorème énoncé.

Imaginons maintenant que l'on ait l'inégalité

$$(104)\qquad M < 0.$$

Posons, par exemple,

$$(111)\qquad \Omega_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Selon les égalités (90), nous aurons, en tout point du milieu et à tout instant,

$$(112)\qquad M\,\Delta\Omega_1 + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Omega_1 - \rho_0\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial t^2} = 0.$$

Considérons alors l'expression

$$(113)\qquad U = -M\int(\Delta\Omega_1)^2\,d\varpi + \rho_0\int\left[\left(\frac{\partial\Omega_1'}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega_1'}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega_1'}{\partial c}\right)^2\right]d\varpi,$$

où

$$\Omega'_1 = \frac{\partial \Omega_1}{\partial t}.$$

Des calculs semblables à ceux qui, des égalités (67) et (70), tirent les égalités (68) et (71) permettent d'écrire

$$(114) \qquad \frac{dU}{dt} = -4M\int \Delta\Omega_1\, \Delta\Omega'_1\, \partial\varpi - 2\mu \int (\Delta\Omega'_1)^2\, d\varpi.$$

Puis, de même qu'on a obtenu les égalités (69) et (72), on obtiendra l'égalité

$$(115) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2U}{dt^2} = & -4M\int (\Delta\Omega'_1)^2\, d\varpi \\ & + \frac{4}{\rho_0}\int\Bigg[\left(M\frac{\partial\,\Delta\Omega_1}{\partial a} + \mu\frac{\partial\,\Delta\Omega'_1}{\partial a}\right)^2 \\ & \qquad + \left(M\frac{\partial\,\Delta\Omega_1}{\partial b} + \mu\frac{\partial\,\Delta\Omega'_1}{\partial b}\right)^2 \\ & \qquad + \left(M\frac{\partial\,\Delta\Omega_1}{\partial c} + \mu\frac{\partial\,\Delta\Omega'_1}{\partial c}\right)^2\Bigg] d\varpi. \end{aligned}$$

En raisonnant sur les égalités (113), (114) et (115) comme nous avons raisonné sur les égalités (107), (108) et (109), nous prouverons que l'état d'équilibre initial d'un milieu indéfini où l'inégalité (104) est vérifiée ne saurait être un état d'équilibre stable.

CHAPITRE III.

LE DÉPLACEMENT DE L'ÉQUILIBRE.

I. — Du déplacement de l'équilibre en général.

Considérons d'abord un système défini par un certain nombre de variables normales $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, hors la température absolue T. Supposons qu'à une certaine température T, le système prenne un état d'équilibre lorsqu'on le soumet aux actions extérieures A, B, ..., L, et que cet état d'équilibre varie d'une manière continue lorsque, sans faire varier la température T, on fait varier les valeurs A, B, ..., L des actions extérieures. Si les actions A, B, ..., L éprouvent des variations infiniment petites $d\mathrm{A}, d\mathrm{B}, \ldots, d\mathrm{L}$, que nous nommerons des *actions perturbatrices*, les valeurs des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ qui conviennent à l'équilibre éprouvent des variations $d\alpha, d\beta, \ldots, d\lambda$, que nous nommerons des *perturbations;* l'expression

$$d\mathrm{A}\, d\alpha + d\mathrm{B}\, d\beta + \ldots + d\mathrm{L}\, d\lambda$$

sera nommée le *travail perturbateur isothermique*.

Dire qu'un travail perturbateur est positif, c'est dire, sous une forme mathématique précise, que la perturbation se produit dans le sens vers lequel tendent les actions perturbatrices. Il est clair que *les systèmes que la nature nous offre seront tels, en général, que tout travail perturbateur isothermique, accompli à partir d'un état d'équilibre, soit positif.* C'est ce que nous exprimerons en disant qu'ils sont soumis à la *loi du déplacement isothermique de l'équilibre*.

Soit $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathrm{T})$ le potentiel interne du système; pour que ce système soit soumis à la loi du déplacement isothermique de l'équilibre, il faut et il suffit [1] qu'à partir de l'état d'équilibre, toute

[1] *Traité élémentaire de Mécanique chimique fondée sur la Thermodynamique*, Livre I, Chapitre VIII (t. I, p. 137).

valeur de la variation seconde

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}(d\alpha)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2}(d\beta)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2}(d\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu\, \partial \nu}\, d\mu\, d\nu$$

soit essentiellement positive. Il en résulte, selon le criterium de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet, qu'*un état d'équilibre soumis à la loi du déplacement isothermique est assurément stable si l'on maintient invariables la température* T *et les actions extérieures* A, B, ..., L.

A cette loi du déplacement isothermique de l'équilibre se rattachent beaucoup d'autres considérations que nous avons développées ailleurs (1); nous serons amené ici à étendre quelques-unes de ces considérations aux milieux élastiques.

II. — Du déplacement isothermique de l'équilibre pour un milieu élastique affecté d'une déformation homogène.

Supposons que les composantes ξ, η, ζ de l'élongation soient, pour chacun des points matériels du milieu, des fonctions linéaires des coordonnées initiales a, b, c de ce point; en d'autres termes, supposons que l'on ait

$$(116)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c,\\ \eta &= \eta_0 + a_{21}a + a_{22}b + a_{23}c,\\ \zeta &= \zeta_0 + a_{31}a + a_{32}b + a_{33}c,\end{aligned}\right.$$

ξ_0, η_0, ζ_0 et les a_{ij} étant douze quantités indépendantes de a, b, c. Selon les égalités (23), nous aurons

$$(117)\qquad \left\{\begin{aligned} e_1 &= a_{11} + \tfrac{1}{2}(a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2),\\ e_2 &= a_{22} + \tfrac{1}{2}(a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2),\\ e_3 &= a_{33} + \tfrac{1}{2}(a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2),\\ g_1 &= a_{23} + a_{32} + a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33},\\ g_2 &= a_{31} + a_{13} + a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31},\\ g_3 &= a_{12} + a_{21} + a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}.\end{aligned}\right.$$

Les six quantités e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 ont ainsi des valeurs indépendantes de a, b, c, ce qu'on exprime en disant que *la déformation du milieu est homogène*.

Supposons que les quantités ξ_0, η_0, ζ_0 et les a_{ij} éprouvent des va-

(1) *Ibid.*, Livre I, Chapitres VIII, IX, X, XI.

riations $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$, $\delta\zeta_0$, δa_{ij} indépendantes de a, b, c; nous aurons, selon les égalités (116),

$$
(118)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta\xi &= \delta\xi_0 + a\,\delta a_{11} + b\,\delta a_{12} + c\,\delta a_{13},\\
\delta\eta &= \delta\eta_0 + a\,\delta a_{21} + b\,\delta a_{22} + c\,\delta a_{23},\\
\delta\zeta &= \delta\zeta_0 + a\,\delta a_{31} + b\,\delta a_{32} + c\,\delta a_{33},
\end{aligned}\right.
$$

tandis que les égalités (117) donnent

$$
(119)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta e_1 &= (1 + a_{11})\,\delta a_{11} + a_{21}\,\delta a_{21} + a_{31}\,\delta a_{31},\\
\delta e_2 &= a_{12}\,\delta a_{12} + (1 + a_{22})\,\delta a_{22} + a_{32}\,\delta a_{32},\\
\delta e_3 &= a_{13}\,\delta a_{13} + a_{23}\,\delta a_{23} + (1 + a_{33})\,\delta a_{33},\\
\delta g_1 &= a_{12}\,\delta a_{13} + (1 + a_{22})\,\delta a_{23} + a_{32}\,\delta a_{33}\\
&\quad + a_{13}\,\delta a_{12} + a_{23}\,\delta a_{22} + (1 + a_{33})\,\delta a_{32},\\
\delta g_2 &= a_{13}\,\delta a_{11} + a_{23}\,\delta a_{21} + (1 + a_{33})\,\delta a_{31}\\
&\quad + (1 + a_{11})\,\delta a_{13} + a_{21}\,\delta a_{23} + a_{31}\,\delta a_{33}\\
\delta g_3 &= (1 + a_{11})\,\delta a_{12} + a_{21}\,\delta a_{22} + a_{31}\,\delta a_{32}\\
&\quad + a_{12}\,\delta a_{11} + (1 + a_{22})\,\delta a_{21} + a_{32}\,\delta a_{31}.
\end{aligned}\right.
$$

Ces égalités peuvent encore s'écrire :

$$
(120)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta e_1 &= \frac{\partial x}{\partial a}\,\delta a_{11} + \frac{\partial y}{\partial a}\,\delta a_{21} + \frac{\partial z}{\partial a}\,\delta a_{31},\\
\delta e_2 &= \frac{\partial x}{\partial b}\,\delta a_{12} + \frac{\partial y}{\partial b}\,\delta a_{22} + \frac{\partial z}{\partial b}\,\delta a_{32},\\
\delta e_3 &= \frac{\partial x}{\partial c}\,\delta a_{13} + \frac{\partial y}{\partial c}\,\delta a_{23} + \frac{\partial z}{\partial c}\,\delta a_{33},\\
\delta g_1 &= \frac{\partial x}{\partial b}\,\delta a_{13} + \frac{\partial y}{\partial b}\,\delta a_{23} + \frac{\partial z}{\partial b}\,\delta a_{33}\\
&\quad + \frac{\partial x}{\partial c}\,\delta a_{12} + \frac{\partial y}{\partial c}\,\delta a_{22} + \frac{\partial z}{\partial c}\,\delta a_{32},\\
\delta g_2 &= \frac{\partial x}{\partial c}\,\delta a_{11} + \frac{\partial y}{\partial c}\,\delta a_{21} + \frac{\partial z}{\partial c}\,\delta a_{31}\\
&\quad + \frac{\partial x}{\partial a}\,\delta a_{13} + \frac{\partial y}{\partial a}\,\delta a_{23} + \frac{\partial z}{\partial a}\,\delta a_{33},\\
\delta g_3 &= \frac{\partial x}{\partial a}\,\delta a_{12} + \frac{\partial y}{\partial a}\,\delta a_{22} + \frac{\partial z}{\partial a}\,\delta a_{32}\\
&\quad + \frac{\partial x}{\partial b}\,\delta a_{11} + \frac{\partial y}{\partial b}\,\delta a_{21} + \frac{\partial z}{\partial b}\,\delta a_{31}.
\end{aligned}\right.
$$

Les égalités (119) donnant pour e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3, des valeurs indépendantes de a, b, c, la déformation est encore homogène après la variation imposée aux ξ_0, η_0, ζ_0, a_{ij}.

Cette même variation donne encore, selon les égalités (118),

$$\delta^2\xi = 0, \qquad \delta^2\eta = 0, \qquad \delta^2\zeta = 0 \tag{121}$$

et, en vertu des égalités (119),

$$\left\{\begin{aligned}
\delta^2 e_1 &= (\delta a_{11})^2 + (\delta a_{21})^2 + (\delta a_{31})^2,\\
\delta^2 e_2 &= (\delta a_{12})^2 + (\delta a_{22})^2 + (\delta a_{32})^2,\\
\delta^2 e_3 &= (\delta a_{13})^2 + (\delta a_{23})^2 + (\delta a_{33})^2,\\
\delta^2 g_1 &= 2(\delta a_{12}\,\delta a_{13} + \delta a_{22}\,\delta a_{23} + \delta a_{32}\,\delta a_{33}),\\
\delta^2 g_2 &= 2(\delta a_{13}\,\delta a_{11} + \delta a_{23}\,\delta a_{21} + \delta a_{33}\,\delta a_{31}),\\
\delta^2 g_3 &= 2(\delta a_{11}\,\delta a_{12} + \delta a_{21}\,\delta a_{22} + \delta a_{31}\,\delta a_{32}).
\end{aligned}\right. \tag{122}$$

Lorsqu'un milieu est, à partir d'un état initial homogène, affecté d'une déformation homogène et que, de plus, la température de ce milieu est maintenue uniforme, on voit sans peine [*Recherches sur l'Élasticité*, première Partie, égalités (62)] que les six quantités N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z sont indépendantes de a, b, c ou, ce qui revient au même, de x, y, z; il en résulte [*Ibid.*, égalités (70)] que les actions extérieures capables de maintenir le système en équilibre se réduisent à des actions purement superficielles. L'élément dS de la surface qui limite le milieu est soumis à une force dont les composantes sont

$$\left\{\begin{aligned}
P_x\,dS &= (N_x\alpha + T_z\beta + T_y\gamma)\,dS,\\
P_y\,dS &= (T_z\alpha + N_y\beta + T_x\gamma)\,dS,\\
P_z\,dS &= (T_y\alpha + T_x\beta + N_z\gamma)\,dS.
\end{aligned}\right. \tag{123}$$

α, β, γ étant les cosinus des angles que la normale à l'élément dS, dirigée vers l'intérieur du milieu, fait avec les axes de coordonnées.

La *perturbation isothermique* dont nous venons d'étudier les propriétés cinématiques transforme l'élément dS en un élément dS'; après cette perturbation, le corps est encore maintenu en équilibre par des actions purement superficielles; l'élément dS' est soumis à une force dont les composantes sont

$$\begin{aligned}
P'_x\, dS' &= P_x\, dS + \delta(P_x\, dS),\\
P'_y\, dS' &= P_y\, dS + \delta(P_y\, dS),\\
P'_z\, dS' &= P_z\, dS + \delta(P_z\, dS).
\end{aligned}$$

$\delta(P_x dS)$, $\delta(P_y dS)$, $\delta(P_z dS)$ sont les *actions perturbatrices*.

Le *travail perturbateur* a pour expression :

$$d\varpi = \int [\delta(P_x dS)\,\delta\xi + \delta(P_y dS)\,\delta\eta + \delta(P_z dS)\,\delta\zeta]$$

ou bien, selon les égalités (123),

$$\begin{aligned}
d\varpi = \int \{ \quad & \delta[(N_x\alpha + T_z\beta + T_y\gamma)\,dS]\,d\xi\\
+ & \delta[(T_z\alpha + N_y\beta + T_x\gamma)\,dS]\,\delta\eta\\
+ & \delta[(T_y\alpha + T_x\beta + N_z\gamma)\,dS]\,\delta\zeta\}.
\end{aligned}$$

Si l'on tient compte des égalités (121), cette expression peut s'écrire

$$\begin{aligned}
(124)\qquad d\varpi = \delta\int [(N_x\alpha + T_z\beta + T_y\gamma)\,\delta\xi + (T_z\alpha + N_y\beta + T_x\gamma)\,\delta\eta&\\
+ (T_y\alpha + T_x\beta + N_z\gamma)\,\delta\zeta]\,dS.&
\end{aligned}$$

Les égalités (45), (61) et (62) de la première Partie des *Recherches sur l'Élasticité* transforment la quantité sous le signe $\int$ et permettent de remplacer l'égalité (124) par l'égalité

$$\begin{aligned}
(125)\qquad d\varpi = \delta\int \Big(& \frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\,\delta e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\,\delta e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\,\delta e_3\\
& \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\,\delta g_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_2}\,\delta g_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_3}\,\delta g_3\Big)\,dm,
\end{aligned}$$

où l'intégrale s'étend à toutes les masses élémentaires du système.

Les six grandeurs e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 ayant, ainsi que la température T, la même valeur en tout point du milieu, cette égalité peut s'écrire, dans le *cas où la perturbation est isothermique*,

$$(126)\quad d\mathfrak{T} = m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\delta e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\delta e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\delta e_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\delta g_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_2}\delta g_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_3}\delta g_3\right)^{(2)}$$
$$+ m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\delta^2 e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\delta^2 e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\delta^2 e_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\delta^2 g_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_2}\delta^2 g_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_3}\delta^2 g_3\right),$$

(2) désignant un carré symbolique.

En vertu des égalités (120) et (122), cette égalité (126) devient

$$(127)\quad d\mathfrak{T} = m\left[\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\delta a_{11} + \frac{\partial y}{\partial a}\delta a_{21} + \frac{\partial z}{\partial a}\delta a_{31}\right) + \ldots\right.$$
$$+ \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\delta a_{13} + \frac{\partial y}{\partial b}\delta a_{23} + \frac{\partial z}{\partial b}\delta a_{33}\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial x}{\partial c}\delta a_{12} + \frac{\partial y}{\partial c}\delta a_{22} + \frac{\partial z}{\partial c}\delta a_{32}\right) + \ldots\right]^{(2)}$$
$$+ m\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}[(\delta a_{11})^2 + (\delta a_{21})^2 + (\delta a_{31})^2] + \ldots\right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial\Phi}{\partial g_1}(\delta a_{12}\,\delta a_{13} + \delta a_{22}\,\delta a_{23} + \delta a_{32}\,\delta a_{33}) + \ldots\right\},$$

(2) désignant encore un carré symbolique.

Pour que le système, EXCLUSIVEMENT AFFECTÉ DE DÉFORMATIONS HOMOGÈNES, *vérifie la loi du déplacement isothermique de l'équilibre, il faut et il suffit que le coefficient de m, au second membre de l'égalité* (127), *soit positif quelles que soient les valeurs attribuées aux* δa_{ij}.

III. — Du déplacement isothermique de l'équilibre, en général, en un milieu élastique.

Nous allons maintenant établir la proposition suivante :

Si la condition qui vient d'être énoncée est vérifiée quelles que soient les valeurs de e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3, *le milieu élastique considéré est soumis, en toutes circonstances, à la loi du déplacement isothermique de l'équilibre.*

Supposons, en effet, que notre système soit en équilibre lorsqu'on le soumet à des actions extérieures qui se composent :

1° D'une force $P_x\,dS$, $P_y\,dS$, $P_z\,dS$ appliquée à chaque élément dS de la surface terminale;

2° D'une force $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ appliquée à chaque masse élémentaire dm.

Chaque point matériel de coordonnées initiales a, b, c est affecté, en cet état d'équilibre, d'une élongation ξ, η, ζ; la déformation, en ce point, est définie par les égalités (23).

A ce système appliquons une perturbation où les quantités ξ, η, ζ éprouvent des variations premières $\delta\xi$, $\zeta\eta$, $\delta\zeta$, *indépendantes ou non*, et des variations secondes $\delta^2\xi$, $\delta^2\eta$, $\delta^2\zeta$.

Les égalités (23) nous donneront

$$(128)\quad \left\{\begin{aligned} \delta e_1 &= \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \delta g_1 &= \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}\\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et aussi

$$(129)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2 g_1 &= 2\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c} + \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c} + \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}\right) + D^2 g_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \delta^2 e_1 &= \left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}\right)^2 + D^2 e_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

avec

$$(130)\quad \left\{\begin{aligned} D^2 e_1 &= \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial\,\delta^2\xi}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial\,\delta^2\eta}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial\,\delta^2\zeta}{\partial a},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ D^2 g_1 &= \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial\,\delta^2\xi}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial\,\delta^2\eta}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial\,\delta^2\zeta}{\partial c}\\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial\,\delta^2\xi}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial\,\delta^2\eta}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial\,\delta^2\zeta}{\partial b},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Le travail perturbateur que nous nous proposons d'étudier aura pour expression

$$d\mathfrak{T} = \int (\delta X\,\delta\xi + \delta Y\,\delta\eta + \delta Z\,\delta\zeta)\,dm + \int [\delta(P_x dS)\,\delta\xi + \delta(P_y dS)\,\delta\eta + \delta(P_z dS)\,\delta\zeta]$$

ou bien encore

$$(131)\quad d\mathfrak{T} = \delta\left[\int (X\,\delta\xi + Y\,\delta\eta + Z\,\delta\zeta)\,dm + \int (P_x\,\delta\xi + P_y\,\delta\eta + P_z\,\delta\zeta)\,dS\right] - \int (X\,\delta^2\xi + Y\,\delta^2\eta + Z\,\delta^2\zeta)\,dm - \int (P_x\,\delta^2\xi + P_y\,\delta^2\eta + P_z\,\delta^2\zeta)\,dS.$$

L'état initial et l'état troublé étant deux états d'équilibre, on tire sans peine, de l'équation même des déplacements virtuels,

$$(132)\quad \delta\left[(X\,\delta\xi + Y\,\delta\eta + Z\,\delta\zeta)\,dm + \int (P_x\,\delta\xi + P_y\,\delta\eta + P_z\,\delta\zeta)\,dS\right] = \delta\int\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\delta e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\delta e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\delta e_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\delta g_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_2}\delta g_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_3}\delta g_3\right)dm,$$

tandis qu'il suffit, dans cette même équation des déplacements virtuels, de remplacer $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ par $\delta^2\xi$, $\delta^2\eta$, $\delta^2\zeta$, et de tenir compte des égalités (130) pour trouver l'égalité

$$(133)\quad \int (X\,\delta^2\xi + Y\,\delta^2\eta + Z\,\delta^2\zeta)\,dm + \int (P_x\,\delta^2\xi + P_y\,\delta^2\eta + P_z\,\delta^2\zeta)\,dS = \int\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}D^2 e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_2}D^2 e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_3}D^2 e_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}D^2 g_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_2}D^2 g_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_3}D^2 g_3\right)dm.$$

Les égalités (131), (132), (133) et (129) nous donnent sans peine

$$\begin{aligned}(134)\quad d\mathfrak{T} = \int\Bigg\{\Bigg[& \frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}\right) + \ldots \\ & + \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}\right. \\ & \qquad \left. + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}\right) + \ldots\Bigg]^{(2)} \\ & + \frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\left[\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}\right)^2\right] + \ldots \\ & + 2\frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c} + \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c} + \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}\right) + \ldots\Bigg\}\,dm.\end{aligned}$$

Or, sous le signe $\int$, le coefficient de dm est ce que devient le coefficient de m au second membre de l'égalité (127), lorsqu'on y fait

$$\begin{array}{lll}
\delta a_{11} = \dfrac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}, & \delta a_{12} = \dfrac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}, & \delta a_{13} = \dfrac{\partial\,\delta\xi}{\partial c}, \\
\delta a_{21} = \dfrac{\partial\,\delta\eta}{\partial a}, & \delta a_{22} = \dfrac{\partial\,\delta\eta}{\partial b}, & \delta a_{23} = \dfrac{\partial\,\delta\eta}{\partial c}; \\
\delta a_{31} = \dfrac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}, & \delta a_{32} = \dfrac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}, & \delta a_{33} = \dfrac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}.
\end{array}$$

Il est donc essentiellement positif; il en est de même de $d\varpi$, ce qui démontre le théorème énoncé.

IV. — Conséquence, relative à la stabilité de l'équilibre, de la condition établie au § II.

Supposons que le coefficient de m, au second membre de l'égalité (127), soit essentiellement positif. *Si les divers éléments de masse qui forment le corps élastique sont soustraits à l'action de toute force extérieure et si la surface qui limite ce corps est maintenue invariable, ainsi que la température, l'état d'équilibre de ce corps est stable.*

En effet, dans les conditions indiquées, le système admet un potentiel total qui se réduit à son potentiel interne :

$$\mathcal{F} = \int \Phi(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3, \mathrm{T})\, dm.$$

La variation première de ce potentiel, en une modification isothermique, est

$$(135)\quad \delta\mathcal{F} = \int\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\delta e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\delta e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\delta e_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\delta g_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_2}\delta g_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_3}\delta g_3\right) dm.$$

Cette variation est nulle pour tout système de valeurs de $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ égales à o en tout point de la surface qui limite le système.

En vertu des égalités (128), (129) et (135), on peut écrire

$$(136)\quad \delta^2\mathcal{F} = \int \Big\{ \Big[\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}\right) + \ldots$$

$$+ \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c} + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}\right) + \ldots \Big]^{(2)}$$

$$+ \frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\left[\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}\right)^2\right] + \ldots$$

$$+ 2\frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c} + \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c} + \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}\right) + \ldots \Big\}\, dm$$

$$+ \int \left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}\mathrm{D}^2 e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\mathrm{D}^2 e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\mathrm{D}^2 e_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\mathrm{D}^2 g_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_2}\mathrm{D}^2 g_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial g_3}\mathrm{D}^2 g_3\right) dm.$$

Au second membre de l'égalité (136), la seconde intégrale est, selon les égalités (130), ce que devient le second membre de l'égalité (135) lorsqu'on y remplace les quantités $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ par les quantités $\delta^2\xi$, $\delta^2\eta$, $\delta^2\zeta$, qui sont également nulles en tout point de la surface qui limite le système; cette intégrale est donc égale à o. Quant à la première intégrale, identique au second membre de l'égalité (134), elle est essentiellement positive.

Donc, en toute modification isothermique virtuelle qui a pour point de départ un état d'équilibre et qui laisse immobiles les points matériels infiniment voisins de la surface limite, $\delta^2\mathcal{F}$ est positif, ce qui démontre le théorème énoncé.

Cette proposition a été tirée de la condition établie au paragraphe II : Le coefficient de m, au second membre de l'égalité (127), est positif quelles que soient les quantités δa_{ij}. Pourrait-on renverser l'ordre de cette déduction et prouver que le coefficient de m, au second membre de l'égalité (127), est sûrement positif, quelles que soient les valeurs attribuées aux quantités δa_{ij}, en prenant comme point de départ la proposition suivante : Si l'on impose au système, à partir d'un état d'équilibre homogène, une modification virtuelle qui laisse invariable la surface limite, il en résulte pour $\delta^2\mathcal{F}$ une valeur positive?

En général, cette marche inverse ne semble pas pouvoir être suivie; dans cette voie, on ne connaît qu'une seule proposition, due à M. J. Hadamard (¹); encore la démonstration présente-t-elle un point litigieux que nous allons essayer de marquer avec précision.

Voici l'énoncé du théorème de M. Hadamard :

Supposons que les variations

$$
(137)\qquad
\left\{
\begin{array}{lll}
\delta a_{11} = k_1 \alpha, & \delta a_{12} = k_1 \beta, & \delta a_{13} = k_1 \gamma, \\
\delta a_{21} = k_2 \alpha, & \delta a_{22} = k_2 \beta, & \delta a_{23} = k_2 \gamma, \\
\delta a_{31} = k_3 \alpha, & \delta a_{32} = k_3 \beta, & \delta a_{33} = k_3 \gamma,
\end{array}
\right.
$$

où α, β, γ *sont les cosinus des angles qu'une certaine direction fait avec les axes de coordonnées, rendent négatif le coefficient de* m *au second membre de l'égalité* (127); *on pourra attribuer à* $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ *des valeurs telles que le second membre de l'égalité* (136) *ou, ce qui revient au même, la première intégrale de ce second membre soit une quantité négative.*

Au sein du milieu pris dans son état initial a, b, c, et à distance finie de la surface qui le limite, traçons une aire plane Σ dont la normale fasse avec les axes des coordonnées des angles ayant pour cosinus α, β, γ. Par le contour de cette aire, élevons-lui des normales qui, toutes, aient une même longueur h; elles formeront la surface latérale d'un cylindre C ayant pour base l'aire Σ et une seconde aire Σ', égale et parallèle à la précédente. Donnons aux divers points du milieu des déplacements ξ, η, ζ qui engendrent la déformation homogène e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3. Ensuite, définissons les quantités $\delta\zeta$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ par les conditions suivantes :

1° Pour chacun des points matériels qui, dans l'état initial, étaient contenus à l'intérieur du cylindre C, on a

$$
(138)\qquad
\left\{
\begin{array}{l}
\delta\xi = k_1(\alpha a + \beta b + \gamma c) + K_1, \\
\delta\eta = k_2(\alpha a + \beta b + \gamma c) + K_3, \\
\delta\zeta = k_3(\alpha a + \beta b + \gamma c) + K_3,
\end{array}
\right.
$$

K_1, K_2, K_3 étant trois quantités indépendantes de a, b, c. Comme pour tous les points matériels qui, dans l'état initial, formaient l'aire Σ, la

(¹) J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, n° 270, p. 253; Paris, 1903.

somme $(\alpha a + \beta b + \gamma c)$ a la même valeur, on pourra disposer de K_1, K_2, K_3 de telle sorte que, pour ces points, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ soient égaux à o. Dès lors, il est clair que, pour tous les points matériels contenus initialement à l'intérieur du cylindre C, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ seront des quantités infiniment petites avec h et au moins de l'ordre de h, tandis que les quantités $\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}$, $\cdots$ auront les valeurs, indépendantes de h,

$$(139)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a} = k_1\alpha, && \frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b} = k_1\beta, && \frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c} = k_1\gamma,\\ &\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a} = k_2\alpha, && \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b} = k_2\beta, && \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c} = k_2\gamma,\\ &\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a} = k_3\alpha, && \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b} = k_3\beta, && \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c} = k_3\gamma. \end{aligned}\right.$$

2° Pour les points matériels non compris initialement à l'intérieur de C, nous supposerons que $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ ont des valeurs nulles le long de la surface qui limite le système, se raccordant d'une manière continue, le long des parois du cylindre C, aux valeurs que $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ prennent pour les points intérieurs à ce cylindre, enfin infiniment petites avec h. Nous supposerons, en outre, que l'on peut choisir ces quantités de telle sorte que, pour tous les points matériels non initialement compris à l'intérieur du cylindre C, les quantités $\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}$, $\cdots$ soient infiniment petites du même ordre que h.

Cette dernière supposition est-elle légitime? Prenons un point M à la surface du cylindre C. Lorsqu'on tend vers ce point en venant de l'extérieur du cylindre, $\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}$ tend vers une limite que nous désignerons par $\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}\right)_e$, tandis que si l'on tend vers le même point en venant de l'intérieur du cylindre, $\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}$ a pour limite $k_1\alpha$. Soit θ une direction quelconque, menée par le point M tangentiellement à la surface du cylindre C. Les valeurs extérieures et intérieures de $\delta\xi$ devant se raccorder sans discontinuité le long de cette surface, on devra avoir

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}\right)_e \cos(\theta, a) + \left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}\right)_e \cos(\theta, b) + \left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c}\right)_e \cos(\theta, c)\\ = k_1[\alpha\cos(\theta, a) + \beta\cos(\theta, b) + \gamma\cos(\theta, c)],\end{aligned}$$

et, semblablement,

$$\left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a}\right)_c \cos(\theta, a) + \left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b}\right)_c \cos(\theta, b) + \left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c}\right)_c \cos(\theta, c)$$
$$= k_2[\alpha\cos(\theta, a) + \beta\cos(\theta, b) + \gamma\cos(\theta, c)],$$
$$\left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}\right)_c \cos(\theta, a) + \left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}\right)_c \cos(\theta, b) + \left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}\right)_c \cos(\theta, c)$$
$$= k_3[\alpha\cos(\theta, a) + \beta\cos(\theta, b) + \gamma\cos(\theta, c)].$$

En tout point des bases Σ et Σ' du cylindre C, on a

$$\alpha\cos(\theta, a) + \beta\cos(\theta, b) + \gamma\cos(\theta, c) = 0;$$

il n'est donc pas absurde de supposer que les quantités $\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{ba}\right)_c, \dots$ sont infiniment petites avec h; mais il n'en est plus de même le long de la surface latérale du cylindre C. Le long de cette surface,

$$\alpha\cos(\theta, a) + \beta\cos(\theta, b) + \gamma\cos(\theta, c)$$

n'est plus, en général, ni nul, ni infiniment petit avec h; si, par exemple, on prend pour direction θ la direction de la génératrice, cette quantité est égale à 1.

Il existe donc certainement à l'extérieur du cylindre C et au voisinage de sa surface latérale une région dans laquelle les quantités $\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}, \dots$ ne sont pas, en général, infiniment petites de l'ordre de h, mais demeurent finies lorsque h tend vers 0. *Nous admettrons que cette région environne la surface latérale du cylindre d'une sorte d'anneau dont la section a toutes ses dimensions de l'ordre de h, en sorte que le volume de cet anneau soit infiniment petit de l'ordre de h^2.* Cette supposition que l'intuition fait apparaître comme vraisemblable, mais qu'il est malaisé de justifier par un raisonnement rigoureux, permet seule de poursuivre la démonstration de M. Hadamard.

Cette démonstration, d'ailleurs, s'achève immédiatement; au second membre de l'égalité (136), la première intégrale se décompose en deux autres; l'une, étendue aux masses qui n'étaient pas initialement comprises dans le cylindre C, est infiniment petite de l'ordre de h^2; l'autre s'étend à la masse que contenait initialement le cylindre C; elle est le produit de cette masse, qui est un infiniment petit de l'ordre de h, par un coefficient indépendant de h; ce coefficient est ce que devient le coefficient m, au second membre de l'égalité (127) par les valeurs (137) des δa_{ij}; il est donc négatif par hypothèse. Or, on peut assurément prendre h assez petit pour que cette seconde partie de l'intégrale surpasse la première partie en valeur absolue, partant pour que l'intégrale soit négative.

V. — Du déplacement isentropique de l'équilibre.

Dans tout ce que nous avons dit jusqu'ici, au cours du présent Chapitre, nous avons supposé la température du système maintenue uniforme et invariable; à cette restriction nous allons maintenant en substituer une autre. Nous supposerons toujours la température uniforme en l'état d'équilibre dont nous étudions le déplacement ou la stabilité; mais, à partir de cet état, nous supposerons que la température peut varier en même temps que la déformation, de telle sorte que l'entropie de chaque masse élémentaire garde une valeur invariable.

L'entropie de la masse dm a pour valeur

$$-\frac{1}{E}\frac{\partial\Phi}{\partial T}dm,$$

E étant l'équivalent mécanique de la chaleur; pour que cette quantité demeure invariable, il faut et il suffit que $\frac{\partial\Phi}{\partial T}$ demeure invariable ou, en d'autres termes, que l'on ait

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2}\delta T+\frac{\partial^2\Phi}{\partial e_1\,\partial T}\delta e_1+\ldots+\frac{\partial^2\Phi}{\partial g_1\,\partial T}\delta g_1+\ldots=0.$$

Si l'on désigne par c la chaleur spécifique normale de l'élément dm, on a

$$c=-\frac{T}{E}\frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2},$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$(140)\qquad \delta T = \frac{T}{Ec}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e_1\,\partial T}\,\delta e_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial e_2\,\partial T}\,\delta e_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial e_3\,\partial T}\,\delta e_3 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g_1\,\partial T}\,\delta g_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g_2\,\partial T}\,\delta g_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g_3\,\partial T}\,\delta g_3\right).$$

Cette égalité posée, revenons au problème traité au paragraphe II. Supposons que la variation imposée à la déformation homogène du système soit accompagnée d'une variation dans la valeur uniforme de la température, et cela de telle sorte que l'entropie de chaque masse élémentaire demeure invariable. Le *travail perturbateur isentropique* $d\mathfrak{T}'$ pourra encore s'exprimer par des formules semblables aux formules (124) ou (125), qui donnent le *travail perturbateur isothermique* $d\mathfrak{T}$; mais, pour calculer $d\mathfrak{T}'$, on devra, au second membre de l'égalité (126), ajouter

$$m\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e_1\,\partial T}\,\delta e_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial e_2\,\partial T}\,\delta e_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial e_3\,\partial T}\,\delta e_3 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g_1\,\partial T}\,\delta g_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g_2\,\partial T}\,\delta g_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g_3\,\partial T}\,\delta g_3\right)\delta T.$$

Si l'on transforme cette expression au moyen de l'égalité (140), on trouve

$$(141)\qquad d\mathfrak{T}' - d\mathfrak{T} = m\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e_1\,\partial T}\,\delta e_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial e_2\,\partial T}\,\delta e_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial e_3\,\partial T}\,\delta e_3 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g_1\,\partial T}\,\delta g_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g_2\,\partial T}\,\delta g_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g_3\,\partial T}\,\delta g_3\right)^2.$$

Si $d\mathfrak{T}$ est positif, $d\mathfrak{T}'$ l'est *a fortiori*. *Tout milieu élastique dont les déformations homogènes vérifient la loi du déplacement isothermique de l'équilibre, est soumis* a fortiori *à la loi du déplacement isentropique.*

On démontrerait sans peine :

1° Que la loi du déplacement isentropique de l'équilibre est encore vérifiée par notre système à partir d'un état d'équilibre où le milieu est soumis à des actions solides ou superficielles quelconques ;

2° Que le système, soumis à des actions purement superficielles, est en équilibre stable lorsqu'on maintient invariables la surface qui le limite et l'entropie de chacune des masses élémentaires qui le composent.

VI. — Application des considérations précédentes à un milieu élastique très peu déformé.

Nous allons appliquer à un milieu élastique très peu déformé les considérations qui ont été développées aux quatre derniers paragraphes. Pour un tel milieu, on doit substituer aux quantités e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3, définies par les égalités (23), les quantités ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 définies par les égalités (2). Les trois quantités $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$, $\frac{\partial z}{\partial c}$ sont infiniment voisines de 1, tandis que les autres dérivées partielles de x, y, z par rapport à a, b, c sont infiniment voisines de 0. Dès lors, en exprimant que le coefficient de m, au second membre de l'égalité (127), est essentiellement positif, nous arriverons à cette proposition :

Quels que soient ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, et quelles que soient les valeurs attribuées aux quantités δa_{ij}, on a l'inégalité

$$
(142)\quad \begin{aligned}
&\Big[\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\delta a_{11}+\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\delta a_{22}+\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}\delta a_{33}\\
&\quad+\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}(\delta a_{23}+\delta a_{32})+\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}(\delta a_{31}+\delta a_{13})+\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}(\delta a_{12}+\delta a_{21})\Big]^{(2)}\\
&\quad+\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}[(\delta a_{11})^2+(\delta a_{21})^2+(\delta a_{31})^2]+\ldots\\
&\quad+2\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}(\delta a_{12}\,\delta a_{13}+\delta a_{22}\,\delta a_{23}+\delta a_{32}\,\delta a_{33})+\ldots\ldots\ldots\ldots > 0.
\end{aligned}
$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que notre milieu élastique, soumis à des forces quelconques sollicitant les éléments de la surface qui le limite ou les éléments de la masse qui le forme, soit soumis à la loi du déplacement isothermique de l'équilibre. Cette condition suffit en même temps pour que ce corps élastique se conforme à la loi du déplacement isentropique de l'équilibre.

En outre, si le milieu, soumis à des actions purement superficielles et porté à une température uniforme, est en équilibre dans un état de déformation homogène, la condition (142) nous assure que cet état demeure stable lorsqu'on maintient immobile la surface qui limite ce milieu et, en outre, lorsqu'on maintient invariable soit la température du système, soit l'entropie de chaque élément.

Supposons, comme au Chapitre I, Paragraphe I, que l'état initial du milieu soit l'état d'équilibre qu'il prend à la température T, sous une pression initiale Π_0, nulle ou *positive*. A cette même température T, nous aurons, en vertu des égalités (4) et (7),

$$\begin{aligned}\Phi = \quad & \varphi_0(\rho_0, T) - \frac{\Pi_0}{\rho_0}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ & + \varphi_2(\rho_0, T, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),\end{aligned}$$

φ_2 étant une forme quadratique en ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3.

L'inégalité (142) devient

$$(143)\quad \begin{aligned} & \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_1}\delta a_{11} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_2}\delta a_{22} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon_3}\delta a_{33} \right. \\ & \left. \quad + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_1}(\delta a_{23} + \delta a_{32}) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_2}(\delta a_{31} + \delta a_{13}) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma_3}(\delta a_{12} + \delta a_{21}) \right]^{(2)} \\ & \quad - \frac{\Pi_0}{\rho_0}[(\delta a_{11})^2 + (\delta a_{21})^2 + (\delta a_{31})^2 + (\delta a_{12})^2 + (\delta a_{22})^2 + (\delta a_{32})^2 \\ & \qquad\qquad + (\delta a_{13})^2 + (\delta a_{23})^2 + (\delta a_{33})^2] > 0, \end{aligned}$$

(2) désignant un carré symbolique. Cette inégalité, où Π_0 est positif ou nul, exige que ce carré symbolique soit positif. Si l'on observe que les quantités δa_{ij} ont des valeurs entièrement arbitraires, on voit qu'il revient au même de dire que *la grandeur*

$$\varphi_2(\rho_0, T, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

est une forme quadratique définie positive des ε_i, γ_i.

Nous étions déjà parvenus à cette condition au Chapitre I, Paragraphe I, en imposant au milieu élastique certaines conditions de stabilité; mais :

1° Nous n'avions pu regarder cette condition comme nécessaire qu'en supposant exacte la réciproque du théorème de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet.

2° Nous avions dû nous limiter au cas où l'état initial est l'état d'équilibre pris par le système sous une pression nulle.

Il y a donc avantage à prendre pour hypothèse fondamentale non pas certaines suppositions touchant la stabilité, mais la loi du déplacement isothermique de l'équilibre. Cette loi entraîne d'ailleurs comme conséquences les stabilités que nous aurions postulées.

Les considérations que nous venons de développer se rattachent à une généralisation du théorème de Reech, généralisation qui a été indiquée par M. W. Voigt (¹) et dont nous aurons besoin dans ce qui va suivre; disons quelques mots de cette généralisation.

Dans le cas où l'état initial du milieu est l'état d'équilibre pris, à la température T, sous une pression uniforme Π_0, nulle ou positive, le carré symbolique qui figure au premier membre de l'inégalité (143) est positif quels que soient les δa_{ij}; si, en outre, Π_0 est nul et si l'on pose

$$(144)\quad \begin{cases} \delta a_{11} = E_1, & \delta a_{22} = E_2 & \delta a_{33} = E_3, \\ \delta a_{23} + \delta a_{32} = G_1, & \delta a_{31} + \delta a_{13} = G_2, & \delta a_{12} + \delta a_{21} = G_3, \end{cases}$$

cas auquel E_1, E_2, E_3, G_1, G_2, G_3 sont six quantités arbitraires, la condition ainsi obtenue peut s'écrire

$$(145)\quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}E_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}E_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}E_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}G_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}G_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}G_3\right)^{(2)} > 0,$$

(2) désignant un carré symbolique.

Hors des hypothèses particulières que nous venons de préciser, nous ne connaîtrons pas le signe du premier membre de (145); mais ce premier membre sera susceptible d'une interprétation simple.

Quelles que soient les quantités E_1, E_2, E_3, G_1, G_2, G_3, on peut toujours, au moyen des égalités (144), déterminer des valeurs correspon-

(¹) W. Voigt, *Thermodynamik*, Iᵉʳ Band, p. 332-333, formules (198) et (199), Leipzig, 1903. *Voir* aussi P. Duhem, *Sur une généralisation du théorème de Reech* (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 2 avril 1903).

dantes des δa_{ij}. Ces valeurs nous donneront

$$(146)\qquad \begin{cases} \delta\varepsilon_1 = E_1, & \delta\varepsilon_2 = E_2, & \delta\varepsilon_3 = E_3, \\ \delta\gamma_1 = G_1, & \delta\gamma_2 = G_2, & \delta\gamma_3 = G_3 \end{cases}$$

et détermineront une perturbation homogène de la déformation infiniment petite homogène qui affectait notre milieu.

Imaginons que cette perturbation soit accomplie sans variation de température; elle correspondra à des *variations isothermiques*

$$\partial N_x, \quad \partial N_y, \quad \partial N_z, \quad \partial T_x, \quad \partial T_y, \quad \partial T_z$$

des quantités N_i, T_i. Selon les égalités (3), nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} \partial N_x &= -\rho_0\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1^2} E_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_2} E_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_3} E_3 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_1} G_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_2} G_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_3} G_3\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \partial T_x &= -\rho_0\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\varepsilon_1} E_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\varepsilon_2} E_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\varepsilon_3} E_3 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1^2} G_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2} G_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_3} G_3\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

On voit alors que l'on a

$$(148)\quad \begin{aligned} &E_1\,\partial N_x + E_2\,\partial N_y + E_3\,\partial N_z + G_1\,\partial T_x + G_2\,\partial T_y + G_3\,\partial T_z \\ &\quad = -\rho_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1} E_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3} E_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3} E_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1} G_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2} G_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3} G_3\right)^{(2)}. \end{aligned}$$

Dans les conditions particulières où l'inégalité (145) est assurée, le premier membre de l'égalité (148) est négatif.

Si la perturbation (146), au lieu d'être isothermique, était accompagnée d'une variation homogène δT de la température, il faudrait, aux seconds membres des égalités (147), ajouter respectivement

$$-\rho_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}\delta T, \quad \ldots, \qquad -\rho_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}\delta T, \quad \ldots.$$

En particulier, si la modification était isentropique, δT serait donné par l'égalité (140), où les quantités e_i, g_i devraient être remplacées par les quantités ε_i, γ_i, et où l'on aurait à tenir compte des égalités (146); dès lors, les grandeurs N_i, T_i subiraient des *variations isentropiques*

$$\delta' N_x, \quad \delta' N_y, \quad \delta' N_z, \quad \delta' T_x, \quad \delta' T_y, \quad \delta' T_z$$

données par les égalités

$$(149)\left\{\begin{array}{l}
\delta' N_x = \delta N_x - \dfrac{\rho_0 T}{Ec}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}E_1 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}E_2 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}E_3 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}G_1 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}G_2 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T}G_3\right)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\delta' T_x = \delta T_x - \dfrac{\rho_0 T}{Ec}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}E_1 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}E_2 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}E_3 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}G_1 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}G_2 + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T}G_3\right)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right.$$

Ces égalités (149) donnent

$$(150)\quad \begin{aligned}
&E_1\delta' N_x + E_2\delta' N_y + E_3\delta' N_z + G_1\delta' T_x + G_2\delta' T_y + G_3\delta' T_z \\
&= E_1\delta N_x + E_2\delta N_y + E_3\delta N_z + G_1\delta T_x + G_2\delta T_y + G_3\delta T_z \\
&\quad - \frac{\rho_0 T}{Ec}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}E_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}E_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}E_3 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}G_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}G_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T}G_3\right)^2.
\end{aligned}$$

c est positif, en vertu du postulat de Helmholtz; le premier membre est donc assurément inférieur au premier membre de l'égalité (148); toutes les fois que l'inégalité (145) est vérifiée, le premier membre de l'inégalité (150) est négatif.

Supposons que l'on fasse croître T de dT en maintenant invariables les quantités N_i, T_i; les quantités ε_i, γ_i éprouveront des accroissements

$$\frac{d\varepsilon_1}{dT}dT, \quad \frac{d\varepsilon_2}{dT}dT, \quad \frac{d\varepsilon_3}{dT}dT, \quad \frac{d\gamma_1}{dT}dT, \quad \frac{d\gamma_2}{dT}dT, \quad \frac{d\gamma_3}{dT}dT,$$

et l'on aura, en vertu des égalités (3),

$$(151)\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1^2}\dfrac{d\varepsilon_1}{dT} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_2}\dfrac{d\varepsilon_2}{dT} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_3}\dfrac{d\varepsilon_3}{dT} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_1}\dfrac{d\gamma_1}{dT} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_2}\dfrac{d\gamma_2}{dT} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_3}\dfrac{d\gamma_3}{dT} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{array}\right.$$

$$(152)\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\varepsilon_1}\dfrac{d\varepsilon_1}{dT} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\varepsilon_2}\dfrac{d\varepsilon_2}{dT} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\varepsilon_3}\dfrac{d\varepsilon_3}{dT} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1^2}\dfrac{d\gamma_1}{dT} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2}\dfrac{d\gamma_2}{dT} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_3}\dfrac{d\gamma_3}{dT} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right.$$

Dans ces conditions, la masse dm dégage une quantité de chaleur dQ donnée par l'égalité

$$dQ = \frac{T}{E} d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right) dm,$$

que nous écrirons

$$dQ = -C\,dm,$$

C étant la chaleur spécifique dans le cas où l'on maintient invariables les quantités N_i, T_i. On aura, d'après ces égalités,

$$(153)\quad C = c - \frac{T}{E}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}\frac{d\varepsilon_1}{dT} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}\frac{d\varepsilon_2}{dT} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}\frac{d\varepsilon_3}{dT} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}\frac{d\gamma_1}{dT} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}\frac{d\gamma_2}{dT} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T}\frac{d\gamma_3}{dT}\right)$$

ou bien, selon les égalités (151),

$$(154)\quad C = c + \frac{T}{E}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\frac{d\varepsilon_1}{dT} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\frac{d\varepsilon_2}{dT} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}\frac{d\varepsilon_3}{dT} + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}\frac{d\gamma_1}{dT} + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}\frac{d\gamma_2}{dT} + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}\frac{d\gamma_3}{dT}\right)^{(2)}.$$

Dans les circonstances, précisées ci-dessus, où l'inégalité (145) est vérifiée quelles que soient les quantités $E_1, E_2, E_3, G_1, G_2, G_3$, on a sûrement

$$(155)\qquad C > c.$$

Multiplions respectivement les égalités (147) par $\frac{d\varepsilon_1}{dT}, \ldots, \frac{d\gamma_1}{dT}, \ldots$; les égalités (151) par $\rho_0 E_1, \ldots, \rho_0 G_1, \ldots$ et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$(156)\quad \begin{aligned} &\frac{d\varepsilon_1}{dT}\delta N_x + \frac{d\varepsilon_2}{dT}\delta N_y + \frac{d\varepsilon_3}{dT}\delta N_z + \frac{d\gamma_1}{dT}\delta T_x + \frac{d\gamma_2}{dT}\delta T_y + \frac{d\gamma_3}{dT}\delta T_z \\ &= \rho_0\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}E_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}E_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}E_3 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}G_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}G_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T}G_3\right). \end{aligned}$$

D'une manière semblable, les égalités (149) et (151) donnent

$$\begin{aligned} &\frac{d\varepsilon_1}{dT}\delta' N_x + \frac{d\varepsilon_2}{dT}\delta' N_y + \frac{d\varepsilon_3}{dT}\delta' N_z + \frac{d\gamma_1}{dT}\delta' T_x + \frac{d\gamma_2}{dT}\delta' T_y + \frac{d\gamma_3}{dT}\delta' T_z \\ &= \rho_0\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}E_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}E_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}E_3 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}G_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}G_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T}G_3\right) \\ &\quad\times\left[1 - \frac{T}{Ec}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}\frac{d\varepsilon_1}{dT} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}\frac{d\varepsilon_2}{dT} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}\frac{d\varepsilon_3}{dT} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}\frac{d\gamma_1}{dT} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}\frac{d\gamma_2}{dT} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T}\frac{d\gamma_3}{dT}\right)\right] \end{aligned}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (153),

$$(157)\quad \begin{aligned}&\frac{d\varepsilon_1}{dT}\delta' N_x + \frac{d\varepsilon_2}{dT}\delta' N_y + \frac{d\varepsilon_3}{dT}\delta' N_z + \frac{d\gamma_1}{dT}\delta' T_x + \frac{d\gamma_2}{dT}\delta' T_y + \frac{d\gamma_3}{dT}\delta' T_z \\ &= \rho_0 \frac{C}{c}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}E_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}E_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}E_3 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}G_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}G_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T}G_3\right).\end{aligned}$$

Les égalités (156) et (157) donnent la relation

$$(158)\quad \frac{C}{c} = \frac{\dfrac{d\varepsilon_1}{dT}\delta' N_x + \dfrac{d\varepsilon_2}{dT}\delta' N_y + \dfrac{d\varepsilon_3}{dT}\delta' N_z + \dfrac{d\gamma_1}{dT}\delta' T_x + \dfrac{d\gamma_2}{dT}\delta' T_y + \dfrac{d\gamma_3}{dT}\delta' T_z}{\dfrac{d\varepsilon_1}{dT}\delta N_x + \dfrac{d\varepsilon_2}{dT}\delta N_y + \dfrac{d\varepsilon_3}{dT}\delta N_z + \dfrac{d\gamma_1}{dT}\delta T_x + \dfrac{d\gamma_2}{dT}\delta T_y + \dfrac{d\gamma_3}{dT}\delta T_z}.$$

Cette relation, qui généralise le théorème de Reech, est due, nous l'avons dit, à M. W. Voigt; elle nous sera utile plus tard.

VII. — Application des conditions précédentes à un milieu vitreux peu déformé.

Les considérations développées au Paragraphe précédent supposent le milieu peu déformé, mais elles ne font aucune autre restriction; le milieu peut être cristallisé d'une manière quelconque; nous allons maintenant les particulariser davantage, en supposant que le milieu considéré soit un milieu vitreux.

Le passage du cas général à ce cas particulier se fait en suivant la voie marquée au Chapitre I, Paragraphe II.

La fonction φ_2 est donnée par l'égalité (15); pour qu'elle soit définie positive, il faut et il suffit que l'on ait les deux inégalités

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} 3\Lambda(\rho_0, T) + 2M(\rho_0, T) &> 0,\\ M(\rho_0, T) &> 0,\end{aligned}\right.$$

que nous avions déjà obtenues au Chapitre I, Paragraphe II.

Mais alors :

1° Pour regarder ces conditions comme nécessaires, il nous fallait regarder comme légitime la réciproque du théorème de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet. Ici, au contraire, la loi du déplacement isothermique de l'équilibre entraîne sûrement la nécessité de ces conditions.

2° Ces inégalités étant justifiées seulement pour la valeur que la densité ρ_0 prend lorsque le corps est en équilibre, à la température T, sous une pression nulle. Ici, elles sont justifiées pour toutes les valeurs que peut prendre ρ_0, à la température T, au sein d'un corps soumis à une pression uniforme nulle ou positive.

En vertu de l'égalité [*Recherches sur l'Élasticité*, seconde Partie, égalité (6)]

$$(159)\qquad \begin{aligned}\Phi = \varphi_0(\mathrm{T}) + \varphi_1(\mathrm{T})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + \frac{\Lambda(\mathrm{T})}{2\rho_0}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 \\ + \frac{\mathrm{M}(\mathrm{T})}{2\rho_0}(2\varepsilon_1^2+2\varepsilon_2^2+2\varepsilon_3^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2),\end{aligned}$$

les égalités (151) deviennent

$$\begin{gathered}(\Lambda+2\mathrm{M})\frac{d\varepsilon_1}{d\mathrm{T}} + \Lambda\left(\frac{d\varepsilon_2}{d\mathrm{T}}+\frac{d\varepsilon_3}{d\mathrm{T}}\right) + \rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}} = 0,\\ (\Lambda+2\mathrm{M})\frac{d\varepsilon_1}{d\mathrm{T}} + \Lambda\left(\frac{d\varepsilon_3}{d\mathrm{T}}+\frac{d\varepsilon_1}{d\mathrm{T}}\right) + \rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}} = 0,\\ (\Lambda+2\mathrm{M})\frac{d\varepsilon_3}{d\mathrm{T}} + \Lambda\left(\frac{d\varepsilon_1}{d\mathrm{T}}+\frac{d\varepsilon_2}{d\mathrm{T}}\right) + \rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}} = 0,\\ \mathrm{M}\frac{d\gamma_1}{d\mathrm{T}} = 0,\qquad \mathrm{M}\frac{d\gamma_2}{d\mathrm{T}} = 0,\qquad \mathrm{M}\frac{d\gamma_3}{d\mathrm{T}} = 0.\end{gathered}$$

On en tire

$$(160)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{d\gamma_1}{d\mathrm{T}} = \frac{d\gamma_2}{d\mathrm{T}} = \frac{d\gamma_3}{d\mathrm{T}} = 0,\\ &\frac{d\varepsilon_1}{d\mathrm{T}} = \frac{d\varepsilon_2}{d\mathrm{T}} = \frac{d\varepsilon_3}{d\mathrm{T}} = -\frac{\rho_0}{3\Lambda+2\mathrm{M}}\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}.\end{aligned}\right.$$

Chauffé de telle sorte que les quantités N_i, T_i ne varient pas, le milieu se dilate en restant semblable à lui-même; le coefficient de dilatation cubique a pour valeur

$$\alpha = -\frac{3}{3\Lambda + 2M}\frac{d\varphi_1(T)}{dT}, \tag{19 bis}$$

expression indiquée en (19).

En vertu des égalités (159) et (160), l'égalité (152) devient

$$C = c + \frac{T}{E}\frac{3\rho_0}{3\Lambda + 2M}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2. \tag{161}$$

Les égalités (147) donnent, moyennant l'égalité (159),

$$\begin{aligned} \delta N_x &= -(\Lambda + 2M)E_1 - \Lambda(E_2 + E_3), \\ \delta N_y &= -(\Lambda + 2M)E_2 - \Lambda(E_3 + E_1), \\ \delta N_z &= -(\Lambda + 2M)E_3 - \Lambda(E_1 + E_2), \end{aligned}$$

tandis que les égalités (149) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \delta' N_x &= -(\Lambda + 2M)E_1 - \Lambda(E_2 + E_3) - \frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2(E_1 + E_2 + E_3), \\ \delta' N_y &= -(\Lambda + 2M)E_2 - \Lambda(E_3 + E_1) - \frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2(E_1 + E_2 + E_3). \\ \delta' N_z &= -(\Lambda + 2M)E_3 - \Lambda(E_1 + E_2) - \frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2(E_1 + E_2 + E_3). \end{aligned}\right. \tag{162}$$

Dans ces formules, E_1, E_2, E_3 sont arbitraires; nous pouvons donc faire

$$E_1 = E_2 = E_3 = \mathcal{E}.$$

Elles deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \delta N_x &= \delta N_y = \delta N_z = -(3\Lambda + 2M)\mathcal{E}, \\ \delta' N_x &= \delta' N_y = \delta' N_z = -\left\{3\Lambda + 2M + \frac{3\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2\right\}\mathcal{E}. \end{aligned}\right. \tag{163}$$

Les égalités (158), (160) et (163) donnent sans peine

$$\frac{C}{c} = \frac{3\Lambda + 2M + \frac{3\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2}{3\Lambda + 2M}, \tag{164}$$

formule qui nous sera utile plus tard.

Ce Chapitre, que nous terminerons ici, montre clairement quels avantages il y a à prendre pour postulat fondamental, dans l'étude des milieux élastiques, la loi du déplacement isothermique de l'équilibre, de préférence à certaines hypothèses touchant la stabilité. Rappelons, à ce sujet, que l'expression à laquelle nous avons donné le nom de *travail perturbateur isothermique* s'est présentée, pour la première fois, dans les recherches de Lord Rayleigh [1].

---

(1) LORD RAYLEIGH, *General Theorems relating to Equilibrium and initial and steady Motions* (*Philosophical Magazine*, t. XLIX, p. 218; 1875. — *Scientific Papers*, vol. I, p. 232).